

# Appunti del corso di Metodi Matematici della Fisica: Equazioni Differenziali I

Prof.ssa Silke Klemm

Dipartimento di Fisica, Università degli Studi di Milano



Queste note sono state prodotte a partire dagli appunti trascritti da Luca Colombo Gomez nell'anno accademico 2017/2018 e sono stati integrati con gli appunti di Andrea Autieri, che ha seguito il corso nell'anno 2018/2019.

Senza il loro contributo queste note non esisterebbero.

Invito chiunque a correggere eventuali errori e a migliorare queste dispense, modificandole e ridistribuendole. In modo particolare invito chiunque sia in possesso di materiale più recente a integrare eventuali parti mancanti o che sono state modificate negli anni successivi.

Nicolò Palazzini

# Indice

<b>1</b>	<b>Parentesi matematica: distribuzioni e trasformate di Fourier</b>	<b>1</b>
1.1	Distribuzioni . . . . .	1
1.1.1	Delta di Dirac . . . . .	2
1.2	Trasformata di Fourier . . . . .	6
1.3	Funzioni di Green . . . . .	8
<b>2</b>		<b>12</b>
2.1	Equazione del calore . . . . .	12
2.1.1	Flusso di calore con produzione di calore . . . . .	15
2.1.2	Equazione del calore con bordo . . . . .	18
2.1.3	Flusso di calore in un cilindro infinito . . . . .	24
2.2	Problemi non omogenei . . . . .	28
2.2.1	Problema ai valori al contorno . . . . .	31
2.2.2	Problema ai valori al contorno più generale . . . . .	34
2.2.3	Problemi ai valori al contorno ancora più generali . . . . .	35
2.2.4	Applicazione del formalismo imparato . . . . .	36
2.2.5	Altro esempio di applicazione del formalismo imparato . . . . .	41
2.3	Il kernel di Schrödinger . . . . .	46
2.4	L'equazione dei telegrafisti . . . . .	50
2.5	Classificazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali lineari del secondo ordine . . . . .	52
2.6	Il problema di Cauchy . . . . .	55
2.6.1	La questione della buona posizione del problema di Cauchy . . . . .	62
2.7	Classificazione di equazioni differenziali di ordine superiore e in più variabili	65
2.8	La formula di Green . . . . .	69
2.9	Equazioni differenziali non lineari . . . . .	75
2.10	L'esponenziale ordinato cronologicamente . . . . .	86
2.11	L'equazione di Korteweg-de Vries (KdV) . . . . .	89
2.12	Le trasformazioni di Bäcklund . . . . .	90
2.12.1	Equazione di Liouville . . . . .	91
2.12.2	Equazione di sine-Gordon . . . . .	93
2.13	Sistemi integrabili e coppie di Lax . . . . .	95
2.14	Cenni su equazioni di Navier-Stokes . . . . .	99

2.15 La trasformata di Laplace . . . . .	101
<b>A Carica immagine</b>	<b>104</b>

# Capitolo 1

## Parentesi matematica: distribuzioni e trasformate di Fourier

### 1.1 Distribuzioni

Le *distribuzioni* (o *funzioni generalizzate*) sono degli oggetti che generalizzano le funzioni e le distribuzioni di probabilità. Estendono il concetto di derivata a tutte le funzioni continue e oltre. Le distribuzioni sono importanti in fisica (p.e. distribuzione delta di Dirac).

Idea di base:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ funzione integrabile}$$

$$\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ smooth } (C^\infty), \text{ con supporto compatto}$$

*Supporto compatto*, cioè identicamente zero tranne in un insieme compatto.

$\Rightarrow \int f\phi dx \in \mathbb{R}$ , dipende linearmente e in un modo continuo da  $\phi$ .

$\Rightarrow f$  è un funzionale lineare continuo sullo spazio di tutte le *funzioni test*  $\phi$ .

Questa è la definizione di una distribuzione.

Le distribuzioni possono essere moltiplicate con dei numeri reali, e possono essere sommate  $\rightarrow$  formano uno spazio vettoriale reale.

#### Derivata di una distribuzione

Considera prima il caso di una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenziabile. Se  $\phi$  è una funzione test, abbiamo:

$$\int_{\mathbb{R}} f' \phi dx = - \int_{\mathbb{R}} f \phi' dx$$

non c'è un termine di bordo perché  $\phi$  ha supporto compatto. Questo suggerisce la seguente definizione della derivata  $S'$  di una distribuzione  $S$ :

$S'$  è funzionale lineare che manda la funzione test  $\phi$  in  $-S(\phi')$

### 1.1.1 Delta di Dirac

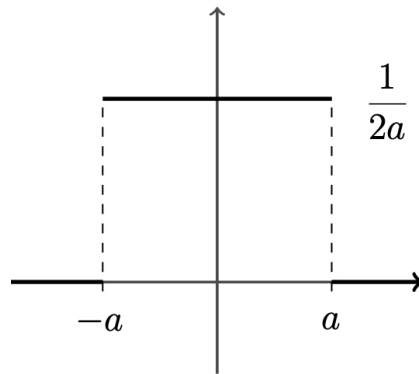
La *funzione delta di Dirac* è la distribuzione che manda la funzione test  $\phi$  in  $\phi(0)$ . È la derivata della funzione step di Heaviside.

$$H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases}$$

La derivata della delta di Dirac è la distribuzione che manda  $\phi$  in  $-\phi'(0)$ . La delta è un esempio di una distribuzione che non è una funzione, ma può essere definita come limite di una sequenza di funzioni, p.e.

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x)$$

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \leq x \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}$$



Dimostrazione:

$$\int_{\mathbb{R}} \delta_a(x) \phi(x) dx = \int_{-a}^a \frac{1}{2a} \phi(x) dx = \frac{1}{2a} (\varphi(a) - \varphi(-a))$$

dove  $\varphi$  è la primitiva di  $\phi$ ,  $\varphi'(x) = \phi(x)$

$$\Rightarrow \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \delta_a(x) \phi(x) dx = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\varphi(a) - \varphi(-a)}{2a} = \varphi'(0) = \phi(0) \quad \blacksquare$$

Definizione: Una funzione  $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  ( $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ) ha *supporto compatto* se esiste un sottoinsieme compatto  $K$  di  $U$  tale che  $\phi(x) = 0 \forall x \in U \setminus K$ .

Le funzioni  $C^\infty$   $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$  con supporto compatto formano uno spazio vettoriale reale  $D(U)$ .

Definizione: Lo *spazio delle distribuzioni* su  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  è il duale  $D'(U)$  dello spazio vettoriale  $D(U)$  di funzioni  $C^\infty$  con supporto compatto in  $U$ .

Notazione:

$$S \in D'(U), \quad \phi \in D(U), \quad S : D(U) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \phi \mapsto S(\phi) = \langle S, \phi \rangle$$

Una funzione integrabile  $f$  definisce una distribuzione  $\tilde{f}$  su  $\mathbb{R}^n$  tramite:

$$\langle \tilde{f}, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f \phi d^n \mathbf{x}, \quad \forall \phi \in D(U) \quad (1.1)$$

Si dice che  $\tilde{f}$  è la distribuzione associata alla funzione  $f$ , o che la distribuzione  $\tilde{f}$  è equivalente alla funzione  $f$ .

La distribuzione di Dirac (o misura di Dirac) è definita da

$$\langle \delta, \phi \rangle := \phi(0) \quad (1.2)$$

Teorema: La distribuzione di Dirac non può essere rappresentata da una funzione integrabile.

Dimostrazione: vedi *Analysis, manifolds, and physics*, Choquet-Bruhat et al., p. 438.

Nonostante ciò scriveremo in seguito formalmente che:

$$\langle \delta, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x}) \phi(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} = \phi(0) \quad (1.3)$$

Esercizio: ( $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 1$ ) Si dimostri che:

$$\delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x} \quad (1.4)$$

Si ha:

$$\int x \delta(x) \phi(x) dx = x \phi(x) \Big|_{x=0} = 0 \quad \forall \phi \Rightarrow x \delta(x) = 0$$

Facciamo formalmente la derivata usando la regola di Leibniz:

$$\Rightarrow \delta(x) + x \delta'(x) = 0 \Rightarrow \delta'(x) = -\frac{\delta(x)}{x} \quad \blacksquare$$

Un'altra identità utile è:

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|} \quad (1.5)$$

dove  $x_i$  sono gli zeri della funzione  $g(x)$ .

Dimostrazione: la dimostrazione è lasciata allo studente.

Hint:

- Considera intorni che contengono un solo zero di  $g(x)$
- Riscrivi l'integrale come sommatoria
- Applica la  $\delta(g(x))$  alla funzione di test  $\phi$



## Rappresentazione della delta

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x),$$

con

$$\delta_a(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & -a \leq x \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases} \quad (1.6a)$$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2} \quad (1.6b)$$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \quad (1.6c)$$

$$\delta_a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - a|k|} dk \quad (1.6d)$$

Dimostrazione della (1.6b):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) \phi(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{a^2 + x^2} \phi(x) dx \stackrel{x=at}{=} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} \phi(at) dt$$

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) \phi(x) dx = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(at) \frac{dt}{1+t^2}$$

Usa il *teorema della convergenza dominata*:

Se  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  è una successione di funzioni misurabili con limite puntuale  $f$ , e se esiste una funzione integrabile  $g$  tale che  $|f_k| \leq g \forall k$  allora  $f$  è integrabile e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f_k(x) dx = \int f(x) dx$$

Da noi  $f_k(t) \hat{=} \frac{\phi(at)}{1+t^2}$

$\rightarrow$  funzione  $g$  esiste, perché  $\phi$  ha supporto compatto.

Quindi:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) \phi(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a \rightarrow 0} \phi(at) \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{\pi} \phi(0) \arctan(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \phi(0) \quad \blacksquare$$

Le dimostrazioni della (1.6c) e (1.6d) sono lasciate allo studente.

Hint:

- Calcola  $\lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) \phi(x) dx$  e usa il teorema della convergenza dominata (fai l'opportuno cambio di variabili)
- $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - a|k|} dk = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}$

In  $N$  dimensioni: coordinate cartesiane  $x_1, x_2, \dots, x_n \Rightarrow \delta(\mathbf{x}) = \delta(x_1) \dots \delta(x_n)$

*Proprietà utili della delta di Dirac:*

$$\delta(-\mathbf{r}) = \delta(\mathbf{r})$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{r} \delta(\underbrace{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}_{:=\boldsymbol{\rho}}) f(\mathbf{r}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \boldsymbol{\rho} \delta(\boldsymbol{\rho}) f(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}') = f(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{r}') \Big|_{\boldsymbol{\rho}=0} = f(\mathbf{r}') \quad (1.7)$$

Scegli  $f = 1 \Rightarrow$  formalmente

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = 1 \quad (1.8)$$

*Delta di Dirac in coordinate curvilinee:*

La quantità invariante per trasformazione di coordinate è:  $d^n \mathbf{r} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

Coordinate:  $\xi_i(x_i, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_j$  sono le coordinate cartesiane

Jacobiano:

$$\begin{aligned} J(x_i, \xi_j) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{pmatrix} dx_1 \dots dx_n \delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_n - x'_n) = \\ &= |J| d\xi_1 \dots d\xi_n \delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_n - x'_n) = \\ &\stackrel{!}{=} d\xi_1 \dots d\xi_n \delta(\xi_1 - \xi'_1) \dots \delta(\xi_n - \xi'_n) \end{aligned}$$

dove  $|J|$  è il modulo del determinante del Jacobiano.

$$\Rightarrow \delta(\xi_1 - \xi'_1) \dots \delta(\xi_n - \xi'_n) = |J| \delta(x_1 - x'_1) \dots \delta(x_n - x'_n) \quad (1.9)$$

Esempio: Coordinate sferiche in 3 dimensioni:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \sin \theta \\ y = r \sin \varphi \sin \theta \\ z = r \cos \theta \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 = r \\ \xi_2 = \theta \\ \xi_3 = \varphi \end{cases}$$

Scrivo il Jacobiano e ne calcolo il determinante:

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \delta(r - r') \delta(\theta - \theta') \delta(\varphi - \varphi') = r^2 \sin \theta \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z') \quad (1.10)$$

Esempio: Coordinate cilindriche in 3 dimensioni:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 = r \\ \xi_2 = \theta \\ \xi_3 = z \end{cases}$$

Scrivo il Jacobiano e ne calcolo il determinante:

$$\left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = r$$

$$\Rightarrow \delta(r - r')\delta(\theta - \theta')\delta(z - z') = r\delta(x - x')\delta(y - y')\delta(z - z')$$

*Densità di carica* di un insieme discreto di  $N$  cariche puntiformi:

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (1.11)$$

Esercizio: Si usi la (1.11) in

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \int d^3\mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

e dimostrare usando la (1.7) che in un sistema di cariche puntiformi

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}$$

Esempio: Carica  $Q$  uniformemente distribuita su una superficie sferica con raggio  $R$ . Determinare  $\rho(\mathbf{r})$ .

Chiamo  $\rho(\mathbf{r}) = AQ\delta(r - R)$  con  $A$  da determinare.

$$\int d^3\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) = \int dr d\theta d\phi r^2 \sin \theta AQ\delta(r - R) = 4\pi AQ \int dr r^2 \delta(r - R) = 4\pi AQ R^2$$

Normalizzando  $4\pi AQ R^2 = Q$  ottengo  $A = \frac{1}{4\pi R^2}$

$$\rho(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi R^2} \delta(r - R)$$

## 1.2 Trasformata di Fourier

Definizione: Sia  $X$  uno spazio di misura con misura  $m$  positiva (possiamo prendere la misura di Lebesgue come esempio). Definiamo gli *spazi*  $L^P$  come:

$L^P(X) :=$  spazio di funzioni su  $X$  tale che  $|f|^p$  sia integrabile,  $\int_X |f|^p dm < \infty$

Si dimostra che per  $p \geq 1$ ,  $L^p(X)$  è uno spazio vettoriale e

$$\|f\| := \left( \int_X |f|^p dm \right)^{\frac{1}{p}}$$

è una norma su questo spazio.

A noi interessa il caso in cui  $m$  è la misura di Lebesgue; in tal caso gli elementi di  $L^p(X)$  sono le funzioni  $f$  con

$$\int_X |f|^p dx < \infty$$

Il caso  $p=2$  trova applicazioni in meccanica quantistica.

Definizione: Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , la *trasformata di Fourier*  $\mathcal{F}f$  è una funzione in  $\mathbb{R}^n$  (in realtà sul duale di  $\mathbb{R}^n$ , identificato con  $\mathbb{R}^n$ ) definita da:

$$(\mathcal{F}f)(\mathbf{k}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d^n \mathbf{x} \quad (1.12)$$

Nel seguito useremo anche la notazione:  $\hat{f}(\mathbf{k})$  per  $(\mathcal{F}f)(\mathbf{k})$

Una possibile rappresentazione della delta di Dirac è (per  $n = 1$ ):

$$\delta(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx - a|k|} dk$$

che è una Trasformata di Fourier. Estendendo ad  $n > 1$ , formalmente si può scrivere:

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^n \mathbf{k} \quad (1.13)$$

Se conosco la trasformata di Fourier  $\hat{f}$  posso determinare la funzione  $f$  applicando la *anti-trasformata* di Fourier:

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{k}) &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}'} f(\mathbf{x}') d^n \mathbf{x}' = \\ &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x}' f(\mathbf{x}') \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{x}' f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \\ &\Rightarrow f(\mathbf{x}) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^n \int_{\mathbb{R}^n} d^n \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Paragonando quest'ultima espressione con l'equazione (1.13) troviamo che la trasformata di Fourier della delta di Dirac è uguale ad 1:

$$(\mathcal{F}\delta)(\mathbf{k}) = 1 \quad (1.15)$$

Definiamo ora una famiglia di funzioni (*funzioni di base*) come:

$$\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^{\frac{n}{2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \quad (1.16)$$

Allora possiamo riscrivere la funzione  $f(\mathbf{x})$  come:

$$f(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int d^n \mathbf{k} \hat{f}(\mathbf{k}) \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$$

Le  $\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  soddisfano le relazioni di completezza e ortogonalità:

Completezza:

$$\int d^n \mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \varphi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int d^n \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (1.17)$$

Ortogonalità:

$$\int d^n \mathbf{x} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \varphi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int d^n \mathbf{x} e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (1.18)$$

Dimostrazione completezza del sistema  $\{\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}$ :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \int d^n \mathbf{x}' f(\mathbf{x}') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \int d^n \mathbf{x}' f(\mathbf{x}') \int d^n \mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \varphi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}') = \\ &= \int d^n \mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \int d^n \mathbf{x}' f(\mathbf{x}') \varphi_{\mathbf{k}'}^*(\mathbf{x}') = \int d^n \mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\mathbf{k}) \\ &\Rightarrow f(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \int d^n \mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) \hat{f}(\mathbf{k}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  qualunque  $f$  è sviluppabile nella base  $\{\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}$  quindi la base è completa.

Dimostrazione ortogonalità del sistema  $\{\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}$ :

vedi (1.18).

$\Rightarrow \{\varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\}$  è un *sistema ortonormale completo*.

### 1.3 Funzioni di Green

Definizione: Un *nucleo* (o *Kernel*)  $K$  su  $\mathbb{R}^n$  è una distribuzione su  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , ossia un elemento del duale  $D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$  di funzioni  $C^\infty$  con supporto compatto in  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

$$K : D(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \quad K \in D'(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \quad \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \langle K, \varphi \rangle \in \mathbb{R}$$

Definizione: Un *nucleo fondamentale* (o *elementare*)  $E$  di un operatore differenziale lineare  $D$  su  $\mathbb{R}^n$  con coefficienti  $a_j(\mathbf{x}) \in C^\infty$ ;

$$D = \sum_{|j| \leq m} a_j(\mathbf{x}) D^j$$

è un nucleo, che soddisfa:

$$\overbrace{\sum_{|j| \leq m} a_j(\mathbf{x}) D^j}^D E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.19)$$

$j$  è un indice multiplo

$$j = (j_1, \dots, j_n) \quad |j| = \sum_{i=1}^n j_i$$

$m$  è l'ordine dell'operatore differenziale  $D^j$ , dove

$$D^j = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{j_i} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{j_n}$$

Esempio:  $n=3, m=2 \Rightarrow j = (j_1, j_2, j_3) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} D &= \sum_{j_1+j_2+j_3 \leq 2} a_{j_1 j_2 j_3}(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{j_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{j_2} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^{j_3} = \\ &= a_{000}(\mathbf{x}) + a_{100}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} + a_{010}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_2} + a_{001}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_3} + \\ &+ a_{110}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} + a_{101}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_3} + a_{011}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_3} + \\ &+ a_{200}(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 + a_{020}(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^2 + a_{002}(\mathbf{x}) \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^2 \end{aligned}$$

Dato il nucleo fondamentale  $E$ , una soluzione dell'equazione differenziale  $DX = B$  può essere trovata tramite:

$$X(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} E(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y} \quad (1.20)$$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} DX(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n} DE(\mathbf{x}, \mathbf{y}) B(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) B(\mathbf{y}) d^n \mathbf{y} \\ &\Rightarrow DX(\mathbf{x}) = B(\mathbf{x}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definizione: Una *funzione di Green*  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  è un nucleo elementare per l'operatore differenziale  $-\frac{\Delta}{4\pi}$ .

Si ha quindi:

$$-\Delta G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 4\pi \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.21)$$

Si può dimostrare che  $G$  è simmetrica:  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ .

Esempio: Si consideri una carica puntiforme in  $\mathbf{y}$  con carica  $q = 1$ .

$\rho = q\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  è la densità di carica.  
Dalle equazioni di Maxwell si ha:

$$\Delta\phi(\mathbf{x}) = -4\pi\rho(\mathbf{x}) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (1.22)$$

→ definizione di Funzione di Green.  
Consideriamo una soluzione:

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

⇒  $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$  è un esempio particolare di una funzione di Green (la funzione di Green non è univocamente determinata).

Se è nota la funzione di Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  allora una soluzione dell'equazione di Laplace non omogenea (1.22) è data da:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})d^3\mathbf{y} \quad (1.23)$$

(quindi passo da un'equazione differenziale ad un integrale).

Con la particolare funzione di Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$  la (1.23) diventa:

$$\phi(\mathbf{x}) = \int \frac{\rho(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}d^3\mathbf{y}$$

Come in elettromagnetismo, in generale possiamo scrivere:

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (1.24a)$$

$$\nabla^2 F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad (1.24b)$$

$F$  dipende dalle condizioni al contorno.

Esempio: magnetostatica

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{r}' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$\mathbf{J}$ : densità di corrente

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \Rightarrow \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$$

$$\text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \Rightarrow \text{rot rot } \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (\text{Gauge di Coulomb})$$

$$\Rightarrow \Delta(c\mathbf{A}) = -4\pi\mathbf{J}$$

(confronto con la (1.22))

Siccome una particolare funzione di Green del laplaciano è  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$ , la soluzione di  $\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}$  che soddisfa certe condizioni al contorno è data da:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{1}{c} \int d^3\mathbf{y} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$$

Teorema: In assenza di superfici di bordo la funzione di Green  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  dipende solo dalla differenza  $(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ .

Infatti  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  è invariante se non ho condizioni di bordo,  $\Delta$  invariante  $\Rightarrow G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$  è invariante per traslazioni  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \boldsymbol{\alpha}$ ,  $\mathbf{y} \mapsto \mathbf{y} + \boldsymbol{\alpha}$

$\rightarrow$  Si può far vedere che è sempre possibile scegliere  $G$  in modo tale che  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

Esempio:  $n = 3$

$$\Delta G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

Scrivo  $G$  e  $\delta$  come trasformate di Fourier:

$$\frac{\Delta}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \tilde{G}(\mathbf{k}) = -\frac{4\pi}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})}$$

$\mathbf{x}$  compare solo come esponente ( $\Rightarrow -k^2$ ) e porto tutto da una parte:

$$\int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} (-k^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) + 4\pi) = 0$$

Osservo che  $e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \sim \varphi_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$  è linearmente indipendente, quindi deve annullarsi la quantità:

$$-k^2 \tilde{G}(\mathbf{k}) + 4\pi = 0 \Rightarrow \tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{4\pi}{k^2}$$

Applico l'anti-trasformata di Fourier:

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \frac{4\pi}{k^2}$$

Cambiamento di coordinate: coordinate sferiche

$$d^3\mathbf{k} = -k^2 \sin\theta dk d\theta d\varphi \Rightarrow G(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\pi} \int d\theta dk \sin\theta e^{ik|\mathbf{x}|\cos\theta}$$

cambio variabile:  $u = \cos\theta \rightarrow du = -\sin\theta d\theta$

$$G(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi} \int du dk e^{ik|\mathbf{x}|u} = \int_0^\infty \frac{2}{k|\mathbf{x}|\pi} \sin(k|\mathbf{x}|) dk = \frac{1}{|\mathbf{x}|}$$



## Capitolo 2

### 2.1 Equazione del calore

La legge di Fourier della conduzione termica è data da:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad (2.1)$$

dove  $\mathbf{q}$  è la densità di flusso termico,  $k$  è la conducibilità termica,  $T$  è la temperatura. La temperatura può essere riscritta come  $T = \frac{\phi}{C_p \rho}$ , dove  $\rho$  è la densità,  $C_p$  è il calore specifico a pressione costante e  $\phi$  è il calore per unità di volume. L'equazione di continuità è:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q} = 0 \quad (2.2)$$

che ha la forma tipica di una *legge di conservazione*.

In questa formula sostituisco  $\phi$  e  $\mathbf{q}$  e trovo:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho C_p T) + \nabla \cdot (-k\nabla T) = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} - k\Delta T = 0$$

Definendo il *coefficiente di diffusione termica*  $\chi = \frac{k}{\rho C_p}$ , si ottiene l'*equazione del calore*:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T \quad (2.3)$$

La paragono con l'*equazione di diffusione*:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \Delta u \quad (2.4)$$

dove  $D$  è il coefficiente di diffusione e  $u$  la densità del materiale che diffonde.

La (2.4) segue dalla *prima legge di Fick* sulla corrente di diffusione:

$$\mathbf{q}_D = -D\nabla u \quad (2.5)$$

e dall'equazione di continuità (il materiale non viene creato o distrutto):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{q}_D = 0$$

La (2.4) viene anche chiamata *seconda legge di Fick*.

N.B.: Anche l'equazione di *Black-Scholes* per il prezzo di un'opzione può essere riportata nella forma (2.3), (2.4).

Risolviamo la (2.3) in  $d$  dimensioni:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} \quad (2.6)$$

Faccio la trasformata di Fourier:

$$T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \tilde{T}(\mathbf{k}, t) \quad (2.7)$$

La (2.3) diventa:

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} \left( \frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}(\mathbf{k}, t) + \chi \mathbf{k}^2 \tilde{T}(\mathbf{k}, t) \right) = 0$$

Dato che gli esponenziali sono linearmente indipendenti, devo annullare i coefficienti:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}(\mathbf{k}, t) + \chi \mathbf{k}^2 \tilde{T}(\mathbf{k}, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}(\mathbf{k}, t) = e^{-\chi \mathbf{k}^2 t} \tilde{T}_0(\mathbf{k}) \quad (2.8)$$

Faccio la trasformata inversa:

$$\tilde{T}_0(\mathbf{k}) = \int d^d \mathbf{y} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{y}} T_0(\mathbf{y}) \quad (2.9)$$

Sostituisco la (2.8) e la (2.9) nella (2.7):

$$T(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{y} T_0(\mathbf{y}) \int d^d \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \chi \mathbf{k}^2 t}$$

Definisco il *nucleo di calore* (*heat kernel*):

$$G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) - \chi \mathbf{k}^2 t} \quad (2.10)$$

che propaga le condizioni iniziali di  $T_0(\mathbf{y})$ .

Quindi abbiamo la convoluzione:

$$T(\mathbf{x}, t) = \int d^d \mathbf{y} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) T_0(\mathbf{y}) \quad (2.11)$$

Caso particolare:  $T_0(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{y})$

$$\Rightarrow T(\mathbf{x}, t) = G(\mathbf{x}, t)$$

Il propagatore è soluzione dell'equazione del calore corrispondente a un dato iniziale deltipo. Per questo motivo, il propagatore è anche chiamato soluzione fondamentale,

perché esso è una soluzione e con esso si costruiscono tutte le altre per convoluzione (ovvero tramite la (2.11)).

Calcoliamo  $G$ :

$$G(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \chi \mathbf{k}^2 t}$$

Cerco di ricondurlo ad un integrale gaussiano:

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \chi \mathbf{k}^2 t = -\chi t \left( \mathbf{k} - \frac{i\mathbf{z}}{2\chi t} \right)^2 - \frac{\mathbf{z}^2}{4\chi t} \quad \mathbf{k}' := \mathbf{k} - \frac{i\mathbf{z}}{2\chi t}$$

$$\Rightarrow G(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(\frac{-\mathbf{z}^2}{4\chi t}\right) \int d^d \mathbf{k}' e^{-\chi \mathbf{k}'^2 t} = \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(\frac{-\mathbf{z}^2}{4\chi t}\right) \left(\frac{\pi}{\chi t}\right)^{\frac{d}{2}}$$

Se  $\text{Re}(\chi t) > 0 \Rightarrow t > 0$  allora la soluzione esiste solo per  $t > 0$ , cioè per tempi posteriori all'assegnazione del dato iniziale (soluzione ritardata)

$$\Rightarrow G(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{(4\pi\chi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{\mathbf{z}^2}{4\chi t}\right) \quad (2.12)$$

Esempio: Flusso di calore lungo una linea:

Soluzione della (2.11) con  $d = 1$  per dato iniziale localizzato:

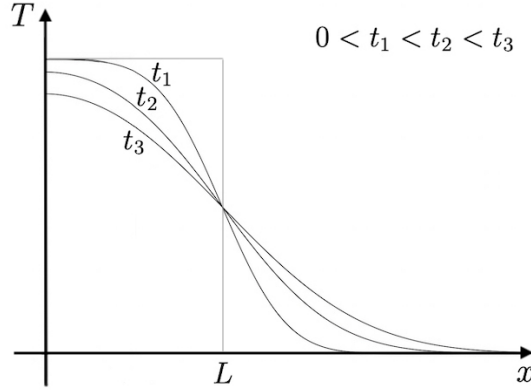
$$T_0(x) = \begin{cases} \hat{T}_0 & |x| \leq L \\ 0 & |x| > L \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (2.11) \stackrel{(2.12)}{\Rightarrow} T(x, t) &= \int_{-L}^{+L} dy \hat{T}_0 \frac{1}{(4\pi\chi t)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4\chi t}\right) = \\ &\stackrel{z:=x-y}{=} \frac{\hat{T}_0}{(4\pi\chi t)^{\frac{1}{2}}} \int_{x-L}^{x+L} dz \exp\left(-\frac{z^2}{4\chi t}\right) \stackrel{r:=z/(4\chi t)^{1/2}}{=} \frac{\hat{T}_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-L}{2\sqrt{\chi t}}}^{\frac{x+L}{2\sqrt{\chi t}}} e^{-r^2} dr = \\ &= \frac{\hat{T}_0}{\sqrt{\pi}} \left( \int_{\frac{x-L}{2\sqrt{\chi t}}}^0 e^{-r^2} dr + \int_0^{\frac{x+L}{2\sqrt{\chi t}}} e^{-r^2} dr \right) \\ T(x, t) &= \frac{\hat{T}_0}{2} \left[ \text{erf}\left(\frac{x+L}{2\sqrt{\chi t}}\right) - \text{erf}\left(\frac{x-L}{2\sqrt{\chi t}}\right) \right] \end{aligned} \quad (2.13)$$

dove la funzione degli errori di Gauss è definita:

$$\text{erf}(s) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-r^2} dr \quad (2.14)$$

Dato che la soluzione è pari possiamo limitarci a  $x \geq 0$ .



Dimostrazione che la (2.11) soddisfa il dato iniziale per  $t \rightarrow 0$ :

A tal fine dimostriamo che:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} = \delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(x) \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{a^2}} \phi(x) dx \stackrel{\frac{x}{a} = y}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \phi(ya) dy$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \phi(ya) dy \stackrel{\text{conv. dominata}}{=} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{a \rightarrow 0} e^{-y^2} \phi(ya) dy = \frac{\phi(0)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \phi(0)$$

Con  $a = 2\sqrt{\chi t}$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{\pi\chi t}} e^{-\frac{x^2}{4\chi t}} = \delta(x) \quad (2.15)$$

Quindi

$$(2.12) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} G(\mathbf{z}, t) = \delta(z_1) \cdot \dots \cdot \delta(z_d) = \delta(\mathbf{z})$$

e la (2.11) implica:

$$\lim_{t \rightarrow 0} T(\mathbf{x}, t) = \int d^d \mathbf{y} \lim_{t \rightarrow 0} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) T_0(\mathbf{y}) = \int d^d \mathbf{y} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) T_0(\mathbf{y}) = T_0(\mathbf{x}) \quad \blacksquare$$

### 2.1.1 Flusso di calore con produzione di calore

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \chi \Delta T = S(\mathbf{x}, t) \quad t > 0$$

$S$  è il termine di sorgente, rende l'equazione lineare non omogenea.

