[Solusi] Project Trinity

Azzam Labib Hakim (IG: haxuv.world)

July 30, 2025

Daftar Isi

§1 Solusi

§1.1 KTOM Juli 2023 Simulasi Pra OSN

Tentukan semua tripel bilangan asli (a, b, c) sehingga ketiga bilangan berikut:

$$2^a + 2^b + 3(c+1), \quad 2^b + 2^c + 3(a+1), \quad 2^c + 2^a + 3(b+1)$$

semuanya adalah perpangkatan dua (dengan kata lain, dalam bentuk 2^k untuk suatu bilangan asli k). (KTOM Juli 2023 Simulasi Pra OSN)

Solusi. Dengan induksi mudah dibuktikan untuk sembarang bilangan asli $x \geq 3$ berlaku $3(x+1) < 2^{x+1}$ dan ubtuk sembarang bilangan asli $x \geq 7$ berlaku $3(x+1) < 2^{x-1}$. Perhatikan untuk karena ketiga bilangan tersebut bernilai lebih dari 2 dan genap, maka haruslah a, b, c ganjil agar $3(a+1), 3(b+1), 3(c+1)$ genap. WLOG $a \leq b \leq c$. Akan dibagi kasus berdasarkan hubungan b dan c.

- $b = c$.
  Untuk $c \geq 3$ berlaku

  $$2^{c+1} = 2^c + 2^c < 2^b + 2^c + 3(a+1) < 2^c + 2^c + 2^{c+1} = 2^{c+2}$$

  yang menunjukkan bahwa $2^b + 2^c + 3(a+1)$ bukan berbentuk 2 pangkat untuk $c \geq 3$. Namun, untuk $c = 1$ dari keadaan $a \leq b \leq c$ memaksa $a = b = c = 1$ yang membuat $2^b + 2^c + 3(a+1) = 10$ yang juga bukan berbentuk 2 pangkat.

- $b < c$.

  – Jika $a = b = 3$, maka $2^3 + 2^c + 3(3+1) = 2^c + 20 > 16$ merupakan bilangan 2 pangkat. Perhatikan $c > 3$ menyebabkan $2^c + 20 \equiv 4 \mod 16$. Padahal karena bilangan tersebut adalah 2 pangkat yang lebih dari 16 haruslah l, bilangan tersebut haruslah bernilai 0 modulo 16. Kontradiksi.

  – Jika $a = b > 3$ atau $b > a \geq 3$ maka $c \geq 7$ dan $a \leq c - 2 \implies a + 1 \leq c - 1$ (ingat mereka harus ganjil). Maka

  $$2^c < 2^b + 2^c + 3(a+1) < 2^b + 2^c + 2^{a+1} \leq 2^{c-1} + 2^c + 2^{c-1} = 2^c + 2^c = 2^{c+1}$$

  yang menunjukkan $2^b + 2^c + 3(a+1)$ bukan berbentuk 2 pangkat.

  – Jika $b < 3$, haruslah $1 = b \geq a$ atau $a = b = 1$ sehingga $2^c + 2^a + 3(b+1) = 2^c + 8$. Agar $2^c + 8$ berbentuk 2 pangkat, haruslah $2^c = 8 \implies c = 3$. Di cek, solusi $(1, 1, 3)$ memenuhi.

Dari sini didapat bahwa solusi yang memenuhi hanyalah $(1, 1, 3), (1, 3, 1), (3, 1, 1)$.

§1.2 Semifinal PSN IPB 2023

Diberikan $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Jika $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$, buktikan bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \le \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

(Semifinal PSN IPB 2023)

Solusi.

$$\begin{aligned}
\sum \frac{1}{\sqrt{a^3+b}} &\overset{AM-GM}{\le} \sum \frac{1}{\sqrt{2a\sqrt{ab}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum \frac{1}{\sqrt{a}} \frac{1}{\sqrt{\sqrt{ab}}} \\
&\overset{CS}{\le} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\sum \frac{1}{a}\right)\left(\sum \frac{1}{\sqrt{ab}}\right)} \\
&\overset{AM-GM}{\le} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\sum \frac{1}{a}\right)\left(\sum \frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\sum \frac{1}{a}\right)\left(\sum \frac{1}{a}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum \frac{1}{a}\right) \\
&= \frac{3}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

dengan kesamaan terjadi saat $a = b = c = 1$. Terbukti. □

§1.3 Random 2 AMO Exercise

Sebuah bilangan palindrom 6 digit dengan digit terakhir 4 merupakan hasil perkalian antara dua atau lebih bilangan asli berurutan. Hitunglah hasil penjumlahan digit-digit palindrom tersebut.

Solusi. Akan dibuktikan bahwa bilangan palindrom yang memenuhi soal hanyalah 474474.

Misalkan bilangan palindrom 6 digit tersebut adalah $x = \overline{4bccb4}$ dimana b, c adalah bilangan bulat non-negatif.

Misalkan $x = i(i+1)\ldots(i+k)$ (perkalian $k+1$ bilangan asli berurutan) untuk suatu $k, i \in \mathbb{N}$.

Lemma 1.1

x merupakan hasil perkalian 3 atau 4 bilangan asli berurutan.

Bukti Lemma. Akan ditunjukkan bahwa $3 \geq k \geq 2$.

Jika $k = 1$ maka $x = i(i+k) \equiv 0, 2, 6 \mod 10 \not\equiv 4 \mod 10$, $k = 1$ tidak memenuhi.

Jika $k \geq 4$ maka x adalah perkalian 5 atau lebih bilangan asli berurutan sehingga $120 = 5! \mid x \implies x \equiv 0 \mod 10 \not\equiv 4 \mod 10$, $k \geq 4$ tidak memenuhi.

Dari kedua fakta tersebut terbukti bahwa x merupakan hasil perkalian 3 atau 4 bilangan asli berurutan. $\square$

Perhatikan bahwa $11 \mid x$ karena $11 \mid 4 - b + c - c + b - 4$. Di sisi lain, karena x merupakan perkalian 3 atau 4 bilangan asli berurutan, maka kita juga punya $3 \mid x$.

Dikarenakan $x \equiv 4 \mod 10$ dengan $x = i(i+1)(i+2)(i+3)$ atau $x = i(i+1)(i+2)$ maka masing-masing dari $i, i+1, i+2, i+3$ tidak boleh memiliki digit terakhir 0 atau 5.

Sekarang akan dilihat berdasarkan kasus $k = 3, 4$:

- Jika $k = 3$ (yang berarti $x = i(i+1)(i+2)(i+3)$), karena $400000 < x < 500000$ maka haruslah $160000 = 20^4 < x = i(i+1)(i+2)(i+3) < 30^4 = 810000$ yang menunjukkan $i = 21, 26$.
  - Jika $i = 21$ maka $x = 255024$, tidak memenuhi syarat palindrom.
  - Jika $i = 26$, maka $11 \nmid x = 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29$, tidak memenuhi syarat $11 \mid x$.
- Sekarang jika $k = 2$ atau $x = i(i+1)(i+2)$. Perhatikan bahwa $343000 = 70^3 < x < 80^3 = 512000$. Karena $11 \mid x$ maka $i = 76, 77$. Coba satu-satu, ditemukan bahwa $i = 77$ memenuhi.

Oleh karena $i = 77$ dengan $k = 2$ maka $x = 77 \cdot 78 \cdot 79 = 474474$ dengan penjumalahan digit-digitnya adalah $4 + 7 + 4 + 4 + 7 + 4 = \boxed{30}$.

§1.4 All Russian Olympiad 1998 Problem 6 Grade 10

A binary operation $*$ on real numbers has the property that $(a * b) * c = a + b + c$ for all a, b, c. Prove that $a * b = a + b$. (All Russian Olympiad 1998 Problem 6 Grade 10)

Solusi. Perhatikan bahwa $a = (0 * 0) * a$. Berarti

$$(0 * 0) + b + c = ((0 * 0) * b) * c = b * c$$

sehingga

$$(0 * 0) + (0 * 0) + c = (0 * 0) * c = c \implies (0 * 0) + (0 * 0) = 0 \implies 0 * 0 = 0.$$

Oleh karena itu didapat

$$a * b = (0 * 0) + a + b = 0 + a + b = a + b$$

terbukti.

