

[Soal] Project Trinity

AZZAM (IG: HAXUV.WORLD)

March 14, 2025

Daftar Isi

§1 Soal

1. Tentukan semua tripel bilangan asli (a, b, c) sehingga ketiga bilangan berikut:

$$2^a + 2^b + 3(c+1), \quad 2^b + 2^c + 3(a+1), \quad 2^c + 2^a + 3(b+1)$$

semuanya adalah perpangkatan dua (dengan kata lain, dalam bentuk 2^k untuk suatu bilangan asli k).

2. Diberikan $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Jika $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$, buktikan bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

(Semifinal PSN IPB 2023)

3. Sebuah bilangan palindrom 6 digit dengan digit terakhir 4 merupakan hasil perkalian antara dua atau lebih bilangan asli berurutan. Hitunglah hasil penjumlahan digit-digit palindrom tersebut.
4. A binary operation $*$ on real numbers has the property that $(a * b) * c = a + b + c$ for all a, b, c . Prove that $a * b = a + b$. (All Russian Olympiad 1998 Problem 6 Grade 10)
5. Find all functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ that satisfy

$$f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

(USAJMO 2024 Problem 5, Proposed by Carl Schildkraut)

6. Terdapat tepat satu bilangan real a sehingga persamaan

$$4 \lfloor ax \rfloor = x + \lfloor a \lfloor ax \rfloor \rfloor$$

berlaku untuk sembarang bilangan asli x . Carilah nilai $\lfloor a \rfloor$.

7. Fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ memenuhi

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

untuk semua bilangan real x . Tentukan nilai $f(0)$.

<https://x.com/mathssolutionz/status/1795132058475397555>

8. Bilangan bulat positif x dan y memenuhi persamaan

$$x - y - \frac{x}{y} + \frac{x^5}{y^5} = 2024.$$

Tentukan nilai x terkecil yang memenuhi.

9. Misalkan $a, b, c > 0$ dan memenuhi $a + b + c = 1$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{ab}{1+c} + \frac{bc}{1+a} + \frac{ca}{1+b} \leq \frac{1}{4}.$$

10. Jika $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ merupakan fungsi tak terbatas, dan $f(a) \mid c$ untuk konstanta c dan $a \in T \subseteq \mathbb{Z}$.
Buktikan jika $|T| = \infty$ maka $c = 0$.

11. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan bilangan asli a, b berlaku:

$$f(a) + b \mid (f(b) + a)^2$$

12. Tentukan semua $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ yang memenuhi

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$$

untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$

13. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ yang memenuhi:

$$f(a) + f(b) \mid a + b, \forall a, b \in \mathbb{N}$$

14. (a) Show that the equation

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3,$$

where $\lfloor x \rfloor$ denotes the largest integer not larger than x , has exactly one real solution in each interval between consecutive positive integers.

(b) Show that none of the positive real solutions of this equation is rational.

(Baltic Way 2012 Problem 3)

15. Misalkan $f(x) = 1 + \frac{90}{x}$. Nilai terbesar x yang memenuhi

$$f(f(\cdots f(x) \cdots)) = x,$$

(2019 kali aplikasi fungsi f) adalah ...

(OSK 2019 Nomor 4)

16. Find all functions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ which satisfy

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

17. **English** Let a, b and c be real numbers such that $a + b + c = 8$ and $ab + bc + ca = 0$. Find the maximum value of $3(a + b)$.

Bahasa Indonesia Misalkan a, b dan c adalah bilangan real yang memenuhi $a + b + c = 8$ dan $ab + bc + ca = 0$. Tentukan nilai maksimum dari $3(a + b)$.

(SMO 2024 Junior Round 1)

18. Prove that for any positive real numbers a, b, c it applies

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab} + \frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ac} \geq 6$$

19. a, b, c are non-negative real numbers for which holds that $a + b + c = 3$. Prove the following inequality:

$$4 \geq a^2b + b^2c + c^2a + abc$$

20. Cari semua bilangan real k sehingga sistem persamaan

$$\begin{cases} a^2 + ab = kb^2 \\ b^2 + bc = kc^2 \\ c^2 + ca = ka^2 \end{cases}$$

memiliki solusi bilangan real positif a, b, c .

21. Find all functions f where

$$(x+y)(f(x) - f(y)) = f(x^2) - f(y^2)$$

for all real numbers x, y .

22. Diketahui A, B, C adalah himpunan bagian dari $\{1, 2, 3, 4\}$. Tentukan banyaknya tripel himpunan (A, B, C) yang memenuhi

$$A \subseteq B \quad \text{dan} \quad A \cap C \neq \emptyset$$