*Soluzione particolare dell'equazione non omogenea:*

Definiamo una funzione di Green  $G$  tramite una convoluzione spaziale e temporale:

$$(\partial_t - \chi \Delta_{\mathbf{x}}) G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(t - t') \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow T(\mathbf{x}, t) = \int d^n \mathbf{x}' dt' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') S(\mathbf{x}', t') \quad (2.17)$$

Check:

$$\begin{aligned}
 (\partial_t - \chi \Delta_{\mathbf{x}})T(\mathbf{x}, t) &= \int d^n \mathbf{x}' dt' (\partial_t - \chi \Delta_{\mathbf{x}})G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t')S(\mathbf{x}', t') = \\
 &= \int d^n \mathbf{x}' dt' \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')\delta(t - t')S(\mathbf{x}', t') = S(\mathbf{x}, t) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Trasformata di Fourier (definisco  $\mathbf{z} := \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ ,  $\tau := t - t'$ ):

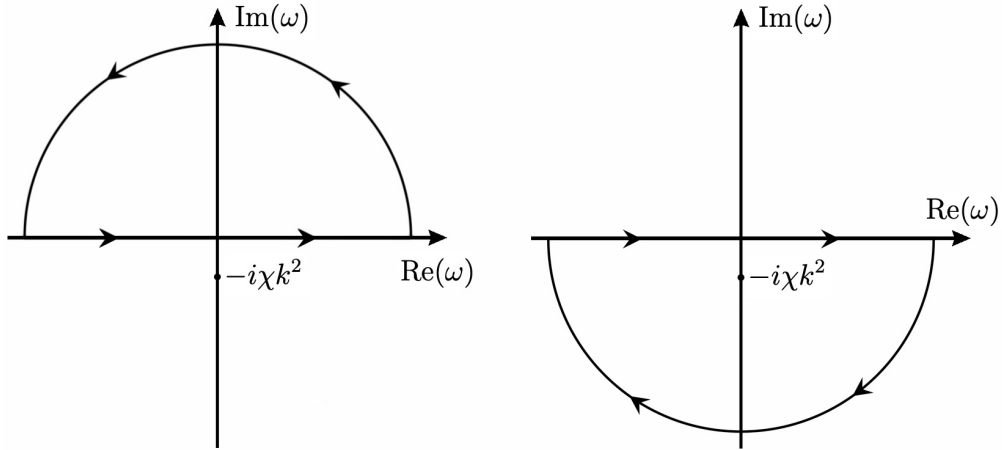
$$G(\mathbf{z}, \tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int d^n \mathbf{k} d\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \omega \tau)} \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega)$$

$$\delta(\mathbf{z})\delta(\tau) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int d^n \mathbf{k} d\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \omega \tau)}$$

Sostituendo nella (2.16) trovo:

$$\begin{aligned}
 (-i\omega + \chi \mathbf{k}^2) \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) &= 1 \\
 \Rightarrow \tilde{G}(\mathbf{k}, \omega) &= \frac{1}{-i\omega + \chi \mathbf{k}^2} \\
 \Rightarrow G(\mathbf{z}, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int d^n \mathbf{k} d\omega e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \omega \tau)} \frac{1}{-i\omega + \chi \mathbf{k}^2}
 \end{aligned}$$

Calcolo l'integrale in  $d\omega$  con il teorema dei residui (polo in  $\omega = -i\chi \mathbf{k}^2$ ), chiudendo sotto se  $\tau$  è positiva, e viceversa:



$$\oint d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{-i(\omega + i\chi \mathbf{k}^2)} =: \oint F(\omega) d\omega$$

$$e^{-i\omega\tau} = e^{-i(\text{Re}\omega + i\text{Im}\omega)\tau}$$

Se  $\tau < 0$  chiudo sopra  $\Rightarrow \oint F(\omega) d\omega = 0$

Se  $\tau > 0$  chiudo sotto  $\Rightarrow \oint F(\omega) d\omega \neq 0$

Vogliamo che i contributi dei semicerchi siano nulli quindi:

Per  $\tau = t - t' < 0$ :

$$F(\omega) d\omega \stackrel{\omega = \rho e^{i\varphi}}{=} \frac{e^{-i\tau(\rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi)}}{-i(\rho e^{i\varphi} + i\chi \mathbf{k}^2)} \rho e^{i\varphi} i d\varphi =: f(\varphi) d\varphi$$

Vado a risolvere l'integrale

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\pi f(\varphi) d\varphi \right| &\leq \int_0^\pi |f(\varphi)| d\varphi = \int_0^\pi \frac{e^{\tau \rho \sin \varphi} \rho d\varphi}{|\rho e^{i\varphi} + i\chi \mathbf{k}^2|} = \\ &= \int_0^\pi \frac{e^{\tau \rho \sin \varphi} \rho d\varphi}{\sqrt{(\rho \cos \varphi)^2 + (\rho \sin \varphi + \chi \mathbf{k}^2)^2}} = \int_0^\pi \frac{e^{\tau \rho \sin \varphi} \rho d\varphi}{\sqrt{\rho^2 + 2\rho \sin \varphi \chi \mathbf{k}^2 + \chi^2 \mathbf{k}^4}} \end{aligned}$$

Posso minorare il denominatore con  $\rho$  e ottengo:

$$\left| \int_0^\pi f(\varphi) d\varphi \right| \leq \int_0^\pi \frac{e^{\tau \rho \sin \varphi} \rho d\varphi}{\rho} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\tau \rho \sin \varphi} d\varphi$$

In  $[0, \frac{\pi}{2}]$  ho che:  $\sin \varphi \geq \frac{2\varphi}{\pi}$

Per  $\tau < 0$ :  $\tau \rho \sin \varphi \leq \tau \rho \frac{2\varphi}{\pi}$

$$\Rightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\tau \rho \sin \varphi} d\varphi \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\tau \rho \frac{2\varphi}{\pi}} d\varphi = 2 \left[ \frac{\pi}{2\tau \rho} e^{\tau \rho \frac{2\varphi}{\pi}} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{\tau \rho} (e^{\tau \rho} - 1) \xrightarrow{\rho \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow G(\mathbf{z}, \tau) = 0$$

Analogamente si dimostra che anche il contributo del cammino sotto l'integrale tende a 0 per  $\rho \rightarrow \infty$ .

Restano da calcolare i residui:

$$\text{Res } F(\omega) = \lim_{\omega \rightarrow -i\chi \mathbf{k}^2} F(\omega)(\omega + i\chi \mathbf{k}^2) = i e^{-\tau \chi \mathbf{k}^2}$$

Per  $\tau > 0$  chiudo l'integrale sotto. Il valore dell'integrale sull'asse reale è la differenza tra l'integrale sul cammino chiuso e quello sul solo semicerchio sotto.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega F(\omega) &= -2\pi i \text{Res } F(\omega) = 2\pi e^{-\tau \chi \mathbf{k}^2} \\ \Rightarrow G(\mathbf{z}, \tau) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \tau \chi \mathbf{k}^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \exp\left(\frac{-\mathbf{z}^2}{4\tau \chi}\right) \int d^n \mathbf{k} e^{-\tau \chi \left(\mathbf{k} - \frac{i\mathbf{z}}{2\tau \chi}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \exp\left(-\frac{\mathbf{z}^2}{4\tau \chi}\right) \left(\frac{\pi}{\chi \tau}\right)^{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

$$G(\mathbf{z}, \tau) = \frac{1}{(4\pi\tau\chi)^{\frac{n}{2}}} \exp\left(-\frac{\mathbf{z}^2}{4\chi\tau}\right), \quad \tau > 0 \quad (2.18)$$

È il nucleo del calore!

$$G(\mathbf{z}, \tau) = 0, \quad \tau < 0 \quad (2.19)$$

Soluzione particolare dell'equazione del calore con sorgente:

$$T_p(\mathbf{x}, t) \stackrel{(2.17)}{=} \int d^n \mathbf{x}' \int_{-\infty}^t dt' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t - t') S(\mathbf{x}', t')$$

Soluzione generale dell'equazione omogenea:

$$T_{om}(\mathbf{x}, t) \stackrel{(2.11)}{=} \int d^n \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}', t) T_0(\mathbf{x}')$$

Soluzione generale dell'equazione non omogenea:

$$T(\mathbf{x}, t) = T_p(\mathbf{x}, t) + T_{om}(\mathbf{x}, t)$$

Se  $S(\mathbf{x}', t') = 0$  per  $t' < 0 \Rightarrow T_p(\mathbf{x}, 0) = 0$  e quindi abbiamo che  $T(\mathbf{x}, 0) = T_{om}(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$ .

### 2.1.2 Equazione del calore con bordo

Considera il problema di Dirichlet in un dominio connesso (o su una varietà con bordo)  $U$ .

$$\begin{cases} \Delta\phi + \lambda\phi = 0 & \text{in } U \\ \phi = 0 & \text{su } \partial U \end{cases}$$

$\lambda_n$  : autovalori del problema di Dirichlet per l'operatore  $\Delta$ ,  $\phi_n$ : autofunzioni di  $\Delta$

$$G(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_n e^{-\lambda_n \chi t} \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{y}) \quad (2.20)$$

$$T(\mathbf{x}, t) = \int d^d \mathbf{y} G(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) T_0(\mathbf{y}) = \int d^d \mathbf{y} \sum_n e^{-\lambda_n \chi t} \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{y}) T_0(\mathbf{y}) \quad (2.21)$$

La (2.20) è un esempio di una funzione di Green che non dipende solo da  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ , ma da  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  separatamente. Ciò è dovuto alla rottura dell'invarianza per traslazioni a causa della presenza del bordo  $\partial U$ .

Check:

$$T(\mathbf{x}, 0) \stackrel{(2.21)}{=} \int d^d \mathbf{y} \sum_n \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{y}) T_0(\mathbf{y}) = \int d^d \mathbf{y} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) T_0(\mathbf{y}) = T_0(\mathbf{x}) \quad \checkmark$$

$$T(\mathbf{x}, t) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial U} = \int d^d \mathbf{y} \sum_n e^{-\lambda_n \chi t} \phi_n(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x} \in \partial U} \phi_n(\mathbf{y}) T_0(\mathbf{y}) = 0 \quad \checkmark$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}T(\mathbf{x}, t) &= \int d^d\mathbf{y} \sum_n (-\lambda_n \chi) e^{-\lambda_n \chi t} \phi_n(\mathbf{x}) \phi_n(\mathbf{y}) T_0(\mathbf{y}) \\ \chi \Delta_{\mathbf{x}} T(\mathbf{x}, t) &= \int d^d\mathbf{y} \sum_n e^{-\lambda_n \chi t} \chi \underbrace{\Delta_{\mathbf{x}} \phi_n(\mathbf{x})}_{-\lambda_n \phi_n(\mathbf{x})} \phi_n(\mathbf{y}) T_0(\mathbf{y}) = \frac{\partial}{\partial t} T(\mathbf{x}, t) \quad \checkmark\end{aligned}$$

Esempio:  $U = [0, L]$

Risolvere:

$$\partial_t T = \chi \partial_x^2 T, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0$$

Con condizioni al contorno:  $T(0, t) = T(L, t) = 0, \quad T(x, 0) = T_0(x)$

$$\begin{aligned}\partial_x^2 \phi(x) &= -\lambda \phi(x) \\ \Rightarrow \phi_n(x) &= \phi_0 \sin(\sqrt{\lambda_n} x), \quad \lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ \int_0^L dx \phi_n^2(x) &= 1 \quad \Rightarrow \quad \phi_0 = \sqrt{\frac{2}{L}} \\ (2.20) \Rightarrow G(t, x, y) &= \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \chi t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \quad (2.22)\end{aligned}$$

$$(2.21) \Rightarrow T(x, t) = \frac{2}{L} \int_0^L dy \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \chi t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) T_0(y) \quad (2.23)$$

Sviluppo  $T_0(y)$  in serie di Fourier:

$$T_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) \quad (2.24)$$

con

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L T_0(y) \sin\left(\frac{n\pi}{L} y\right) dy \quad (2.25)$$

Usando la (2.25), posso riscrivere la (2.23) come:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \chi t} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (2.26)$$

N.B.:

- La (2.20) vale anche per varietà compatte senza bordo (p.e.  $S^2$ ).
- La (2.22) è un esempio di funzione di Green che dipende da  $x$  e  $y$  separatamente. Il motivo è la rottura dell'invarianza per traslazioni a causa della presenza del bordo.



Esercizi:

- (i) Risolvere:  $\partial_t T = \chi \Delta T$  nel cubo

$$x \in [0, L], y \in [0, L], z \in [0, L], t \geq 0$$

Con le condizioni:  $T(\mathbf{x}, t) = 0, T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$

$$x = 0, L \quad y = 0, L \quad z = 0, L$$

- (ii) Le (2.20), (2.21) valgono anche per il problema di Neumann

$$\begin{cases} \Delta \phi + \lambda \phi = 0 & \text{in } U \\ \mathbf{n} \cdot \nabla \phi = 0 & \text{su } \partial U \end{cases}$$

dove  $\mathbf{n}$  è il versore normale al bordo. Perché?

(p.e. verificare che  $\mathbf{n} \cdot \nabla T|_{\mathbf{x} \in \partial U} = 0$ )

Risolvere l'equazione del calore nel cubo con pareti isolate (cioè nessun flusso termico attraverso le pareti, vedi equazione (2.1))

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$$

$$\partial_x T = 0 \quad x = 0, L$$

$$\partial_y T = 0 \quad y = 0, L$$

$$\partial_z T = 0 \quad z = 0, L$$

(modello per stanza perfettamente isolata)

- (iii) Risolvere l'equazione del calore sulla 2-sfera.

Suggerimento: scrivere il laplaciano in coordinate sferiche

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial^2 \varphi \quad (2.27)$$

Porre  $r = \text{cost}$  e usare:

$$\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta Y_l^m) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 Y_l^m = -\lambda Y_l^m \quad (2.28)$$

con  $\lambda = l(l+1)$  e  $Y_l^m$  armoniche sferiche.

Sostituire le (2.24), (2.25) col corrispondente sviluppo in armoniche sferiche.

*Parentesi:* Soluzione di

$$\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

in  $d$  dimensioni.

Consideriamo un problema un po' più generale:

$$(\Delta_{\mathbf{x}} - m^2) G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.29)$$

→  $G$  è il nucleo dell'equazione di *Helmholtz*

$$(\Delta_{\mathbf{x}} - m^2)f = -S \quad (2.30)$$

(soluzione:  $f(\mathbf{x}) = \int d^d \mathbf{x}' G(\mathbf{x} - \mathbf{x}') S(\mathbf{x}')$ )

$G$  è il propagatore per un campo scalare in  $d$  dimensioni euclidee (→ teoria quantistica dei campi).

Uso la trasformata di Fourier per riportarmi ad un'equazione algebrica:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \tilde{G}(\mathbf{k}) \\ \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ \Rightarrow (-k^2 - m^2)\tilde{G}(\mathbf{k}) &= -1 \Rightarrow \tilde{G}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} \\ \Rightarrow G(\mathbf{z}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d \mathbf{k} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z}}}{\mathbf{k}^2 + m^2} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Uso:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2} &= \int_0^\infty \exp(-\tau(\mathbf{k}^2 + m^2)) d\tau \\ \Rightarrow G(\mathbf{z}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\tau e^{-\tau m^2} \int d^d \mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \tau \mathbf{k}^2} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Mi riconduco all'integrale gaussiano con:

$$\begin{aligned} i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - \tau \mathbf{k}^2 &= -\tau \left( \mathbf{k} - \frac{i\mathbf{z}}{2\tau} \right)^2 - \frac{\mathbf{z}^2}{4\tau} \quad \mathbf{k}' := \mathbf{k} - \frac{i\mathbf{z}}{2\tau} \\ \Rightarrow G(\mathbf{z}) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty d\tau e^{-\tau m^2 - \frac{\mathbf{z}^2}{4\tau}} \int d^d \mathbf{k}' e^{-\tau \mathbf{k}'^2} \\ \int d^d \mathbf{k}' e^{-\tau \mathbf{k}'^2} &= \left( \frac{\pi}{\tau} \right)^{\frac{d}{2}} \quad (\tau > 0) \\ G(\mathbf{z}) &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^\infty d\tau \tau^{-\frac{d}{2}} e^{-\tau m^2 - \frac{\mathbf{z}^2}{4\tau}} \end{aligned}$$

Cambio di variabile:

$$\begin{aligned} \tau &:= \frac{|\mathbf{z}|}{2m} e^t, \quad d\tau = \frac{|\mathbf{z}|}{2m} e^t dt, \quad \tau^{-\frac{d}{2}} = \left( \frac{|\mathbf{z}|}{2m} \right)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{d}{2}t} \\ -\tau m^2 - \frac{\mathbf{z}^2}{4\tau} &= -\frac{|\mathbf{z}|}{2m} e^t m^2 - \frac{\mathbf{z}^2}{4} \frac{2m}{|\mathbf{z}|} e^{-t} = -m|\mathbf{z}| \cosh t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \left( \frac{|z|}{2m} \right)^{1-\frac{d}{2}} e^{(1-\frac{d}{2})t} e^{-m|z| \cosh t} = \int_{-\infty}^0 \dots + \int_0^{+\infty} \dots$$

Ho che:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{-\infty}^0 dt \left( \frac{|z|}{2m} \right)^{1-\frac{d}{2}} e^{(1-\frac{d}{2})t} e^{-m|z| \cosh t} = \\ & \stackrel{t'=-t}{=} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} dt' \left( \frac{|z|}{2m} \right)^{1-\frac{d}{2}} e^{-(1-\frac{d}{2})t'} e^{-m|z| \cosh t'} \\ & \stackrel{t' \rightarrow t}{\Rightarrow} G(z) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_0^{+\infty} dt \left( \frac{|z|}{2m} \right)^{1-\frac{d}{2}} 2 \cosh \left[ \left( 1 - \frac{d}{2} \right) t \right] e^{-m|z| \cosh t} \end{aligned}$$

Definendo la funzione di Bessel modificata del secondo tipo:

$$K_\nu(x) = \int_0^\infty e^{-x \cosh t} \cosh(\nu t) dt \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow G(z) &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \left( \frac{|z|}{2m} \right)^{1-\frac{d}{2}} 2K_{1-\frac{d}{2}}(m|z|) \\ \text{Re}(x) > 0 &\Rightarrow K_{-\nu}(x) = K_\nu(x) \\ \Rightarrow G(z) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} m^{d-2} (|z|m)^{1-\frac{d}{2}} K_{\frac{d}{2}-1}(m|z|) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Per  $m \rightarrow 0$  posso usare:

$$K_\nu(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \begin{cases} -\gamma - \ln \frac{x}{2} & \nu = 0 \\ \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left( \frac{2}{x} \right)^\nu & \nu > 0 \end{cases} \quad (2.35)$$

dove  $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) \approx 0,577$  (costante di Eulero-Mascheroni)

$\Gamma(\nu)$ : funzione gamma di Eulero, estende il concetto di fattoriale ai numeri complessi, nel senso che per ogni numero intero non negativo  $n$  si ha  $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (2.36)$$

Esercizio: Integrando per parti, dimostrare che:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (2.37)$$

$$\Rightarrow \Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

Usando questa definizione la  $\Gamma$  può essere estesa al piano  $\text{Re}(z) < 0$

$\Rightarrow$  Per  $d > 2$  e  $m \rightarrow 0$ , la (2.34) diventa:

$$G(z) \rightarrow \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} m^{\frac{d}{2}-1} |z|^{1-\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{2} \left( \frac{2}{m|z|} \right)^{\frac{d}{2}-1} = \frac{\Gamma(\frac{d}{2}-1)}{4\pi^{\frac{d}{2}} |z|^{d-2}} \quad (2.38)$$

che corrisponde al potenziale di una carica puntiforme in  $d$  dimensioni.

Caso  $d = 3$ :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Rightarrow G(\mathbf{z}) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{z}|} \quad (2.38')$$

Caso limite  $d = 2$ :

$$(2.34) \Rightarrow G(\mathbf{z}) = \frac{1}{2\pi} K_0(m|\mathbf{z}|) \xrightarrow[m \rightarrow 0]{(2.35)} \frac{1}{2\pi} \left( -\gamma - \ln \frac{m|\mathbf{z}|}{2} \right) \quad (2.39)$$

È chiaro che la  $G$  è definita a meno di una costante additiva nel caso  $m \rightarrow 0$

$$\Rightarrow G(\mathbf{z}) = -\frac{\ln|\mathbf{z}|}{2\pi} \quad (2.40)$$

Check:

$$\Delta_{\mathbf{x}} G(\mathbf{x}) = -\delta(\mathbf{x})$$

A causa dell'invarianza per rotazioni,  $G$  dipende solo da  $|\mathbf{x}|$ .

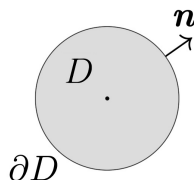
Coordinate polari:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

Considero  $r \neq 0$  (e uso  $\frac{\partial G}{\partial \varphi} = 0$ )

$$\Delta G = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{-\ln r}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) = 0 \quad \checkmark$$

Integro  $\Delta G$  su un disco  $D$  centrato in 0, con raggio  $\varepsilon$ :



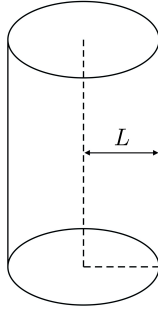
$$\int_D \Delta G d^2 \mathbf{x} = \int_D \nabla \cdot (\nabla G) d^2 \mathbf{x} \stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial D} \mathbf{n} \cdot \nabla G ds$$

con  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$  (versore normale),  $ds = r d\varphi$  (elemento di linea sul cerchio)

$$\int_{\partial D} \mathbf{n} \cdot \nabla G ds = \int_0^{2\pi} \left( \frac{\partial}{\partial r} G \right) r d\varphi = \int_0^{2\pi} -\frac{1}{2\pi r} r d\varphi = -1 = - \int_D \delta(\mathbf{x}) d^2 \mathbf{x} \quad \checkmark$$

Il laplaciano di  $G$  è quindi diverso da zero nell'origine.

### 2.1.3 Flusso di calore in un cilindro infinito



$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}T &= \chi \Delta T \\ T(\mathbf{x}, t) &= 0 \quad \text{per } x \text{ sul bordo} \\ T(\mathbf{x}, 0) &= T_0(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Coordinate cilindriche:  $r, \varphi, z$   
con

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ 0 &\leq r \leq L, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad -\infty < z < \infty.\end{aligned}$$

Separazione delle variabili:

$$\begin{aligned}T(r, \varphi, z, t) &= \tau(t)R(r)\Phi(\varphi)Z(z) \\ \Rightarrow \frac{\partial T}{\partial t} &= \tau' R \Phi Z \\ \Delta T &= \tau(R'' + \frac{1}{r}R')\Phi Z + \tau R \frac{1}{r^2}\Phi''Z + \tau R \Phi Z'' \stackrel{!}{=} \frac{1}{\chi} \tau' R \Phi Z \\ \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{R}(R'' + \frac{1}{r}R')}_{C_1 - C_2} + \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\Phi''}{\Phi}}_{C_2} + \underbrace{\frac{Z''}{Z}}_{C_1} - \underbrace{\frac{1}{\chi} \frac{\tau'}{\tau}}_{C_1} &= 0\end{aligned}$$

La funzione di  $z$  è costante ( $C_2$ ), analogamente la funzione di  $t$  ( $C_1$ ) e di conseguenza la parte rimanente funzione di  $r, \varphi$  è costante ( $C_1 - C_2$ ).

Questo è possibile solo se tutte e tre le funzioni sono costanti. L'equazione differenziale alle derivate parziali si è separata in un insieme di equazioni differenziali ordinarie.

Risolvo:

$$\begin{aligned}\tau' &= \chi \tau C_1 \Rightarrow \tau = \tau_0 e^{\chi C_1 t} \\ Z'' &= C_2 Z \Rightarrow Z = Z_0 e^{\sqrt{C_2} z} + Z_1 e^{-\sqrt{C_2} z} \\ r^2 \frac{1}{R}(R'' + \frac{1}{r}R') + \frac{\Phi''}{\Phi} &= (C_1 - C_2)r^2\end{aligned}$$

Pongo:

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = -\lambda^2 = \text{cost}$$

e ottengo:

$$r^2 \frac{1}{R} (R'' + \frac{1}{r} R') + (C_2 - C_1) r^2 = \lambda^2$$

Risolvero l'equazione per  $\Phi$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Phi &= \Phi_0 \cos(\lambda\varphi) + \Phi_1 \sin(\lambda\varphi) \stackrel{!}{=} \Phi_0 \cos(\lambda(\varphi + 2\pi)) + \Phi_1 \sin(\lambda(\varphi + 2\pi)) = \\ &= \Phi_0 (\cos(\lambda\varphi) \cos(2\pi\lambda) - \sin(\lambda\varphi) \sin(2\pi\lambda)) + \Phi_1 (\sin(\lambda\varphi) \cos(2\pi\lambda) + \cos(\lambda\varphi) \sin(2\pi\lambda)) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \Phi_0 \cos(2\pi\lambda) + \Phi_1 \sin(2\pi\lambda) = \Phi_0 \\ -\Phi_0 \sin(2\pi\lambda) + \Phi_1 \cos(2\pi\lambda) = \Phi_1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{pmatrix} \cos(2\pi\lambda) - 1 & \sin(2\pi\lambda) \\ -\sin(2\pi\lambda) & \cos(2\pi\lambda) - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_0 \\ \Phi_1 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Ho soluzione non banale solo per determinante nullo

$$\Rightarrow \cos(2\pi\lambda) = 1, \quad \sin(2\pi\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Basta prendere  $m \in \mathbb{N}_0$ , per cui le funzioni  $\Phi$  formano un sistema completo.

$\rightarrow$  L'equazione radiale diventa:

$$r^2 R'' + r R' + ((C_2 - C_1) r^2 - m^2) R = 0$$

Supponiamo (per semplicità) che  $T_0(\mathbf{x})$  dipenda solo da  $r, \varphi$  e non da  $z$ :

$$T(r, \varphi, z, 0) = \tau_0 R \Phi Z \stackrel{!}{=} T_0(r, \varphi) \Rightarrow Z = \text{cost} \Rightarrow C_2 = 0$$

$$Z = Z_0 e^{\sqrt{C_2} z} + Z_1 e^{-\sqrt{C_2} z}$$

Senza perdere la generalità poniamo  $Z = 1$

$C_1 < 0$  altrimenti  $T$  diverge per  $t \rightarrow \infty$  (comportamento non fisico).

Inoltre si può far vedere che la soluzione dell'equazione radiale (con  $C_2 = 0$ ) diverge nell'origine (per le nostre condizioni al contorno) se  $C_1 > 0$ .

Definisco una nuova variabile radiale:  $x := \sqrt{|C_1|} r$

$$\Rightarrow x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} + (x^2 - m^2) R = 0 \quad (2.41)$$

*Equazione differenziale di Bessel*

Risolviamo cercando una soluzione in serie di potenze.

Ansatz: cerchiamo soluzioni della forma:

$$\begin{aligned} R(x) &= x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_0 \neq 0 \\ R'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \sum_n a_n x^n + x^\alpha \sum_n n a_n x^{n-1} \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$R''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} \sum_n a_n x^n + 2\alpha x^{\alpha-1} \sum_n n a_n x^{n-1} + x^\alpha \sum_n n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Sostituisco nella (2.41):

$$\begin{aligned} & \alpha(\alpha - 1)x^\alpha \sum_n a_n x^n + 2\alpha x^\alpha \sum_n n a_n x^n + x^\alpha \sum_n n(n-1) a_n x^n + \\ & + \alpha x^\alpha \sum_n a_n x^n + x^\alpha \sum_n n a_n x^n + (x^2 - m^2)x^\alpha \sum_n a_n x^n = 0 \end{aligned}$$

Dopo opportune semplificazioni, dividendo quello che rimane per  $x^\alpha$ , ottengo:

$$(\alpha^2 - m^2) \sum_n a_n x^n + \sum_n a_n x^{n+2} + 2\alpha \sum_n n a_n x^n + \sum_n n^2 a_n x^n = 0$$

Studio il prefattore di  $x^0$ :

$$\alpha^2 a_0 - m^2 a_0 = 0 \Rightarrow \alpha = \pm m$$

Scarto la soluzione  $\alpha = -m$  perché non fisica (divergerebbe sull'asse del cilindro).

Soluzione regolare in  $x = 0$ :  $\alpha = m$ .

In tal caso:

$$2m \sum_n n a_n x^n + \sum_n n^2 a_n x^n + \sum_n a_n x^{n+2} = 0 \quad (2.43)$$

Riscrivo l'ultima parte:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} \stackrel{n'=n+2}{=} \sum_{n'=2}^{\infty} a_{n'-2} x^{n'} = \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^n$$

Studio il prefattore di  $x^1$ :

$$2ma_1 + a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = 0$$

$\Rightarrow$  la (2.43) diventa:

$$\begin{aligned} & \sum_{n=2}^{\infty} x^n (a_n(2mn + n^2) + a_{n-2}) = 0 \\ & \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{2mn + n^2} \end{aligned} \quad (2.44)$$

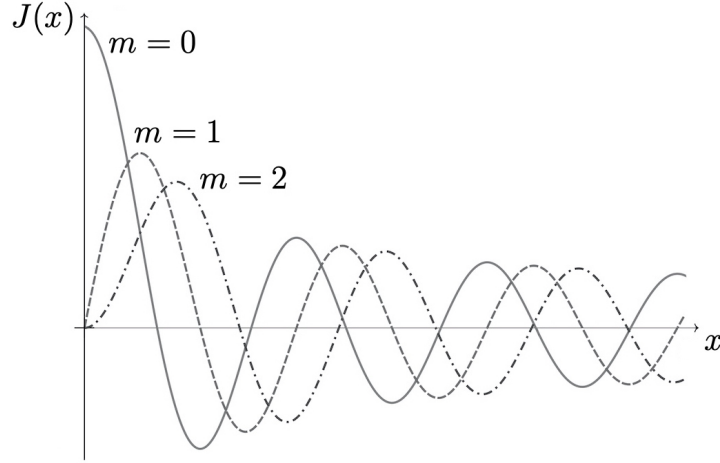
$\rightarrow$  relazione di ricorrenza

Scegliendo  $a_0 = \frac{2^{-m}}{m!}$  per motivi di normalizzazione, si ottiene la soluzione:

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}}{k!(m+k)!} \quad (2.45)$$

dove per  $m$  non interi si definisce  $m! = \Gamma(m+1)$  in termini della funzione gamma.

$J_m$  : funzione di Bessel del primo tipo



$$\Rightarrow R = J_m(\sqrt{|C_1|}r)$$

La costante di integrazione può essere determinata imponendo le condizioni al contorno:

$$T(r = L, \varphi, z, t) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow R(r = L) = 0$$

$$\Rightarrow J_m(\sqrt{|C_1|}L) = 0 \Rightarrow \sqrt{|C_1|}L = j_k^{(m)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

dove  $j_k^{(m)}$  sono gli zeri positivi di  $J_m(x)$ , noti numericamente.

$$\Rightarrow C_1 = - \left( \frac{j_k^{(m)}}{L} \right)^2$$

$$\Rightarrow T(r, \varphi, z, t) = \tau_0 e^{-\chi \left( j_k^{(m)}/L \right)^2 t} J_m \left( j_k^{(m)} \frac{r}{L} \right) (\Phi_0 \cos(m\varphi) + \Phi_1 \sin(r\varphi))$$

La costante  $\tau_0$  si può riassorbire in  $\Phi_0$  e  $\Phi_1$ .