§1.5 USAJMO 2024 Problem 5

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that satisfy

$$f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

(USAJMO 2024 Problem 5, Proposed by Carl Schildkraut)

Solusi. Misalkan $P(x, y)$ asersi pada fungsi di soal.

$P(0, 0)$ menghasilkan

$$\begin{aligned} f(0) + 0 &= f(f(0)) + f(0) \\ f(f(0)) &= 0 \end{aligned}$$

$P(f(0), 0)$ mengakibatkan

$$\begin{aligned} f(f(0)^2) + 0 &= f(f(f(0))) + f(0) \\ f(f(0)^2) &= f(0) + f(0) \\ f(f(0)^2) &= 2f(0). \end{aligned}$$

$P(f(0), f(0)^2)$ menyebabkan

$$\begin{aligned} f(0) + 2f(0)^2 f(f(0)) &= f(f(f(0))) + f(f(0)^2) \\ f(0) + 2f(0)^2 \cdot 0 &= f(0) + 2f(0) \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

Maka $P(x, 0)$ menyebabkan

$$\begin{aligned} f(x^2) + 0 &= f(f(x)) + f(0) \\ f(x^2) &= f(f(x)) \end{aligned}$$

Selanjutnya $P(x, x^2)$ mengakibatkan

$$\begin{aligned} f(0) + 2x^2 f(x) &= f(f(x)) + f(x^2) \\ 0 + 2x^2 f(x) &= f(x^2) + f(x^2) \\ x^2 f(x) &= f(x^2) = f(f(x)) \end{aligned}$$

sehingga $f(f(0)) = f(0) = 0$. Di lain sisi $P(0, y)$ membuat

$$\begin{aligned} f(-y) + 2yf(0) &= f(f(0)) + f(y) \\ f(-y) &= f(y) \end{aligned}$$

yang menunjukkan f adalah fungsi genap. Sekarang perhatikan untuk $x, y > 0$, asersi $P(\sqrt{x}, y)$ dan $P(\sqrt{y}, x)$ mengakibatkan

$$\begin{aligned} f(x-y) + 2yf(\sqrt{x}) &= f(f(\sqrt{x})) + f(y) \\ f(x-y) + 2yf(\sqrt{x}) &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} f(y-x) + 2xf(\sqrt{y}) &= f(f(\sqrt{y})) + f(x) \\ f(y-x) + 2xf(\sqrt{y}) &= f(y) + f(x). \end{aligned}$$

Karena f fungsi genap, maka $f(x-y) = f(y-x)$ sehingga didapat

$$\begin{aligned} 2yf(\sqrt{x}) &= 2xf(\sqrt{y}) \\ f(\sqrt{x}) &= \frac{f(\sqrt{y})}{y} \cdot x. \end{aligned}$$

Jika y dibuat menjadi fix point dan x sembarang, maka $\dfrac{f(\sqrt{y})}{y} = c$ adalah suatu konstanta real sehingga $f(\sqrt{x}) = cx$ atau $f(x) = cx^2$. Oleh karena itu, substitusi kembali $P(x, y)$ pada soal akan menghasilkan

$$\begin{aligned} f(x^2 - y) + 2yf(x) &= f(f(x)) + f(y) \\ c(x^2 - y)^2 + 2ycx^2 &= f(cx^2) + cy^2 \\ cx^4 - 2cx^2y + cy^2 + 2cx^2y &= c \cdot c(cx^2)^2 + cy^2 \\ cx^4 &= c^3x^4 \\ cx^4(c-1)(c+1) &= 0 \\ c &= -1, 0, 1 \end{aligned}$$

Cek kembali ke soal, didapatkan fungsi f yang memenuhi adalah

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 \\ 0 \\ x^2 \end{cases}$$

untuk sembarang $x \in \mathbb{R}$

§1.6 Random 3

Terdapat tepat satu bilangan real a sehingga persamaan

$$4\lfloor ax \rfloor = x + \lfloor a \lfloor ax \rfloor \rfloor$$

berlaku untuk sembarang bilangan asli x. Carilah nilai $\lfloor a \rfloor$.

Solusi (1)**.** Perhatikan bahwa a tidak boleh berupa bilangan bulat. Jika a bulat, karena x bilangan asli, maka persamaan di soal akan menjadi

$$\begin{aligned} 4ax &= x + a \cdot ax \\ 4a &= 1 + a^2 \\ (a-2)^2 &= 3 \\ a &= 2 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

yang menunjukkan a bukan bilangan bulat, kontradiksi. Oleh karena itu, haruslah a bilangan real tidak bulat.

Sekarang, karena x bilangan asli dan $\lfloor ax \rfloor$ bilangan bulat maka

$$0 < x = 4\lfloor ax \rfloor - \lfloor a \lfloor ax \rfloor \rfloor = \lfloor 4\lfloor ax \rfloor - a\lfloor ax \rfloor \rfloor = \lfloor (4-a)\lfloor ax \rfloor \rfloor .$$

Oleh karena itu haruslah

$$0 < (4-a)\lfloor ax \rfloor$$

yang dipenuhi jika dan hanya jika $4 - a < 0$ dan $\lfloor ax \rfloor < 0$ atau $4 - a > 0$ dan $\lfloor ax \rfloor > 0$. Akan dibagi kasus berdasarkan batasan nilai a yang mungkin tersebut.

- Kasus I. $4 - a < 0$ dan $\lfloor ax \rfloor < 0$.
  Perhatikan bahwa $a > 4 > 0$ yang menyebabkan $ax > 0$ atau $\lfloor ax \rfloor \geq 0$. Ini kontradiksi dengan $\lfloor ax \rfloor < 0$. Kasus ini tidak memenuhi.

- Kasus II. $4 - a > 0$ dan $\lfloor ax \rfloor > 0$.
  Perhatikan bahwa $a < 4$. Karena $\lfloor ax \rfloor > 0 \implies ax > 0$ dan $x > 0$, maka $a > 0$. Oleh karena itu kasus ini masih memungkinkan dan menyebabkan $0 < a < 4$.

Perhatikan, jika $0 < a < 1$ maka saat dipilih $x = 1$, persamaan di soal akan menjadi

$$\begin{aligned} 4\lfloor a \rfloor &= 1 + \lfloor a \lfloor a \rfloor \rfloor \\ 4 \cdot 0 &= 1 + \lfloor a \cdot 0 \rfloor \\ 0 &= 1 + 0, \end{aligned}$$

kontradiksi. Oleh karena itu, $1 \leq a < 4$.

Sekarang misalkan $a = n + t$ dimana $n \in \{1, 2, 3\}$ dan $0 < t < 1$ (ingat, a bukan bulat). Dari properti fungsi lantai, didapat $0 \le \lfloor tnx \rfloor \le tnx < nx$, dan $0 \le \lfloor t \lfloor tx \rfloor \rfloor \le \lfloor tx \rfloor \le tx < x$. Oleh karena itu, dari soal akan diperoleh

$$\begin{aligned} 4 \lfloor nx + tx \rfloor &= x + \lfloor n \lfloor nx + tx \rfloor + t \lfloor nx + tx \rfloor \rfloor \\ 4(nx + \lfloor tx \rfloor) &= x + \lfloor n(nx + \lfloor tx \rfloor) + t(nx + \lfloor tx \rfloor) \rfloor \\ 4nx + 4 \lfloor tx \rfloor &= x + n^2 x + n \lfloor tx \rfloor + \lfloor tnx \rfloor + \lfloor t \lfloor tx \rfloor \rfloor \\ (4-n)(nx + \lfloor tx \rfloor) = x + \lfloor tnx \rfloor + \lfloor t \lfloor tx \rfloor \rfloor &< x + nx + x \\ (1-n)(n-2)x + (4-n) \lfloor tx \rfloor &< 0 \end{aligned}$$

dengan mengecek satu per satu untuk $n = 1, 2, 3$ pada ketaksamaan terakhir dan mempertimbangkan fakta $0 \le \lfloor tx \rfloor \le x$, didapat

- $n = 1$, maka $3 \lfloor tx \rfloor < 0$, kontradiksi.
- $n = 2$, maka $2 \lfloor tx \rfloor < 0$, kontradiksi.
- $n = 3$, maka $\lfloor tx \rfloor < 2x$, jelas memenuhi.

