[Soal] Project Trinity

Azzam (IG: haxuv.world)

May 29, 2025

Daftar Isi

§1 Soal

§1.1 KTOM Juli 2023 Simulasi Pra OSN

Tentukan semua tripel bilangan asli (a, b, c) sehingga ketiga bilangan berikut:

$$2^a + 2^b + 3(c+1), \quad 2^b + 2^c + 3(a+1), \quad 2^c + 2^a + 3(b+1)$$

semuanya adalah perpangkatan dua (dengan kata lain, dalam bentuk 2^k untuk suatu bilangan asli k).
(KTOM Juli 2023 Simulasi Pra OSN)

§1.2 Semifinal PSN IPB 2023

Diberikan $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Jika $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$, buktikan bahwa

$$\frac{1}{\sqrt{a^3+b}} + \frac{1}{\sqrt{b^3+c}} + \frac{1}{\sqrt{c^3+a}} \leq \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

(Semifinal PSN IPB 2023)

§1.3 Random 2 AMO Exercise

Sebuah bilangan palindrom 6 digit dengan digit terakhir 4 merupakan hasil perkalian antara dua atau lebih bilangan asli berurutan. Hitunglah hasil penjumlahan digit-digit palindrom tersebut.

§1.4 All Russian Olympiad 1998 Problem 6 Grade 10

A binary operation $*$ on real numbers has the property that $(a * b) * c = a + b + c$ for all a, b, c. Prove that $a * b = a + b$. (All Russian Olympiad 1998 Problem 6 Grade 10)

§1.5 USAJMO 2024 Problem 5

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that satisfy

$$f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.
(USAJMO 2024 Problem 5, Proposed by Carl Schildkraut)

§1.6 Random 3

Terdapat tepat satu bilangan real a sehingga persamaan

$$4\lfloor ax \rfloor = x + \lfloor a \lfloor ax \rfloor \rfloor$$

berlaku untuk sembarang bilangan asli x. Carilah nilai $\lfloor a \rfloor$.

§1.7 Random 4

Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi

$$f(f(x)) = x^2 - x + 1$$

untuk semua bilangan real x. Tentukan nilai $f(0)$.

https://x.com/mathssolutionz/status/1795132058475397555

§1.8 Random 5

Bilangan bulat positif x dan y memenuhi persamaan

$$x - y - \frac{x}{y} + \frac{x^5}{y^5} = 2024.$$

Tentukan nilai x terkecil yang memenuhi.

§1.9 Random 6 Quick Inequality

Misalkan $a, b, c > 0$ dan memenuhi $a + b + c = 1$. Tunjukkan bahwa

$$\frac{ab}{1+c} + \frac{bc}{1+a} + \frac{ca}{1+b} \leq \frac{1}{4}.$$

§1.10 Fungsi Bulat 0

Jika $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ merupakan fungsi tak terbatas, dan $f(a) \mid c$ untuk konstanta c dan $a \in T \subseteq \mathbb{Z}$. Buktikan jika $|T| = \infty$ maka $c = 0$.

§1.11 Fungsi Bulat 1

Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan bilangan asli a, b berlaku:

$$f(a) + b \mid (f(b) + a)^2$$

§1.12 Fungsi Bulat 2

Tentukan semua $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang memenuhi

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$$

untuk semua $m, n \in \mathbb{N}$

§1.13 Fungsi Bulat 3

Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ yang memenuhi:

$$f(a) + f(b) \mid a + b, \forall a, b \in \mathbb{N}$$

§1.14 Baltic Way 2012 Problem 3

(a) Show that the equation

$$\lfloor x \rfloor (x^2 + 1) = x^3,$$

where $\lfloor x \rfloor$ denotes the largest integer not larger than x, has exactly one real solution in each interval between consecutive positive integers.

(b) Show that none of the positive real solutions of this equation is rational.

(Baltic Way 2012 Problem 3)

§1.15 OSK 2019 Problem 4

Misalkan $f(x) = 1 + \frac{90}{x}$. Nilai terbesar x yang memenuhi

$$f(f(\cdots f(x) \cdots)) = x,$$

(2019 kali aplikasi fungsi f) adalah ...

(OSK 2019 Nomor 4)

§1.16 Random 7 Functional Equation

Find all functions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ which satisfy

$$f(x + y) + f(x)f(y) = f(x) + f(y) + f(xy)$$

for all $x, y \in \mathbb{R}$.

§1.17 SMO 2024 Junior Round 1

English Let a, b and c be real numbers such that $a + b + c = 8$ and $ab + bc + ca = 0$. Find the maximum value of $3(a + b)$.

Bahasa Indonesia Misalkan a, b dan c adalah bilangan real yang memenuhi $a + b + c = 8$ dan $ab + bc + ca = 0$. Tentukan nilai maksimum dari $3(a + b)$.

(SMO 2024 Junior Round 1)

§1.18 Random 8 Inequality

Prove that for any positive real numbers a, b, c it applies

$$\frac{(a+b)^2}{c^2+ab} + \frac{(b+c)^2}{a^2+bc} + \frac{(c+a)^2}{b^2+ac} \geq 6$$

§1.19 Random 9 Inequality

a, b, c are non-negative real numbers for which holds that $a+b+c=3$. Prove the following inequality:

$$4 \geq a^2b + b^2c + c^2a + abc$$

§1.20 OSP 2019 Esai Problem 2 - System of Equalities

Cari semua bilangan real k sehingga sistem persamaan

$$\begin{cases} a^2 + ab = kb^2 \\ b^2 + bc = kc^2 \\ c^2 + ca = ka^2 \end{cases}$$

memiliki solusi bilangan real positif a, b, c.

§1.21 Random 10 Functional Equation

Find all functions f where

$$(x+y)(f(x) - f(y)) = f(x^2) - f(y^2)$$

for all real numbers x, y.

§1.22 Random 11 Combinatorics Set Counting

Diketahui A, B, C adalah himpunan bagian dari $\{1, 2, 3, 4\}$. Tentukan banyaknya tripel himpunan (A, B, C) yang memenuhi

$$A \subseteq B \quad \text{dan} \quad A \cap C \neq \emptyset$$