La soluzione generale sarà una combinazione lineare di queste soluzioni:

$$T(r, \varphi, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\chi \left( j_k^{(m)}/L \right)^2 t} J_m \left( j_k^{(m)} \frac{r}{L} \right) (C_{km} \cos(m\varphi) + S_{km} \sin(m\varphi)) \quad (2.46)$$

$$T(r, \varphi, z, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{J_m \left( j_k^{(m)} \frac{r}{L} \right) (C_{km} \cos(m\varphi) + S_{km} \sin(m\varphi))}_{\text{sistema completo di funzioni nel cilindro}} \stackrel{!}{=} T_0(r, \varphi) \quad (2.47)$$

→ qualsiasi funzione  $T_0(r, \varphi)$  con  $T_0(L, \varphi) = 0$  possiede uno sviluppo di questo tipo.

Le costanti  $C_{km}$  e  $S_{km}$  devono essere scelte tali che la (2.47) sia soddisfatta.



## 2.2 Problemi non omogenei

Spesso la separazione delle variabili riduce delle equazioni differenziali alle derivate parziali a delle equazioni differenziali ordinarie, come per esempio:

$$a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = F(x) \quad \alpha < x < \beta \quad (2.48)$$

Ipotesi:  $a(x)$  continuamente differenziabile;  $b(x)$ ,  $c(x)$  continue.

Moltiplico la (2.48) con

$$\frac{1}{a(x)} \exp \left( \int_{\alpha}^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi \right)$$

e definisco

$$p(x) := \exp \left( \int_{\alpha}^x \frac{b(\xi)}{a(\xi)} d\xi \right)$$

$$q(x) := \frac{c(x)}{a(x)}p(x), \quad f(x) := \frac{F(x)}{a(x)}p(x)$$

Posso scrivere la *forma autoaggiunta* della (2.48):

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + qu = f(x) \quad (2.49)$$

Digressione:

$$\underbrace{p \frac{d}{dx}}_{:= \frac{d}{dy}} \left( p \frac{d}{dx} u \right) + \underbrace{pq}_{:= \omega^2} u = \underbrace{pf}_{:= \tilde{f}}$$

$$dy = \frac{dx}{p(x)} \Rightarrow y = \int \frac{dx}{p(x)}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dy^2} + \omega^2 u = \tilde{f} \quad \omega = \omega(y)$$

È un'equazione di oscillatore forzato con frequenza che dipende dal tempo. Viene chiamato *oscillatore di Ermakoff*, e trova applicazioni in Cosmologia (equazione di Mukhanov-Sasaki) per quanto riguarda la teoria dell'inflazione.

Equazione omogenea:

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{dv}{dx} \right) + qv = 0 \quad (2.50)$$

Possiede 2 soluzioni ( $2^o$  ordine)  $v_1, v_2$  linearmente indipendenti.

$$\rightarrow \text{Wronskiano} \quad \begin{vmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

$\rightarrow$  Soluzione generale:

$$v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x), \quad c_1, c_2 \text{ costanti}$$

Considera la funzione:

$$w(x) = v_1(x) \int_{\alpha}^x v_2(\xi) f(\xi) d\xi - v_2(x) \int_{\alpha}^x v_1(\xi) f(\xi) d\xi \quad (2.51)$$

(Variazione delle costanti)

$$\begin{aligned} \Rightarrow w'(x) &= v_1'(x) \int_{\alpha}^x v_2(\xi) f(\xi) d\xi - v_2'(x) \int_{\alpha}^x v_1(\xi) f(\xi) d\xi + v_1(x) v_2(x) f(x) - v_2(x) v_1(x) f(x) = \\ &= v_1'(x) \int_{\alpha}^x v_2(\xi) f(\xi) d\xi - v_2'(x) \int_{\alpha}^x v_1(\xi) f(\xi) d\xi \\ \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dw}{dx} \right) &= \underbrace{\frac{d}{dx} (p(x) v_1'(x))}_{-qv_1} \int_{\alpha}^x v_2(\xi) f(\xi) d\xi - \underbrace{\frac{d}{dx} (p(x) v_2'(x))}_{-qv_2} \int_{\alpha}^x v_1(\xi) f(\xi) d\xi + \\ &+ p(x) v_1'(x) v_2(x) f(x) - p(x) v_2'(x) v_1(x) f(x) = -qw + p(v_1' v_2 - v_2' v_1) f \end{aligned}$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ p(x) \underbrace{(v_1'(x) v_2(x) - v_2'(x) v_1(x))}_{\text{Wronskiano} \neq 0} \right\} &= \\ = \underbrace{\frac{d}{dx} (p v_1')}_{-qv_1} v_2 - \underbrace{\frac{d}{dx} (p v_2')}_{-qv_2} v_1 + p v_1' v_2' - p v_2' v_1' &= 0 \\ \Rightarrow p(x) (v_1'(x) v_2(x) - v_2'(x) v_1(x)) &:= K \quad \text{costante} \end{aligned}$$

Quindi:

$$\frac{d}{dx} \left( p \frac{dw}{dx} \right) + qw = K f \quad (2.52)$$

Inoltre, se  $v_1', v_2'$  sono limitati per  $x \rightarrow \alpha$ :  $w(\alpha) = w'(\alpha) = 0$

Divido la (2.52) per  $K$  (è sempre diversa da 0 poiché  $p \neq 0$  e Wronskiano  $\neq 0$ )

$\Rightarrow$  la funzione  $u(x) = \frac{w(x)}{K}$  è una soluzione del problema ai valori iniziali

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + qu &= f(x) \quad x > \alpha \\ u(\alpha) &= u'(\alpha) = 0 \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\Rightarrow u(x) = \int_{\alpha}^x R(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.54)$$

con

$$R(x, \xi) := \frac{v_1(x) v_2(\xi) - v_2(x) v_1(\xi)}{p(x) (v_1'(x) v_2(x) - v_2'(x) v_1(x))} \quad (2.55)$$

funzione di Green (one-sided)

Il denominatore della (2.55) è costante  $\Rightarrow R(x, \xi)$  soddisfa l'equazione omogenea (2.50) sia come funzione di  $x$  che di  $\xi$ .

N.B.:

$$R(x, \xi) = -R(\xi, x)$$

Per  $\xi$  fissato:  $R(x, \xi)$  è la soluzione del problema omogeneo ai valori iniziali

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dR}{dx} \right) + q(x)R(x) &= 0 \quad x > \xi \\ R|_{x=\xi} &= 0, \quad \frac{dR}{dx} \Big|_{x=\xi} \stackrel{(2.55)}{=} \frac{1}{p(\xi)} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Esempio: *Oscillatore armonico invertito forzato*

$$\begin{aligned} u'' - u &= f(x) \quad x > 0 \\ u(0) &= u'(0) = 0 \end{aligned}$$

Soluzione: Per  $\xi$  fissato,  $R(x, \xi)$  soddisfa:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{d^2 R}{dx^2} - R = 0, & x > \xi \\ R|_{x=\xi} = 0 \\ \frac{dR}{dx} \Big|_{x=\xi} = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow R = A(\xi) \sinh(x) + B(\xi) \cosh(x) \\ &\begin{cases} R|_{x=\xi} = A \sinh \xi + B \cosh \xi = 0 \\ \frac{dR}{dx} \Big|_{x=\xi} = A \cosh \xi + B \sinh \xi = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow A = \cosh \xi, \quad B = -\sinh \xi \\ &\Rightarrow R = \sinh(x - \xi) \\ (2.54) &\Rightarrow u(x) = \int_0^x f(\xi) \sinh(x - \xi) d\xi \end{aligned}$$

Commenti:

- (i) Se  $u(\alpha), u'(\alpha) \neq 0$  aggiungi soluzione  $c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$  dell'equazione omogenea, in modo tale da soddisfare le nuove condizioni iniziali.

Nell'esempio sopra:

$$u(x) = \int_0^x f(\xi) \sinh(x - \xi) d\xi + c_1 \sinh(x) + c_2 \cosh(x)$$

soddisfa  $u(0) = c_2, u'(0) = c_1$

- (ii) (2.54)  $\Rightarrow$  Il valore di  $u(x)$  dipende solo da  $f(\xi)$  per  $\xi < x$  (causalità).

$\rightarrow$  Comportamento molto simile a quello delle equazioni differenziali alle derivate parziali di tipo iperbolico.

### 2.2.1 Problema ai valori al contorno

Risolvi

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( p \frac{du}{dx} \right) + qu &= -f(x) \quad \alpha < x < \beta \\ u(\alpha) &= u(\beta) = 0 \end{aligned} \quad (2.57)$$

Soluzione generale:

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{\alpha}^x R(x, \xi) f(\xi) d\xi + c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x) \\ \Rightarrow \begin{cases} u(\alpha) = c_1 v_1(\alpha) + c_2 v_2(\alpha) = 0 \\ u(\beta) = - \int_{\alpha}^{\beta} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi + c_1 v_1(\beta) + c_2 v_2(\beta) = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Sistema lineare non omogeneo per le variabili  $c_1$  e  $c_2$ .

La (2.58) ha una soluzione per  $c_1, c_2$  se:

$$D := v_1(\alpha)v_2(\beta) - v_2(\alpha)v_1(\beta) \neq 0$$

In tal caso

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{v_2(\alpha)}{D} \int_{\alpha}^{\beta} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi = -\frac{v_2(\alpha)}{D} \int_{\alpha}^x R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi - \frac{v_2(\alpha)}{D} \int_x^{\beta} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi \\ c_2 &= \frac{v_1(\alpha)}{D} \int_{\alpha}^{\beta} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi = \frac{v_1(\alpha)}{D} \int_{\alpha}^x R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{v_1(\alpha)}{D} \int_x^{\beta} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

E quindi la soluzione diventa:

$$\begin{aligned} u(x) &= - \int_{\alpha}^x \left[ R(x, \xi) + \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D} R(\beta, \xi) \right] f(\xi) d\xi + \\ &\quad - \int_x^{\beta} \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D} R(\beta, \xi) f(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Consideriamo:

$$\begin{aligned} R(x, \xi) + \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D} R(\beta, \xi) &= \\ \stackrel{(2.55)}{=} \frac{v_1(x)v_2(\xi) - v_2(x)v_1(\xi)}{KD} (v_1(\alpha)v_2(\beta) - v_2(\alpha)v_1(\beta)) + \\ + \frac{v_2(\alpha)v_1(x) - v_1(\alpha)v_2(x)}{D} \frac{v_1(\beta)v_2(\xi) - v_2(\beta)v_1(\xi)}{K} &= \\ = \frac{1}{KD} (v_1(\alpha)v_2(\xi) - v_2(\alpha)v_1(\xi)) (v_1(x)v_2(\beta) - v_2(x)v_1(\beta)) \end{aligned}$$

Definiamo:

$$G(x, \xi) := \begin{cases} \frac{1}{KD} (v_1(\xi)v_2(\alpha) - v_2(\xi)v_1(\alpha))(v_1(x)v_2(\beta) - v_2(x)v_1(\beta)), & \xi \leq x \\ \frac{1}{KD} (v_1(x)v_2(\alpha) - v_2(x)v_1(\alpha))(v_1(\xi)v_2(\beta) - v_2(\xi)v_1(\beta)), & x \leq \xi \end{cases} \quad (2.59)$$

*funzione di Green (two-sided)*

$\Rightarrow$  soluzione del problema ai valori al contorno (2.57):

$$u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (2.60)$$

N.B.:

$$G(x, \xi) = G(\xi, x) \quad (2.61)$$

Per determinare  $G$  notiamo che, per ogni  $\xi$  fissato, la  $G$  soddisfa il problema ai valori al contorno:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} (p(x) \frac{dG}{dx}) + q(x)G = 0 & x \neq \xi \\ G|_{x=\alpha} = G|_{x=\beta} = 0 \\ G|_{x=\xi+0} = G|_{x=\xi-0} & (G \text{ continua in } x = \xi) \\ \frac{dG}{dx}|_{x=\xi+0} - \frac{dG}{dx}|_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)} & (\frac{dG}{dx} \text{ discontinua in } x = \xi) \end{cases} \quad (2.62)$$

(Dimostrazione: Usa la (2.59). Per ricavare l'ultima equazione bisogna usare anche la definizione di  $K$ )

Esempio:

$$\begin{aligned} ((1+x)^2 u')' - u &= f(x) & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned}$$

Scriviamo equazione omogenea

$$\frac{d}{dx} \left( (1+x)^2 \frac{dG(x, \xi)}{dx} \right) - G(x, \xi) = 0$$

Prova  $G(x, \xi) = c(\xi)(1+x)^\alpha$

$$\Rightarrow \frac{dG}{dx} = c\alpha(1+x)^{\alpha-1}$$

$$\left( (1+x)^2 \frac{dG}{dx} \right)' = (c\alpha(1+x)^{\alpha+1})' = c\alpha(\alpha+1)(1+x)^\alpha \stackrel{!}{=} G = c(1+x)^\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5}) := \alpha_{\pm}$$

$$\Rightarrow G(x, \xi) = \begin{cases} c_+(\xi)(1+x)^{\alpha_+} + c_-(\xi)(1+x)^{\alpha_-}, & x < \xi \\ \tilde{c}_+(\xi)(1+x)^{\alpha_+} + \tilde{c}_-(\xi)(1+x)^{\alpha_-}, & x > \xi \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
G|_{x=0} &= c_+ + c_- \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow c_- = -c_+ \\
G|_{x=1} &= \tilde{c}_+ 2^{\alpha_+} + \tilde{c}_- 2^{\alpha_-} \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \tilde{c}_- = -\tilde{c}_+ 2^{\sqrt{5}} \\
\Rightarrow G(x, \xi) &= \begin{cases} c_+(\xi)((1+x)^{\alpha_+} - (1+x)^{\alpha_-}), & x < \xi \\ \tilde{c}_+(\xi)((1+x)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+x)^{\alpha_-}), & x > \xi \end{cases} \\
&\stackrel{!}{=} G(\xi, x) = \begin{cases} c_+(x)((1+\xi)^{\alpha_+} - (1+\xi)^{\alpha_-}), & \xi < x \\ \tilde{c}_+(x)((1+\xi)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+\xi)^{\alpha_-}), & \xi > x \end{cases} \\
\Rightarrow \tilde{c}_+(\xi)((1+x)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+x)^{\alpha_-}) &= c_+(x)((1+\xi)^{\alpha_+} - (1+\xi)^{\alpha_-}) \\
\frac{(1+x)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+x)^{\alpha_-}}{c_+(x)} &= \frac{(1+\xi)^{\alpha_+} - (1+\xi)^{\alpha_-}}{\tilde{c}_+(\xi)} := \frac{1}{\lambda} \quad \text{costante} \\
c_+(x) &= \lambda((1+x)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+x)^{\alpha_-}) \\
\tilde{c}_+(\xi) &= \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - (1+\xi)^{\alpha_-}) \\
\Rightarrow G(x, \xi) &= \begin{cases} \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+\xi)^{\alpha_-})((1+x)^{\alpha_+} - (1+x)^{\alpha_-}), & x < \xi \\ \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - (1+\xi)^{\alpha_-})((1+x)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+x)^{\alpha_-}), & x > \xi \end{cases} \\
\Rightarrow G|_{x=\xi+0} &= G|_{x=\xi-0} \quad (\text{continuità}) \\
\text{Ci manca l'ultima condizione sul salto della derivata e questa mi determina } \lambda: & \\
\frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi+0} &= \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - (1+\xi)^{\alpha_-})(\alpha_+(1+\xi)^{\alpha_+-1} - 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{\alpha_--1}) \\
\frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi-0} &= \lambda((1+\xi)^{\alpha_+} - 2^{\sqrt{5}}(1+\xi)^{\alpha_-})(\alpha_+(1+\xi)^{\alpha_+-1} - \alpha_-(1+\xi)^{\alpha_--1}) \\
\frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi-0} &= \\
= \lambda \Big[ \alpha_+(1+\xi)^{2\alpha_+-1} - 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{\alpha_++\alpha_--1} - \alpha_+(1+\xi)^{\alpha_--\alpha_+-1} + 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{2\alpha_--1} + \\
- \alpha_+(1+\xi)^{2\alpha_+-1} + \alpha_-(1+\xi)^{\alpha_++\alpha_--1} + 2^{\sqrt{5}}\alpha_+(1+\xi)^{\alpha_--\alpha_+-1} - 2^{\sqrt{5}}\alpha_-(1+\xi)^{2\alpha_--1} \Big] &= \\
&\stackrel{!}{=} -\frac{1}{p(\xi)} = -\frac{1}{(1+\xi)^2} \\
\alpha_+ + \alpha_- - 1 &= -2 \\
\Rightarrow \lambda \Big[ -2^{\sqrt{5}}\alpha_- - \alpha_+ + \alpha_- + 2^{\sqrt{5}}\alpha_+ \Big] &= -1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$  determina  $\lambda$

Nota la funzione di Green, tramite convoluzione ottengo la soluzione.

### 2.2.2 Problema ai valori al contorno più generale

$$\begin{aligned}(pu')' + qu &= -f & \alpha < x < \beta \\ u(\alpha) &= a, & u(\beta) &= b\end{aligned}\tag{2.63}$$

Sappiamo già una soluzione della non omogenea  $\Rightarrow$  bisogna aggiungere poi l'omogenea.  
A tal fine nota che  $\frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha)$  soddisfa:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha) \right) \right] + q(x) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha) &= 0, & \alpha < x < \beta \\ \frac{\partial G}{\partial \xi}(\alpha, \alpha) &= \frac{1}{p(\alpha)}, & \frac{\partial G}{\partial \xi}(\beta, \alpha) &= 0\end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \beta) \right) \right] + q(x) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \beta) &= 0, & \alpha < x < \beta \\ \frac{\partial G}{\partial \xi}(\alpha, \beta) &= 0, & \frac{\partial G}{\partial \xi}(\beta, \beta) &= -\frac{1}{p(\beta)}\end{aligned}$$

(seguono dalla definizione (2.59)  $\rightarrow$  esercizio)

$\rightarrow$  il problema (2.63) ha la soluzione:

$$u(x) = \underbrace{\int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) f(\xi) d\xi}_{\text{Sol. non-omogenea soddisfa } u(\alpha) = 0} + \underbrace{a p(\alpha) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha) - b p(\beta) \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \beta)}_{\text{Soluzione equazione omogenea}}\tag{2.64}$$

Vale che  $u(\alpha) = a$

Nella soluzione del problema (2.57) abbiamo dovuto assumere  $D \neq 0$ .

Nel caso  $D = 0$  le equazioni

$$\begin{cases} c_1 v_1(\alpha) + c_2 v_2(\alpha) = 0 \\ c_1 v_1(\beta) + c_2 v_2(\beta) = 0 \end{cases}$$

ammettono soluzioni non banali per  $c_1, c_2$

$$\Rightarrow v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$$

soddisfa

$$(pv')' + qv = 0, \quad \alpha < x < \beta, \quad v(\alpha) = v(\beta) = 0$$

$\Rightarrow$  Se  $u$  è una soluzione del problema ai valori al contorno (2.63), lo è anche  $u + cv$ ,  $\forall c$  costante.

La (2.63) non può avere una soluzione unica.

Inoltre: moltiplica la (2.63) con  $v$  e integra da  $\alpha$  a  $\beta$ :

$$\Rightarrow - \int_{\alpha}^{\beta} f(x) v(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} ((pu')' + qu) v(x) dx =$$

integrando due volte per parti ( $v(pu')' \rightarrow -v'pu' \rightarrow (v'p)'u$ )

$$= [vpu' - v'pu]_{\alpha}^{\beta} + \int_{\alpha}^{\beta} u \underbrace{[(pv')' + qv]}_0 dx =$$

( $v$  soddisfa l'equazione omogenea)

$$= p(\alpha)v'(\alpha)a - p(\beta)v'(\beta)b$$

Se il problema (2.63) deve avere una soluzione, la funzione  $f(x)$  e le due costanti  $a, b$  devono soddisfare:

$$p(\alpha)v'(\alpha)a - p(\beta)v'(\beta)b = - \int_{\alpha}^{\beta} v(x)f(x)dx$$

altrimenti non ci può essere una soluzione del problema.

$\Rightarrow$  nel caso in cui  $D = 0$ , il problema (2.63) può avere zero o infinite soluzioni, ma mai una sola soluzione.

Questo distingue il problema ai valori al contorno dai problemi ai valori iniziali.

### 2.2.3 Problemi ai valori al contorno ancora più generali

$$\begin{aligned} (pu')' + qu &= -f(x) & \alpha < x < \beta \\ -\mu_1 u'(\alpha) + \sigma_1 u(\alpha) &= a \\ \mu_2 u'(\beta) + \sigma_2 u(\beta) &= b \end{aligned} \tag{2.65}$$

(condizioni al contorno di Robin)

Ricapitolando:

$$\mu_1 = \mu_2 = 0 : \text{Dirichlet}$$

$$\sigma_1 = \sigma_2 = 0 : \text{Neumann}$$

La funzione di Green  $G(x, \xi)$  si ricava come prima se

$$\begin{aligned} D &:= [-\mu_1 v_1'(\alpha) + \sigma_1 v_1(\alpha)] [\mu_2 v_2'(\beta) + \sigma_2 v_2(\beta)] + \\ &- [-\mu_1 v_2'(\alpha) + \sigma_1 v_2(\alpha)] [\mu_2 v_1'(\beta) + \sigma_2 v_1(\beta)] \neq 0 \end{aligned}$$

(esercizio)

$G(x, \xi)$  è la soluzione del problema:

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dG}{dx} \right) + q(x)G = 0 & x \neq \xi \\ -\mu_1 \frac{dG}{dx} \Big|_{x=\alpha} + \sigma_1 G \Big|_{x=\alpha} = \mu_2 \frac{dG}{dx} \Big|_{x=\beta} + \sigma_2 G \Big|_{x=\beta} = 0 \\ G \Big|_{x=\xi+0} = G \Big|_{x=\xi-0} \\ \frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{dG}{dx} \Big|_{x=\xi-0} = -\frac{1}{p(\xi)} \end{cases} \tag{2.66}$$

(paragona con le (2.62), qui le condizioni al contorno su  $G$  sono più generali).



$G$  soddisfa ancora  $G(x, \xi) = G(\xi, x)$

Soluzione di (2.65):

$$u(x) = \int_{\alpha}^{\beta} G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{p(\alpha)}{\mu_1} a G(x, \alpha) + \frac{p(\beta)}{\mu_2} b G(x, \beta) \quad (2.67)$$

$(\mu_1, \mu_2 \neq 0)$

- $\mu_1 = 0$ : sostituisce  $\frac{1}{\mu_1} G(x, \alpha)$  con  $\frac{1}{\sigma_1} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \alpha)$
- $\mu_2 = 0$ : sostituisce  $\frac{1}{\mu_2} G(x, \beta)$  con  $-\frac{1}{\sigma_2} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, \beta)$

(Siccome  $D \neq 0$  non può essere  $\mu_1 = \sigma_1 = 0$  oppure  $\mu_2 = \sigma_2 = 0$ )

Caso  $D = 0$ : il problema (2.65) avrà nessuna soluzione o molte soluzioni ed è quindi ben posto se e solo se  $D \neq 0$ . In tal caso la soluzione è data dalla (2.67).

N.B.:

- (i) In un problema ai valori al contorno, il valore di  $u$  in un dato punto dipende dai valori di  $f(x)$  nell'intero intervallo  $(\alpha, \beta)$ .  
→ Comportamento simile a quello delle equazioni differenziali alle derivate parziali ellittiche (vedi più avanti).
- (ii) Se una soluzione particolare dell'equazione differenziale non omogenea può essere indovinata, non è necessario usare le funzioni di Green

## 2.2.4 Applicazione del formalismo imparato

Conduzione di calore in un intervallo con sorgente

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \chi \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + S(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0 \\ T(0, t) &= T(L, t) = 0, \quad T(x, 0) = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

Sviluppa  $T(x, t)$  in serie di Fourier:

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.69)$$

con

$$b_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L T(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.70)$$

(vedi (2.25))

Sviluppiamo anche la sorgente:

$$S(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (2.71a)$$

$$s_n(t) = \frac{2}{L} \int_0^L S(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (2.71b)$$

(2.69), (2.71a) in (2.68):

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} b_n(t) = \chi \left( -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right) b_n(t) + s_n(t) \quad (2.72)$$

Questa si risolve facilmente col metodo della variazione delle costanti.

Invece con la funzione di Green:

Riscrivi la (2.72) nella forma

$$(p(t)u'(t))' = f(t)$$

con

$$p(t) = \exp \left( \frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t \right), \quad u'(t) = b_n(t), \quad f(t) = p(t)s_n(t)$$

$$T(x, 0) = 0 \Rightarrow b_n(0) = 0 \Rightarrow u'(0) = 0$$

$u(t)$  è definita a meno di una costante additiva  $\rightarrow$  scegli  $u(0) = 0$

$\rightarrow$  problema ai valori iniziali (2.53).

Dobbiamo determinare la funzione di Green one-sided

Funzione di Green  $R(t, \xi)$  dalla (2.56):

$$\frac{d}{dt} \left( p(t) \frac{dR}{dt} \right) = 0, \quad t > \xi$$

$$\Rightarrow p(t) \frac{dR}{dt} = C(\xi) \Rightarrow R = -C(\xi) \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t \right) + \tilde{C}(\xi)$$

$$R|_{t=\xi} = -C(\xi) \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right) + \tilde{C}(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{C}(\xi) = \underbrace{C(\xi) \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2}}_{:=\gamma(\xi)} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right)$$

$$\Rightarrow R(t, \xi) = \gamma(\xi) \left( e^{-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi} - e^{-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t} \right)$$

$$\left. \frac{dR}{dt} \right|_{t=\xi} = \gamma(\xi) \frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{p(\xi)} = \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi \right)$$

$$\Rightarrow \gamma(\xi) = \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \Rightarrow R(t, \xi) = \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \left( e^{-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi} - e^{-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t} \right)$$

$$u(t) \stackrel{(2.54)}{=} \int_0^t \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \left( e^{-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi} - e^{-\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t} \right) \underbrace{e^{\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \xi} s_n(\xi)}_{f(\xi)} d\xi =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \int_0^t \left( 1 - \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} (t - \xi) \right) \right) s_n(\xi) d\xi \equiv \int_0^t H(t, \xi) d\xi \\
&b_n(t) = u'(t) = \underbrace{H(t, t)}_0 + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} H(t, \xi) d\xi = \\
&= \frac{L^2}{\chi n^2 \pi^2} \int_0^t \frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} (t - \xi) \right) s_n(\xi) d\xi = \\
&= \int_0^t \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} (t - \xi) \right) s_n(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

Nella (2.69):

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} (t - \xi) \right) s_n(\xi) d\xi \sin \frac{n\pi x}{L}$$

usa:

$$s_n(\xi) = \frac{2}{L} \int_0^L S(y, \xi) \sin \frac{n\pi y}{L} dy \quad (2.71b)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow T(x, t) &= \int_0^t \int_0^L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{L} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} (t - \xi) \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L} S(y, \xi) dy d\xi \\
&\Rightarrow T(x, t) = \int_0^t \int_0^L G(t - \xi, x, y) S(y, \xi) dy d\xi \quad (2.73)
\end{aligned}$$

con

$$G(t - \xi, x, y) := \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} (t - \xi) \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi y}{L} \quad (2.74)$$

che è identica alla (2.22).

N.B.: Se  $T(x, 0) = T_0(x)$  anziché 0, sostituisci  $b_n(0) = 0$  con

$$\begin{aligned}
b_n(0) &= \frac{2}{L} \int_0^L T_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\
\Rightarrow b_n(t) &= \int_0^t \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} (t - \xi) \right) s_n(\xi) d\xi + \underbrace{b_n(0) \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t \right)}_{\substack{\text{Sol. dell'eq. omogenea} \\ b'_n(t) = -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} b_n(t)}} \\
\Rightarrow T(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} (t - \xi) \right) s_n(\xi) d\xi \sin \frac{n\pi x}{L} + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \exp \left( -\frac{\chi n^2 \pi^2}{L^2} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L}
\end{aligned}$$

con

$$b_n(0) = \frac{2}{L} \int_0^L T_0(y) \sin \frac{n\pi x}{L} dy$$

$$\Rightarrow T(x, t) = \int_0^t \int_0^L G(t - \xi, x, y) S(y, \xi) dy d\xi + \int_0^L G(t, x, y) T_0(y) dy \quad (2.75)$$

Abbiamo visto che la (2.74) coincide con la (2.22), ottenuta dalla (2.20).

Questo vale in generale:

vogliamo risolvere

$$\begin{aligned} \partial_t T &= \chi \Delta T + S(\mathbf{x}, t) & \mathbf{x} \in U \\ T(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in \partial U} &= 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

A tal fine: funzione di Green tale che

$$(\partial_t - \chi \Delta_{\mathbf{x}}) G(t - t', \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (2.77)$$

$$\Rightarrow T(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_U d^d \mathbf{y} G(t - t', \mathbf{x}, \mathbf{y}) S(\mathbf{y}, t') \quad (2.78)$$

Dobbiamo trovare  $G$ . Sviluppiamo  $G$  e  $\delta$  su autofunzioni del laplaciano

$$\begin{aligned} G(t - t', \mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega(t-t')} \sum_{n,m} \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{y}) \overbrace{\tilde{G}_{nm}(\omega)}^{\text{FT generalizz.}} \\ \delta(t - t') \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \frac{1}{2\pi} \int d\omega e^{-i\omega(t-t')} \underbrace{\sum_{n,m} \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{y}) \delta_{nm}}_{=\sum_n \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_n(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \text{ completezza di } \{\varphi_n\}} \end{aligned} \quad (2.79)$$

(2.79) in (2.77):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int d\omega \sum_{n,m} (-i\omega + \chi \lambda_n) e^{-i\omega(t-t')} \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{y}) \tilde{G}_{n,m}(\omega) &= \\ = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \sum_{n,m} e^{-i\omega(t-t')} \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{y}) \delta_{nm} & \\ \Rightarrow \tilde{G}_{nm}(\omega) &= \frac{\delta_{nm}}{-i\omega + \chi \lambda_n} \end{aligned}$$

Sostituisco in (2.79):

$$\Rightarrow G(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \sum_{n,m} e^{-i\omega\tau} \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_m(\mathbf{y}) \frac{\delta_{nm}}{-i\omega + \chi \lambda_n}$$

Considera:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{-i\omega + \chi\lambda_n}$$

Per sapere se i poli sono nel semipiano superiore o inferiore devo sapere il segno di  $\lambda_n$ .

*Affermazione:* Tutti gli autovalori  $\lambda_n$  sono positivi.