Oleh karena itu didapat $n = 3$ memenuhi sehingga $\lfloor a \rfloor = n = \boxed{3}$.

Solusi (2)**.** (Credit to Farabi Azzam) Colok $x = 1$ didapat

$$4 \lfloor a \rfloor = 1 + \lfloor a \lfloor a \rfloor \rfloor$$

Perhatikan jika $a \le 0$ maka $\lfloor a \rfloor < 0$ sehingga $a \lfloor a \rfloor > 0$ yang menyebabkan

$$4 \lfloor a \rfloor < 0 < 1 + \lfloor a \lfloor a \rfloor \rfloor .$$

Oleh karena itu haruslah $a > 0$.

Lemma 1.2

Untuk sembarang bilangan real positif a berlaku $\lfloor a \rfloor^2 \le \lfloor a \lfloor a \rfloor \rfloor$.

Bukti Lemma. Kita punya

$$\lfloor a \lfloor a \rfloor \rfloor = \lfloor (\lfloor a \rfloor + \{a\}) \lfloor a \rfloor \rfloor = \left\lfloor \lfloor a \rfloor^2 + \{a\} \lfloor a \rfloor \right\rfloor = \lfloor a \rfloor^2 + \lfloor \{a\} \lfloor a \rfloor \rfloor \ge \lfloor a \rfloor^2 \quad \square$$

Sekarang perhatikan bahwa kita punya $\lfloor a \rfloor^2 \le \lfloor a \lfloor a \rfloor \rfloor$. Sehingga untuk $\lfloor a \rfloor \ge 4$ kita punya

$$\lfloor a \rfloor^2 \ge 4 \lfloor a \rfloor = 1 + \lfloor a \lfloor a \rfloor \rfloor \ge 1 + \lfloor a \rfloor^2 \implies 0 \ge 1,$$

yang merupakan kontradiksi. Jika $\lfloor a \rfloor = 0$ maka

$$4 \times 0 = 1 + \lfloor a \times 0 \rfloor \implies 0 = 1,$$

kontradiksi. Jika $\lfloor a \rfloor = 1$ maka

$$4 \times 1 = 1 + \lfloor a \times 1 \rfloor \implies \lfloor a \rfloor = 3,$$

kontradiksi. Jika $\lfloor a \rfloor = 2$ maka

$$4 \times 2 = 1 + \lfloor a \times 2 \rfloor \implies \lfloor 2a \rfloor = 7,$$

padahal

$$7 = \lfloor 2a \rfloor \leq 2a < 2 \times 3 = 6,$$

kontradiksi. Jika $\lfloor a \rfloor = 3$ maka

$$4 \times 3 = 1 + \lfloor a \times 3 \rfloor \implies \lfloor a \rfloor = 3,$$

memenuhi. Berarti didapat $\boxed{\lfloor a \rfloor = 3}$.

§1.7 Random 4

Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

untuk semua bilangan real x. Tentukan nilai $f(0)$.

https://x.com/mathssolutionz/status/1795132058475397555

Solusi. Perhatikan bahwa $f(f(0)) = f(f(1)) = 1$. Oleh karena itu didapat

$$\begin{aligned} f(f(f(1))) &= f(1) \\ (f(1))^2 - f(1) + 1 &= f(1) \\ (f(1) - 1)^2 &= 0 \\ f(1) &= 1. \end{aligned}$$

Sehingga, akan kembali didapatkan $f(f(f(1))) = f(1) = 1$. Maka kita punya

$$\begin{aligned} f(f(f(0))) &= f(f(f(1))) \\ (f(0))^2 - f(0) + 1 &= 1 \\ f(0)(f(0) - 1) &= 0 \\ f(0) &= 0 \text{ atau } f(0) = 1. \end{aligned}$$

Jika $f(0) = 0$ maka $1 = f(f(0)) = f(0)$, kontradiksi. Oleh karena itu haruslah $\boxed{f(0) = 1}$.

§1.8 Random 5

Bilangan bulat positif x dan y memenuhi persamaan

$$x - y - \frac{x}{y} + \frac{x^5}{y^5} = 2024.$$

Tentukan nilai x terkecil yang memenuhi.

Solusi. Misalkan $x = da$, $y = db$ dimana $a, b, d \in \mathbb{Z}^+$, dengan $gcd(a, b) = 1$. Persamaan di soal akan menjadi

$$\begin{aligned} da - db - \frac{da}{db} + \frac{d^5a^5}{d^5b^5} &= 2024 \\ dab^5 - db^6 - ab^4 + a^5 &= 2024b^5 \\ a^5 &= b^4(-dab + db^2 + a + 2024b). \end{aligned}$$

Pada persamaan terakhir, $b^4 \mid a^5$. Namun, karena $gcd(a, b) = 1$, maka haruslah $b^4 = 1 \iff b = 1$. Oleh karena itu didapat

$$\begin{aligned} a^5 &= -da + d + a + 2024 \\ a^5 + da - a - d + 1 &= 2025 \\ a^5 + (d-1)(a-1) &= 2025. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa haruslah $1 \le a \le 4$. Karena jika $a \ge 5$, maka

$$2025 = a^5 + (d-1)(a-1) \ge 5^5 + 0 = 3125 > 2025,$$

kontradiksi. Sekarang, cek satu persatu nilai $a = 1, 2, 3, 4, 5$.

- Jika $a = 1$, maka $1^5 + (d-1)(1-1) = 2025$, jelas tidak memenuhi.
- Jika $a = 2$, didapat $d = 1994$. Ini berakibat $x = da = 3988$.
- Jika $a = 3$, didapat $d = 892$. Ini berakibat $x = da = 2676$.
- Jika $a = 4$, didapat d tidak bulat, berarti tidak memenuhi.

Dapat disimpulkan bahwa x terkecil yang memenuhi adalah $\boxed{2676}$.

§1.9 Random 6 Quick Inequality

Misalkan $a, b, c > 0$ dan memenuhi $a + b + c = 1$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{ab}{1+c} + \frac{bc}{1+a} + \frac{ca}{1+b} \leq \frac{1}{4}.$$

Solusi. Perhatikan dengan Cauchy-Schwarz kita punya

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{1+c} &= \sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{a+b+2c} \\
&= \sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{(c+a)+(b+c)} \\
&\leq \sum_{\text{cyc}} \frac{ab}{(1+1)^2}\left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{ab}{b+c} + \frac{ca}{b+c}\right) \\
&= \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}} \frac{ab+ca}{b+c} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}} \frac{a(b+c)}{b+c} \\
&= \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}} a \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

dengan kesamaan saat $a = b = c$. Terbukti.

§1.10 Fungsi Bulat 0

Jika $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ merupakan fungsi tak terbatas, dan $f(a) \mid c$ untuk konstanta c dan $a \in T \subseteq \mathbb{Z}$. Buktikan jika $|T| = \infty$ maka $c = 0$.

Solusi. Perhatikan karena $|T| = \infty$ dan f tak terbatas, maka untuk setiap bilangan real $M \geq 0$ ada bilangan real $a \in T$ sehingga $M < |f(a)|$. Oleh karena itu, jika diandaikan $c \neq 0$, dapat dipilih sebuah $M > |c|$ sehingga mengakibatkan $|c| < M < |f(a)| \leq |c|$ karena $f(a) \mid c \implies |f(a)| \mid |c| \implies |f(a)| \mid |c|$. Tentu saja hal tersebut merupakan sebuah kontradiksi. Dari sini dapat disimpulkan bahwa haruslah $c = 0$. Terbukti.

