

Directed Angle

CURATED BY AZZAM (IG: HAXUV.WORLD)

July 8, 2024

Untuk pdf materi, silakan merujuk pada Handoutnya Evan Chen (dah paling bagus itu) di

<https://web.evanchen.cc/handouts/Directed-Angles/Directed-Angles.pdf>

§1 Contoh Soal

Dua lingkaran berpotongan di A dan B . Suatu garis melalui B memotong lingkaran pertama di C dan lingkaran kedua di D ($B \neq C, B \neq D$). Garis singgung lingkaran pertama yang melewati C dan garis singgung lingkaran kedua melewati D , keduanya berpotongan di M . Melalui perpotongan AM dan CD , suatu garis sejajar CM memotong AC di K . Buktikan bahwa BK menyinggung lingkaran kedua.

Solusi. Notasikan \angle sebagai sudut berarah atau *directed angle*. (gambar sendiri yah :))

Lemma (Buktikan sendiri :)). (Alternate segment theorem) Misalkan garis DB menyinggung lingkaran luar ABC di B . Maka $\angle DBA = \angle BCA$

Misalkan (ABC) dan (ABD) berturut-turut adalah lingkaran luar $\triangle ABC$ dan $\triangle ABD$ berturut-turut. Perhatikan, karena MC menyinggung (ABC) di C , maka $\angle MCD = \angle CAB$. Karena MD menyinggung (ABD) di D , maka $\angle CDM = \angle BAD$.

Sekarang perhatikan bahwa

$$\angle DMC = -\angle CDM - \angle MCD = -\angle BAD - \angle CAB = -\angle CAD = \angle DAC$$

yang berarti $ADMC$ siklis. Selanjutnya, perhatikan karena MC menyinggung (ABC) di C dan karena $KL \parallel CM$ maka

$$\angle KAB = \angle CAB = \angle MCD = \angle KLC = \angle KLB$$

yang mana menyebabkan $AKBL$ siklis. Dari fakta-fakta tersebut kita punya

$$\begin{aligned}\angle ABK &= \angle ALK && \text{(Karena } AKBL \text{ siklis)} \\ &= \angle AMC && \text{(Karena } KL \parallel CM) \\ &= \angle ADC && \text{(Karena } ADMC \text{ siklis)} \\ &= \angle ADB,\end{aligned}$$

yang menunjukkan bahwa KB menyinggung (ABD) di B . □

§2 Latihan Soal

1. Suatu segitiga ABC memiliki titik tinggi H dan titik pusat lingkaran dalam I . Buktikan bahwa A, B, H, I berada pada satu lingkaran (siklis) jika dan hanya jika $\angle ACB = 60^\circ$.
2. Misalkan C adalah titik pada setengah lingkaran dengan diameter AB (terletak di keliling lingkarannya, bukan di diameternya). Misalkan pula D adalah titik tengah busur AC . Notasikan E sebagai proyeksi D pada garis BC dan F adalah perpotongan AE dengan setengah lingkaran. Buktikan bahwa BF membagi garis DE sama panjang.
3. (OSN 2019) Misalkan Γ_1 dan Γ_2 dua lingkaran yang bersinggungan di titik A dengan Γ_2 di dalam Γ_1 . Misalkan B titik pada Γ_2 dan garis AB memotong Γ_1 di titik C . Misalkan D titik pada Γ_1 dan P sebarang titik pada garis CD (boleh pada perpanjangan segmen CD). Garis BP memotong Γ_2 di titik Q . Tunjukkan bahwa A, D, P, Q terletak pada satu lingkaran.
4. (OSN 2002) Diberikan segitiga ABC dengan $AC > BC$. Pada lingkaran luar segitiga ABC terletak titik D yang merupakan titik tengah busur AB yang memuat titik C . Misalkan E adalah titik pada AC sehingga DE tegak lurus pada AC . Buktikan bahwa $AE = EC + CB$.
5. Diberikan $\triangle ABC$ dimana A', B', C' berturut-turut adalah pencerminan A, B, C terhadap BC, CA, AB . Perpotongan lingkaran luar $\triangle ABB'$ dan $\triangle ACC'$ adalah A_1 . Definisikan B_1 dan C_1 secara serupa. Buktikan bahwa AA_1, BB_1 , dan CC_1 konkuren (bertemu di satu titik).
6. (OSN 2007) Titik-titik A, B, C, D terletak pada lingkaran S sedemikian rupa sehingga AB merupakan garis tengah S , tetapi CD bukan garis tengah S . Diketahui pula bahwa C dan D berada pada sisi yang berbeda terhadap AB . Garis singgung terhadap S di C dan D berpotongan di titik P . Titik-titik Q dan R berturut-turut adalah perpotongan garis AC dengan garis BD dan garis AD dengan garis BC .
7. (OSN 2009) Diberikan segitiga ABC lancip. Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung BC ,

CA , dan AB berturut-turut di D , E , dan F . Garis bagi sudut A memotong DE dan DF berturut-turut di K dan L . Misalkan AA_1 adalah garis tinggi dan M titik tengah BC .

(a) Buktikan bahwa BK dan CL tegak lurus garis bagi sudut BAC .

(b) Tunjukkan bahwa A_1KML adalah segiempat talibusur.

8. (OSN 2011) Diberikan segitiga sebarang ABC dan misalkan lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung sisi BC , CA dan AB berturut-turut di titik D , E dan F . Misalkan K dan L berturut-turut titik pada sisi CA dan AB sehingga $\angle EDK = \angle ADE$ dan $\angle FDL = \angle ADF$. Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga AKL menyinggung lingkaran dalam segitiga ABC .
9. (OSN 2012) Diberikan sebarang segitiga ABC dan garis bagi $\angle BAC$ memotong sisi BC dan lingkaran luar segitiga ABC berturut-turut di D dan E . Misalkan M dan N berturut-turut titik tengah BD dan CE . Lingkaran luar segitiga ABD memotong AN di titik Q . Lingkaran yang melalui A dan menyinggung BC di D memotong garis AM dan sisi AC berturut-turut di titik P dan R . Tunjukkan bahwa empat titik B , P , Q , R terletak pada satu garis.
10. (OSN 2015) Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O . Garis AO memotong lingkaran luar segitiga ABC lagi di titik D . Misalkan P titik pada sisi BC . Garis melalui P yang tegak lurus AP memotong garis DB dan DC berturut-turut di titik E dan F . Garis melalui D tegak lurus BC memotong EF di titik Q . Buktikan bahwa $EQ = FQ$ jika dan hanya jika $BP = CP$.