Dimostrazione:

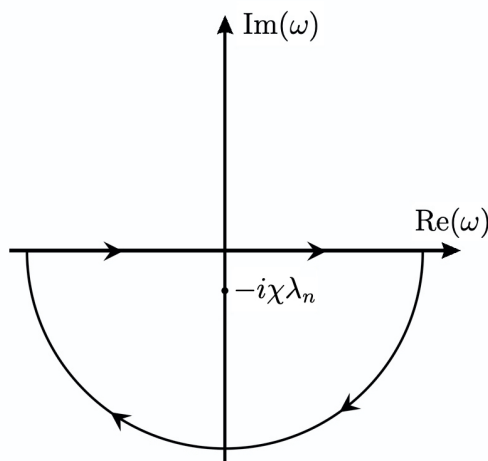
$$0 = \int_U \varphi_n (\Delta \varphi_n + \lambda_n \varphi_n) d^d \mathbf{x} = \int_U [\nabla \cdot (\varphi_n \nabla \varphi_n) - \nabla \varphi_n \cdot \nabla \varphi_n + \lambda_n \varphi_n^2] d^d \mathbf{x} =$$

$$\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial U} \mathbf{n} \cdot (\varphi_n \nabla \varphi_n) d^{d-1} \mathbf{x} + \int_U [-(\nabla \varphi_n)^2 + \lambda_n \varphi_n^2] d^d \mathbf{x}$$

Il primo integrale è nullo per le condizioni al contorno:  $\varphi_n|_{\partial U} = 0$

$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{\int_U (\nabla \varphi_n)^2 d^d \mathbf{x}}{\int_U \varphi_n^2 d^d \mathbf{x}} > 0 \quad \blacksquare$$

$\Rightarrow$  Polo nel semipiano complesso inferiore:



$$e^{-i\omega\tau} = e^{-i(\text{Re}(\omega) + i\text{Im}(\omega))\tau} = e^{-i\text{Re}(\omega)\tau} e^{\text{Im}(\omega)\tau}$$

Il contributo dei semicerchi all'integrale è nullo (come già mostrato in precedenza).

$$\Rightarrow G(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \text{per } \tau < 0 \quad (2.80)$$

Invece, per  $\tau > 0$ :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\tau}}{-i(\omega + i\chi\lambda_n)} \stackrel{\text{residui}}{=} 2\pi e^{-\chi\lambda_n\tau}$$

$$\Rightarrow G(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_n e^{-\chi\lambda_n\tau} \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_n(\mathbf{y}) \quad \text{per } \tau > 0 \quad (2.81)$$

$\Rightarrow$  L'equazione del calore  $(\partial_t - \chi \Delta)T = S$  in  $U$  ha come soluzione:

$$T(\mathbf{x}, t) = \int_0^t dt' \int_U d^d \mathbf{y} G(t - t', \mathbf{x}, \mathbf{y}) S(\mathbf{y}, t') + \int_U d^d \mathbf{y} G(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) T_0(\mathbf{y}) \quad (2.82)$$

Il primo integrale è soluzione particolare dell'equazione non omogenea (vedi (2.78)), tenendo conto della (2.80) e di  $S(\mathbf{y}, t') = 0$  per  $t' < 0$ . Nota che il contributo alla temperatura al tempo  $t$  viene solo dal passato ( $t' < t$ ).

Il secondo integrale è soluzione dell'equazione omogenea in modo tale che  $T(\mathbf{x}, 0) = T_0(\mathbf{x})$ .

### 2.2.5 Altro esempio di applicazione del formalismo imparato

Equazione di Laplace (Poisson) nella sfera di raggio  $R$

$$\begin{aligned} \Delta \phi &= -F(r, \theta, \varphi) & r < R \\ \phi(R, \theta, \varphi) &= 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

(elettrostatica:  $-F = 4\pi\rho$ )

$$\Delta = \partial_r^2 + \frac{2}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2$$

Sviluppo  $\phi$  in armoniche sferiche (reali):

$$\begin{aligned} \phi(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \overbrace{\frac{1}{2} a_{l0}(r) P_l^0(\cos \theta)}^* + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^l (a_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) + b_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \sin(m\varphi)) \right) \\ F(r, \theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} A_{l0}(r) P_l^0(\cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^l (A_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) + B_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \sin(m\varphi)) \right) \end{aligned} \quad (2.84)$$

\* N.B.:  $\frac{1}{2}$  ci vuole perché se no non vale (2.88) per  $a_{l0}$

Sostituendo in (2.83):

$$\begin{aligned} \sum_l \left( \frac{1}{2} a_{l0}''(r) P_l^0(\cos \theta) + \frac{2}{r} \frac{1}{2} a_{l0}'(r) P_l^0(\cos \theta) + \frac{1}{r^2} (-l)(l+1) \frac{1}{2} a_{l0}(r) P_l^0(\cos \theta) \right) + \\ + \sum_{l,m>0} \left( a_{lm}''(r) P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) + b_{lm}''(r) P_l^m(\cos \theta) \sin(m\varphi) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2}{r} a'_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) + \frac{2}{r} b'_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \sin(m\varphi) + \\
& + \frac{1}{r^2} a_{lm}(r) (-l)(l+1) P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) + \frac{1}{r^2} b_{lm}(r) (-l)(l+1) P_l^m(\cos \theta) \sin(m\varphi) \Big) = \\
& = - \sum_l \frac{1}{2} A_{l0}(r) P_l^0(\cos \theta) - \sum_{l,m>0} (A_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) + B_{lm}(r) P_l^m(\cos \theta) \sin(m\varphi))
\end{aligned}$$

Avendo usato:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \left( \sin \theta \partial_\theta \left( P_l^m(\cos \theta) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \right) \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \left( P_l^m(\cos \theta) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} \right) = \\
& = -l(l+1) P_l^m(\cos \theta) \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi}
\end{aligned}$$

Sfrutto il fatto che le armoniche sferiche  $P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi)$  e  $P_l^m(\cos \theta) \sin(m\varphi)$  sono linearmente indipendenti:

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow \begin{aligned} a''_{lm}(r) + \frac{2}{r} a'_{lm}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} a_{lm}(r) &= -A_{lm}(r) \\ b''_{lm}(r) + \frac{2}{r} b'_{lm}(r) - \frac{l(l+1)}{r^2} b_{lm}(r) &= -B_{lm}(r) \end{aligned} \tag{2.85} \\
& a_{lm}(R) = b_{lm}(R) = 0
\end{aligned}$$

Entrambe le equazioni possono essere riscritte nella forma

$$(pu')' + qu = -f$$

con

$$p = r^2, \quad q = -l(l+1), \quad f = A_{lm}(r)r^2 \text{ o } B_{lm}(r)r^2, \quad u = a_{lm}(r) \text{ o } b_{lm}(r)$$

La funzione di Green  $G(r, \xi)$  soddisfa l'equazione omogenea

$$\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dG}{dr} \right) - l(l+1)G = 0, \quad r \neq \xi$$

Prova (di solito un ansatz di potenza funziona):

$$\begin{aligned}
& G(r, \xi) = C(\xi) r^\alpha \\
& \Rightarrow r^2 \frac{dG}{dr} = C\alpha r^{\alpha+1} \\
& \Rightarrow C\alpha(\alpha+1)r^\alpha - l(l+1)Cr^\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = l \vee \alpha = -l-1 \\
& \Rightarrow G(r, \xi) = \begin{cases} c_1(\xi)r^l + c_2(\xi)r^{-l-1}, & \xi \leq r \\ \tilde{c}_1(\xi)r^l + \tilde{c}_2(\xi)r^{-l-1}, & \xi \geq r \end{cases}
\end{aligned}$$

N.B.: L'estremo  $r = 0$  dell'intervallo  $[0, R]$  è un punto singolare:  $p(r) = r^2$  si annulla in  $r = 0$  e la soluzione fondamentale  $\sim r^{-l-1}$  diverge. Al posto di una condizione al contorno in  $r = 0$  richiediamo che  $u$  (e  $G$ ) rimangano limitate (richiesta fisica):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \tilde{c}_2 = 0 \text{ e } G|_{r=\xi+0} = G|_{r=\xi-0} &\Rightarrow c_1 \xi^l + c_2 \xi^{-l-1} = \tilde{c}_1 \xi^l \Rightarrow \tilde{c}_1 = c_1 + c_2 \xi^{-2l-1} \\ \Rightarrow G|_{r=R} = 0 &\Rightarrow c_1 R^l + c_2 R^{-l-1} = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 R^{2l+1} \Rightarrow \tilde{c}_1 = c_1 (1 - R^{2l+1} \xi^{-2l-1}) \\ \Rightarrow G(r, \xi) &= \begin{cases} c_1 r^l (1 - (\frac{R}{r})^{2l+1}), & \xi \leq r \\ c_1 r^l (1 - (\frac{R}{\xi})^{2l+1}), & \xi \geq r \end{cases} \\ \frac{dG}{dr} \Big|_{r=\xi+0} - \frac{dG}{dr} \Big|_{r=\xi-0} &= -\frac{1}{p(\xi)} \end{aligned}$$

Questa diventa un'equazione per la variabile di integrazione  $c_1$ :

$$\begin{aligned} \Rightarrow c_1 &= -\frac{\xi^l}{(2l+1)R^{2l+1}} \\ \Rightarrow G_l(r, \xi) &= \begin{cases} \frac{1}{(2l+1)R} (\frac{\xi}{R})^l [(\frac{r}{R})^{-l-1} - (\frac{r}{R})^l], & \xi \leq r \\ \frac{1}{(2l+1)R} (\frac{r}{R})^l [(\frac{\xi}{R})^{-l-1} - (\frac{\xi}{R})^l], & \xi \geq r \end{cases} \end{aligned} \quad (2.86)$$

$$\begin{aligned} a_{lm}(r) &= \int_0^r G_l(r, \xi) A_{lm}(\xi) \xi^2 d\xi \\ b_{lm}(r) &= \int_0^r G_l(r, \xi) B_{lm}(\xi) \xi^2 d\xi \end{aligned} \quad (2.87)$$

Inversa della (2.84):

$$\begin{aligned} A_{lm}(r) &= \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} F(r, \theta, \varphi) P_l^m(\cos \theta) \cos(m\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \\ B_{lm}(r) &= \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} F(r, \theta, \varphi) P_l^m(\cos \theta) \sin(m\varphi) \sin \theta d\theta d\varphi \end{aligned} \quad (2.88)$$

(usa l'ortogonalità delle armoniche sferiche  $\rightarrow$  esercizio)

Con la (2.87) e (2.88), la (2.84) diventa:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') F(r', \theta', \varphi') r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi' \quad (2.89)$$

(soluzione dell'equazione di Poisson)

dove, per  $r' < r$ :

$$\begin{aligned} G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') &= \sum_{l,m \geq 0} \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \frac{1}{(2l+1)R} \left(\frac{r'}{R}\right)^l \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^{-l-1} - \left(\frac{r}{R}\right)^l \right] \cdot \\ &\cdot P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') (\cos(m\varphi) \cos(m\varphi') + \sin(m\varphi) \sin(m\varphi')) + \end{aligned}$$



$$+ \sum_l \frac{1}{2} \frac{2l+1}{2\pi} \frac{1}{(2l+1)R} \left(\frac{r'}{R}\right)^l \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^{-l-1} - \left(\frac{r}{R}\right)^l \right] P_l^0(\cos \theta) P_l^0(\cos \theta')$$

(per  $r' > r$ : scambia  $r$  con  $r'$  in  $G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi')$ )

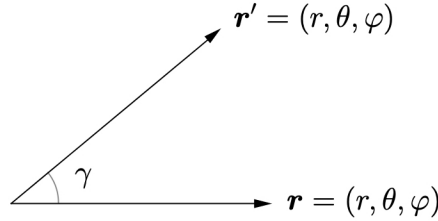
Si può semplificare utilizzando le proprietà dei polinomi di Legendre. Vedremo che il risultato si può ricavare tramite carica immagine.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^l \frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') & \underbrace{\left( \cos(m\varphi) \cos(m\varphi') + \sin(m\varphi) \sin(m\varphi') \right)}_{\frac{1}{2}(e^{im(\varphi-\varphi')} + e^{-im(\varphi-\varphi')})} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{2l+1}{2\pi} P_l^0(\cos \theta) P_l^0(\cos \theta') = \end{aligned}$$

Introduco le armoniche sferiche complesse:

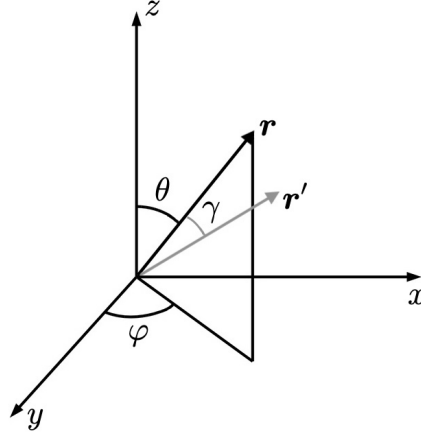
$$\begin{aligned} Y_l^m(\theta, \varphi) &= (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \\ &= \sum_{m=1}^l \left( Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta', \varphi') + \underbrace{Y_l^{m*}(\theta, \varphi)}_{(-1)^m Y_l^{-m}(\theta, \varphi)} \underbrace{Y_l^m(\theta', \varphi')}_{(-1)^m Y_l^{-m*}(\theta', \varphi')} \right) + Y_l^0(\theta, \varphi) Y_l^{0*}(\theta', \varphi') = \\ &= \sum_{m=-l}^l Y_l^m(\theta, \varphi) Y_l^{m*}(\theta', \varphi') = \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma) \end{aligned}$$

con  $\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$ .



Quindi:

$$G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)R} \left(\frac{r'}{R}\right)^l \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^{-l-1} - \left(\frac{r}{R}\right)^l \right] \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\cos \gamma)$$



Funzione generatrice dei polinomi di Legendre:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n \quad (2.90)$$

$$\begin{aligned} G(r, \theta, \varphi, r', \theta', \varphi') &= \frac{1}{4\pi r} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \gamma) \left(\frac{r'}{r}\right)^l - \frac{1}{4\pi R} \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos \gamma) \left(\frac{rr'}{R^2}\right)^l = \\ &\stackrel{(2.90)}{=} \frac{1}{4\pi r} \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{r'}{r} \cos \gamma + \frac{r'^2}{r^2}}} - \frac{1}{4\pi R} \frac{1}{\sqrt{1-2\frac{rr'}{R^2} \cos \gamma + \frac{r^2 r'^2}{R^4}}} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \gamma\right)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{4\pi} \left(R^2 + \frac{r^2 r'^2}{R^2} - 2rr' \cos \gamma\right)^{-\frac{1}{2}} \quad r' < r \end{aligned} \quad (2.91)$$

è già simmetrica in  $r, r' \rightarrow$  stesso risultato per  $r' > r$ .

In coordinate cartesiane:

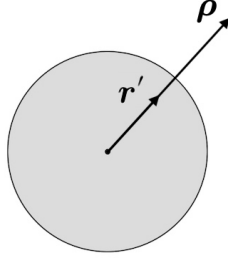
$$\begin{aligned} G(x, y, z, x', y', z') &= \frac{1}{4\pi} \{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\}^{-\frac{1}{2}} + \\ &- \frac{1}{4\pi} \frac{R}{r'} \left\{ \left(x - x' \frac{R^2}{r'^2}\right)^2 + \left(y - y' \frac{R^2}{r'^2}\right)^2 + \left(z - z' \frac{R^2}{r'^2}\right)^2 \right\}^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (2.91')$$

dove abbiamo usato:

$$R^2 + \frac{r^2 r'^2}{R^2} - 2rr' \cos \gamma = \frac{r'^2}{R^2} \left(r^2 + \frac{R^4}{r'^2} - \frac{2rR^2}{r'} \cos \gamma\right) = \frac{r'^2}{R^2} (\mathbf{r} - \boldsymbol{\rho})^2$$

con

$$\boldsymbol{\rho} = \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}'$$



1° termine della (2.91'): Carica puntiforme in  $\mathbf{r}'$

2° termine della (2.91'): Carica immagine in  $\boldsymbol{\rho} = \frac{R^2}{r'^2} \mathbf{r}'$  (vedi appendice A)

## 2.3 Il kernel di Schrödinger

Equazione di Schrödinger:

$$\begin{aligned} i\hbar\partial_t\psi &= \hat{H}\psi \stackrel{\text{p. libera}}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi \\ \Rightarrow -i\partial_t\psi &= \frac{\hbar}{2m}\Delta\psi = \chi\Delta\psi \end{aligned} \quad (2.92)$$

Risulta dall'equazione del calore ( $\partial_t\psi = \chi\Delta\psi$ ) tramite la rotazione di Wick  $t \rightarrow it$  (tempo Euclideo) ( $\Rightarrow \partial_t \rightarrow -i\partial_t$ )

Supponiamo di essere in  $d$  dimensioni spaziali.

Trasformata di Fourier:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t)$$

$$\stackrel{(2.92)}{\Rightarrow} -i\partial_t \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) = \chi(-\mathbf{k}^2) \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t)$$

$$\Rightarrow \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) = e^{-i\chi\mathbf{k}^2 t} \tilde{\psi}_0(\mathbf{k})$$

con

$$\tilde{\psi}_0(\mathbf{k}) = \int d^d\mathbf{y} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{y}} \psi_0(\mathbf{y})$$

$$\Rightarrow \psi(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int d^d\mathbf{y} \psi_0(\mathbf{y}) \underbrace{\int d^d\mathbf{k} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - i\chi\mathbf{k}^2 t}}_{\substack{:=z \\ :=(2\pi)^d G(\mathbf{z}, t)}}$$

Riscriviamo l'esponente in modo da avere un integrale gaussiano:

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{z} - i\chi\mathbf{k}^2 t = -i\chi t \left( \mathbf{k} - \frac{\mathbf{z}}{2\chi t} \right)^2 + \frac{i\mathbf{z}^2}{4\chi t}$$

Ma attenzione:  $\text{Re}(i\chi t) = 0$  quindi non posso risolvere l'integrale gaussiano. Dobbiamo regolarizzare con:  $t \rightarrow t - i\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  e poi fare tendere  $\varepsilon$  a 0. Così:

$$\begin{aligned} \text{Re}(i\chi(t - i\varepsilon)) &= \chi\varepsilon > 0 \\ \Rightarrow G(\mathbf{z}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(\frac{i\mathbf{z}^2}{4\chi(t - i\varepsilon)}\right) \int d^d \mathbf{k} e^{-i\chi(t - i\varepsilon)\left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{z}}{2\chi(t - i\varepsilon)}\right)^2} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \exp\left(\frac{i\mathbf{z}^2}{4\chi(t - i\varepsilon)}\right) \left(\frac{\pi}{i\chi(t - i\varepsilon)}\right)^{\frac{d}{2}} \\ G(\mathbf{z}, t) &\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{\frac{d}{2}} \exp\left(-\frac{m\mathbf{z}^2}{2i\hbar t}\right) \end{aligned} \quad (2.93)$$

*Schrödinger Kernel* ( $\exists \forall t \in \mathbb{R}$ )

Osservazione: L'equazione di Schrödinger è reversibile, quella del calore no.  
Reversibile  $\rightarrow$  invariante per  $t \rightarrow -t$ ,  $\psi \rightarrow \psi^*$

$$\begin{aligned} -i\partial_t \psi &= \chi \Delta \psi \\ (t \rightarrow -t) &\Rightarrow i\partial_t \psi = \chi \Delta \psi \\ (\psi \rightarrow \psi^*) &\Rightarrow i\partial_t \psi^* = \chi \Delta \psi^* \\ (\text{c. al contorno}) &\Rightarrow -i\partial_t \psi = \chi \Delta \psi \end{aligned}$$

Commenti:

- (i)  $G(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)$  soddisfa l'equazione di Schrödinger  $-i\partial_t G = \chi \Delta_{\mathbf{x}} G$
- (ii)  $\lim_{t \rightarrow 0} G(\mathbf{z}, t) = \delta(\mathbf{z})$

Più in generale (non necessariamente particella libera):  
cerchiamo  $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  tale che:

$$\psi(\mathbf{x}, t) = i \int d^d \mathbf{y} \psi_0(\mathbf{y}) G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad (2.94)$$

$G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ : *funzione di Green ritardata*

$$G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = 0 \quad \text{per } t < 0$$

$G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  rappresenta l'ampiezza di probabilità che la particella vada dal punto  $(\mathbf{y}, t = 0)$  al punto  $(\mathbf{x}, t)$  (è il propagatore!).

Troviamo  $G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ :  
 $\varphi_n$  autofunzioni di  $\hat{H}$ :

$$\hat{H}\varphi_n = E_n\varphi_n \quad (2.95)$$

$$\Rightarrow G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = -i \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_n^*(\mathbf{y}), \quad t \geq 0 \quad (2.96)$$

(vedi (2.20) e (2.81))

$$\stackrel{(2.94)}{\Rightarrow} \psi(\mathbf{x}, t) = \int d^d \mathbf{y} \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_n^*(\mathbf{y}) \psi_0(\mathbf{y})$$

e soddisfa l'equazione di Schrödinger, infatti:

$$i\hbar \partial_t \psi(\mathbf{x}, t) = \int d^d \mathbf{y} \sum_n i\hbar \frac{-iE_n}{\hbar} e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_n^*(\mathbf{y}) \psi_0(\mathbf{y})$$

e

$$\hat{H}_{\mathbf{x}} \psi(\mathbf{x}, t) = \int d^d \mathbf{y} \sum_n e^{-iE_n t/\hbar} \underbrace{\hat{H}_{\mathbf{x}} \varphi_n(\mathbf{x})}_{E_n \varphi_n(\mathbf{x})} \varphi_n^*(\mathbf{y}) \psi_0(\mathbf{y})$$

che sono uguali.

Inoltre soddisfa il dato iniziale:

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \int d^d \mathbf{y} \underbrace{\sum_n \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_n^*(\mathbf{y})}_{\delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \psi_0(\mathbf{y}) = \psi_0(\mathbf{x})$$

Se effettuiamo la trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{G}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, E) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{iEt/\hbar} G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = \\ &= \int_0^{\infty} dt e^{iEt/\hbar} G^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \stackrel{(2.96)}{=} -i \sum_n \int_0^{\infty} dt e^{i(E-E_n)t/\hbar} \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_n^*(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

l'ultimo integrale non è ben definito se  $E \in \mathbb{R}$

→ Regularizziamo tramite  $E \rightarrow E + i\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \tilde{G}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, E) = \sum_n \frac{\varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_n^*(\mathbf{y})}{E + i\varepsilon - E_n} \quad (2.97)$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} (E + i\varepsilon - \hat{H}_{\mathbf{x}}) \tilde{G}^R(\mathbf{x}, \mathbf{y}, E) &= \sum_n \frac{(E + i\varepsilon - \hat{H}_{\mathbf{x}}) \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_n^*(\mathbf{y})}{E + i\varepsilon - E_n} = \\ &= \sum_n \varphi_n(\mathbf{x}) \varphi_n^*(\mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.98)$$

è il punto di partenza per le tecniche perturbative.

*Funzione di Green avanzata:*

$$G^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = 0 \quad \text{per } t > 0$$

Affinché la trasformata di Fourier

$$\tilde{G}^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, E) = \int_{-\infty}^0 dt e^{iEt/\hbar} G^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$$

esista, dobbiamo sostituire  $E \rightarrow E - i\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \tilde{G}^A(\mathbf{x}, \mathbf{y}, E) = \sum_n \frac{\varphi_n(\mathbf{x})\varphi_n^*(\mathbf{y})}{E - i\varepsilon - E_n}$$

Esercizio: Calcolare  $G$  per l'oscillatore armonico

$$\hat{H}\varphi_n = -\frac{\hbar^2}{2m}\varphi_n''(x) + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \varphi_n(x) = E_n \varphi_n(x)$$

In meccanica quantistica abbiamo trovato  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , con autofunzioni date dai polinomi di Hermite:

$$\varphi_n(x) = (\sqrt{\pi} 2^n n!)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}\right) \underbrace{H_n\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x\right)}_{\text{polinomi di Hermite}}$$

$$\begin{aligned} (2.96) &\Rightarrow -i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(x) \varphi_n^*(y) = \\ &= -i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-it\omega(n+1/2)} \frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2 + y^2)\right) H_n\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} x\right) H_n\left(\left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}} y\right) \end{aligned}$$

Dobbiamo quindi trovare un modo per sommare il prodotto di polinomi di Hermite.

Usa :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)H_n(y)}{n!} \left(\frac{u}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \exp\left\{\frac{2u}{1+u}xy - \frac{u^2}{1-u^2}(x-y)^2\right\} \quad (2.99)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{u=e^{-i\omega t}}{\Rightarrow} -i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-iE_n t/\hbar} \varphi_n(x) \varphi_n^*(y) = \\ &= -ie^{-i\omega t/2} \pi^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}(x^2 + y^2)\right) \frac{1}{\sqrt{1-e^{-2i\omega t}}}. \\ &\cdot \exp\left\{\frac{2e^{-i\omega t}}{1+e^{-i\omega t}} \frac{m\omega}{\hbar} xy - \frac{e^{-2i\omega t}}{1-e^{-2i\omega t}} \frac{m\omega}{\hbar} (x-y)^2\right\} = \\ &= -\sqrt{\frac{i}{2\pi \sin(\omega t)}} \exp\left\{\frac{im\omega}{\hbar} \left[\frac{x^2 + y^2}{2} \cot(\omega t) - xy \operatorname{cosec}(\omega t)\right]\right\} \end{aligned} \quad (2.100)$$

*Mehler Kernel*

Esercizio: Dimostrare che per  $\omega \rightarrow 0$  la (2.100) si riduce alla (2.93) con  $d = 1$  (particella libera).

## 2.4 L'equazione dei telegrafisti

Equazioni di Maxwell nella materia (CGS):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{macr.}} \quad (2.101a)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_{\text{macr.}} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.101b)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.101c)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.101d)$$

Legge di materiale (caso più semplice):

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Legge di Ohm:

$$\mathbf{J}_{\text{macr.}} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.103)$$

con  $\sigma$ : conducibilità elettrica

$$\begin{aligned} (2.101b) &\Rightarrow \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{rot} \mathbf{J}_{\text{macr.}} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{D} \\ (2.101c), (2.101d), (2.103) &\Rightarrow \underbrace{\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{H} - \Delta \mathbf{H}}_0 = \frac{4\pi\sigma}{c} \underbrace{\operatorname{rot} \mathbf{E}}_{-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}} - \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \\ &\Rightarrow \Delta \mathbf{B} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (2.104a)$$

*Equazione dei telegrafisti*

Detta così descrive la propagazione di un segnale nella materia (p.e. un filo). Analogamente per  $\mathbf{E}$ :

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \\ &\stackrel{(2.101b)}{=} -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{4\pi}{c} \sigma \mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \right) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E} \end{aligned}$$

se  $\rho_{\text{macr.}} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = 0$

$$\Rightarrow \Delta \mathbf{E} = \frac{4\pi\sigma\mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (2.104b)$$

Equivalente all'equazione delle onde, con l'aggiunta del termine dissipativo (con la derivata prima)  $\rightarrow$  distrugge l'invarianza sotto inversione temporale.

Casi limite:

- $\sigma = 0$ : equazione delle onde
- $\varepsilon = 0$ : equazione del calore con  $\chi = \frac{e^2}{4\pi\sigma\mu}$

Esercizio: Risolvere l'equazione dei telegrafisti ( $u$ : qualsiasi componente di  $\mathbf{B}$  o  $\mathbf{E}$ )

$$\begin{aligned}\Delta u &= a\partial_t u + b\partial_t^2 u \quad (a, b \text{ costanti positive}) \\ \text{nell'intervallo } &0 \leq x \leq L, \quad t \geq 0 \\ \text{con } &u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad u(x, 0) = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x)\end{aligned}$$

Soluzione: Serie di Fourier:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

con inversa:

$$\begin{aligned}u_n(t) &= \frac{2}{L} \int_0^L u(x, t) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ \Rightarrow -\frac{n^2\pi^2}{L^2} u_n(t) &= au_n'(t) + bu_n''(t)\end{aligned}$$

Ansatz:  $u_n(t) = \alpha_n e^{\lambda_n t}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow -\frac{n^2\pi^2}{L^2} &= a\lambda_n + b\lambda_n^2 \\ \Rightarrow \lambda_n &= -\frac{a}{2b} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2b}} \equiv \lambda_n^{\pm}\end{aligned}$$

$\rightarrow$  comportamento oscillatorio se:  $\frac{n^2\pi^2}{L^2} > \frac{a^2}{4b}$

$$u_n(t) = \alpha_n^+ e^{\lambda_n^+ t} + \alpha_n^- e^{\lambda_n^- t}$$

$$u(x, 0) = 0 \Rightarrow u_n(0) = 0 \Rightarrow \alpha_n^- = -\alpha_n^+$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ (e^{\lambda_n^+ t} - e^{\lambda_n^- t}) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ (\lambda_n^+ e^{\lambda_n^+ t} - \lambda_n^- e^{\lambda_n^- t}) \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^+ (\lambda_n^+ - \lambda_n^-) \sin \frac{n\pi x}{L} \stackrel{!}{=} g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$\Rightarrow \alpha_n^+ = \frac{g_n}{\lambda_n^+ - \lambda_n^-} = \frac{g_n}{2\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2b}}} = \frac{1}{2\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2\pi^2}{L^2b}}} \frac{2}{L} \int_0^L g(x') \sin \frac{n\pi x'}{L} dx'$$



e quindi:

$$u(x, t) = \frac{1}{L} \int_0^L dx' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n^+ t} - e^{\lambda_n^- t}}{\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2 \pi^2}{L^2 b}}} \sin \frac{n \pi x'}{L} \sin \frac{n \pi x}{L} g(x')$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_0^L G(x, x', t) g(x') dx'$$

Con la funzione di Green

$$G(x, x', t) = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\lambda_n^+ t} - e^{\lambda_n^- t}}{\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2 \pi^2}{L^2 b}}} \sin \frac{n \pi x'}{L} \sin \frac{n \pi x}{L}$$

N.B.: Se esiste  $n_0$  tale che  $\lambda_{n_0}^+ = \lambda_{n_0}^-$  (cioè  $\sqrt{\frac{a^2}{4b^2} - \frac{n^2 \pi^2}{L^2 b}} = 0$ ):

Scrivi

$$\frac{e^{\lambda_n^+ t} - e^{\lambda_n^- t}}{\sqrt{\dots}} = \frac{e^{(-\frac{a}{2b} + \sqrt{\dots})t} - e^{(-\frac{a}{2b} - \sqrt{\dots})t}}{\sqrt{\dots}} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{at}{2b}} 2 \sinh(\sqrt{\dots} t)}{\sqrt{\dots}} \xrightarrow{\sqrt{\dots} \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{at}{2b}} 2 \sqrt{\dots} t}{\sqrt{\dots}} = 2te^{-\frac{at}{2b}}$$

cioè basta escludere  $n_0$  dalla somma e sostituirci questo.

## 2.5 Classificazione delle equazioni differenziali alle derivate parziali lineari del secondo ordine

Per semplicità ci limitiamo alle equazioni in 2 variabili

$$a_{11}(x, y)u_{xx} + 2a_{12}(x, y)u_{xy} + a_{22}(x, y)u_{yy} + b_1(x, y)u_x + b_2(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y) \quad (2.105)$$

La classificazione è basata solo sulla parte contenente le derivate seconde,  $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy}$ , detta *parte principale* dell'equazione.

Definizione: Sia  $\delta(x, y) = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ , il *discriminante* della parte principale

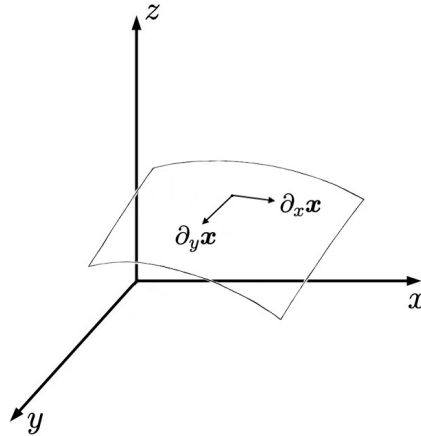
- se  $\delta > 0$  l'equazione (2.105) si dice *iperbolica*
- se  $\delta = 0$  l'equazione (2.105) si dice *parabolica*
- se  $\delta < 0$  l'equazione (2.105) si dice *ellittica*

N.B.: La definizione si estende anche alle equazioni *quasilinearli* (nelle quali i coefficienti  $a_{ij}$  possono dipendere anche da  $u, u_x, u_y$ ) se si riesce a stabilire il segno di  $\delta$ .