§1.11 Fungsi Bulat 1

Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan bilangan asli a, b berlaku:

$$f(a) + b \mid (f(b) + a)^2$$

Solusi. Definisikan $P(a, b)$ sebagai asersi ekspresi di soal. Misalkan $\mathbb{P}$ adalah himpunan seluruh bilangan prima yang bernilai lebih dari $f(1)$. Jelas bahwa $\mathbb{P}$ tak terbatas dan tak hingga. Misalkan $p \in \mathbb{P}$.
Maka, $P(p - f(1), 1)$ menghasilkan

$$\begin{aligned} f(p - f(1)) + 1 &\mid (f(1) + p - f(1))^2 \\ f(p - f(1)) + 1 &\mid p^2 \end{aligned}$$

sehingga dapat disimpulkan bahwa $f(p - f(1)) + 1 = p^\alpha$ dengan $\alpha \in \{1, 2\}$.
Asersi $P(a, p - f(1))$ menghasilkan

$$\begin{aligned} f(a) + p - f(1) &\mid (f(p - f(1)) + a)^2 \\ f(a) + p - f(1) &\mid (p^\alpha - 1 + a)^2 \\ x &\mid ((x - f(a) + f(1))^\alpha - 1 + a)^2 \\ x &\mid ((-f(a) + f(1))^\alpha - 1 + a)^2 \end{aligned}$$

dimana $x = f(a) + p - f(1)$.

> **Remark.** Untuk $x, y \in \mathbb{Z}$ dengan $x \neq 0$ dan $n \in \mathbb{N}$, berlaku $x \mid (x + y)^n \implies x \mid y^n$.

Karena ada tak hingga $p \in \mathbb{P}$ yang memenuhi dan $\mathbb{P}$ tak terbatas, maka $p \mapsto x$ juga tak terbatas. Di lain sisi, $((-f(a) + f(1))^\alpha - 1 + a)^2$ bernilai tetap (jika ditinjau dari parameter p). Oleh karena itu, dari hasil nomor 10, haruslah

$$\begin{aligned} ((-f(a) + f(1))^\alpha - 1 + a)^2 &= 0 \\ (-f(a) + f(1))^\alpha &= 1 - a. \end{aligned}$$

Karena $1 - a \leq 0$ untuk sembarang $a \in \mathbb{N}$ maka haruslah $\alpha \neq 2 \implies \alpha = 1$ sehingga didapat $\boxed{f(a) = a + f(1) - 1}$ untuk sembarang $a \in \mathbb{N}$.

§1.12 Fungsi Bulat 2

Tentukan semua $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang memenuhi

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$$

untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$

Solusi. Misalkan $P(m, n) : n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$. Perhatikan bahwa

$$n + f(m) \mid (f(n) + nf(m)) - n(n + f(m)) \implies n + f(m) \mid f(n) - n^2.$$

Bagi kasus berdasarkan *boundedness* fungsi f.

- **Kasus I. f tak terbatas**

  Berdasarkan hasil nomor 10, karena fungsi $m \mapsto n + f(m)$ tak terbatas dan $\mathbb{N}$ mempunyai tak hingga anggota. Oleh karena itu haruslah $f(n) - n^2 = 0 \implies f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{N}$.

- **Kasus II. f terbatas**

  Karena f terbatas dan domainnya, yaitu $\mathbb{N}$ adalah himpunan tak hingga, maka terdapat tak hingga $t \in \mathbb{N}$ sehingga $f(a) = c$ untuk suatu konstanta $c \in \mathbb{N}$.

  Misalkan himpunan $A \subseteq \mathbb{N}$ adalah himpunan tak hingga bilangan-bilangan a sehingga $f(a) = c$. Maka $P(a, a)$:

  $$\begin{aligned} a + f(a) &\mid f(a) + af(a) \\ a + c &\mid c + ac \\ a + c &\mid c + ac - c(a + c) \\ a + c &\mid c - c^2 \end{aligned}$$

  karena fungsi $a \mapsto a + c$ tak terbatas dan $a \in \mathbb{N}$ yang merupakan himpunan tak hingga, maka berdasarkan hasil nomor 10, $c - c^2 = 0$. Karena $c \in \mathbb{N}$ maka $c = 1$. Dari sini ditemukan $\forall a \in A$ berlaku $f(a) = 1$.

  Sekarang, perhatikan bahwa terdapat sebuah $t \in \mathbb{N}$ sehingga $\forall a \geq t$, $a \in A$ atau $f(a) = 1$.

  Definisikan himpunan berhingga $B = \mathbb{N} - A$ dengan $|B| < K$ untuk suatu bilangan asli K.

  Andaikan $|B| > 0$, maka ada $b \in B$ sehngga $f(b) > 1$. Oleh karena itu, untuk suatu bilangan asli $k > t$ sehingga $kf(b) > k > t \implies f(kf(b)) = 1$, asersi $P(kf(b), b)$ menghasilkan

  $$\begin{aligned} & kf(b) + f(b) \mid f(kf(b)) + kf(b)f(b) \\ \implies & (k + 1)f(b) \mid 1 + kf(b)^2 \\ \implies & (k + 1)f(b) \mid 1 + kf(b)^2 - (k + 1)f(b)f(b) \\ \implies & (k + 1)f(b) \mid 1 - f(b)^2 \end{aligned}$$

Karena fungsi $k \mapsto (k+1)f(b)$ adalah fungsi tak terbatas dan $1 - f(b)^2$ konstan, dari hasil nomor 10 didapat $1 - f(b)^2 = 0 \implies f(b) = 1$, kontradiksi.

Dapat disimpulkan bahwa haruslah $|B| = 0$. Hal ini menyebabkan $A = \mathbb{N} - B = \mathbb{N}$ yang berarti untuk seluruh $n \in \mathbb{N} = A$ berlaku $f(n) = 1$.

Dari kedua kasus tersebut dapat disimpulkan bahwa fungsi f yang memenuhi adalah $f(x) = x^2$ atau $f(x) = 1$ untuk semua $x \in \mathbb{N}$.

§1.13 Fungsi Bulat 3

Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang memenuhi:

$$f(a) + f(b) \mid a + b, \forall a, b \in \mathbb{N}$$

Solusi. Misal $P(a, b)$ adalah asersi ekspresi di soal. $P(n, n)$ untuk sembarang $n \in \mathbb{N}$ menghasilkan

$$f(n) + f(n) \mid n + n \implies f(n) \mid n.$$

Berarti $f(1) \mid 1$ menyebabkan $f(1) = 1$. $P(2, 1)$ menghasilkan

$$f(2) + f(1) \mid 2 + 1 \implies f(2) + 1 \mid 3 \implies f(2) = 2.$$

Akan dibuktikan bahwa $f(n) = n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dengan induksi di n. Perhatikan untuk kasus $n = 1$ dan $n = 2$ jelas benar. Andaikan untuk $n = k \geq 2$ benar bahwa $f(k) = k$.
Observasi untuk $n = k + 1$. Asersi $P(k + 1, k)$ menghasilkan

$$f(k + 1) + f(k) \mid k + 1 + k \implies f(k + 1) + k \mid 2k + 1.$$

Di lain pihak kita juga punya $f(k + 1) \mid k + 1$. Oleh karena itu untuk suatu $c, d \in \mathbb{N}$ dapat dimisalkan $2k + 1 = c(f(k + 1) + k)$ dan $k + 1 = df(k + 1)$ sehingga akan didapat

$$\begin{aligned} k + k + 1 &= cf(k + 1) + ck \\ k + df(k + 1) &= cf(k + 1) + ck \\ (d - c)f(k + 1) &= (c - 1)k. \end{aligned}$$

Karena $gcd(k + 1, k) = 1$ dan $f(k + 1) \mid k + 1$, maka $gcd(f(k + 1), k) = 1$ sehingga haruslah $f(k + 1) \mid c - 1$ atau setara dengan

$$\begin{aligned} f(k + 1) &\mid \frac{2k + 1}{f(k + 1) + k} - 1 \\ f(k + 1)(f(k + 1) + k) &\mid 2k + 1 - f(k + 1) - k \\ f(k + 1)^2 + kf(k + 1) &\mid k + 1 - f(k + 1). \end{aligned}$$

Andaikan $f(k + 1) \neq k + 1$ maka $1 \leq f(k + 1) < k + 1$ sehingga

$$f(k + 1)^2 \leq (k + 1)(1 - f(k + 1)) \leq (k + 1)0 = 0$$

yang merupakan sebuah kontradiksi. Oleh karena itu haruslah $f(k + 1) = k + 1$.
Dari induksi matematika, terbukti bahwa $f(n) = n$ untuk semua bilangan asli n.

Solusi (2)**.** (Credit to Farabi Azzam) Akan dibuktikan dengan induksi kuat bahwa $f(n) = n$ untuk semua bilangan asli n. Dari solusi sebelumnya didapat $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 3$, base case terbukti. Asumsikan untuk semua $k = 1, 2, \ldots, m$ dengan $m \geq 3$ berlaku $f(k) = k$. Berdasarkan Bertrand's Postulate, untuk $k > 1$ terdapat bilangan prima p sehingga $k + 2 < p < 2(k + 2)$. Oleh karena itu

$$f(k+1) + f(p-k-1) \mid (k+1) + (p-k-1)$$

karena $1 \leq p - k - 1 < k + 1$ maka berdasarkan asumsi induksi kuat, $f(p - k - 1) = p - k - 1$ sehingga didapat

$$f(k+1) + p - k - 1 \mid p.$$

Karena $f(k+1) + p - k - 1 > 1$ dan p prima, haruslah $f(k+1) + p - k - 1 = p$ yang menyebabkan $f(k+1) = k+1$. Dapat disimpulkan dengan induksi kuat bahwa $f(n) = n$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. $\square$

§1.14 Baltic Way 2012 Problem 3

(a) Show that the equation

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3,$$

where $\lfloor x \rfloor$ denotes the largest integer not larger than x, has exactly one real solution in each interval between consecutive positive integers.

(b) Show that none of the positive real solutions of this equation is rational.

(Baltic Way 2012 Problem 3)

Solusi. Akan ditunjukkan bahwa ada tepat satu $x \in [n, n+1)$ untuk sembarang $n \in \mathbb{N}$. Perhatikan jika x bulat, maka

$$x(x^2 + 1) = x^3$$
$$x = 0$$

yang kontradiktif dengan syarat $x \geq 1$. Oleh karena itu dapat dimisalkan $x = y + \epsilon$ dimana $y \in \mathbb{N}$ dan $\epsilon \in (0, 1)$. Perhatikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(\epsilon) = \epsilon^3 + 2y\epsilon^2 + y^2\epsilon - y$ untuk sembarang $y > 0$. Perhatikan bahwa fungsi ini bersifat monoton naik untuk $\epsilon \geq 0$ karena $f'(\epsilon) = 3\epsilon^2 + 4y\epsilon + y^2$.
Karena $f(0) = -y < 0$ dan $f(1) = 1 + 2y + y^2 - y = 1 + y + y^2 > 0$ maka berdasarkan Intermediate Value Theorem ada $\epsilon \in (0, 1)$ yang memenuhi $f(\epsilon) = 0$. Karena sebelumnya diketahui f monoton naik, maka ada tepat satu $\epsilon \in (0, 1)$ yang memenuhi $f(\epsilon) = 0$.
Dari sini persamaan di soal menjadi menjadi

$$y((y + \epsilon)^2 + 1) = (y + \epsilon)^3$$
$$y^3 + 2y^2\epsilon + y\epsilon^2 + y = y^3 + 3y^2\epsilon + 3y\epsilon^2 + \epsilon^3$$
$$\epsilon^3 + 2y\epsilon^2 + y^2\epsilon - y = 0$$
$$f(\epsilon) = 0$$

yang telah terbukti sebelumnya, mempunyai tepat satu solusi $\epsilon \in (0, 1)$. Bagian (a) terbukti.
Sekarang, andaikan ada solusi $x = y + \epsilon$ rasional yang memenuhi soal. Oleh karena itu dapat diasumsikan ada $\epsilon = \frac{a}{b}$ dimana $a, b \in \mathbb{N}$, $1 \leq a < b$, dan $gcd(a, b) = 1$ sehingga $f(\epsilon) = 0$. Dengan substitutsi nilai $\epsilon = \frac{a}{b}$ ke $f(\epsilon) = 0$ didapat

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 + 2y\left(\frac{a}{b}\right)^2 + y^2\left(\frac{a}{b}\right) - y = 0$$
$$a^3 + 2ya^2b + y^2ab^2 = yb^3$$

lihat sisi kanan persamaan tersebut, yb^3, terbagi oleh b. Oleh karena itu $b \mid a^3 + 2ya^2b + y^2ab^2 \implies b \mid a^3$. Kontradiksi dengan syarat $gcd(a, b) = 1$ dan $b > 1$.
Dapat disimpulkan bahwa semua solusi x dari persamaan tersebut irasional. Bagian (b) terbukti.

§1.15 OSK 2019 Problem 4

Misalkan $f(x) = 1 + \frac{90}{x}$. Nilai terbesar x yang memenuhi

$$f(f(\cdots f(x)\cdots)) = x,$$

(2019 kali aplikasi fungsi f) adalah ...

(OSK 2019 Nomor 4)

Solusi. Jika $f(x) = x$ maka

$$\begin{aligned} 9 + \frac{10}{x} &= x \\ 9x + 10 &= x^2 \\ (x-10)(x+9) &= 0 \end{aligned}$$

berarti x terbesar adalah $x = 10$. Sekarang, andaikan $x \neq 10$ dan $x > 0$. Jika $x > 10$ maka

$$f(x) = 9 + \frac{10}{x} < 9 + \frac{10}{10} = 10.$$

Jika $x < 10$ maka

$$f(x) = 9 + \frac{10}{x} > 9 + \frac{10}{10} = 10$$

Oleh karena itu, jika $x > 10$ maka $f^{2019}(x) < 10 < x$ dan jika $x < 10$ maka $f^{2019}(x) > 10 > x$. Kasus saat $x \neq 9$ dan $x < 0$ juga merupakan analogi cara tersebut. Terbukti bahwa x terbesar yang mungkin adalah $\boxed{10}$.

§1.16 Random 7 Functional Equation

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which satisfy

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

Solusi. Let $P(x, y)$ be the assertion of the expression on the problem.

$P(2,2)$ then $f(4) + f(2)^2 = 2f(2) + f(4) \implies f(2)^2 - 2f(2) = 0 \implies f(2) = 0 \vee f(2) = 2$.

$P(1,1)$ then $f(2) + f(1)^2 = 3f(1)$.

- If $f(2) = 0$ then $f(1)^2 - 3f(1) = 0 \implies f(1) = 0 \vee f(1) = 3$.
- If $f(2) = 2$ then $f(1)^2 - 3f(1) + 2 = 0 \implies f(1) = 1 \vee f(1) = 2$.

Hence there are several cases.