Esempio quasilineare: *Equazione delle superfici minime*

Considera la superficie in  $\mathbb{R}^3$  definita da

$$z = u(x, y) : (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$$



$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ u(x, y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Fissato il bordo della superficie, qual è la condizione su  $x, y$  affinché l'area sia minima?  
Prima si calcola l'area  $\rightarrow$  servono i vettori tangenti:

$$\partial_x \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ u_x \end{pmatrix}, \quad \partial_y \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ u_y \end{pmatrix}$$

(vettori tangenti)

con  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ .

$$\mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 1 & 0 & u_x \\ 0 & 1 & u_y \end{vmatrix} = \mathbf{e}_z - u_x \mathbf{e}_x - u_y \mathbf{e}_y = \begin{pmatrix} -u_x \\ -u_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

(vettore normale)

$$\Rightarrow dA = |\mathbf{N}| dx dy = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + 1} dx dy$$

(elemento di superficie)

$\Rightarrow$  area della superficie:

$$A = \int_{\Omega} \sqrt{1 + (\nabla u)^2} dx dy \equiv \int_{\Omega} \mathcal{L} dx dy \quad (2.106)$$

Superfici minime:  $\delta A = 0$  (principio variazionale)

In meccanica classica

$$\mathcal{S} = \int \mathcal{L} dt \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(x, \dot{x}) \quad \delta \mathcal{S} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

Equazione di Eulero-Lagrange

Equazioni di Eulero-Lagrange (in 2 variabili):

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \quad (2.107)$$

Si sottintende la somma su  $i$  da 1 a 2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} &:= \partial_i \Rightarrow \partial_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i u} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i u} &= \frac{1}{2} (1 + (\nabla u)^2)^{-\frac{1}{2}} 2 \partial_i u = \frac{\partial_i u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0 \\ (2.107) &\Rightarrow \partial_i \left( \frac{\partial_i u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} \right) = 0 \end{aligned}$$

che si scrive anche

$$\nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} \right) = 0 \quad (2.108)$$

*Equazione delle superfici minime*

In alternativa alle equazioni di Eulero-Lagrange (2.107):

$$\delta \mathcal{L} = \delta \sqrt{1 + (\nabla u)^2} = \frac{1}{2} (1 + (\nabla u)^2)^{-\frac{1}{2}} 2 \nabla u \underbrace{\delta \nabla u}_{\nabla \delta u} =$$

Integro per parti e tengo conto di  $\delta u|_{\text{bordo}} = 0$

Come in meccanica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \quad \delta \mathcal{L} = m \dot{x} \delta \dot{x} \rightarrow -m \ddot{x} \delta x$$

$$= -\delta u \nabla \cdot \left( \frac{\nabla u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \forall \delta u \Rightarrow (2.108)$$

$$(2.108) \Rightarrow \frac{\partial_i \partial_i u}{\sqrt{1 + (\nabla u)^2}} + \partial_i u \left( -\frac{1}{2} \right) (1 + (\nabla u)^2)^{-\frac{3}{2}} \underbrace{\partial_i (\nabla u)^2}_{\substack{\partial_i (\partial_j u \partial_j u) = \\ = 2(\partial_i \partial_j u) \partial_j u}} = 0$$

$$\Rightarrow (1 + (\nabla u)^2) \Delta u - \partial_x u \partial_x u \partial_x^2 u - \partial_x u \partial_y u \partial_x \partial_y u - \partial_y u \partial_x u \partial_y \partial_x u - \partial_y u \partial_y u \partial_y^2 u = 0$$

dove

$$\begin{aligned} (\nabla u)^2 &= (\partial_x u)^2 + (\partial_y u)^2 \quad \text{e} \quad \Delta u = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u \\ &\Rightarrow u_{xx} + u_{yy} + u_x^2 u_{yy} + u_y^2 u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0 \quad (2.108')$$

*Equazione di Young-Laplace*

$$\Rightarrow a_{11} = 1 + u_y^2, \quad a_{22} = 1 + u_x^2, \quad a_{12} = -u_x u_y$$

Posso calcolare il discriminante:

$$\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = u_x^2 u_y^2 - (1 + u_x^2 + u_y^2 + u_x^2 u_y^2) = -(1 + (\nabla u)^2) < 0$$

$\Rightarrow$  equazione ellittica

Definisco la matrice

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = -\delta$$

- Iperbolica ( $\delta > 0$ ):  $\det A < 0$ , 2 autovalori di segno opposto
- Parabolica ( $\delta = 0$ ): 1 autovalore=0 (altrimenti banale)
- Ellittica ( $\delta < 0$ ): 2 autovalori di segno uguale

È il parallelismo con il comportamento della forma quadratica generata da  $A$  a suggerire la medesima denominazione delle coniche.

Esempi:

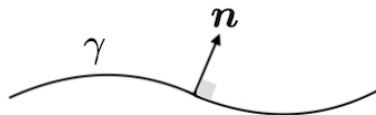
- Equazioni ellittiche: Laplace, Poisson (parte principale  $\Delta u$ )
- Equazioni paraboliche: Equazione del calore (in due variabili)  $\partial_t u = \chi \partial_x^2 u$  ( $y \leftrightarrow t$ )
- Equazioni iperboliche: Equazione delle onde e dei telegrafisti (quest'ultima per  $\varepsilon \neq 0$ , altrimenti parabolica), equazione di Klein-Gordon

## 2.6 Il problema di Cauchy

La classificazione ha una prima motivazione nel problema di Cauchy: trovare una funzione  $u \in C^2$  che soddisfi la (2.105) e i dati di Cauchy, ossia:

$$u|_\gamma = \phi|_\gamma \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_\gamma = \psi|_\gamma \quad (2.109)$$

dove  $\phi, \psi$  sono funzioni assegnate e  $\gamma$  è una data curva regolare con normale  $\mathbf{n}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \nabla u$ .



Possibile modo di tentare di risolvere il problema: supporre che le  $a_{ij}$ , la  $\gamma$  e i dati  $\phi$ ,  $\psi$  siano analitici e cercare:

- (i) di calcolare tutte le derivate di  $u$  su  $\gamma$
- (ii) di dimostrare che lo sviluppo di Taylor di  $u$  è convergente in un intorno di  $\gamma$ .

Se il procedimento ha successo si è costruita una soluzione analitica.

Questo è l'obiettivo del *teorema di Cauchy-Kowalevski*:

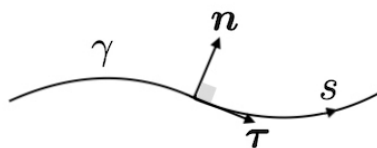
Se i coefficienti  $a_{ij}$ ,  $b_i$ ,  $c$ ,  $d$  sono tutti analitici in un dominio  $D$ , se la curva  $\gamma \subset D$  è analitica e i dati di Cauchy  $\phi$ ,  $\psi$  sono analitici in  $D$ , il problema di Cauchy (2.105), con dati iniziali (2.109), ammette una e una sola soluzione analitica in un opportuno intorno  $I \subset D$  di  $\gamma$ , purché la normale  $\mathbf{n}$  a  $\gamma$  verifichi la condizione

$$\mathbf{n} \cdot A\mathbf{n} \neq 0 \quad (2.110)$$

(senza dim.)

→ la (2.110) chiama in causa la classificazione. Il ruolo della (2.110) è quello di consentire il calcolo delle derivate seconde:

$$\mathbf{n} \equiv (\alpha, \beta) \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$



Deriva tangenzialmente il primo dato di Cauchy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} \Big|_{\gamma} &= \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \Big|_{\gamma}, & \frac{\partial}{\partial \tau} &\equiv \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla, & \boldsymbol{\tau} &= (-\beta, \alpha), & \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} &= 0 \\ & \Rightarrow (-\beta u_x + \alpha u_y) \Big|_{\gamma} &= \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \Big|_{\gamma} \end{aligned} \quad (2.111)$$

Secondo dato di Cauchy:

$$(\alpha u_x + \beta u_y) \Big|_{\gamma} = \psi \Big|_{\gamma} \quad (2.112)$$

È un sistema lineare non omogeneo in  $u_x$  e  $u_y$ .

La matrice dei coefficienti è  $\begin{pmatrix} -\beta & \alpha \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}$  che ha sempre  $\det \neq 0$

Dalla (2.111) e (2.112):

$$\Rightarrow \begin{cases} u_x \Big|_{\gamma} = p_0(s) \\ u_y \Big|_{\gamma} = q_0(s) \end{cases} \quad (2.113)$$

dove  $p_0$ ,  $q_0$  sono espresse tramite i dati e  $s$  è il parametro naturale su  $\gamma$  (lunghezza della curva).

Servono ora le derivate seconde.

Deriva (2.113) lungo  $\gamma$ :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla u_x|_{\gamma} = p'_0(s) \\ \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla u_y|_{\gamma} = q'_0(s) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\beta u_{xx} + \alpha u_{xy})|_{\gamma} = p'_0 \\ (-\beta u_{xy} + \alpha u_{yy})|_{\gamma} = q'_0 \end{cases}$$

La parte principale della (2.105) è esprimibile su  $\gamma$  in base ai dati, perché tutti i termini rimanenti sono calcolabili:

$$(a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy})|_{\gamma} = r_0(s)$$

$\Rightarrow$  sistema di 3 equazioni lineari con determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha \end{vmatrix} = \mathbf{n} \cdot A\mathbf{n} \quad (2.114)$$

$\Rightarrow$  la condizione (2.110) consente di calcolare le derivate seconde. Nello stesso modo si calcolano, sempre grazie alla (2.110), tutte le derivate successive.

Interpretazione geometrica della (2.110):

$$\mathbf{n} \cdot A\mathbf{n} = a_{11}\alpha^2 + 2a_{12}\alpha\beta + a_{22}\beta^2 = 0 \quad (2.115)$$

Autovalori di  $A$ :  $\underbrace{\lambda_1, \lambda_2}_{\in \mathbb{R}}$ ; con autovettori ortogonali  $\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2$  ( $A$  simmetrica)

$$\mathbf{n} := \eta_1 \boldsymbol{\theta}_1 + \eta_2 \boldsymbol{\theta}_2 \Rightarrow \mathbf{n} \cdot A\mathbf{n} = \lambda_1 \eta_1^2 + \lambda_2 \eta_2^2$$

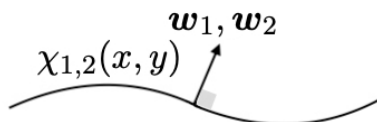
- Caso ellittico: sempre  $\neq 0$ .
- Caso parabolico:  $A\mathbf{n} = 0$  per  $\mathbf{n}$  nell'autospazio corrispondente all'autovalore nullo.
- Caso iperbolico:  $\mathbf{n} \cdot A\mathbf{n} = 0$  per  $\eta_1/\eta_2 = \pm \sqrt{|\lambda_1/\lambda_2|}$

$\rightarrow$  2 campi vettoriali:

$$\mathbf{w}_1 = \sqrt{|\lambda_2|} \boldsymbol{\theta}_1 + \sqrt{|\lambda_1|} \boldsymbol{\theta}_2, \quad (\eta_2 = \sqrt{|\lambda_1|}, \eta_1 = \sqrt{|\lambda_2|})$$

$$\mathbf{w}_2 = -\sqrt{|\lambda_2|} \boldsymbol{\theta}_1 + \sqrt{|\lambda_1|} \boldsymbol{\theta}_2, \quad (\eta_2 = \sqrt{|\lambda_1|}, \eta_1 = -\sqrt{|\lambda_2|})$$

Curve perpendicolari a questi campi:  $\chi_{1,2}(x, y) = \text{cost}$



$$\Rightarrow \mathbf{n} \propto \nabla \chi \Rightarrow (\alpha, \beta) \propto (\chi_x, \chi_y)$$

e quindi:

$$(2.115) \Rightarrow a_{11}\chi_x^2 + 2a_{12}\chi_x\chi_y + a_{22}\chi_y^2 = 0 \quad (2.116)$$

Poni  $\chi := f(x) - y$  (si può fare perché  $f(x) - y = cost \Rightarrow y = f(x) - cost$  cioè perché  $\chi(x, y) = cost$  la posso sempre risolvere per ottenere  $y$  in funzione di  $x$ )

$$\Rightarrow \chi_x = f', \quad \chi_y = -1$$

$$(2.116) \Rightarrow a_{11}f'^2 - 2a_{12}f' + a_{22} = 0 \quad (2.116')$$

→ equazione di secondo grado per  $f'$

Nel caso parabolico ci si riduce ad una sola famiglia, nel caso ellittico non ci sono curve di questo genere.

Definizione: Le curve  $\chi(x, y) = cost$  soddisfacenti la (2.116) si chiamano *curve caratteristiche* dell'equazione (2.105)

Esempi:

(i) equazione dell'onda in 1+1 dimensioni

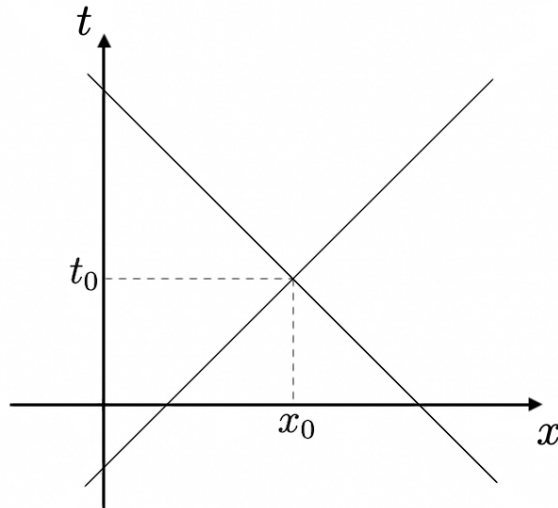
$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$$

$$a_{11} = c^2, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = -1$$

$$(2.116') \Rightarrow c^2 f'^2 = 1 \Rightarrow f = \pm \frac{x}{c} + f_0$$

$$\chi = f(x) - t = \pm \frac{x}{c} + f_0 - t \stackrel{!}{=} cost$$

$$\Rightarrow x - x_0 \pm c(t - t_0) = 0 \quad (\text{cono luce})$$



(ii) equazione del calore

$$\begin{aligned}\chi u_{xx} - u_t &= 0 \\ \Rightarrow a_{11} &= \chi, \quad a_{12} = a_{22} = 0 \\ (2.116') \Rightarrow \chi f'^2 &= 0 \Rightarrow f = \text{cost} =: f_0 \\ \chi &= f_0 - t \stackrel{!}{=} \text{cost} \Rightarrow t = \text{cost} \quad (\text{retta})\end{aligned}$$

Cambiamento di coordinate:

Sia  $\xi = \xi(x, y)$ ,  $\eta = \eta(x, y)$  un cambiamento di coordinate con determinante Jacobiano diverso da zero.

$$\det J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$

$$v(\xi, \eta) := u(x, y)$$

Come si trasforma la parte principale della (2.105)?

$$\begin{aligned}u_x &= v_\xi \xi_x + v_\eta \eta_x \\ u_y &= v_\xi \xi_y + v_\eta \eta_y \\ u_{xx} &= v_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + v_{\eta\eta} \eta_x^2 + v_\xi \xi_{xx} + v_\eta \eta_{xx} \\ u_{xy} &= v_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + v_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + v_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + v_\xi \xi_{xy} + v_\eta \eta_{xy} \\ u_{yy} &= v_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2v_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + v_{\eta\eta} \eta_y^2 + v_\xi \xi_{yy} + v_\eta \eta_{yy}\end{aligned}$$

→ la parte principale della (2.105) diventa:

$$\tilde{a}_{11} v_{\xi\xi} + 2\tilde{a}_{12} v_{\xi\eta} + \tilde{a}_{22} v_{\eta\eta} \quad (2.117)$$

con

$$\begin{aligned}\tilde{a}_{11} &= a_{11} \xi_x^2 + 2a_{12} \xi_x \xi_y + a_{22} \xi_y^2 = \nabla \xi \cdot A \nabla \xi \\ \tilde{a}_{12} &= a_{11} \xi_x \eta_x + a_{12} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + a_{22} \xi_y \eta_y = \nabla \eta \cdot A \nabla \xi = \nabla \xi \cdot A \nabla \eta \\ \tilde{a}_{22} &= a_{11} \eta_x^2 + 2a_{12} \eta_x \eta_y + a_{22} \eta_y^2 = \nabla \eta \cdot A \nabla \eta \\ &\Rightarrow \tilde{A} = J A J^{-1} \quad J = \text{Jacobiano} \\ &\Rightarrow \det \tilde{A} = \det A (\det J)^2\end{aligned}$$

⇒ le trasformazioni invertibili di coordinate lasciano invariante il carattere dell'equazione.

Esempio: equazione dell'onda

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = 0$$

Prendi  $\xi = x - ct$ ,  $\eta = x + ct$ , (coordinate di cono luce) e poni  $v(\xi, \eta) = u(x, t)$

⇒  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e l'equazione diventa

$$v_{\xi\eta} = 0$$



$\Rightarrow$  Soluzione generale:

$$v(\xi, \eta) = f(\xi) + g(\eta)$$

(con  $f, g$  funzioni arbitrarie)

N.B.: Questo puoi farlo solo in 1+1 dimensioni

### Riduzione alla forma canonica:

forme canoniche:

$$u_{xx} + u_{yy} \quad \text{ellittica}$$

$$u_{xx} (-u_t) \quad \text{parabolica}$$

$$u_{xx} - u_{tt} \quad \text{iperbolica (in alternativa } u_{xt})$$

N.B.: Costanti come per esempio  $c^2$  in  $c^2 u_{xx} - u_{tt}$  possono essere riassorbite nella scala delle variabili:

$$c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \xrightarrow{x \rightarrow cx} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

*Trasformazione di una parte principale generica nella forma canonica:*

*Caso iperbolico:*

L'esempio sopra suggerisce di prendere le curve caratteristiche come nuove linee coordinate:

$$\xi = \chi_1(x, y), \quad \eta = \chi_2(x, y)$$

$$(2.117) \Rightarrow \tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix} \stackrel{(2.116)}{=} \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{a}_{11} = a_{11}\chi_{1x}^2 + 2a_{12}\chi_{1x}\chi_{1y} + a_{22}\chi_{1y}^2$$

$$\tilde{a}_{12} = a_{11}\chi_{1x}\chi_{2x} + a_{12}(\chi_{1x}\chi_{2y} + \chi_{1y}\chi_{2x}) + a_{22}\chi_{1y}\chi_{2y}$$

$$\tilde{a}_{22} = a_{11}\chi_{2x}^2 + 2a_{12}\chi_{2x}\chi_{2y} + a_{22}\chi_{2y}^2$$

$\rightarrow$  parte principale riconducibile alla forma canonica  $u_{xy}$

$(2 * v_{\xi\eta} + (\text{derivate dell'ordine } \leq 1) = 0. \text{ Dividi per } * \Rightarrow 2v_{\xi\eta} \text{ per parte principale})$

*Caso parabolico:*

Prendi:

$$\xi = x, \quad \eta = \chi(x, y)$$

$$\Rightarrow J = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \chi_x & \chi_y \end{pmatrix}$$

N.B.:  $\det A = 0 \Rightarrow$  Se uno dei coefficienti  $a_{11}, a_{22}$  è nullo lo è anche  $a_{12}$  ( $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$ ).

In tal caso siamo già nella forma canonica.

$\rightarrow$  Supponiamo  $a_{11}a_{22} > 0$  (non può essere  $< 0$ , perché  $a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ ).

Equazione delle caratteristiche (2.116):

$$a_{11}\chi_x^2 + 2\sqrt{a_{11}a_{22}}\chi_x\chi_y + a_{22}\chi_y^2 = 0$$

(se  $a_{12} = -\sqrt{a_{11}a_{22}}$ : manda  $y$  in  $-y$ ).

Inoltre, senza perdere la generalità:  $a_{11} > 0$  (altrimenti moltiplica la (2.105) con -1)  
 $\Rightarrow a_{22} > 0$ .

$\rightarrow$  abbiamo  $(\sqrt{a_{11}}\chi_x + \sqrt{a_{22}}\chi_y)^2 = 0$

$$\Rightarrow \chi_y = -\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}}\chi_x \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \chi_x & \chi_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \sqrt{a_{11}a_{22}} \\ \sqrt{a_{11}a_{22}} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \chi_x \\ 0 & \chi_y \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{11}\chi_x + \sqrt{a_{11}a_{22}}\chi_y \\ a_{11}\chi_x + \sqrt{a_{11}a_{22}}\chi_y & a_{11}\chi_x^2 + 2\sqrt{a_{11}a_{22}}\chi_x\chi_y + a_{22}\chi_y^2 \end{pmatrix} \stackrel{(2.118)}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\rightarrow$  forma canonica

*Caso ellittico:*

Il metodo seguito per le equazioni iperboliche e paraboliche non è applicabile (non disponiamo di curve caratteristiche)

$\rightarrow$  torna alla (2.117) e imponi direttamente  $\tilde{a}_{12} = 0$ ,  $\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22}$

$$a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y = 0 \quad (2.119)$$

$$a_{11}(\xi_x^2 - \eta_x^2) + 2a_{12}(\xi_x\xi_y - \eta_x\eta_y) + a_{22}(\xi_y^2 - \eta_y^2) = 0 \quad (2.119')$$

$2i(2.119) + (2.119')$ :

$$\Rightarrow a_{11}(\xi_x + i\eta_x)^2 + 2a_{12}(\xi_x + i\eta_x)(\xi_y + i\eta_y) + a_{22}(\xi_y + i\eta_y)^2 = 0 \quad (2.119'')$$

Si ha:  $a_{11}a_{22} > 0$  nel caso ellittico (altrimenti  $\delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$  non può essere  $< 0$ ).

$\rightarrow$  la (2.119'') è un'equazione di secondo grado non degenera per  $\rho := \frac{\xi_x + i\eta_x}{\xi_y + i\eta_y}$ , con soluzioni

$$\rho_{\pm} = -\frac{(a_{12} \pm i\sqrt{|\delta|})}{a_{11}}$$

Prendi per esempio  $\rho_+$ :

$$\Rightarrow a_{11}(\xi_x + i\eta_x) = -(a_{12} + i\sqrt{|\delta|})(\xi_y + i\eta_y)$$

e quindi

$$\begin{cases} \xi_x = \frac{(a_{12}\eta_x + a_{22}\eta_y)}{\sqrt{|\delta|}} \\ \xi_y = \frac{-(a_{11}\eta_x + a_{12}\eta_y)}{\sqrt{|\delta|}} \end{cases} \quad (2.120)$$

*Equazioni di Beltrami*

Caratterizzano le trasformazioni che conducono la parte principale ad un'espressione proporzionale all'operatore di Laplace. È stato dimostrato (risultato non banale) che le (2.120) ammettono soluzioni nell'intera regione di ellitticità.

N.B.: Le (2.120) possono essere scritte nella forma:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.120')$$

con

$$z = x + iy, \quad w = \xi + i\eta, \quad \mu = \frac{a_{11} + ia_{12} - \sqrt{|\delta|}}{-a_{11} + ia_{12} - \sqrt{|\delta|}}$$

(esercizio)

Commento: Una mappa  $w(z, \bar{z})$  che soddisfa la (2.120') viene chiamata mappa *quasi-conforme*

(Caso particolare  $\mu = 0$ : mappa conforme,  $w = w(z)$  funzione olomorfa).

### 2.6.1 La questione della buona posizione del problema di Cauchy

Definizione: Un problema al contorno per un'equazione alle derivate parziali si dice *ben posto secondo Hadamard* se possiede una e una sola soluzione ed essa dipende in modo continuo dai dati iniziali.

Commenti:

- (i) L'enunciato corretto di un problema al contorno contiene non soltanto l'equazione differenziale e i dati al contorno, ma anche la prescrizione dello spazio funzionale in cui si cerca la soluzione. Questa scelta è in grado di influenzare ad esempio l'unicità.
- (ii) Cosa si intende per dipendenza continua?  $\rightarrow$  richiede una metrica nello spazio delle soluzioni e una metrica nello spazio dei dati

$X$ : spazio delle soluzioni, con norma  $\|\cdot\|_X$

$Y$ : spazio dei dati, con norma  $\|\cdot\|_Y$

Definizione: Sia  $\{\delta_n\}$  una successione di dati (ordinabili in un vettore) tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\delta_n - \delta\|_Y = 0$$

e sia  $\{u_n\}$  una successione di soluzioni, con  $u$  soluzione corrispondente al dato limite  $\delta$ . Si ha dipendenza continua se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\|_X = 0$$

Le curve caratteristiche di un'equazione differenziale hanno un ruolo critico nel problema di Cauchy, perché limitano la scelta delle curve portanti i dati.

Le equazioni ellittiche sono avvantaggiate dall'assenza di curve caratteristiche?

È così per la questione dell'esistenza e unicità, ma non per la dipendenza continua (idem per le equazioni paraboliche).

N.B.: Dipendenza continua dai dati è irrinunciabile per un modello matematico sensato. Infatti i dati sono di solito affetti da errori sperimentali e ciò non deve essere causa di un comportamento imprevedibile della soluzione.

Inoltre la mancanza della dipendenza continua impedisce il calcolo numerico della soluzione a causa della ripercussione incontrollabile degli errori di arrotondamento.

La non buona posizione del problema di Cauchy per equazioni ellittiche e paraboliche è messa in luce dai seguenti esempi:

(i) Successione di problemi di Cauchy

$$u_{xx}^{(n)} + u_{yy}^{(n)} = 0, \quad u^{(n)}(0, y) = 0, \quad u_x^{(n)}(0, y) = A_n \cos(ny), \quad n = 1, 2, \dots$$

→ L'unica soluzione è:  $u^{(n)}(x, y) = \frac{A_n}{2n}(e^{nx} - e^{-nx}) \cos(ny)$

(si può trovare con un ansatz di separazione delle variabili,  $u^{(n)}(x, y) = f(x)g(y)$  → esercizio!)

Prendi per esempio  $A_n = e^{-\sqrt{n}} \Rightarrow$  per  $n \rightarrow \infty$  i dati di Cauchy tendono uniformemente a 0 per qualunque  $x \neq 0$ , le  $u^{(n)}$  non solo non tendono a 0, ma non restano nemmeno limitate.

(ii) Successione

$$u_{xx}^{(n)} - u_t^{(n)} = 0, \quad u^{(n)}(0, t) = A_n \sin(nt), \quad u_x^{(n)}(0, t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

→ Soluzione:

$$u^{(n)}(x, t) = \frac{1}{2}A_n \left[ e^{\sqrt{\frac{n}{2}}x} \sin\left(nt + \sqrt{\frac{n}{2}}x\right) + e^{-\sqrt{\frac{n}{2}}x} \sin\left(nt - \sqrt{\frac{n}{2}}x\right) \right]$$

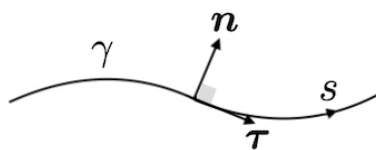
(esercizio)

Prendi per esempio  $A_n = n^{-k}$ ,  $k > 0 \rightarrow$  stesso problema dell'esempio (i)

*Problema:* Calcolare le derivate di ordine  $> 2$  nel problema di Cauchy (2.105), (2.109).

*Soluzione:* Conosciamo su  $\gamma$ :

$$u_{xx} = \omega_{2,0}(s), \quad u_{xy} = \omega_{1,1}(s), \quad u_{yy} = \omega_{0,2}(s)$$



$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{ds} = \boldsymbol{\tau} \cdot \nabla = -\beta \partial_x + \alpha \partial_y, \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

Per calcolare le derivate di ordine 3 faccio le derivate tangenziali:

$$\begin{aligned} -\beta u_{xxx} + \alpha u_{xxy} &= \omega'_{2,0}(s) \\ -\beta u_{xxy} + \alpha u_{xyy} &= \omega'_{1,1}(s) \\ -\beta u_{xyy} + \alpha u_{yyy} &= \omega'_{0,2}(s) \end{aligned} \tag{2.121}$$

Abbiamo così 3 equazioni per le derivate terze e 4 incognite.

La quarta equazione la otteniamo dall'equazione di partenza: deriva la (2.105) rispetto a  $x$  e tieni conto che termini del tipo  $(a_{11,x}u_{xx})|_\gamma$  sono noti:

$$\begin{aligned} a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu &= d \\ \Rightarrow a_{11}u_{xxx}|_\gamma + a_{11,x}u_{xx}|_\gamma + \dots &= d_x|_\gamma \\ \Rightarrow a_{11}u_{xxx} + 2a_{12}u_{xxy} + a_{22}u_{xyy} &= r_0^{(3)}(s) \end{aligned} \quad (2.122.0)$$

oppure deriva rispetto a  $y$ :

$$\Rightarrow a_{11}u_{xxy} + 2a_{12}u_{xyy} + a_{22}u_{yyy} = r_1^{(3)}(s) \quad (2.122.1)$$

( $|_\gamma$  sempre sottinteso).

Per (2.121), (2.122.0) abbiamo il determinante:

$$J_0^{(3)} = \begin{vmatrix} -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \\ a_{11} & 2a_{12} & a_{22} & 0 \end{vmatrix} = -a_{11}\alpha^3 - 2a_{12}\alpha^2\beta - a_{22}\alpha\beta^2 = -\alpha \mathbf{n} \cdot A\mathbf{n}$$

Per (2.121), (2.122.1) invece:

$$J_1^{(3)} = \begin{vmatrix} -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha \\ 0 & a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = -a_{11}\alpha^2\beta - 2a_{12}\alpha\beta^2 - a_{22}\beta^3 = -\beta \mathbf{n} \cdot A\mathbf{n}$$

Siccome  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ,  $\mathbf{n} \cdot A\mathbf{n} \neq 0$ ,  $J_0^{(3)}$  e  $J_1^{(3)}$  non possono essere entrambi nulli.

Derivate di ordine  $> 3$ :

Supponiamo note su  $\gamma$  le derivate

$$\partial_x^{n-i}\partial_y^i u = \omega_{n-i,i}(s)$$

con  $n \geq 3$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  ( $\partial_x^0 = \partial_y^0 = 1$ )

Deriviamole tangenzialmente:

$$-\beta\partial_x^{n+1-i}\partial_y^i u + \alpha\partial_x^{n-i}\partial_y^{i+1} u = \omega'_{n-i,i}(s) \quad (2.123)$$

$n+1$  equazioni e  $n+2$  incognite: l'equazione mancante (come nel caso precedente) la troviamo applicando alla (2.105) l'operatore  $\partial_x^{n-1-k}\partial_y^k$  ( $k = 0, \dots, n-1$ ) per far comparire le derivate  $(n+1)$ -esime:

$$\Rightarrow a_{11}\partial_x^{n+1-k}\partial_y^k u + 2a_{12}\partial_x^{n-k}\partial_y^{k+1} u + a_{22}\partial_x^{n-1-k}\partial_y^{k+2} u = r_k^{(n+1)}(s) \quad (2.124)$$

Troviamo dei determinanti  $J_k^{(n+1)}$  che hanno in comune le prime  $n+1$  righe corrispondenti alle eq. (2.123) ( $k$  indica quale delle (2.124) abbiamo preso come equazione mancante)

$$\begin{array}{ccccccc} -\beta & \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta & \alpha \end{array}$$

mentre l'ultima riga (corrispondente a una delle (2.124)) ha la terna  $a_{11}, 2a_{12}, a_{22}$  che occupa rispettivamente i posti  $(k+1)$ -esimo,  $(k+2)$ -esimo,  $(k+3)$ -esimo.