I. $f(2) = 0 \wedge f(1) = 0$

$P(x, 1)$ produce

$$\begin{aligned} f(x+1) + f(x)f(1) &= f(x) + f(1) + f(x) \\ f(x+1) + 0 &= f(x) + 0 + f(x) \\ f(x+1) &= 2f(x) \\ &\dots \\ f(x+n) &= 2^n f(x) \end{aligned}$$

hence we have $f(x+4) = 2^4 f(x) = 16f(x)$ and $f(4) = f(2+2) = 2^2 f(2) = 0$. Now $P(x, 2)$ produces

$$\begin{aligned} f(x+2) + f(x)f(2) &= f(x) + f(2) + f(2x) \\ f(x+2) + 0 &= f(x) + 0 + f(2x) \\ 4f(x) &= f(x) + f(2x) \\ f(2x) &= 3f(x) \end{aligned}$$

hence $f(4x) = 3f(2x) = 9f(x)$. Thus by those results, $P(x, 4)$ will produces

$$\begin{aligned} f(x+4) + f(x)f(4) &= f(x) + f(4) + f(4x) \\ 16f(x) + f(x) \cdot 0 &= f(x) + 0 + 9f(x) \\ 7f(x) &= 0 \\ f(x) &= 0. \end{aligned}$$

Therefore this case $f(x) = 0$ satisfy for all real x.

II. $f(2) = 0 \land f(1) = 3$

$P(x, 1)$ produces

$$f(x+1) + f(x)f(1) = f(x) + f(1) + f(x)$$
$$f(x+1) + 3f(x) = f(x) + 3 + f(x)$$
$$f(x+1) = 3 - f(x)$$

therefore

$$f(x+2) = 2 - f(x+1) = 3 - (3 - f(x)) = f(x).$$

Hence $P(\frac{1}{2}, 2)$ produces

$$f(\frac{1}{2} + 2) + f(\frac{1}{2})f(2) = f(\frac{1}{2}) + f(2) + f(\frac{1}{2} \times 2)$$
$$f(\frac{1}{2}) + 0 = f(\frac{1}{2}) + 0 + f(1)$$
$$f(1) = 0$$

which is a contradiction. No satisfying answers for this case.

III. $f(2) = 2 \land f(1) = 1$

$P(x, 1)$ produces

$$f(x+1) + f(x)f(1) = f(x) + f(1) + f(x)$$
$$f(x+1) + f(x) = f(x) + 1 + f(x)$$
$$f(x+1) = f(x) + 1$$

and it is easy to show that $f(x+n) = f(x) + n$ and $f(n) = f(1 + n - 1) = f(1) + n - 1 = n$ for any positive integers n.

Now $P(x, n)$ for arbitrary positive integer n will gives

$$f(x+n) + f(x)f(n) = f(x) + f(n) + f(xn)$$
$$f(x+n) + nf(x) = f(x) + n + f(nx)$$
$$f(x) + n + nf(x) = f(x) + n + f(nx)$$
$$f(nx) = nf(x)$$

Next, $P(2x, 2y)$ produces

$$f(2x+2y) + f(2x)f(2y) = f(2x) + f(2y) + f(2x2y)$$
$$2f(x+y) + 2f(x)2f(y) = 2f(x) + 2f(y) + 4f(xy)$$
$$f(x+y) + 2f(x)f(y) = f(x) + f(y) + 2f(xy)$$

subtract the last equation with the equation in the problem statement, we get for any real numbers x, y that $f(x)f(y) = f(xy)$ hence $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Those equations are indeed Cauchy's Functional Equation where $f(x) = x$. This case is finished.

IV. $f(2) = 2 \wedge f(1) = 2$

$P(x-1, 1)$ gives

$$\begin{aligned} f((x-1)+1) + f(x-1)f(1) &= f(x-1) + f(1) + f((x-1)1) \\ f(x) + 2f(x-1) &= f(x-1) + 2 + f(x-1) \\ f(x) &= 2. \end{aligned}$$

Thus $f(x) = 2$ for all real number x.

By considering all cases, we get the satisfying functions for all real number x : $f(x) = 0$, $f(x) = 2$, or $f(x) = x$.

§1.17 SMO 2024 Junior Round 1

English Let a, b and c be real numbers such that $a+b+c=8$ and $ab+bc+ca=0$. Find the maximum value of $3(a+b)$.

Bahasa Indonesia Misalkan a, b dan c adalah bilangan real yang memenuhi $a+b+c=8$ dan $ab+bc+ca=0$. Tentukan nilai maksimum dari $3(a+b)$.

(SMO 2024 Junior Round 1)

Solusi. Solution (English) Note that $a+b=8-c$. Hence

$$ab = -bc - ca$$
$$ab = -c(b+a)$$
$$ab = -c(8-c)$$

Using Vieta's Theorem, consider a quadratic equation with roots a and b:

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$
$$x^2 - (8-c) - c(8-c) = 0$$

Since a, b, c are real numbers, the discriminant of this quadratic equation must be nonnegative:

$$(-(8-c))^2 - 4(1)(-c(8-c)) \geq 0$$
$$(8-c)(8-c) + (8-c)(4c) \geq 0$$
$$(8-c)(8-c+4c) \geq 0$$
$$(c-8)(3c+8) \leq 0$$

which shows that $-\frac{8}{3} \leq c \leq 8$. From here we get $3(a+b) = 3(8-c) \leq 3(8-(-\frac{8}{3})) = 32$. $\therefore$ the maximum value of $3(a+b)$ is 32, which is achieved when $c = -\frac{8}{3}$.

Solusi (Bahasa Indonesia) Perhatikan bahwa $a+b=8-c$ sehingga

$$ab = -bc - ca$$
$$ab = -c(b+a)$$
$$ab = -c(8-c)$$

Dengan Teorema Vieta, dapat ditinjau persamaan kuadrat dengan akar-akar a dan b:

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0$$
$$x^2 - (8-c) - c(8-c) = 0$$

Karena a, b, c real, maka diskriminan persamaan kuadrat tersebut nonnegatif:

$$\begin{aligned}(-(8-c))^2 - 4(1)(-c(8-c)) &\geq 0 \\ (8-c)(8-c) + (8-c)(4c) &\geq 0 \\ (8-c)(8-c+4c) &\geq 0 \\ (c-8)(3c+8) &\leq 0\end{aligned}$$

yang menunjukkan $-\frac{8}{3} \leq c \leq 8$. Dari sini didapat $3(a+b) = 3(8-c) \leq 3(8-(-\frac{8}{3})) = 32$.

$\therefore$ Nilai maksimum dari $3(a+b)$ adalah 32 yang tercapai saat $c = -\frac{8}{3}$.

§1.18 Random 8 Inequality

Prove that for any positive real numbers a, b, c it applies

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}+\frac{(b+c)^2}{a^2+bc}+\frac{(c+a)^2}{b^2+ac}\geq 6$$

Solusi. Since the expression is symmetric, then we can assume WLOG $a \geq b \geq c$. Hence

$$a^2 \geq b^2 \geq c^2 \text{ and } \frac{1}{a^2+b^2+2c^2} \geq \frac{1}{a^2+2b^2+c^2} \geq \frac{1}{2a^2+b^2+c^2}.$$

Hence by Rearrangement Inequality

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2}{a^2+b^2+2c^2} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{c^2}{a^2+b^2+2c^2} \text{ and } \sum_{\text{cyc}} \frac{b^2}{a^2+b^2+2c^2} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{c^2}{a^2+b^2+2c^2}$$

thus adding those expressions

$$\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2c^2} \geq \sum_{\text{cyc}} \frac{2c^2}{a^2+b^2+2c^2} \qquad (Rearrangement)$$

hence we have

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{(a+b)^2}{c^2+ab}-2\right) &= \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+2ab+b^2-2c^2-2ab}{c^2+ab} \\
&\geq \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+b^2-2c^2}{c^2+\frac{1}{2}(a^2+b^2)} && (AM-GM) \\
&= 2\sum_{\text{cyc}} \left(\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+2c^2}-\frac{2c^2}{a^2+b^2+2c^2}\right) \\
&\geq 0 && (Rearrangement) \\
\implies \sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b)^2}{c^2+ab} &\geq \sum_{\text{cyc}} 2 = 6
\end{aligned}$$

where the equality happens when $a = b = c$. QED.