Per :

$$\begin{aligned} k = 0 : J_0^{(n+1)} &= \alpha^{n-1} \mathbf{n} \cdot A \mathbf{n} \\ k = 1 : J_1^{(n+1)} &= \beta \alpha^{n-2} \mathbf{n} \cdot A \mathbf{n} \\ &\dots \\ k = n-1 : J_{n-1}^{(n+1)} &= \beta^{n-1} \mathbf{n} \cdot A \mathbf{n} \end{aligned}$$

Almeno uno è diverso da zero.

## 2.7 Classificazione di equazioni differenziali di ordine superiore e in più variabili

Considera l'equazione differenziale:

$$\sum_{|j| \leq m} a_j D^j u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n \quad (2.125)$$

dove  $j = (j_1, \dots, j_n)$  multi-indice,  $|j| = j_1 + \dots + j_n$ ,

$$a_j = a_j(x^1, \dots, x^n),$$

$$D^j \equiv \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{j_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{j_n}$$

è di ordine  $m$ .

La parte principale è:

$$\sum_{|j|=m} a_j D^j u \quad (2.126)$$

Esempio:  $\mathbb{R}^3$  ( $m=3$ ):

$$a_{300}(x, y, z) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_{020}(x, y, z) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_{201}(x, y, z) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z} + a_{001}(x, y, z) \frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y, z) \quad (*)$$

→ parte principale:

$$a_{300}(x, y, z) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + a_{201}(x, y, z) \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial z}$$

Definizione: Una sottovarietà di dimensione  $n - 1$  ed equazione  $S(x^1, \dots, x^n) = 0$  viene chiamata *varietà caratteristica* dell'equazione differenziale alle derivate parziali se soddisfa l'equazione differenziale del I ordine:

$$\sum_{|j|=m} a_j p^j = 0, \quad p^j = \left( \frac{\partial S}{\partial x_1} \right)^{j_1} \dots \left( \frac{\partial S}{\partial x_n} \right)^{j_n} = p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n} \quad (2.127)$$

Esempi:

(i) per la (\*):

$$\begin{aligned} \sum_{|j|=3} a_{j_1} a_{j_2} a_{j_3} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^{j_1} \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^{j_2} \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^{j_3} &= 0 \\ \Rightarrow a_{300} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^3 + a_{201} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right) &= 0 \end{aligned}$$

(ii) per la (2.105):

$$a_{20}(x, y)u_{xx} + a_{11}(x, y)u_{xy} + a_{02}(x, y)u_{yy} + a_{10}(x, y)u_x + a_{01}(x, y)u_y + a_{00}(x, y)u = f(x, y)$$

(avendo rinominato i coefficienti)

$m = 2$ : parte principale:

$$a_{20}u_{xx} + a_{11}u_{xy} + a_{02}u_{yy}$$

varietà caratteristica:

$$a_{20} \left( \frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + a_{11} \frac{\partial S}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} + a_{02} \left( \frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 = 0$$

→ è la (2.116) con  $\chi \rightarrow S|_{S(x,y)=0}$

→ La varietà caratteristica è una generalizzazione delle curve caratteristiche.

*Problema di Cauchy:* Trovare una soluzione  $C^m$  della (2.125), la quale, assieme alle sue derivate di ordine  $\leq m - 1$ , assume dei valori fissati su una sottovarietà  $S$  di dimensione  $n - 1$  ed equazione  $S(x^1, \dots, x^n) = 0$ .

Esempio:  $n = m = 2 \Rightarrow \dim S = 1 \rightarrow$  curva sulla quale fissiamo  $u$  e la sua derivata prima.

Il problema viene semplificato dal seguente cambiamento di coordinate:

$$x^{1'} = S(x^1, \dots, x^n) \quad x^{j'} = x^j \quad (j = 2, \dots, n)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_1'} + \sum_{j=2}^n \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x_j'} = p_i \frac{\partial}{\partial x_1'} + \sum_{j=2}^n \delta_i^j \frac{\partial}{\partial x_j'}$$

$\Rightarrow$  la (2.125) diventa:

$$\begin{aligned} \sum_{|j| \leq m} a_j \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{j_1} \left( \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{j_2} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{j_n} u &= f \\ \frac{\partial}{\partial x_1} &\rightarrow p_1 \frac{\partial}{\partial x_1'} + \sum_{j=2}^n \delta_1^j \frac{\partial}{\partial x_j'} = p_1 \frac{\partial}{\partial x_1'} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &\rightarrow p_2 \frac{\partial}{\partial x_1'} + \sum_{j=2}^n \delta_2^j \frac{\partial}{\partial x_j'} = p_2 \frac{\partial}{\partial x_1'} + \frac{\partial}{\partial x_2'} \\ \frac{\partial}{\partial x_n} &\rightarrow p_n \frac{\partial}{\partial x_1'} + \frac{\partial}{\partial x_n'} \\ \Rightarrow \sum_{|j| \leq m} a_j p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n} \left( \frac{\partial}{\partial x_1'} \right)^{\overbrace{j_1 + \dots + j_n}^{|j|}} &+ \sum_{\substack{|j| \leq m \\ j_1 < m}} b_j \left( \frac{\partial}{\partial x_1'} \right)^{j_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n'} \right)^{j_n} u = f \end{aligned} \quad (2.128)$$

Per alleggerire la notazione sopprimo il simbolo  $'$  in quello che segue.

Dati di Cauchy per la (2.128):

$$\left. \frac{\partial^k u}{(\partial x_1)^k} \right|_{x_1=0} = \varphi_k(x_2, \dots, x_n), \quad k = 0, \dots, m-1 \quad (2.129)$$

Se le funzioni  $\varphi_k$  sono di classe  $C^{m-k}$ , determinano

$$(D^j u)(0, x_2, \dots, x_n) = \left( \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{j_1} \dots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{j_n} u \right) (0, x_2, \dots, x_n) \quad (2.130)$$

per  $|j| \leq m$ ,  $j_1 < m$

(deriva la (2.129) al massimo  $m-k$  volte).

Le (2.130), attraverso la (2.128), determinano

$$\frac{\partial^m u}{(\partial x_1)^m}(0, x_2, \dots, x_n)$$

se

$$\sum_{|j|=m} a_j p^j \neq 0$$

cioè se  $S$  non è una varietà caratteristica.



Se  $S$  è una varietà caratteristica, la (2.128) valutata in  $x_1 = 0$  dà una relazione fra i dati di Cauchy (2.129). Su una varietà caratteristica i dati di Cauchy non possono essere prescritti indipendentemente!

Teorema di Cauchy-Kowalevski: La (2.125) con  $f$  e  $\{a_j\}$  analitiche, e dati di Cauchy analitici su una iper-superficie  $S$  non caratteristica, ha una e una sola soluzione analitica in un intorno di  $S$ .

*Classificazione*: Le proprietà di soluzioni di equazioni differenziali alle derivate parziali dipendono dalla natura delle variabili caratteristiche.

→ seguente classificazione:

- La (2.125) viene chiamata *ellittica* se l'equazione in  $p \equiv (p_1, \dots, p_n)$

$$\sum_{|j|=m} a_j p^j = 0$$

non ammette soluzioni reali per  $p \neq 0 \leftrightarrow$  no varietà caratteristica

- La (2.125) è  $x^1$ -*iperbolica* se l'equazione in  $p_1$

$$\sum_{|j|=m} a_j p^j = 0$$

ha  $m$  radici reali distinte per ogni sistema di numeri reali  $(p_1, \dots, p_n)$

Esempi:

(i) Equazione di Laplace

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u = 0 \quad m = 2$$

$$\sum_{|j|=2} a_{j_1, \dots, j_n} p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n} = 0$$

$$\Rightarrow p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 = 0 \Rightarrow \text{ellittica}$$

(ii) Equazione d'onda

$$\square u = \left( -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \sum_{i=2}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \right) u = 0 \quad m = 2$$

$$\sum_{|j|=2} a_{j_1, \dots, j_n} p_1^{j_1} \dots p_n^{j_n} = 0$$

$$\Rightarrow -p_1^2 + p_2^2 + \dots + p_n^2 = 0$$

$\Rightarrow$  2 radici reali per  $p_1$ ,  $\forall (p_1, \dots, p_n) \Rightarrow$  iperbolica

La (2.125) è  $x^1$ -parabolica se può essere scritta nella forma

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} - \sum_{\substack{|j| \leq m \\ j_1 = 0}} a_j D^j u = f \quad (2.131)$$

con

$$\sum_{\substack{|j|=m \\ j_1=0}} a_j p^j > 0 \quad \forall p \neq 0$$

cioè

$$\sum_{\substack{|j| \leq m \\ j_1 = 0}} a_j D^j$$

è un operatore differenziale ellittico in  $\mathbb{R}^{n-1}$ .

Esempio: L'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0$$

è  $t$ -parabolica.

Le equazioni paraboliche rappresentano una classe importante di equazioni che non sono né ellittiche né iperboliche.

Ad ordini superiori al secondo le equazioni possono non rientrare nella classificazione iperbolica, parabolica, ellittica.

Vediamo due equazioni:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^4}$$

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0 \Rightarrow \text{ellittica}$$

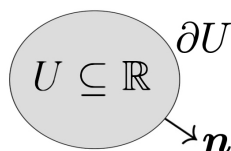
$$-\frac{\partial^2}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^4}$$

$$-p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 0 \Rightarrow p_1 = \sqrt[4]{p_2^2 + p_3^2}$$

2 soluzioni reali + 2 soluzioni complesse  $\rightarrow$  non rientra in nessuno dei 3 tipi

## 2.8 La formula di Green

Sia  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  insieme aperto limitato con bordo  $C^1$   $\partial U$ .



$u, \varphi$  funzioni  $C^2$  in  $U$ .

$$\begin{aligned} \Rightarrow u\Delta\varphi &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \\ \int_U u\Delta\varphi d^n x &= \underbrace{\int_U \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) d^n x}_{\stackrel{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial U} \sum_i u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d^{n-1} S_i} - \int_U \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} d^n x \end{aligned}$$

$d^{n-1}S_i = n_i dA \rightarrow$  elemento di *superficie*  $n - 1$  dimensionale

$\Rightarrow$  In forma vettoriale: Gauss

$$\int_U \operatorname{div}(u \operatorname{grad} \varphi) d^n x = \int_{\partial U} u \operatorname{grad} \varphi \cdot d^{n-1} \mathbf{S}$$

Per  $\varphi = u$

$$\int_U u\Delta u d^n x = \int_{\partial U} \sum_i u \frac{\partial u}{\partial x_i} d^{n-1} S_i - \int_U \sum_i \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d^n x \quad (2.132)$$

*Integrale di energia*

$$\int_U (u\Delta\varphi - \varphi\Delta u) d^n x = \int_{\partial U} \sum_i \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) d^{n-1} S_i \quad (2.133)$$

*Formula di Green* (II identità di Green)

Teorema di unicità: L'equazione differenziale

$$\Delta u = f$$

ha al massimo una soluzione in  $C^2(U)$  che assume dei dati valori su  $\partial U$ .

Dimostrazione: Siano  $v_1$  e  $v_2$  soluzioni. Dimostreremo che  $u = v_1 - v_2 = 0$

$$\Delta u = \Delta v_1 - \Delta v_2 = f - f = 0$$

$$u|_{\partial U} = v_1|_{\partial U} - v_2|_{\partial U} = 0$$

$$(2.132) \Rightarrow \sum_i \int_U \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 d^n x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \text{ in } U \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow u = \text{costante in } U$$

$$u|_{\partial U} = 0 \Rightarrow u = 0 \text{ in } U \quad \blacksquare$$

La formula di Green (2.133) permette di ottenere un'espressione per  $u(\mathbf{y})$ ,  $\mathbf{y} \in U$ , in termini di  $\Delta u = f$  in  $U$  e di  $u, \frac{\partial u}{\partial n}$  su  $\partial U$ .

Nella (2.133), poni

$$\varphi(\mathbf{x}) = -K_n |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n}$$

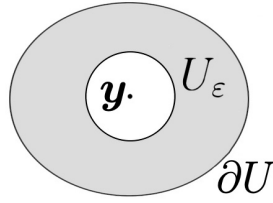
con

$$K_n = \frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{(n-2)2\pi^{\frac{n}{2}}}, \quad n \neq 2$$

$\varphi$  è  $C^\infty$  nell'insieme aperto  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ .

Per il dominio di integrazione prendiamo  $U_\varepsilon$ , uguale a  $U$  senza la palla  $B_\varepsilon(\mathbf{y})$  con raggio  $\varepsilon$  e centro  $\mathbf{y}$ :

$$U_\varepsilon = U \setminus B_\varepsilon(\mathbf{y})$$



$$(2.133) \Rightarrow \int_{U_\varepsilon} \underbrace{(u \Delta \varphi - \varphi \Delta u)}_0 d^n x = \int_{\underbrace{\partial U_\varepsilon}_{\partial U \cup \partial B_\varepsilon}} \sum_i \left( u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) d^{n-1} S^i$$

(Esercizio: verificare che  $\Delta \varphi = 0$  in  $U_\varepsilon$ )

$$\begin{aligned} & \Rightarrow K_n \underbrace{\int_{U_\varepsilon} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} \Delta u d^n x}_{\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} f d^n x} = \\ & = -K_n \int_{\partial U \cup \partial B_\varepsilon} \sum_i \left( u \frac{\partial}{\partial x_i} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) d^{n-1} S_i \end{aligned} \quad (2.134)$$

Parentesi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} &= \frac{\partial}{\partial x_i} [(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{\frac{2-n}{2}} = \\ &= \frac{2-n}{2} [\dots]^{\frac{2-n}{2}-1} 2(x_i - y_i) = (2-n)(x_i - y_i) |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n} \end{aligned}$$

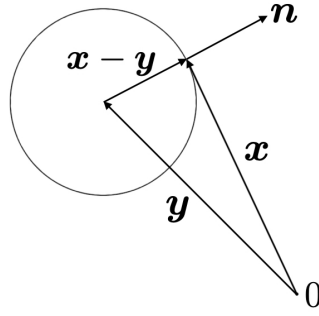
Integrale su  $\partial B_\varepsilon$ :

$$-K_n \int_{S_\varepsilon^{n-1}} \sum_i \left( u(2-n) \underbrace{(x_i - y_i)}_{n_i |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \underbrace{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-n}}_\varepsilon - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) d^{n-1} S_i =$$

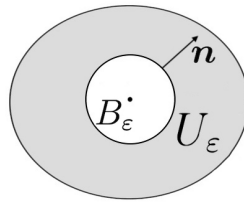
$|\mathbf{x} - \mathbf{y}| = \varepsilon$  per  $\mathbf{x} \in \partial B_\varepsilon$

$S_\varepsilon^{n-1}$ : (n-1)-sfera con raggio  $\varepsilon$  (bordo di  $B_\varepsilon$ )

Vettore normale:  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{y}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$ ,  $|\mathbf{n}| = 1$  (punta verso l'esterno della palla)



$d^{n-1}S_i = -n_i dV_\varepsilon$  ( $dV_\varepsilon$ : elemento di *superficie* su  $S_\varepsilon^{n-1}$ )  
 $\rightarrow$  il vettore normale deve puntare verso l'esterno di  $U_\varepsilon$



$$= +K_n \int_{S_\varepsilon^{n-1}} \sum_i \left( u(2-n)n_i \varepsilon^{1-n} - \varepsilon^{2-n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) n_i dV_\varepsilon \quad (\otimes)$$

$dV_\varepsilon = \varepsilon^{n-1} dV_1$  ( $dV_1$ : elemento di *superficie* sulla  $S_1^{n-1}$  (raggio 1))

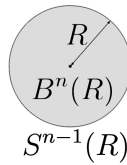
$$(\otimes) \xrightarrow[\sum_i (n_i)^2=1]{\varepsilon \rightarrow 0} K_n u(\mathbf{y})(2-n) \int_{S_1^{n-1}} dV_1 = -u(\mathbf{y}) \quad (2.135)$$

$\int_{S_1^{n-1}} dV_1 = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ : *superficie* della (n-1)-sfera con raggio 1

Parentesi: Volume della palla n-dimensionale e area della  $S^{n-1}$

$$B^n(R) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2\} \quad \text{volume } V_n(R)$$

$$S^{n-1}(R) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 = R^2\} \quad \text{area } A_{n-1}(R)$$



$$V_n(R) = \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx_1 \dots dx_n = C_n R^n \quad (2.136)$$

$C_n$ : coefficienti da calcolare,  $R^n$ : segue da analisi dimensionale

Possiamo calcolare  $V_n(R)$  sommando un numero infinito di gusci sferici di spessore infinitesimo:

$$V_n(R) = \int_0^R A_{n-1}(r) dr \quad (2.137)$$

$$\Rightarrow A_{n-1} = \frac{dV_n(R)}{dR} \stackrel{(2.136)}{=} nC_n R^{n-1} \quad (2.138)$$

Uguagliando (2.136) e (2.137) e usando la (2.138) si ottiene:

$$\int_{x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} \dots \int dx_1 \dots dx_n = nC_n \int_0^R r^{n-1} dr \quad (2.139)$$

In  $n$  dimensioni:

$$dx_1 \dots dx_n = r^{n-1} dr d\Omega_{n-1} \quad (2.140)$$

dove  $d\Omega_{n-1}$  contiene la parte angolare.

$$n = 2 : d\Omega_1 = d\theta$$

$$n = 3 : d\Omega_2 = \sin \theta d\theta d\varphi$$

...

(Potremmo definire esplicitamente le  $n - 1$  variabili angolari in  $n$  dimensioni)

Parte sinistra della (2.139): integrale in coordinate cartesiane

Parte destra della (2.139): integrale in coordinate sferiche

Confrontando (2.139) e (2.140) troviamo:

$$\int \dots \int d\Omega_{n-1} = nC_n \quad (2.141)$$

Si può calcolare  $C_n$  senza introdurre esplicitamente le coordinate sferiche in  $n$  dimensioni usando il seguente trucco:

Considero la funzione:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \exp(-x_1^2 - \dots - x_n^2) = e^{-r^2}$$

Integro  $f$  su tutto  $\mathbb{R}^n$ , sia in coordinate cartesiane, sia in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} dx_1 \dots dx_n &= \int_0^\infty r^{n-1} dr \int d\Omega_{n-1} e^{-r^2} \\ \underbrace{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x_1^2} dx_1 \right)^n}_{\sqrt{\pi}} &= nC_n \underbrace{\int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr}_{\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \\ \Rightarrow C_n &= \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\stackrel{(2.138)}{\Rightarrow} A_{n-1}(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})} R^{n-1} \quad (2.142)$$

$$V_n(R) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{n}{2})} R^n \quad (2.143)$$

Se  $n = 2$ :  $A_1(R) = \frac{2\pi}{\Gamma(1)} R = 2\pi R$  (superficie sfera in  $\mathbb{R}^2$ ) ( $\Gamma(1) = 1$ )

Se  $n = 3$ :  $A_2(R) = \frac{2\pi^{3/2}}{\Gamma(\frac{3}{2})} R^2 = 4\pi R^2$  (superficie sfera in  $\mathbb{R}^3$ ) ( $\Gamma(\frac{3}{2}) = \Gamma(\frac{1}{2} + 1) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ )  
etc...

È divertente notare che:  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(R) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n-1}(R)$  (me li aspettavo divergenti)

Torniamo alle identità di Green.

Inserisco (2.135) in (2.134) e faccio  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0}$ :

$$K_n \int_U |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} f(\mathbf{x}) d^n x = -u(\mathbf{y}) - K_n \int_{\partial U} \sum_i \left( u \frac{\partial}{\partial x_i} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) n_i dV$$

( $dV$ : elemento di *superficie* indotto su  $\partial U$ )

Usando  $\sum_i n_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{n} \cdot \nabla \equiv \frac{\partial}{\partial n}$  ottengo:

$$\Rightarrow u(\mathbf{y}) = -K_n \int_U |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} f(\mathbf{x}) d^n x + \\ - K_n \int_{\partial U} \left( u \frac{\partial}{\partial n} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} - |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2-n} \frac{\partial u}{\partial n} \right) dV \quad (2.144)$$

*Formula generale del potenziale* (III identità di Green)

→ importante in elettrostatica/elettrodinamica, per esempio dà la soluzione dell'equazioni di Poisson ( $u$  sarebbe il potenziale elettrico, integrato sul dominio la densità di carica;  $\frac{\partial u}{\partial n}$  sarebbe il campo elettrico).

N.B.: Sia  $\varphi$  di supporto compatto e  $\mathbf{y} = 0$

Supponiamo che  $\partial U$  sia fuori dall'insieme compatto in cui  $\varphi \neq 0$

$$(2.144) \Rightarrow \varphi(0) = -K_n \int |\mathbf{x}|^{2-n} \Delta \varphi d^n x =$$

Integro per parti due volte (non ho contribuito di bordo perché  $\varphi$  ha supporto compatto)

$$= -K_n \int \Delta |\mathbf{x}|^{2-n} \varphi(\mathbf{x}) d^n x = \int \delta(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d^n x = \langle \delta, \varphi \rangle$$

dove abbiamo usato:

$$g \Delta \varphi = \text{div}(g \cdot \text{grad } \varphi) - \text{grad } g \cdot \text{grad } \varphi$$

$$|\mathbf{x}|^{2-n} \rightarrow g \text{ (Esercizio: dimostrarlo usando: } g \Delta \varphi = g \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi)$$

$$\Rightarrow \Delta (-K_n |\mathbf{x}|^{2-n}) = \delta(\mathbf{x}) \quad (2.145)$$

un risultato ottenuto prima con un altro metodo.

## 2.9 Equazioni differenziali non lineari

*Metodo delle caratteristiche di Lagrange-Charpit*

Considero l'equazione quasi-lineari del I ordine:

$$a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y + c(x, y, u) = 0 \quad (2.146)$$

Suppongo di conoscere una soluzione  $u(x, y)$  e considero la curva  $(x(t), y(t))$  che soddisfa:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) \\ \frac{dy}{dt} = b(x(t), y(t), u(x(t), y(t))) \end{cases} \quad (2.147)$$

Lungo questa curva ho:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), y(t)) = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} \stackrel{(2.147)}{=} au_x + bu_y \stackrel{(2.146)}{=} -c \quad (2.148)$$

La curva  $(x(t), y(t))$  è una curva caratteristica.

Check: Curva caratteristica  $S(x, y) = 0$ , dove  $S$  soddisfa la (2.127) cioè:

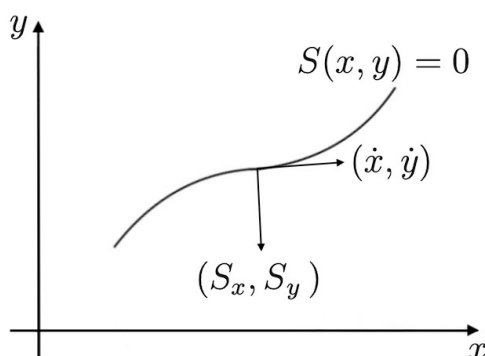
$$a \frac{\partial S}{\partial x} + b \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (2.149)$$

(in questo caso  $m = 1$ ,  $n = 2$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ ).

Lungo la curva  $S = 0$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow dS = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial S}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial S}{\partial y} \dot{y} = 0 \end{aligned} \quad (2.150)$$

$$\left. \begin{aligned} (2.149) &\rightarrow (a, b) \perp (S_x, S_y) \\ (2.150) &\rightarrow (\dot{x}, \dot{y}) \perp (S_x, S_y) \end{aligned} \right\} \Rightarrow (a, b) \propto (\dot{x}, \dot{y})$$





Riparametrizzo la curva per assorbire il fattore di proporzionalità, cioè in modo che  $(a, b) = (\dot{x}, \dot{y})$

(N.B.:  $\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt'} \frac{dt'}{dt}$ )

Le (2.147) sono soddisfatte. ✓

Tutto ciò suggerisce un metodo per risolvere la (2.146).

Suppongo di avere una curva  $\Gamma$  data da  $(x_0(s), y_0(s))$  su cui sono definiti dei valori iniziali  $u = u_0(s)$ .

Supponiamo che sulla curva valga:

$$\begin{vmatrix} \frac{dx_0}{ds} & a \\ \frac{dy_0}{ds} & b \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.151)$$

cioè  $\Gamma$  non è caratteristica (altrimenti  $\nabla S = (S_x, S_y) \propto (a, b)$  e potrei riparametrizzare come prima).

Ora  $\forall s$  risolvo:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a(x, y, u) \\ \frac{dy}{dt} = b(x, y, u) \\ \frac{du}{dt} = -c(x, y, u) \end{cases} \quad (2.152)$$

con condizioni iniziali

$$\begin{cases} x(t=0, s) = x_0(s) \\ y(t=0, s) = y_0(s) \\ u(t=0, s) = u_0(s) \end{cases} \quad (2.153)$$

( $s$  è un parametro da cui la soluzione dipende)

$\rightarrow$  Ho espresso  $x, y, u$  in funzione di  $t, s$ .

(2.151)  $\xRightarrow{\text{teo. f. inversa}}$  posso esprimere  $t, s$  in funzione di  $x, y$  in un intorno di  $\Gamma$ .

Sostituisci il risultato in  $u(t, s) \Rightarrow$  Soluzione  $u(x, y)$  della (2.146)

Check: Controllo che questo metodo dia soluzioni della (2.146):

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x(t, s), y(t, s)) = u_x \frac{\partial x}{\partial t} + u_y \frac{\partial y}{\partial t} \stackrel{(2.152)}{=} au_x + bu_y$$

D'altra parte:

$$(2.152) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} u(x(t, s), y(t, s)) = -c$$

Paragonando si ottiene che la (2.146) è soddisfatta. ✓

Esempio:

$$xu_x + (x + y)u_y = u + 1 \quad (\text{lineare})$$

Come curva uso:

$$u(x, 0) = x^2$$

Equazioni caratteristiche:

$$\dot{x} = x; \quad \dot{y} = x + y; \quad \dot{u} = u + 1$$

N.B.: Ho trasformato in equazioni differenziali ordinarie, al prezzo di averne 3 al posto di 1.

Devo risolvere questo sistema e parametrizzare la curva iniziale.

La curva iniziale può essere parametrizzata nella forma:

$$x_0(s) = s, \quad y_0(s) = 0, \quad u_0(s) = s^2$$

Check: La curva iniziale non deve essere caratteristica, ovvero deve rispettare (2.151)

$$\left| \begin{array}{cc} \frac{dx_0}{ds} & a \\ \frac{dy_0}{ds} & b \end{array} \right| \stackrel{\text{su } \Gamma}{=} \left| \begin{array}{cc} 1 & x_0 \\ 0 & x_0 + y_0 \end{array} \right| = x_0 + y_0 = x_0 \neq 0 \quad \checkmark$$

Integrando l'equazione per  $x$ , ho:

$$\frac{\dot{x}}{x} = 1 \Rightarrow \ln x = t + \ln C$$

$$x(t=0) \stackrel{!}{=} x_0(s) = s \Rightarrow C = s \Rightarrow x = se^t$$

Poi ho:

$$\dot{y} - y = x = se^t$$

La soluzione generale dell'equazione omogenea è:

$$y = Ae^t$$

Per ricavare la soluzione particolare della non omogenea scrivo:

$$y = A(t)e^t \quad (\text{variazione delle costanti})$$

$$\Rightarrow \dot{y} = \dot{A}e^t + Ae^t \stackrel{!}{=} y + se^t = Ae^t + se^t \Rightarrow \dot{A} = s \Rightarrow A = st$$

La soluzione generale dell'equazione non omogenea diventa:

$$y = ce^t + ste^t$$

impongo che:

$$y(t=0, s) = y_0(s) = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow y = ste^t$$

Infine risolvo:

$$\dot{u} = u + 1 \Rightarrow \frac{du}{u+1} = dt \Rightarrow \ln(u+1) = t + \ln C \Rightarrow u+1 = Ce^t$$

e impongo le condizioni iniziali:

$$u(t=0, s) = u_0(s) = s^2 \Rightarrow c - 1 = s^2 \Rightarrow u = (s^2 + 1)e^t - 1$$

Ora esprimo  $t, s$  in funzione di  $x, y$ :

$$y = ste^t = tx \Rightarrow t = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow s = xe^{-t} = xe^{-\frac{y}{x}}$$

Sostituisco nell'espressione per  $u$ :

$$\Rightarrow u(x, y) = x^2 e^{-\frac{y}{x}} + e^{\frac{y}{x}} - 1$$

Curiosità: È il contrario di quello che fai in meccanica analitica: Hamilton  $\rightarrow$  Hamilton-Jacobi

Esercizio: Generalizzare il metodo descritto sopra al problema

$$\sum_{i=1}^n a_i(\mathbf{x}, u) u_{x_i} + c(\mathbf{x}, u) = 0$$

con  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  e i dati iniziali espressi nella forma  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(\mathbf{s})$ ,  $u = u_0(\mathbf{s})$  con  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{n-1})$ .

( $\Gamma$  è una iper-superficie  $n-1$  dimensionale parametrizzata da  $s_1, \dots, s_{n-1}$ ) ( $\rightarrow$  esercizio!)

Ora vorremmo generalizzare questa costruzione al problema non quasi-lineare

$$F(x, y, u, p, q) = 0 \quad p = u_x, \quad q = u_y \quad (2.154)$$

Assumiamo che  $F$  sia una funzione  $C^1$  dei suoi argomenti. Sia  $u$  una funzione  $C^2$  che risolve la (2.154). Vorremmo trovare un sistema caratteristico di equazioni differenziali ordinarie simile a (2.152).

A tal fine poniamo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p} = F_p, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial F}{\partial q} = F_q \quad (2.155)$$

(Applicando questo alla (2.146), cioè a  $a(x, y, u)p + b(x, y, u)q + c(x, y, u) = 0$ , dà le (2.152))

Equazione per  $u$ :

$$\frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) = u_x \frac{dx}{dt} + u_y \frac{dy}{dt} = p F_p + q F_q \quad (2.156)$$

(Applicando alla (2.146), questo dà  $\frac{d}{dt} u(x(t), y(t)) = -c$ , che è l'ultima delle (2.152))

Vorremmo usare (2.155), (2.156) come sistema caratteristico.

Problema: Questo sistema (contrariamente alle (2.152)) non dipende solo da  $x, y, u$ , ma anche da  $u_x$  e  $u_y$ .

$\rightarrow$  Servono delle equazioni per  $p = u_x$  e  $q = u_y$ .