§1.19 Random 9 Inequality

a, b, c are non-negative real numbers for which holds that $a+b+c=3$. Prove the following inequality:

$$4 \geq a^2b + b^2c + c^2a + abc$$

Solusi. Misalkan (x, y, z) adalah permutasi dari (a, b, c) dengan $x \geq y \geq z$. Karena $xy \geq zx \geq yz$, dengan Rearrangement Inequality / Renata kita punya

$$xy \cdot x + zx \cdot y + yz \cdot z \geq ab \cdot a + bc \cdot b + ca \cdot c = a^2b + b^2c + c^2a.$$

Lalu dengan AM-GM kita punya

$$\begin{aligned} xy \cdot x + zx \cdot y + yz \cdot z + xyz &= y(x+z)^2 \\ &= \frac{1}{2}(2y)(x+z)(x+z) \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\frac{(2y)+(x+z)+(x+z)}{3}\right)^3 \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{6}{3}\right)^3 \\ &= 4. \end{aligned}$$

Oleh karena itu kita punya

$$4 \geq xy \cdot x + zx \cdot y + yz \cdot z + xyz \geq a^2b + b^2c + c^2a + abc$$

dengan kesamaan saat $a = b = c = 1$.

§1.20 OSP 2019 Esai Problem 2 - System of Equalities

Cari semua bilangan real k sehingga sistem persamaan

$$\begin{cases} a^2 + ab = kb^2 \\ b^2 + bc = kc^2 \\ c^2 + ca = ka^2 \end{cases}$$

memiliki solusi bilangan real positif a, b, c.

Solusi (1)**.** Jelas bahwa k harus positif karena $ka^2 = c^2 + ac > 0$. Jumlahkan semua persamaan akan didapat

$$\sum_{\text{cyc}} a^2 + \sum_{\text{cyc}} ab = k \sum_{\text{cyc}} a^2$$

Padahal dengan ketaksamaan AM-GM kita punya

$$\begin{aligned} 2\sum_{\text{cyc}} a^2 &= \sum_{\text{cyc}} a^2 + \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+b^2}{2} \\ &\geq \sum_{\text{cyc}} a^2 + \sum_{\text{cyc}} ab \\ &= k\sum_{\text{cyc}} a^2 \\ \implies 2 &\geq k. \end{aligned}$$

Di lain pihak, kalikan semua persamaan dan padukan dengan ketaksamaan AM-GM kita punya

$$\begin{aligned} k^3(abc)^2 &= \prod_{\text{cyc}} kb^2 \\ &= \prod_{\text{cyc}} (a^2 + ab) \\ &= \prod_{\text{cyc}} a(a+b) \\ &= abc \prod_{\text{cyc}} (a+b) \\ &\geq abc \prod_{\text{cyc}} 2\sqrt{ab} \\ &= abc \cdot 8 \cdot \sqrt{a^2b^2c^2} \\ \implies k^3 &\geq 8 \\ \implies k &\geq 2. \end{aligned}$$

Karena $2 \geq k \geq 2 \implies k = 2$. Cek bahwa $k = 2$ mempunyai solusi $(a, b, c) = (1, 1, 1)$. Terbukti $k = 2$ memenuhi.

Solusi (2)**.** Jelas bahwa k harus positif karena $ka^2 = c^2 + ac > 0$. Perhatikan bahwa sistem persamaan tersebut siklis. Oleh karena itu WLOG dapat diasumsikan $a = \max\{a, b, c\}$. Berarti

$$kb^2 = a^2 + ab \geq b^2 + cb = kc^2 \implies b \geq c.$$

Berarti sekarang kita punya $a \geq b \geq c$. Dari fakta tersebut akan didapat

$$c^2 + ca = ka^2 \geq kb^2 = a^2 + ab \geq c^2 + ac,$$

yang menunjukkan terjadi kesamaan sehingga haruslah $ka^2 = kb^2 \implies a = b$. Berarti

$$a^2 + a \cdot a = ka^2 \implies k = 2.$$

Cek bahwa $k = 2$ mempunyai solusi $(a, b, c) = (1, 1, 1)$. Terbukti $k = 2$ memenuhi.

§1.21 Random 10 Functional Equation

Find all functions f where

$$(x+y)(f(x)-f(y)) = f(x^2)-f(y^2)$$

for all real numbers x, y.

Solusi. Define function $g(x) = f(x) - f(0)$ for all $x \in \mathbb{R}$. Thus $g(0) = f(0) - f(0) = 0$. Then

$$\begin{aligned}(x+y)(f(x)-f(y)) &= f(x^2)-f(y^2)\\ (x+y)[(f(x)-f(0))-(f(y)-f(0))] &= (f(x^2)-f(0))-(f(y^2)-f(0))\\ (x+y)(g(x)-g(y)) &= g(x^2)-g(y^2). \qquad (1)\end{aligned}$$

Let $P(x,y)$ be the assertion of (1). Hence $P(x,0)$ will produces

$$\begin{aligned}x(g(x)-g(0)) &= g(x^2)-g(0)\\ xg(x) &= g(x^2). \qquad (2)\end{aligned}$$

Thus by (2) we have

$$\begin{aligned}(-x)g(-x) &= g(x^2) = xg(x)\\ x(g(x)+g(-x)) &= 0\\ g(x) &= -g(-x). \qquad (3)\end{aligned}$$

Now, $P(x+1,-1)$ and the help of (2) and (3) will produces

$$\begin{aligned}(x+1-1)[g(x+1)-g(-1)] &= g((x+1)^2)-g((-1)^2)\\ x[g(x+1)+g(1)] &= (x+1)g(x+1)-g(1)\\ xg(x+1)+xg(1) &= xg(x+1)+g(x+1)-g(1)\\ g(x+1) &= (x+1)g(1)\\ g(x) &= xg(1)\end{aligned}$$

Thus, if $a = g(1)$ and $b = f(0)$ then

$$f(x) = g(x)+f(0) = xf(1)+f(0) = ax+b$$

for $a, b \in \mathbb{R}$. Check the function, it satisfy.

§1.22 Random 11 Combinatorics Set Counting

Diketahui A, B, C adalah himpunan bagian dari $\{1, 2, 3, 4\}$. Tentukan banyaknya tripel himpunan (A, B, C) yang memenuhi

$$A \subseteq B \quad \text{dan} \quad A \cap C \neq \emptyset$$

Solusi. Akan dihitung banyaknya tripel himpunan (A, B, C) dengan mengobservasi setiap $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ pada keanggotaannya sebagai elemen A, B, C.
Akan diobservasi (A, B, C) yang memenuhi $A \subseteq B$ dan C (tanpa batasan lain). Perhatikan bahwa terdapat tiga kondisi untuk masing-masing x:

- $x \notin B$ (sehingga $x \notin A$ juga),
- $x \in B$ tetapi $x \notin A$, dan
- $x \in A$ (sehingga $x \in B$ juga).

Karena ada empat kemungkinan x, maka banyaknya kemungkinan untuk kasus ini adalah 3^4. Selanjutnya, terkait keanggotaannya terhadap C, ada dua kasus:

- $x \in C$, dan
- $x \notin C$.

Sehingga didapat ada 2^4 total kemungkinan untuk keempat x yang mungkin. Oleh karena itu, dengan aturan perkalian didapatkan seluruh kemungkinan keanggotaan x terhadap $A \subseteq B$ dan C adalah $3^4 \times 2^4 = 1296$.
Selanjutnya akan diobservasi banyaknya (A, B, C) yang memenuhi $A \subseteq B$ dan $A \cap C = \emptyset$. Perhatikan bahwa terdapat lima kondisi untuk masing-masing x:

- $x \notin A \cup B \cup C$;
- $x \notin C$, $x \in B$, dan $x \notin A$;
- $x \notin C$, $x \in A$ (sehingga $x \in B$ juga);
- $x \in C$, $x \notin B$ (sehingga $x \notin A$ juga);
- $x \in C$, $x \in B$, dan $x \notin A$.