Si ha:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt} u_x = u_{xx} \frac{dx}{dt} + u_{xy} \frac{dy}{dt} = u_{xx} F_p + u_{xy} F_q \quad (2.157)$$

⇒ deriva la (2.154) rispetto a  $x$ :

$$\Rightarrow F_x + F_u u_x + F_p u_{xx} + F_q u_{xy} = 0 \quad (2.158)$$

Usando la (2.158) la (2.157) diventa:

$$\frac{dp}{dt} = -F_x - pF_u \quad (2.159)$$

In modo molto simile (esercizio)

$$\frac{dq}{dt} = -F_y - qF_u \quad (2.159')$$

→ abbiamo il seguente sistema chiuso di equazioni differenziali ordinarie:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F_p, & \frac{dy}{dt} &= F_q, & \frac{du}{dt} &= pF_p + qF_q, \\ \frac{dp}{dt} &= -pF_u - F_x, & \frac{dq}{dt} &= -qF_u - F_y \end{aligned} \quad (2.160)$$

*Sistema di Lagrange-Charpit*

→ seguente metodo per risolvere la (2.154):

Sia data una curva  $\Gamma$  non caratteristica  $(x_0(s), y_0(s))$ , assieme a dei valori  $u = u_0(s)$  su  $\Gamma$ . Contrariamente al caso quasi-lineare abbiamo bisogno di condizioni iniziali  $p = p_0(s)$  e  $q = q_0(s)$  per risolvere le (2.160). Le condizioni iniziali devono risolvere la (2.154):

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0 \quad (2.161)$$

Serve un'altra condizione per determinare  $p_0$  e  $q_0$ . Per ottenerla, notiamo che la soluzione  $u(x, y)$  della (2.154) soddisfa:

$$\frac{d}{ds} u(x_0(s), y_0(s)) = u_x \frac{dx_0}{ds} + u_y \frac{dy_0}{ds}$$

⇒ richiediamo che  $p_0, q_0$  soddisfino anche

$$\frac{du_0}{ds} = p_0(s) \frac{dx_0}{ds} + q_0(s) \frac{dy_0}{ds} \quad (2.162)$$

(2.161) e (2.162) forniscono le funzioni iniziali  $p_0(s), q_0(s)$ .

Richiediamo inoltre

$$\begin{vmatrix} x'_0(s) & F_p \\ y'_0(s) & F_q \end{vmatrix} \neq 0 \text{ su } \Gamma \quad (2.163)$$

(vedremo sotto a cosa serve)

Risolviamo le (2.160) con condizioni iniziali date su  $\Gamma$ .

→ produce le funzioni  $x(t, s), y(t, s), u(t, s), p(t, s), q(t, s)$ .

Grazie alla (2.163) possiamo invertire  $x(t, s), y(t, s)$  per ottenere  $t(x, y), s(x, y)$  in un intorno di  $\Gamma$ .

Sostituito in  $u(t, s)$  dà una soluzione  $u(x, y)$ .

Dimostriamo che questa ricetta fornisce infatti una soluzione della (2.154):

Dimostriamo prima che:

$$G(t, s) \equiv F(x(t, s), y(t, s), u(t, s), p(t, s), q(t, s)) = 0$$

N.B.:  $G(0, s) = 0$  a causa della (2.161)

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial t} &= F_x \frac{\partial x}{\partial t} + F_y \frac{\partial y}{\partial t} + F_u \frac{\partial u}{\partial t} + F_p \frac{\partial p}{\partial t} + F_q \frac{\partial q}{\partial t} = \\ &\stackrel{(2.160)}{=} F_x F_p + F_y F_q + F_u (p F_p + q F_q) - F_p (F_x + p F_u) - F_q (F_y + q F_u) = 0 \\ &\Rightarrow G(t, s) = 0 \end{aligned}$$

Prossimo passo: dobbiamo dimostrare che:

$$p(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

A tal fine dimostriamo che:

$$H(t, s) = \frac{\partial u}{\partial s} - p(t, s) \frac{\partial x}{\partial s} - q(t, s) \frac{\partial y}{\partial s} = 0 \quad (2.164)$$

(il motivo diventerà chiaro dopo)

N.B.:  $H(0, s) = 0$  per la (2.162)

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} - \frac{\partial p}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial s} - p \frac{\partial^2 x}{\partial t \partial s} - \frac{\partial q}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial s} - q \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial s} = \\ &\stackrel{(2.160)}{=} \frac{\partial}{\partial s} (p F_p + q F_q) + (F_x + p F_u) \frac{\partial x}{\partial s} - p \frac{\partial}{\partial s} F_p + (F_y + q F_u) \frac{\partial y}{\partial s} - q \frac{\partial}{\partial s} F_q = \\ &= F_p \frac{\partial p}{\partial s} + F_q \frac{\partial q}{\partial s} + (F_x + p F_u) \frac{\partial x}{\partial s} + (F_y + q F_u) \frac{\partial y}{\partial s} \end{aligned} \quad (2.165)$$

Inoltre:  $G(t, s) = 0 \quad \forall (t, s)$

$$\Rightarrow \frac{\partial G}{\partial s} = F_x \frac{\partial x}{\partial s} + F_y \frac{\partial y}{\partial s} + F_u \frac{\partial u}{\partial s} + F_p \frac{\partial p}{\partial s} + F_q \frac{\partial q}{\partial s} = 0$$

Usando questa nella (2.165) otteniamo

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -F_u \left( \frac{\partial u}{\partial s} - p \frac{\partial x}{\partial s} - q \frac{\partial y}{\partial s} \right) = -F_u H$$

La soluzione di questa equazione differenziale ordinaria con condizione iniziale  $H(0, s) = 0$  è  $H(t, s) = 0$

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{\partial H}{\partial t}}{H} &= -F_u \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \ln H = -F_u \\
\Rightarrow \ln H(t) &= - \int F_u(s, t) dt + \ln C \\
\Rightarrow H(t, s) &= C \underbrace{\exp \left( - \int F_u dt \right)}_{:=h(t, s)} \\
\Rightarrow H(0, s) &= C h(0, s) \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow H(t, s) = 0
\end{aligned}$$

Dobbiamo ancora far vedere che  $H(t, s) = 0$  implica  $p = u_x, q = u_y$ .

A tal fine nota che :

$$\frac{\partial u}{\partial t} \stackrel{(2.160)}{=} pF_p + qF_q = p \frac{\partial x}{\partial t} + q \frac{\partial y}{\partial t}$$

Questa, assieme alla (2.164) dimostra che:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{pmatrix} = J \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (2.166)$$

con

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{pmatrix}$$

Considerando  $u$  una funzione di  $x, y$  abbiamo:

$$J \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{pmatrix} \quad (2.167)$$

$$(2.166) \Rightarrow \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \underbrace{J^{-1}}_{\substack{\text{invertibile} \\ \text{per (2.163)}}} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{pmatrix} \stackrel{(2.167)}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \blacksquare$$

N.B.: Eliminando il parametro  $t$  dalle equazioni di Lagrange-Charpit (2.160) si ottiene:

$$\frac{dx}{F_p} = \frac{dy}{F_q} = \frac{du}{pF_p + qF_q} = \frac{dp}{-F_x - pF_u} = \frac{dq}{-F_y - qF_u} \quad (2.168)$$

A volte le equazioni si vedono scritte in questa forma.

*Generalizzazione al caso di  $n$  variabili:*

$$F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = 0 \quad (2.169)$$

(prima  $n = 2$ ,  $p_1 = p$ ,  $p_2 = q$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$ )

$$\begin{aligned} p_i &= \frac{\partial u}{\partial x_i}, & \dot{x}_i &= F_{p_i}, \\ \Rightarrow \quad \dot{p}_i &= -p_i F_u - F_{x_i}, & \dot{u} &= \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} \end{aligned} \quad (2.170)$$

oppure

$$\frac{dx_i}{F_{p_i}} = -\frac{dp_i}{F_{x_i} + p_i F_u} = \frac{du}{\sum_{j=1}^n p_j F_{p_j}}$$

Se  $u$  è data su una superficie iniziale,  $u = u_0(\mathbf{s})$ , per  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0(\mathbf{s})$  dove  $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{n-1})$ ,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ , le condizioni iniziali per  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$  sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} F(\mathbf{x}_0(\mathbf{s}), u_0(\mathbf{s}), \mathbf{p}_0(\mathbf{s})) = 0 \\ \frac{\partial u_0(\mathbf{s})}{\partial s_j} = \sum_{k=1}^n p_{k,0}(\mathbf{s}) \frac{\partial x_{k,0}(\mathbf{s})}{\partial s_j}, \quad j = 1, \dots, n-1 \end{cases} \quad (2.170')$$

che generalizzano le (2.161), (2.162).

Esempi per Lagrange-Charpit:

$$(i) \quad u = u_x^2 - 3u_y^2, \quad u(x, 0) = x^2$$

$$\Rightarrow F(x, y, u, p, q) = p^2 - 3q^2 - u$$

$$F_x = 0 = F_y, \quad F_p = 2p, \quad F_q = -6q, \quad F_u = -1$$

Sia  $x_0(s) = s$ ,  $y_0(s) = 0$ ,  $u_0(s) = s^2$

$p_0(s), q_0(s)$  sono soluzioni del sistema

$$\begin{aligned} &\begin{cases} p_0^2 - 3q_0^2 = u_0 = s^2 & (\text{vedi (2.161)}) \\ \frac{du_0}{ds} = p_0 \frac{dx_0}{ds} + q_0 \frac{dy_0}{ds} & (\text{vedi (2.162)}) \end{cases} \\ &\Rightarrow 2s = p_0 \\ &\Rightarrow 4s^2 - 3q_0^2 = s^2 \Rightarrow q_0 = \pm s \end{aligned}$$

Prendiamo per esempio  $q_0 = s$

$$(2.160) : \dot{x} = 2p, \quad \dot{y} = -6q, \quad \dot{u} = 2p^2 - 6q^2 = 2(p^2 - 3q^2) = 2u, \quad \dot{p} = p, \quad \dot{q} = q$$

$$\dot{u} = 2u \Rightarrow u = s^2 e^{2t}$$

$$\dot{p} = p \Rightarrow p = 2s e^t$$

$$\dot{q} = q \Rightarrow q = s e^t$$

Sostituisci nelle equazioni caratteristiche per  $x$  e  $y$

$$\dot{x} = 2p = 4s e^t \Rightarrow x = 4s(e^t - 1) + s$$

In modo simile:

$$y = -6s(e^t - 1)$$

Invertire:

$$e^t - 1 = -\frac{y}{6s} \Rightarrow x = 4s \left( -\frac{y}{6s} \right) + s = -\frac{2}{3}y + s \Rightarrow s = x + \frac{2}{3}y$$

$$e^t = 1 - \frac{y}{6s} = 1 - \frac{y}{6x + 4y}$$

$$\Rightarrow u = s^2 e^{2t} = \left( x + \frac{2}{3}y \right)^2 \left( 1 - \frac{y}{6x + 4y} \right)^2 = \left( x + \frac{y}{2} \right)^2$$

Se avessimo scelto  $q_0 = -s$ , avremmo ottenuto  $u = \left( x - \frac{y}{2} \right)^2$

$$(ii) \quad u_x^2 - u_y^2 = x^2 - y, \quad u(x, 0) = x$$

$$\Rightarrow F(x, y, u, p, q) = p^2 - q^2 - x^2 + y$$

$$F_p = 2p, \quad F_q = -2q, \quad F_x = -2x, \quad F_y = 1, \quad F_u = 0$$

$$x_0(s) = s, \quad y_0(s) = 0, \quad u_0(s) = s$$

$$\begin{cases} p_0^2 - q_0^2 = s^2 \\ \frac{du_0}{ds} = p_0 \frac{dx_0}{ds} + q_0 \frac{dy_0}{ds} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 = p_0$$

$$\Rightarrow q_0^2 = 1 - s^2$$

prendi per esempio  $q_0 = \sqrt{1 - s^2}$

$$(2.160) : \dot{x} = 2p, \quad \dot{y} = -2q, \quad \dot{u} = 2p^2 - 2q^2, \quad \dot{p} = 2x, \quad \dot{q} = -1$$

$$q = -t + \sqrt{1 - s^2}$$

$$\dot{y} = -2q = 2t - 2\sqrt{1 - s^2} \Rightarrow y = t^2 - 2t\sqrt{1 - s^2}$$

$$\ddot{p} = 2\dot{x} = 4p \Rightarrow p = Ae^{2t} + Be^{-2t}$$

$$\dot{p} = 2Ae^{2t} - 2Be^{-2t} = 2x \Rightarrow x = Ae^{2t} - Be^{-2t}$$

$$\Rightarrow p_0 = A + B = 1, \quad x_0 = A - B = s$$

$$A = \frac{1+s}{2}, \quad B = \frac{1-s}{2}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1+s}{2}e^{2t} + \frac{1-s}{2}e^{-2t}, \quad x = \frac{1+s}{2}e^{2t} - \frac{1-s}{2}e^{-2t}$$

$$\dot{u} = 2(p^2 - q^2) = 2(x^2 - y) = \frac{(1+s)^2}{2}e^{4t} - (1-s^2) + \frac{(1-s)^2}{2}e^{-4t} - 2t^2 + 4t\sqrt{1-s^2}$$

$$\Rightarrow u = \frac{(1+s)^2}{8}e^{4t} - t(1-s^2) - \frac{(1-s)^2}{8}e^{-4t} - \frac{2}{3}t^3 + 2t^2\sqrt{1-s^2} + \frac{s}{2}$$

Invertire:  $\rightarrow$  sono equazioni trascendenti, è possibile dare la soluzione in forma parametrica:  $u = u(t, s)$ ,  $x = x(t, s)$ ,  $y = y(t, s)$ .



(iii)  $u_x u_y = 1, \quad u(x, 0) = \ln x$

→ esercizio

Soluzione:

$$u(x, y) = -1 + \sqrt{1 + 4xy} + \ln \left( \frac{2x}{1 + \sqrt{1 + 4xy}} \right)$$

(iv) esempio di equazione senza parametro  $t$

$$u = pqxy$$

$$\Rightarrow F(x, y, u, p, q) = pqxy - u$$

$$(2.168) \Rightarrow \frac{dx}{qxy} = \frac{dy}{pxy} = \frac{du}{2pqxy} = \frac{dp}{-pqy + p} = \frac{dq}{-pqx + q}$$

(non c'è una ricetta standard per risolvere questo tipo di equazioni)

Osservo che:

$$2pqxy = 2u$$

$$\frac{dx}{qxy} = \frac{dp}{p(1 - qy)} \Rightarrow \frac{d \ln p}{d \ln x} = \frac{1}{qy} - 1 \quad (*)$$

$$\frac{dy}{pxy} = \frac{dq}{q(1 - px)} \Rightarrow \frac{d \ln q}{d \ln y} = \frac{1}{px} - 1 \quad (**)$$

$$\frac{dx}{qxy} = \frac{du}{2u} \stackrel{(*)}{\Rightarrow} \left( \frac{d \ln p}{d \ln x} + 1 \right) d \ln x = \frac{du}{2u}$$

poiché

$$\frac{dx}{x} \frac{1}{qy} \stackrel{(*)}{=} \frac{dx}{x} \left( \frac{d \ln p}{d \ln x} + 1 \right) = d \ln x \left( \frac{d \ln p}{d \ln x} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow d \ln p + d \ln x = \frac{1}{2} d \ln u$$

$$\Rightarrow xp = Cu^{\frac{1}{2}} \quad (***)$$

$$\frac{dy}{pxy} = \frac{du}{2u} \stackrel{(**)}{\Rightarrow} \left( \frac{d \ln q}{d \ln y} + 1 \right) d \ln y = \frac{du}{2u}$$

$$\Rightarrow yq = \tilde{C}u^{\frac{1}{2}} \quad (****)$$

$$pqxy = u \Rightarrow \tilde{C} = \frac{1}{C}$$

$$(***) \Rightarrow x \frac{du}{dx} = Cu^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \ln x = \frac{1}{C} 2\sqrt{u} - \underbrace{\ln f(y)}_{cost}$$

In modo analogo:

$$(****) \Rightarrow \ln y = C2\sqrt{u} - \ln g(x)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2\sqrt{u} = C \ln(xf(y)) = \frac{1}{C} \ln(yg(x)) \\
&\Rightarrow C \ln x - \frac{1}{C} \ln g(x) = \frac{1}{C} \ln y - C \ln f(y) := \underbrace{\ln a}_{cost} \\
&\ln \frac{x^C}{g(x)^{\frac{1}{C}}} = \ln a, \quad \ln \frac{y^{\frac{1}{C}}}{f(y)^C} = \ln a \\
&g(x) = \frac{x^{C^2}}{a^C}, \quad f(y) = \frac{y^{\frac{1}{C^2}}}{a^{\frac{1}{C}}} \\
&\Rightarrow 2\sqrt{u} = \frac{1}{C} (\ln y + \ln g(x)) = \frac{1}{C} (\ln y + C^2 \ln x - C \ln a) \\
&\Rightarrow u = \frac{1}{4} \left( C \ln x + \frac{1}{C} \ln y + b \right)^2
\end{aligned}$$

→ i dati iniziali sono contenuti nelle due costanti di integrazione.

Commento: Equazioni di Hamilton-Jacobi

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_1} + \mathcal{H} \left( x_2, \dots, x_n; \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_n}; x_1 \right) = 0$$

$x_1$ : coordinata temporale,  $x_i$ : coordinate spaziali,  $\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial x_i}$ : impulsi, con  $i = 2, \dots, n$   
 $\mathcal{S}$ : funzione principale di Hamilton

$$\begin{aligned}
F &= p_1 + \mathcal{H}(x_1, x_2, \dots, x_n; p_2, \dots, p_n) \\
\Rightarrow \quad F_{p_1} &= 1, \quad F_{p_j} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad (j = 2, \dots, n), \\
F_{x_i} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n), \quad F_u = 0 \quad (u \equiv S) \\
(2.170) \Rightarrow \quad \dot{x}_1 &= 1, \quad \dot{p}_1 = -F_{x_1} - p_1 F_u = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_1}, \\
\dot{x}_j &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \quad (j = 2, \dots, n), \quad \dot{p}_j = -F_{x_j} - p_j F_u = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_j} \quad (j = 2, \dots, n)
\end{aligned}$$

Equazioni canoniche di Hamilton

$$\dot{u} = p_1 F_{p_1} + \sum_{j=2}^n p_j F_{p_j} = p_1 + \sum_{j=2}^n p_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} = -\mathcal{H} + \sum_{j=2}^n p_j \dot{x}_j = \mathcal{L} \quad (\text{Lagrangiana})$$

$$\Rightarrow u = \int \mathcal{L} dt \quad (\text{azione})$$

## 2.10 L'esponenziale ordinato cronologicamente

Vogliamo risolvere

$$i\hbar \frac{d}{dt}\psi = H\psi \quad (2.171a)$$

che include difficili equazioni matriciali del tipo

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \quad (2.171b)$$

con  $A$  matrice finito o infinito dimensionale

$$\psi(t) = U(t, t_0)\psi(t_0) \quad (2.172)$$

$U(t, t_0)$ : operatore di evoluzione temporale

$$\begin{aligned} \Rightarrow i\hbar \frac{d}{dt}\psi &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0)\psi(t_0) \stackrel{!}{=} H\psi = HU(t, t_0)\psi(t_0) \\ \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) &= HU(t, t_0) \end{aligned} \quad (2.173)$$

(i)  $H$  non dipende esplicitamente dal tempo:

Soluzione della (2.173):

$$U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t - t_0)H\right)$$

(ii)  $H$  dipende esplicitamente dal tempo ma  $[H(t), H(t')] = 0$ :

(per esempio campo magnetico omogeneo  $\mathbf{B} = B(t)\mathbf{e}_z$ )

$$\Rightarrow U(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t')\right)$$

(iii)  $H = H(t)$  e  $[H(t), H(t')] \neq 0$  per  $t \neq t'$ :

(caso più interessante e più realistico)

Riscrivi la (2.173) come equazione integrale:

$$U(t, t_0) = \mathbb{I} - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t')U(t', t_0) \quad (2.174)$$

( $\rightarrow$  condizione iniziale  $U(t_0, t_0) = \mathbb{I}$  già implementata).

Risolvi la (2.174) iterativamente:

Sostituisci il membro destro in sé stesso:

$$\begin{aligned}\Rightarrow U(t, t_0) &= \sum_{n=0}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0) \\ U^{(n)}(t, t_0) &= -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') U^{(n-1)}(t', t_0) \\ U^{(0)}(t, t_0) &= \mathbb{I}\end{aligned}\quad (2.175)$$

→ relazione di ricorrenza, risolta da:

$$U^{(n)}(t, t_0) = \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) H(t_2) \dots H(t_n) \quad (2.176)$$

N.B.:

1. I limiti superiori degli integrali sono tutti diversi
2. L'ordine delle  $H$  non è arbitrario. Abbiamo  $t_n < t_{n-1} < \dots < t_1 < t$

Lo sviluppo

$$U(t, t_0) = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) \dots H(t_n) \quad (2.177)$$

si chiama *serie di Dyson*.

*L'esponenziale ordinato cronologicamente* è definito da:

$$\begin{aligned}T \exp \left( -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' H(t') \right) &:= \\ &= \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n H(t_1) \dots H(t_n) = \\ &= U(t, t_0)\end{aligned}\quad (2.178)$$

Esercizio:

$$u_{xx} - u_t = 0, \quad u(0, t) = A_n \sin nt, \quad u_x(0, t) = 0$$

Più in generale:

poniamo  $u(0, t) = g(t)$

Ansatz di separazione:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= v(x)w(t) \\ u_{xx} &= v''(x)w(t), \quad u_t = v(x)w'(t) \\ u_{xx} = u_t &\Rightarrow v''w = vw' \Rightarrow \frac{v''}{v} = \frac{w'}{w} = k \in \mathbb{C} \quad (\text{costante})\end{aligned}$$

$$v'' = kv \Rightarrow v(x) = Ae^{\sqrt{k}x} + Be^{-\sqrt{k}x}$$

$$w' = kw \Rightarrow w(t) = Ce^{kt}$$

$$\Rightarrow u_k(x, t) = e^{kt} \left( A_k e^{\sqrt{k}x} + B_k e^{-\sqrt{k}x} \right)$$

(senza perdere generalità ho posto  $C = 1$  assorbendolo in  $A$  e  $B$ )  
 $\Rightarrow$  soluzione generale: sovrapposizione delle  $u_k(x, t)$

$$u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{C}} e^{kt} \left( A_k e^{\sqrt{k}x} + B_k e^{-\sqrt{k}x} \right)$$

$$\Rightarrow u_x(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{C}} e^{kt} \sqrt{k} \left( A_k e^{\sqrt{k}x} - B_k e^{-\sqrt{k}x} \right)$$

che è 0 in  $x = 0$  se  $A_k = B_k$

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{C}} 2A_k e^{kt} \cosh \sqrt{k}x$$

$$u(0, t) = \sum_{k \in \mathbb{C}} 2A_k e^{kt} \stackrel{!}{=} g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\chi t} \tilde{g}(\chi) d\chi$$

con  $\tilde{g}(\chi)$  trasformata di Fourier di  $g(t)$   
 $\Rightarrow k$  immaginaria,  $k = i\chi$ ,  $2A_k = \frac{\tilde{g}(\chi)}{2\pi}$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\chi) e^{i\chi t} \cosh(\sqrt{i\chi}x) d\chi$$

N.B.:  $g(t) = g(t)^* \Rightarrow \tilde{g}(\chi) = \tilde{g}(-\chi)^*$  questo garantisce la realtà di  $u(x, t)$  (esercizio!)  
 Nel nostro esempio:  $g(t) = A_n \sin nt \rightarrow$  trasformata di Fourier:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\chi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\chi t} A_n \sin nt = \frac{A_n}{2i} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i\chi t} (e^{int} - e^{-int}) = \\ &= \frac{A_n}{2i} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{it(n-\chi)}}_{2\pi\delta(n-\chi)} - \frac{A_n}{2i} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-it(n+\chi)}}_{2\pi\delta(n+\chi)} = \\ &= i\pi A_n (\delta(n+\chi) - \delta(n-\chi)) \\ \Rightarrow u(x, t) &= \frac{iA_n}{2} \left( e^{-int} \cosh(\sqrt{-in}x) - e^{int} \cosh(\sqrt{in}x) \right) \end{aligned}$$

Senza perdere generalità:  $n > 0$  ( $\sin(-nt) = -\sin(nt)$ , riassorbire il  $-$  in  $A_n$ )  
 Usa:

$$\sqrt{\pm in} = \sqrt{\frac{n}{2}}(1 \pm i)$$

$$\cosh(\alpha \pm \beta) = \cosh \alpha \cosh \beta \pm \sinh \alpha \sinh \beta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cosh(iz) = \cos z$$

$$\sinh(iz) = i \sin z$$

$$\Rightarrow u(x, t) = A_n \left[ \cos(nt) \sinh \left( \sqrt{\frac{n}{2}} x \right) \sin \left( \sqrt{\frac{n}{2}} x \right) + \sin(nt) \cosh \left( \sqrt{\frac{n}{2}} x \right) \cos \left( \sqrt{\frac{n}{2}} x \right) \right]$$

oppure

$$u(x, t) = \frac{A_n}{2} \left[ e^{\sqrt{\frac{n}{2}} x} \sin \left( nt + \sqrt{\frac{n}{2}} x \right) + e^{-\sqrt{\frac{n}{2}} x} \sin \left( nt - \sqrt{\frac{n}{2}} x \right) \right]$$

## 2.11 L'equazione di Korteweg-de Vries (KdV)

$$\partial_t u + 6u \partial_x u + \partial_x^3 u = 0 \quad (2.179)$$

con  $u = u(x, t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$

- Descrive delle onde in acqua non troppo profonda, ha delle applicazioni in molti rami della fisica, p.e. sistemi integrabili, teoria delle stringhe,...
- Equazione del terzo ordine
- Ha delle soluzioni chiamate *onde solitarie*

Ansatz:

$$u(x, t) = f(x - ct) \quad (2.180)$$

$c$ : velocità di propagazione dell'onda

Nuova variabile:  $\xi := x - ct$ ,  $u(x, t) = f(\xi)$

$$(2.179) \Leftrightarrow \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{df}{d\xi} + 6f(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{df}{d\xi} + \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^3 \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1, \quad f' = \frac{df}{d\xi} \\ \Rightarrow -cf' + 6ff' + f''' = 0 \end{aligned} \quad (2.181)$$

Imponiamo ora una condizione fondamentale sul comportamento di  $f$ , ovvero:  $f \rightarrow 0$ ,  $f' \rightarrow 0$ ,  $f'' \rightarrow 0$  per  $\xi \rightarrow \pm\infty$

$$(2.181) \Rightarrow -cf' + (3f^2)' + f''' = 0 \quad (2.182)$$

Con le nostre ipotesi

$$\Rightarrow -cf + 3f^2 + f'' = cost = 0 \quad (2.183)$$

Moltiplica la (2.183) con  $f'$ :

$$\Rightarrow f' f'' + 3f^2 f' - cf' f = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}((f')^2)' + (f^3)' - \frac{c}{2}(f^2)' = 0 \quad (2.184)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}(f')^2 + f^3 - \frac{c}{2}f^2 = \text{cost} = 0$$

a causa delle nostre condizioni su  $f$ ,  $f'$ ,  $f''$

$$\Rightarrow f' = \pm f\sqrt{c-2f}, \quad f \leq \frac{c}{2} \quad (2.185)$$

Scegliamo il segno meno (altrimenti mandi  $\xi$  in  $-\xi$ )

$$\Rightarrow \frac{df}{d\xi} = -f\sqrt{c-2f} \Rightarrow \int_{\frac{c}{2}}^{f(\xi)} \frac{-df}{f\sqrt{c-2f}} = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi' \quad (\text{separazione variabili})$$

$$\Rightarrow \int_{f(\xi)}^{\frac{c}{2}} \frac{df}{f\sqrt{c-2f}} = \xi - \xi_0$$

$$f = \frac{c}{2 \cosh^2 z}, \quad -\infty < z < \infty, \quad df = -c \frac{\sinh z}{\cosh^3 z} dz$$

$$\frac{df}{f\sqrt{c-2f}} = \frac{-c \sinh z}{\cosh^3 z \frac{c}{2 \cosh^2 z} \sqrt{c - \frac{c}{\cosh^2 z}}} dz = \frac{-2 \sinh z}{\sqrt{c \cosh^2 z - c}} dz = \frac{-2 \sinh z}{\sqrt{c \sinh^2 z}} dz$$

$$\Rightarrow - \int_z^0 \frac{2}{\sqrt{c}} dz' = \xi - \xi_0 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{c}} z = \xi - \xi_0$$

$$\Rightarrow f(\xi) = \frac{c}{2 \cosh^2 \left( \frac{\sqrt{c}}{2} (\xi - \xi_0) \right)}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{c}{2} \frac{1}{\cosh^2 \left[ \frac{\sqrt{c}}{2} (x - ct - \xi_0) \right]}$$

N.B.:  $f(\xi_0) = \frac{c}{2}$

Dall'espressione (2.183):

$$f'' + 3f^2 - cf = 0 \Rightarrow f''(\xi_0) = -\frac{c^2}{4}$$

$\Rightarrow$  al crescere della velocità, l'onda diventa più alta e più sottile.

## 2.12 Le trasformazioni di Bäcklund

Per ricavare le soluzioni delle equazioni di *Liouville* e di *sine-Gordon* introduciamo uno strumento utile per la risoluzione di molte equazioni differenziali alle derivate parziali non lineari, ovvero le trasformazioni di Bäcklund.

Per semplicità ci limitiamo al caso di 2 variabili  $(x, y)$ .

L'idea è quella di cercare le soluzioni di un'equazione differenziale del tipo:

$$Lu = 0 \quad (2.186)$$

tramite una funzione ausiliare  $v(x, y)$ . Questa funzione è legata a  $u(x, y)$  tramite 2 equazioni

$$B_i\left(u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, x, y\right) = 0, \quad i = 1, 2 \quad (2.187)$$

Queste 2 equazioni garantiscono che  $u$  sia soluzione della (2.186) se e solo se  $v(x, y)$  è soluzione di un'altra equazione differenziale

$$Mv = 0 \quad (2.188)$$

Il procedimento deve essere applicato anche all'inverso.

Le equazioni  $B_i = 0$  costituiscono la trasformazione di Bäcklund.

Nel caso in cui  $M = L$ , le trasformazioni di Bäcklund costituiscono un'auto-trasformazione.

### 2.12.1 Equazione di Liouville

L'equazione di Liouville ha la forma

$$\partial_x \partial_y u = e^u \quad (2.189)$$

Le trasformazioni di Bäcklund sono date da:

$$\begin{cases} \partial_x u + \partial_x v = \sqrt{2} e^{\frac{u-v}{2}} \\ \partial_y u - \partial_y v = \sqrt{2} e^{\frac{u+v}{2}} \end{cases} \quad (2.190a)$$

$$(2.190b)$$

Derivando la prima rispetto a  $y$  e la seconda rispetto a  $x$  otteniamo:

$$\partial_x \partial_y u + \partial_x \partial_y v = \frac{\sqrt{2}}{2} (\partial_y u - \partial_y v) e^{\frac{u-v}{2}}$$

$$\partial_x \partial_y u - \partial_x \partial_y v = \frac{\sqrt{2}}{2} (\partial_x u + \partial_x v) e^{\frac{u+v}{2}}$$

Usando le (2.190a) e (2.190b) otteniamo:

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_y u + \partial_x \partial_y v &= e^u \\ \partial_x \partial_y u - \partial_x \partial_y v &= e^u \end{aligned} \quad (2.191)$$

$$\stackrel{(2.189)}{\Rightarrow} \partial_x \partial_y v = 0 \quad (\text{equazione delle onde})$$

Soluzione generale:

$$v(x, y) = F(x) + G(y) \quad (2.192)$$

con  $F, G$  funzioni arbitrarie.



Dalla soluzione per  $v$  andiamo a ricostruire la soluzione per  $u$ .

A tal fine definiamo:

$$z \equiv u + v \quad (2.193)$$

Utilizzando la trasformazione di Bäcklund (2.190b) e l'equazione  $\partial_x \partial_y v = 0$ , otteniamo:

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_y u - \underbrace{\partial_x \partial_y v}_{=0} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_x u + \partial_x v) e^{\frac{u+v}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\partial_x z) e^{\frac{z}{2}} \\ \Rightarrow \underbrace{\partial_x \partial_y u}_{\partial_x \partial_y z} &= \partial_x (\sqrt{2} e^{\frac{z}{2}}) \end{aligned} \quad (2.194)$$

Integriamo rispetto a  $x$  e otteniamo:

$$\partial_y z = \sqrt{2} e^{\frac{z}{2}} + \underbrace{G'_1(y)}_{cost} \quad (2.195)$$

Definiamo una variabile:

$$z_1 \equiv z - G_1 \quad (2.196)$$

$$\Rightarrow \partial_y z_1 = \partial_y z - \underbrace{\partial_y G_1}_{G'_1} \stackrel{(2.195)}{=} \sqrt{2} e^{\frac{z}{2}}$$

$$\Rightarrow \partial_y z_1 = \sqrt{2} e^{\frac{z_1}{2}} e^{\frac{G_1}{2}} \quad (2.197)$$

Questa si può integrare separando le variabili:

$$\begin{aligned} \frac{\partial_y z_1}{e^{\frac{z_1}{2}}} &= \sqrt{2} e^{\frac{G_1}{2}} \Rightarrow e^{-\frac{z_1}{2}} (-2) = \sqrt{2} \int e^{\frac{G_1(y)}{2}} dy - \sqrt{2} \underbrace{F_1(x)}_{cost} \\ \Rightarrow e^{-\frac{z_1}{2}} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( F_1(x) - \int dy e^{\frac{G_1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (2.198)$$

Derivo rispetto a  $x$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} e^{-\frac{z_1}{2}} \partial_x z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} F'_1(x) \\ \partial_x z_1 &= -\sqrt{2} e^{\frac{z_1}{2}} F'_1 \end{aligned} \quad (2.199)$$

Derivo rispetto a  $y$ :

$$\partial_y \partial_x z_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{z_1}{2}} F'_1 \partial_y z_1 \stackrel{(2.199)}{=} \frac{1}{2} \partial_x z_1 \partial_y z_1$$

Dato che  $\partial_x \partial_y u = \partial_x \partial_y z_1$  possiamo riscrivere l'equazione precedente in questo modo:

$$\partial_x \partial_y u = \frac{1}{2} \partial_x z_1 \partial_y z_1 \stackrel{(2.197), (2.199)}{=} -F'_1 e^{z_1 + \frac{G_1}{2}} \stackrel{(2.196), (2.193)}{\stackrel{(2.192)}{=}} -F'_1 e^{u+F+G-\frac{G_1}{2}} \quad (2.200)$$

Se scegliamo  $G_1 = 2G$  e  $F_1 = -\int dx e^{-F(x)}$ , troviamo che  $u$  soddisfa l'equazione di Liouville.

Dalla (2.198) otteniamo quindi:

$$z_1(x, y) = -2 \ln \left[ -\frac{\int dx e^{-F} + \int dy e^G}{\sqrt{2}} \right] \quad (2.201)$$

Dalla (2.193) e (2.196) sappiamo che

$$\begin{aligned} u &= z_1 + G - F \\ \Rightarrow u(x, y) &= G(y) - F(x) - \ln \left[ \frac{1}{2} \left( \int dx e^{-F(x)} + \int dy e^{G(y)} \right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.202)$$

### 2.12.2 Equazione di sine-Gordon

$$\partial_x \partial_t u = \sin u \quad (2.203)$$

Con una trasformazione delle coordinate tipo:

$$x \mapsto \frac{x+t}{2}, \quad t \mapsto \frac{x-t}{2}$$

otteniamo:

$$\partial_x^2 u - \partial_t^2 u = \sin u$$

(Paragona con Klein-Gordon  $\partial_x \partial_t u = m^2 u$ , per assonanza viene chiamata sine-Gordon, esiste anche sinh-Gordon)

Trasformazioni di Bäcklund:

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_x u + \partial_x v &= 2a \sin \left( \frac{u-v}{2} \right) \end{aligned} \right. \quad (2.204a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \partial_t u - \partial_t v &= \frac{2}{a} \sin \left( \frac{u+v}{2} \right) \end{aligned} \right. \quad (2.204b)$$

Analogamente a quanto fatto nel caso dell'equazione di Liouville, deriviamo la prima rispetto a  $t$  e la seconda rispetto a  $x$

$$\begin{aligned} \partial_t \partial_x u + \partial_t \partial_x v &= a(\partial_t u - \partial_t v) \cos \left( \frac{u-v}{2} \right) = 2 \sin \left( \frac{u+v}{2} \right) \cos \left( \frac{u-v}{2} \right) \\ \partial_x \partial_t u - \partial_x \partial_t v &= \frac{1}{a}(\partial_x u + \partial_x v) \cos \left( \frac{u+v}{2} \right) = 2 \sin \left( \frac{u-v}{2} \right) \cos \left( \frac{u+v}{2} \right) \end{aligned}$$

Usando le formule trigonometriche ottengo:

$$\begin{aligned} \partial_x \partial_t u &= \sin u \\ \partial_x \partial_t v &= \sin v \end{aligned} \quad (2.205)$$

→ in questo caso la (2.204) è un'auto-trasformazione.

⇒ Se si conosce una soluzione  $v$  dell'equazione di sine-Gordon, se ne può costruire un'altra.

Prendiamo  $v = 0$  e la sostituiamo nell'equazione di Bäcklund.

⇒ Le trasformazioni di Bäcklund diventano:

$$\partial_x u = 2a \sin\left(\frac{u}{2}\right) \quad (2.206a)$$

$$\partial_t u = \frac{2}{a} \sin\left(\frac{u}{2}\right) \quad (2.206b)$$

Integriamo entrambe separando le variabili:

$$\frac{\partial_x u}{\sin \frac{u}{2}} = 2a$$

$$2 \ln \left| \tan \frac{u}{4} \right| = 2ax + f(t) \quad (2.207a)$$

$$2 \ln \left| \tan \frac{u}{4} \right| = \frac{2}{a}t + g(x) \quad (2.207b)$$

Perché le due equazioni siano compatibili dobbiamo avere:

$$2ax + f(t) = \frac{2}{a}t + g(x) \quad (2.208)$$

$$\Rightarrow 2ax - g(x) = \frac{2}{a}t - f(t) := k = \text{cost}$$

$$\Rightarrow g(x) = 2ax - k$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{2}{a}t - k$$

Sostituiamo nelle (2.207) e otteniamo

$$\left| \tan \frac{u}{4} \right| = e^{-\frac{k}{2} + ax + \frac{t}{a}}$$

$$\tan \frac{u}{4} = \underbrace{\pm e^{-\frac{k}{2}}}_C e^{ax + \frac{t}{a}} = C e^{ax + \frac{t}{a}}$$

$$\Rightarrow u(x, t) = 4 \arctan \left[ C e^{a \left( x + \frac{t}{a^2} \right)} \right] \quad (2.209)$$

$u$  ha la struttura di un'onda che si propaga alla velocità  $\frac{1}{a^2}$  (solitone)

Applicando la trasformazione di Bäcklund alla soluzione ottenuta, si può ottenerne un'altra. Iterando questo procedimento si possono produrre molti solitoni. Queste soluzioni vengono chiamate multisolitoniche, sono molto importanti nelle applicazioni dell'ottica non-lineare, come ad esempio nelle fibre ottiche.

Esercizio: Ricavare la (2.209) dall'equazione di sine-Gordon, usando l'ansatz (v. KdV):

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= f(\underbrace{x + ct}_{\xi}) \\
 \Rightarrow \partial_x u &= \frac{df}{d\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = f'(\xi) \\
 \partial_t \partial_x u &= \partial_t f'(\xi) = f''(\xi) \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_c = cf''(\xi)
 \end{aligned}$$

→ sine-Gordon diventa

$$cf''(\xi) = \sin f \Rightarrow cf''f' = f' \sin f \Rightarrow \frac{1}{2}cf'^2 = -\cos f + A$$

→ risolvi separando le variabili.

## 2.13 Sistemi integrabili e coppie di Lax

Formulazione di Lax dell'equazione di KdV:

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$$

( $u \rightarrow \lambda u$ ,  $t \rightarrow \varkappa t$ ,  $x \rightarrow \rho x$ ,  $\lambda, \varkappa, \rho$  costanti)

Considera gli operatori differenziali:

$$L = -6\frac{d^2}{dx^2} - u, \quad B = -4\frac{d^3}{dx^3} - u\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}u_x \quad (2.210)$$

Peter Lax notò nel 1968 che l'equazione

$$\frac{dL}{dt} + [L, B] = 0 \quad (2.211)$$

è equivalente all'equazione di KdV.

Dimostrazione:

$$\begin{aligned}
 [L, B] &= \left(-6\frac{d^2}{dx^2} - u\right) \left(-4\frac{d^3}{dx^3} - u\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}u_x\right) - \left(-4\frac{d^3}{dx^3} - u\frac{d}{dx} - \frac{1}{2}u_x\right) \left(-6\frac{d^2}{dx^2} - u\right) = \\
 &= 24\frac{d^5}{dx^5} + 6\left(u_{xx}\frac{d}{dx} + 2u_x\frac{d^2}{dx^2} + u\frac{d^3}{dx^3}\right) + 3\left(u_{xxx} + 2u_{xx}\frac{d}{dx} + u_x\frac{d^2}{dx^2}\right) + 4u\frac{d^3}{dx^3} + u^2\frac{d}{dx} + \frac{1}{2}uu_x + \\
 &- 24\frac{d^5}{dx^5} - 4\left(u_{xxx} + 3u_{xx}\frac{d}{dx} + 3u_x\frac{d^2}{dx^2} + u\frac{d^3}{dx^3}\right) - 6u\frac{d^3}{dx^3} - uu_x - u^2\frac{d}{dx} - 3u_x\frac{d^2}{dx^2} - \frac{1}{2}u_xu
 \end{aligned}$$

dove abbiamo usato:

$$-6\frac{d^2}{dx^2} \left(-u\frac{d}{dx}f\right) = 6\frac{d}{dx}(u_x f_x + u f_{xx}) = 6(u_{xx}f_x + u_x f_{xx} + u f_{xxx})$$

$$\begin{aligned}
-6 \frac{d^2}{dx^2} \left( -\frac{1}{2} u_x f \right) &= 3 \frac{d}{dx} (u_{xx} f + u_x f_x) = 3 (u_{xxx} + u_{xx} f_x + u_{xx} f_x + u_x f_{xx}) \\
-4 \frac{d^3}{dx^3} (u f) &= -4 \frac{d^2}{dx^2} (u_x f + u f_x) = -4 \frac{d}{dx} (u_{xx} f + 2u_x f_x + u f_{xx}) = \\
&= -4 (u_{xxx} + u_{xx} f_x + 2u_{xx} f_x + 2u_x f_{xx} + u_x f_{xx} + u f_{xxx}) \\
&\quad - u \frac{d}{dx} (u f) = u (u_x f + u f_x)
\end{aligned}$$

Otteniamo quindi:

$$\Rightarrow [L, B] = 3u_{xxx} - 4u_{xxx} - uu_x = -u_{xxx} - uu_x$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \left( -6 \frac{d^2}{dx^2} - u \right) = -u_t$$

(  $\frac{d}{dt}(-6 \frac{d^2}{dx^2}) = 0$  perché l'operatore  $\frac{d^2}{dx^2}$  agisce su funzioni che dipendono solo da  $x$ )

$$\Rightarrow \frac{dL}{dt} + [L, B] = u_t + uu_x + u_{xxx} = 0 \quad \blacksquare$$

La (2.211) viene chiamata *Equazione di Lax*.

Come vedremo sotto in un esempio concreto, questa forma dell'equazione di KdV implica che gli autovalori di  $L$  non dipendono da  $t$  (in pratica gli autovalori di  $L$  mettono a disposizione delle costanti del moto, analoghe al caso della meccanica classica).

Un altro modo per ottenere la (2.211) è come condizione di compatibilità dei 2 problemi lineari

$$L\phi = \lambda\phi \quad \text{e} \quad \phi_t = B\phi \quad (2.212)$$

dove  $\lambda$  è un parametro fissato.

Infatti:

$$(2.212) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}(L\phi) = \frac{dL}{dt}\phi + L\phi_t = \frac{dL}{dt}\phi + LB\phi$$

e inoltre

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}(L\phi) &= \frac{\partial}{\partial t}(\lambda\phi) = \lambda\phi_t = \lambda B\phi = B\lambda\phi = BL\phi \\
&\Rightarrow \frac{dL}{dt} + LB = BL
\end{aligned}$$

L'importanza chiave dell'osservazione di Lax è che qualsiasi equazione differenziale che può essere scritta nella forma (2.211) (per certi operatori  $L$  e  $B$ ) ha automaticamente molte delle proprietà dell'equazione di KdV, come p.e. un numero infinito di leggi di conservazione.

$$u_i(t) \quad i = 1, \dots, N$$

Per avere integrabilità nel senso di Liouville, servono  $n$  costanti del moto  $I_i$  in involuzione, cioè deve valere:

$$\{I_i, H\}_{PB} = 0, \{I_i, I, j\}_{PB} = 0$$

Facciamo diventare continuo l'indice  $i$ :

$$i \mapsto x, \quad u_i(t) \mapsto u(x, t)$$

KdV come condizione di curvatura zero:

L'equazione

$$L\phi = \lambda\phi$$

è del secondo ordine.

Riscrivila come equazione del primo ordine nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \phi_1 &:= \phi, & \phi_2 &:= \phi_x \\ L\phi = \lambda\phi &\Leftrightarrow \partial_x \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u+\lambda}{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \equiv U \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.213)$$

Dimostrazione:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{u+\lambda}{6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_2 \\ -\frac{u+\lambda}{6}\phi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_x \\ -\frac{u+\lambda}{6}\phi \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \partial_x \begin{pmatrix} \phi \\ \phi_x \end{pmatrix}$$

Guardiamo la seconda riga:

$$-\frac{u+\lambda}{6}\phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Leftrightarrow \underbrace{\left(-6\frac{\partial^2}{\partial x^2} - u\right)}_L \phi = \lambda\phi \quad \blacksquare$$

Inoltre:

$$\phi_{1t} = \phi_t = B\phi \stackrel{(2.210)}{=} -4\phi_{xxx} - u\phi_x - \frac{1}{2}u_x\phi = -4\left(-\frac{u+\lambda}{6}\phi\right)_x - u\phi_x - \frac{1}{2}u_x\phi =$$

(ho usato  $\phi_{xx} = -\frac{u+\lambda}{6}\phi$ )

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{6}u_x\phi + \left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}u\right)\phi_x = \\ &= \frac{1}{6}u_x\phi_1 + \left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}u\right)\phi_2 \end{aligned} \quad (2.214)$$

$$\phi_{2t} = \phi_{xt} = \phi_{1xt} = \phi_{1tx} \stackrel{(2.214)}{=} \frac{1}{6}u_x\phi_{1x} + \frac{1}{6}u_{xx}\phi_1 + \left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}u\right)\phi_{2x} - \frac{1}{3}u_x\phi_2 =$$

$$\stackrel{(2.213)}{=} \frac{1}{6}u_x\phi_2 + \frac{1}{6}u_{xx}\phi_1 - \left(\frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}u\right)\left(\frac{1}{6}\lambda + \frac{1}{6}u\right)\phi_1 - \frac{1}{3}u_x\phi_2 =$$

$$= \left( -\frac{1}{9}\lambda^2 - \frac{1}{18}\lambda u + \frac{1}{18}u^2 + \frac{1}{6}u_{xx} \right) \phi_1 - \frac{1}{6}u_x \phi_2 \quad (2.215)$$

Le (2.214), (2.215) possono essere scritte in forma matriciale:

$$\partial_t \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9}\lambda^2 - \frac{1}{18}\lambda u + \frac{1}{18}u^2 + \frac{1}{6}u_{xx} & \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{3}u \\ -\frac{1}{6}u_x & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \equiv V \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (2.216)$$

Condizione di compatibilità fra le (2.213) e (2.216):

$$(2.213) \Rightarrow \partial_t \partial_x \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial U}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + U \partial_t \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial U}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + UV \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

$$(2.216) \Rightarrow \partial_x \partial_t \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + V \partial_x \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \frac{\partial V}{\partial x} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} + VU \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x} + [U, V] = 0 \quad (2.217)$$

La (2.217) si riduce a (esercizio):

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{6}(u_t + uu_x + u_{xxx}) & 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \text{KdV}$$

con 3 coefficienti della matrice che sono identicamente nulli.

Queste due equazioni sono chiamate *coppie di Lax* (le parentesi tonde identificano delle derivate covarianti):

$$\begin{aligned} (\partial_x - U) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} &= 0 \\ (\partial_t - V) \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

$U, V$  sono connessioni, la (2.217) la curvatura di questa connessione.

L'idea centrale nella teoria dei sistemi integrabili è di rappresentare un problema non-lineare come condizione di compatibilità fra due equazioni lineari di una coppia di Lax.

Alcuni altri esempi:

Scelta comune per  $U$ :

$$U = \begin{pmatrix} i\lambda & q \\ r & -i\lambda \end{pmatrix} \equiv \lambda U_1 + U_0 \quad (2.218)$$

(problema spettrale di AKNS (Ablowitz, Kaup, Newell, Segur))

$q = q(x, t)$ ,  $r = r(x, t)$

Supponiamo per esempio che  $V$  sia un polinomio quadratico in  $\lambda$ :

$$V = \lambda^2 V_2 + \lambda V_1 + V_0 \quad (2.219)$$

(2.218), (2.219) nella (2.217):

coefficienti di  $\lambda^3$ :

$$[U_1, V_2] = 0 \quad (2.220a)$$

coefficienti di  $\lambda^2$ :

$$-\frac{\partial V_2}{\partial x} + [U_1, V_1] + [U_0, V_2] = 0 \quad (2.220b)$$

coefficienti di  $\lambda$ :

$$\frac{\partial U_1}{\partial t} - \frac{\partial V_1}{\partial x} + [U_1, V_0] + [U_0, V_1] = 0 \quad (2.220c)$$

coefficienti di  $\lambda^0$ :

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} - \frac{\partial V_0}{\partial x} + [U_0, V_0] = 0 \quad (2.220d)$$

Noto che  $U_1 = i\sigma_3$ , con la matrice di Pauli

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La (2.220a) è soddisfatta ponendo  $V_2 = U_1$

La (2.220b) è soddisfatta ponendo  $V_1 = U_0$

Le (2.220c) e (2.220d) sono soddisfatte per:

$$V_0 = \begin{pmatrix} iqr & -\frac{iq_x}{2} \\ \frac{ir_x}{2} & -iqr \end{pmatrix}$$

se vale:

$$\begin{pmatrix} 0 & q_t + \frac{i}{2}q_{xx} - 2iq^2r \\ r_t - \frac{i}{2}r_{xx} + 2ir^2q & 0 \end{pmatrix} = 0$$

→ sistema non-lineare accoppiato

$$\begin{cases} iq_t - \frac{1}{2}q_{xx} + 2q^2r = 0 \\ ir_t + \frac{1}{2}r_{xx} - 2r^2q = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è consistente con  $r = \pm q^*$  che dà:

$$iq_t - \frac{1}{2}q_{xx} \pm |q|^2q = 0$$

(e il suo complesso coniugato)

→ equazione di Schrödinger non-lineare.

## 2.14 Cenni su equazioni di Navier-Stokes

Lo stato di un fluido è descritto dalla sua velocità  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  e dalle osservabili termodinamiche densità  $\rho(\mathbf{x}, t)$  e pressione  $p(\mathbf{x}, t)$ , legate dall'equazione di stato  $p = p(\rho)$ . Si ha inoltre la conservazione dell'energia, descritta dall'equazione di continuità

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$



Nel caso  $\rho = \text{cost}$  la precedente si riduce a  $\nabla \mathbf{u} = 0$ , condizione di fluido incompressibile. La velocità  $\mathbf{u}$  soddisfa l'equazione di Navier-Stokes della fluidodinamica

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{f}_{\text{ext}}$$

Questa non è nient'altro che un'applicazione della seconda legge di Newton a un fluido. I termini a sinistra rappresentano la variazione del momento

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} u_i = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$$

Il termine  $-\frac{1}{\rho} \nabla p$  descrive le forze di pressione mentre  $\nu \Delta \mathbf{u}$  descrive la forza di viscosità: il coefficiente  $\nu$  è detto *viscosità cinematica* ed è definito come  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ , con  $\eta$  *viscosità dinamica*. Infine  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  esprime possibili forze esterne quali gravità o forza di Lorentz (se il fluido è carico). Navier-Stokes è un'equazione molto difficile da risolvere (è uno dei problemi del millennio). Se assumiamo  $\nu = 0$  otteniamo le equazioni di Eulero, che descrivono la dinamica di un fluido non viscoso. È possibile esprimere condizioni al contorno all'equazione di Navier-Stokes per descrivere un fluido confinato. Una delle più semplici è quella del cosiddetto *muro rigido ed impermeabile*, espressa tramite

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 = \mathbf{u} \times \mathbf{n}$$

La prima parte esprime l'annullamento sul muro della componente normale della velocità del fluido (da cui l'aggettivo *impermeabile*), mentre la seconda parte riguarda la componente tangenziale (da cui l'aggettivo *rigido* poiché non deforma il muro). Si tratta chiaramente di un esempio di *condizioni di Dirichlet* in cui chiedo l'annullamento della funzione incognita sul muro.

È possibile introdurre la *vorticità*:

$$\boldsymbol{\omega} := \nabla \times \mathbf{u}$$

Assumiamo che il fluido sia incompressibile  $\Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$   
 $\rightarrow$  localmente possiamo scrivere

$$\mathbf{u} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (\text{potenziale vettore})$$

$$\Rightarrow \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \boldsymbol{\omega}$$

$$\text{uso } \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

$$\Rightarrow \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$$

$\mathbf{A}$  non è determinato univocamente: se mandiamo  $\mathbf{A}$  in  $\mathbf{A} + \nabla \chi$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  rimane invariante:

$$\nabla \times (\mathbf{A} + \nabla \chi) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times (\nabla \chi) \stackrel{\nabla \times \nabla \chi = 0}{=} \nabla \times \mathbf{A}$$

*Invarianza di Gauge*

Questa libertà ci permette di fare una scelta per  $\mathbf{A}$ , p.e. *Gauge di Coulomb*:  $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ .  
In tal caso la vorticità:

$$\boldsymbol{\omega} = -\Delta \mathbf{A}$$

→ Equazione di Poisson per le componenti di  $\mathbf{A}$ .

Soluzione:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}$$

⇒ Velocità:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \times |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}$$

## 2.15 La trasformata di Laplace

Considera una funzione  $f(x)$  con  $f(x) = 0$  per  $x < 0$ .

Definizione: Trasformata di Laplace:

$$\mathcal{L}[f](s) := \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx \equiv F(s), \quad s \in \mathbb{C}$$

N.B.: La trasformata di Laplace converge assolutamente se l'integrale  $\int_0^\infty |e^{-sx} f(x)| dx$  esiste

$$|e^{-sx} f(x)| = |e^{-(\text{Re } s + i \text{Im } s)x} f(x)| = |e^{-\text{Re } s x} f(x)|$$

Dal teorema della convergenza dominata segue che i valori tali per cui  $F(s)$  converge assolutamente sono tali che  $\text{Re } s > a$  oppure  $\text{Re } s \geq a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . (senza dim.)

$a$  viene chiamata *ascissa di convergenza assoluta* e dipende dal comportamento di crescita di  $f$ . Nella regione di convergenza assoluta  $F(s)$  è una funzione analitica (senza dim.)

Integrando per parti troviamo:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sx} f'(x) dx &= e^{-sx} f(x) \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty e^{-sx} f(x) dx = -f(0) + s \mathcal{L}[f] \\ \Rightarrow \mathcal{L}[f'] &= s \mathcal{L}[f] - f(0) \end{aligned} \quad (\Delta)$$

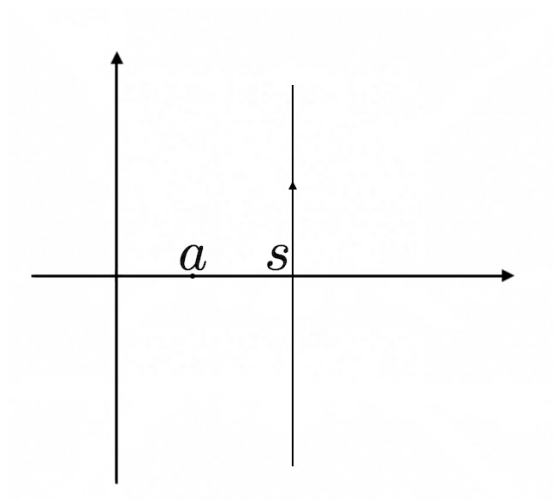
N.B.: Siccome  $\int_0^\infty e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$ ,  $\frac{1}{s}$  è la trasformata di Laplace della funzione  $H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$   
(Heaviside step function)

*Trasformazione di Laplace inversa*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{s-iL}^{s+iL} F(\sigma) e^{\sigma x} d\sigma$$

*Mellin inversion theorem* (teorema di inversione di Mellin)

con  $s > a$  (⇒  $F(\sigma)$  esiste sul cammino di integrazione (su cui  $\text{Re } \sigma = s$ ))



Check:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{s-iL}^{s+iL} F(\sigma) e^{\sigma x} d\sigma &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{s-iL}^{s+iL} \int_0^\infty e^{-\sigma x'} f(x') dx' e^{\sigma x} d\sigma = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dx' f(x') \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{s-iL}^{s+iL} e^{\sigma(x-x')} d\sigma = \end{aligned}$$

$$\sigma = s + iy, \quad -L \leq y \leq L, \quad d\sigma = i dy$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dx' f(x') \lim_{L \rightarrow \infty} \underbrace{\int_{-L}^{+L} e^{(s+iy)(x-x')} dy}_{e^{s(x-x')} \left[ \frac{e^{iy(x-x')}}{i(x-x')} \right]_{-L}^{+L}} dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty dx' f(x') e^{s(x-x')} \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{2i \sin(L(x-x'))}{x-x'} =$$

$$\delta_\varepsilon(x) = \frac{1}{\pi x} \sin\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad L = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$= \int_0^\infty dx' f(x') e^{s(x-x')} \delta(x-x') =$$

$$f(x') = 0 \text{ per } x' \leq 0$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' f(x') e^{s(x-x')} \delta(x-x') = f(x) \quad \checkmark$$

Esercizio:

1. Trovare la trasformata di Laplace di:  $\sin x$

$$\text{Risultato: } F(x) = \frac{1}{s^2+1}$$

2. Trovare la trasformata di Laplace di:  $x^{\alpha-1}$ ,  $\alpha > 0$

(usare:  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$ )

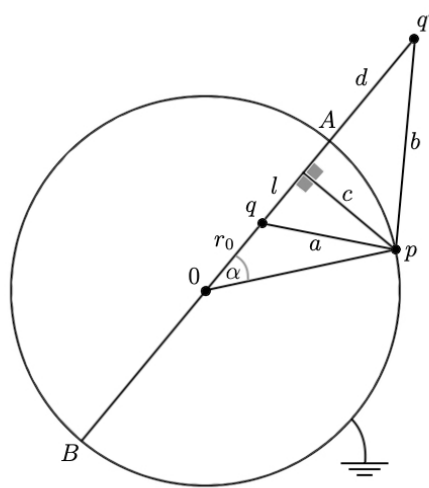
$$(\Delta) \Rightarrow \mathcal{L}[f''] = s\mathcal{L}[f'] - f'(0) = s^2\mathcal{L}[f] - sf(0) - f'(0)$$

Questa formula contiene sia il valore di  $f$ , sia il valore di  $f'$  in  $x = 0$ , ma non servono informazioni in  $x = \infty \Rightarrow$  La trasformata di Laplace è particolarmente adatta per risolvere dei problemi ai valori iniziali.

## Appendice A

### Carica immagine

*Problema:* Sfera con raggio  $R$ , messa a terra, con carica puntiforme  $q$  in  $r_0$



Per motivi di simmetria, la carica immagine giace sulla retta che collega  $O$  e  $q$ .  
Potenziale in  $p$ :

$$\phi = \frac{q}{a} + \frac{q'}{b} \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{A.1})$$

prendi  $p = A$ :

$$\begin{aligned} \frac{q}{R - r_0} + \frac{q'}{d} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{q'}{q} &= -\frac{d}{R - r_0} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

$p = B$ :

$$\frac{q}{R + r_0} + \frac{q'}{d + 2R} = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{q'}{q} = -\frac{d+2R}{R+r_0} \\
&\Rightarrow \frac{d}{R-r_0} = \frac{d+2R}{R+r_0} \\
&\Rightarrow d(R+r_0) = (d+2R)(R-r_0) \\
&\Rightarrow dR + dr_0 = dR - dr_0 + 2R^2 - 2Rr_0 \\
&\Rightarrow d = \frac{R(R-r_0)}{r_0}
\end{aligned} \tag{A.4}$$

e quindi

$$q' = -\frac{dq}{R-r_0} = -\frac{q}{R-r_0} \frac{R(R-r_0)}{r_0} = -\frac{qR}{r_0} \tag{A.5}$$

Verifichiamo che la (A.1) vale  $\forall p$ :

$$(A.1) \Leftrightarrow \frac{q'}{q} = -\frac{b}{a} \stackrel{(A.5)}{=} -\frac{R}{r_0} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{R}{r_0}$$

Calcolo l'angolo  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
a^2 &= r_0^2 + R^2 - 2r_0R \cos \alpha \\
&\Rightarrow \cos \alpha = \frac{r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0R}
\end{aligned}$$

D'altra parte:

$$\begin{aligned}
\cos \alpha &= \frac{r_0 + l}{R} \\
&\Rightarrow \frac{r_0 + l}{R} = \frac{r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0R} \\
&\Rightarrow l = \frac{-r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0} \\
c^2 &= R^2 - (r_0 + l)^2 \\
c^2 &= b^2 - (d + R - r_0 - l)^2 = b^2 - (d + R)^2 - (r_0 + l)^2 + 2(d + R)(r_0 + l) \\
&\Rightarrow R^2 = b^2 - \underbrace{(d + R)^2}_{\frac{R^4}{r_0^2}} + 2 \underbrace{(d + R)}_{\frac{R^2}{r_0}} \underbrace{(r_0 + l)}_{\frac{r_0^2 + R^2 - a^2}{2r_0}} = \\
&= b^2 - \frac{R^4}{r_0^2} + \frac{R^2}{r_0^2} (r_0^2 + R^2 - a^2) \\
&\Rightarrow \frac{R^2}{r_0^2} a^2 = b^2 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{R}{r_0} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$