Oleh karena itu terdapat $5^4 = 625$ total kemungkinan untuk kasus ini.
Dari prinsip inklusi eksklusi, banyaknya tripel (A, B, C) sehingga $A \subseteq B$ dan $A \cap C = \emptyset$ adalah $1296 - 625 = \boxed{671}$.

§1.23 Canadian MO 2013 Polynomial

Tentukan semua polinomial $P(x)$ dengan koefisien real sedemikian sehingga

$$(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$$

adalah polinomial konstan.

Solusi. Misalkan $T(x)=(x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)$. Dari soal diketahui bahwa $T(x)=c$ untuk suatu konstanta real c.

Kasus 1: $P(x)$ adalah polinomial konstan

Jika $P(x)=k$ untuk suatu konstanta k, maka:

$$T(x)=(x+1)k-(x-1)k=kx+k-kx+k=2k$$

Karena $2k$ adalah sebuah konstanta, maka semua polinomial konstan $P(x)=k$ memenuhi syarat.

Kasus 2: $P(x)$ bukan polinomial konstan

Karena $T(x)=c$ adalah konstan, nilainya sama untuk semua x. Substitusi beberapa nilai x berikut:

- Untuk $x=1$: $T(1)=(1+1)P(1-1)-(1-1)P(1)=2P(0)$.
- Untuk $x=-1$: $T(-1)=(-1+1)P(-1-1)-(-1-1)P(-1)=2P(-1)$.

Karena $T(1)=T(-1)=c$, maka kita dapatkan $2P(0)=2P(-1)$, yang berarti $P(0)=P(-1)=k$ untuk suatu konstanta k.

Sekarang, konstruksi polinomial baru, $Q(x)=P(x)-k$. Perhatikan bahwa $Q(0)=P(0)-k=0$ dan $Q(-1)=P(-1)-k=0$. Karena $Q(x)$ memiliki akar di $x=0$ dan $x=-1$, maka $Q(x)$ dapat ditulis dalam bentuk:

$$Q(x)=A(x)\cdot x(x+1)$$

untuk suatu polinomial $A(x)$. Dengan demikian, kita dapat menyatakan $P(x)$ sebagai:

$$P(x)=Q(x)+k=A(x)x(x+1)+k$$

Substitusikan kembali bentuk $P(x)$ ini ke dalam persamaan awal untuk $T(x)$:

$$\begin{aligned}
c &= (x+1)P(x-1)-(x-1)P(x)\\
c &= (x+1)\left[A(x-1)(x-1)x+k\right]-(x-1)\left[A(x)x(x+1)+k\right]\\
c &= x(x-1)(x+1)A(x-1)+k(x+1)-x(x-1)(x+1)A(x)-k(x-1)\\
c &= x(x^2-1)\left[A(x-1)-A(x)\right]+kx+k-kx+k\\
c &= (x^3-x)\left[A(x-1)-A(x)\right]+2k
\end{aligned}$$

Agar $T(x) = c$ bisa menjadi konstan, maka suku yang mengandung x haruslah nol atau konstan yang sesuai.

$$(x^3 - x)\,[A(x-1) - A(x)] = c - 2k$$

dengan sisi kanan, $c - 2k$, adalah sebuah konstanta. Misalkan d adalah derajat dari $A(x)$.

Lemma (Well Known Lemma)

Untuk sebarang polinomial $P(x)$ berderajat $k \geq 1$ dan konstanta a, polinomial $P(x+a) - P(x)$ adalah polinomial berderajat $k - 1$.

Jika $d \geq 1$, maka berdasarkan lemma well known tersebut tentant selisih polinomial, derajat dari $A(x-1) - A(x)$ adalah $d - 1$. Dengan demikian, derajat dari sisi kiri adalah $3 + (d-1) = d + 2$. Karena $d \geq 1$, maka $d + 2 \geq 3$. Ini berarti sisi kiri adalah polinomial non-konstan, yang menghasilkan kontradiksi. Oleh karena itu, satu-satunya kemungkinan adalah $d < 1$, yang berarti $d = 0$ berarti $A(x) = b$ untuk suatu konstanta real b.
Dengan demikian, bentuk $P(x)$ adalah:

$$P(x) = b \cdot x(x+1) + k = bx^2 + bx + k$$

Cek ke soal, polinomial tersebut memenuhi.
Dapat disimpulkan bahwa seluruh polinomial

$$P(x) = bx^2 + bx + k$$

memenuhi dimana b dan k adalah konstanta real sembarang. (Saat $b = 0$, $P(x)$ adalah polinomial konstan).

§1.24 HMMT 2017 Polynomial

Misalkan $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinomial tak konstan dengan koefisien-koefisien real. Buktikan bahwa jika

$$\lfloor P(y) \rfloor = \lfloor Q(y) \rfloor$$

untuk semua bilangan real y, maka $P(x) = Q(x)$ untuk semua bilangan real x.

Solusi. Akan ditunjukkan bahwa $P(x) = Q(x)$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

Claim — $|P(x) - Q(x)| < 1$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$.

Bukti. Kita akan buktikan dengan kontradiksi. Andaikan, WLOG, terdapat suatu y_0 sehingga $P(y_0) \geq Q(y_0) + 1$. Maka, dengan mengambil fungsi floor di kedua sisi, kita peroleh:

$$\lfloor P(y_0) \rfloor \geq \lfloor Q(y_0) + 1 = \lfloor Q(y_0) \rfloor + 1 > \lfloor Q(y_0) \rfloor$$

Hal ini kontradiksi dengan hipotesis awal bahwa $\lfloor P(y) \rfloor = \lfloor Q(y) \rfloor$ untuk semua bilangan real y. Dengan argumen yang sama untuk kasus $Q(y_0) \geq P(y_0) + 1$, kita dapat menyimpulkan bahwa tidak mungkin $|P(x) - Q(x)| \geq 1$. Jadi, haruslah $|P(x) - Q(x)| < 1$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$. $\square$

Misalkan $R(x) = P(x) - Q(x)$. Karena $P(x)$ dan $Q(x)$ adalah polinomial, maka $R(x)$ juga merupakan polinomial. Dari klaim sebelumnya, kita tahu bahwa $|R(x)| < 1$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa polinomial yang terbatas (bounded) di seluruh domainnya haruslah merupakan polinomial konstan. Jadi,

$$P(x) - Q(x) = C$$

untuk suatu konstanta real C, dengan $|C| < 1$.

Sekarang akan dibuktikan bahwa $C = 0$ dengan kontradiksi. Andaikan $C \neq 0$. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan $C > 0$.

Karena $Q(x)$ adalah polinomial tak konstan, rangenya adalah $(-\infty, \infty)$. Karena $Q(x)$ kontinu, berdasarkan Teorema Nilai Antara, kita dapat menemukan suatu $x_0 \in \mathbb{R}$ sehingga $Q(x_0) = k - C$ untuk suatu bilangan bulat k.

Sekarang kita periksa nilai floor dari $P(x_0)$ dan $Q(x_0)$:

$$\lfloor P(x_0) \rfloor = \lfloor Q(x_0) + C \rfloor = \lfloor (k - C) + C \rfloor = \lfloor k \rfloor = k$$

$$\lfloor Q(x_0) \rfloor = \lfloor k - C \rfloor$$

Karena kita mengasumsikan $C > 0$, maka $k - C < k$. Akibatnya, $\lfloor k - C \rfloor \leq k - 1 < k$. Ini menunjukkan bahwa $\lfloor Q(x_0) \rfloor < \lfloor P(x_0) \rfloor$, yang sekali lagi bertentangan dengan hipotesis awal, didapat haruslah $C = 0$.

Karena $P(x) - Q(x) = C$ dan $C = 0$, maka $P(x) - Q(x) = 0$, yang berarti $P(x) = Q(x)$ untuk semua bilangan real x. Terbukti.