

Sistemas de Controle II

Q2023.3

Projeto Final de SCII
Controle de um Pêndulo Invertido

Felipe Azzolino Varella - 11201722225

Gabriel Zolla Juarez - 11201721446



7 de dezembro de 2023

1 Introdução

Os tópicos acerca da compensação são alguns dos mais importantes no âmbito dos Sistemas de Controle. Basicamente, trata-se do processo de ajustar as características dinâmicas de um sistema para atender a requisitos específicos de desempenho. O objetivo da compensação é melhorar a resposta do sistema, tornando-a mais adequada às necessidades ou especificações desejadas.

Segundo Ogata (2010), as especificações podem ser dadas em termos de requisitos de resposta transitória (como máximo sobressinal e tempo de acomodação na resposta à entrada em degrau) e de requisitos em regime estacionário (como erro estacionário para uma entrada em rampa), ou podem ser dados em termos de resposta em frequência, e ambas devem ser concebidas antes do início do processo de projeto.

O dispositivo inserido no sistema com o propósito de satisfazer às especificações é denominado compensador. No processo de projetar um sistema de controle, é fundamental desenvolver um modelo matemático do sistema para que seja possível ajustar os parâmetros do compensador e, assim, compensar o desempenho ineficiente do sistema original.

Os sistemas de controle mecânicos, onde frequentemente são utilizados os compensadores, têm como exemplos veículos e robôs industriais, nos quais sua função é definir posicionamento e garantir estabilidade dos mesmos. No entanto, existe outro exemplo que é corriqueiramente alvo de estudo nessa área: o pêndulo invertido, que será o cerne de estudo no presente relatório, e cujo funcionamento será abordado posteriormente.



Figura 1: Sistema de pêndulo invertido linear desenvolvido pela Quanser

Ademais, existem diferentes tipos de compensadores, cujos usos dependem também do tipo do sistema. Por exemplo, um Controlador Proporcional consiste apenas de um amplificador com ganho constante, e trata-se do tipo mais simples de compensador, utilizado apenas quando os requisitos de desempenho transitório e estacionário para algum valor de K , e, portanto não haveria motivo para uso de um controlador mais complexo. Por outro lado,

existem também controladores como PI, PD, e PID (combinação dos anteriores) de forma a atingir especificações de zerar o erro estacionário e melhorar o desempenho em regime transitório.

Entretanto, os compensadores que serão estudados no projeto, e, portanto, são o foco do excerto em questão, serão o de Avanço de Fase, Atraso de Fase, e, por fim, Avanço e Atraso. O primeiro tem como objetivo principal melhorar o desempenho em regime estacionário, adicionando um polo de frequência mais alta que o zero, o que faz com que este compensador possa ser caracterizado como um filtro passa-alta que, por sua vez, pode tornar o sistema mais sensível a ruídos de alta frequência. O compensador por Atraso, por sua vez, tem por objetivo reduzir o erro de regime estacionário, adicionando um zero de frequência maior que o polo, caracterizando o sistema como um filtro passa-baixa que, diferente do anterior, faz com que o ruídos de alta frequência sejam atenuados. O compensador por Avanço-Atraso de Fase, por fim, combina as técnicas de avanço e atraso de fase, de forma a, simultaneamente, reduzir o erro estacionário e melhorar o desempenho em regime transitório.

2 Objetivos

O objetivo primário e mais amplo do projeto em questão é utilizar conceitos desenvolvidos ao longo da disciplina de Sistemas de Controle II de forma a analisar um sistema extremamente comum na área de controle e teoria de sistemas dinâmicos: o pêndulo invertido.

O problema envolve um sistema mecânico que com um braço suspenso verticalmente. A haste se desloca angularmente, é posicionado acima de um carro. A tendência da haste é cair sob efeito da gravidade, e o sistema deve ser estabilizado aplicando uma força horizontal ao carrinho, que demanda, por sua vez, esforço do motor.

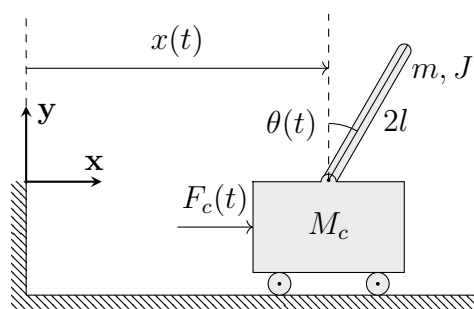


Figura 2: Esquemático do pêndulo invertido.

Tendo isso em vista, o objetivo central do projeto é realizar o controle do sistema. Para isso, aplicar-se-á diferentes tipos de compensadores, de forma a alterar o seu comportamento e corresponder a certos requisitos previamente definidos, e, por conseguinte, aprimorar seu desempenho, estabilidade e confiabilidade.

3 Modelagem

Abaixo tem-se o diagrama de corpo livre do motor. À partir da tensão aplicada no motor, que, conseqüentemente, varia a força à qual o carro é submetido, é possível imprimir variações na posição angular do pêndulo. Por outro lado, muda-se também a posição linear do carrinho.

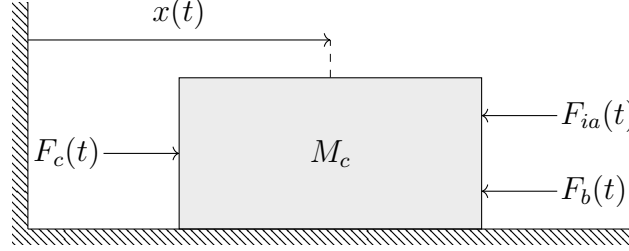


Figura 3: Diagrama de corpo livre da massa móvel.

Com base na equação fornecida para a modelagem do sistema utilizando a Segunda Lei de Newton e o princípio de D'Alembert (FAZZOLARI, 2023):

$$\sum_i F_i(t) = M_c \ddot{x}(t)$$

$$M_c \ddot{x}(t) = F_c(t) - F_{ia}(t) - F_b(t)$$

$$M_c \ddot{x}(t) + F_{ia}(t) + F_b(t) = F_c(t) \quad ^1$$

Em que $F_b(t)$ é a força de amortecimento viscoso causada pelo movimento do sistema no eixo:

$$F_b(t) = B_{eq} \dot{x}(t) \quad (2)$$

F_{ia} é a força inércia de armadura do motor, calculada por:

$$F_{ia}(t) = \frac{\eta_m K_g T_{ia}(t)}{r_{mp}} \quad (3)$$

T_{ia} , por sua vez, é o torque obtido pela inércia de armadura do motor:

$$T_{ia}(t) = J_m \ddot{\theta}_m(t) \quad (4)$$

A relação entre a posição angular do eixo do motor e a posição linear da roda dentada $\theta_m(t)$:

$$\theta_m(t) = \frac{K_g x(t)}{r_{mp}} \quad (5)$$

¹Em que adotou-se a notação $\frac{d}{dt}y(t) = \dot{y}(t)$ e $\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \ddot{y}(t)$

Desta forma, substituindo as relações encontradas nas Equações 2, 3, 4 e 5 na Equação 1, é possível modelar a equação do sistema, visando obter uma relação entre a posição linear do carro e a força de controle:

$$\begin{aligned}
M_c \ddot{x}(t) + \frac{\eta_m K_g T_{ia}(t)}{r_{mp}} + B_{eq} \dot{x}(t) &= F_c(t) \\
M_c \ddot{x}(t) + \frac{\eta_m K_g (J_m \ddot{\theta}_m(t))}{r_{mp}} + B_{eq} \dot{x}(t) &= F_c(t) \\
M_c \ddot{x}(t) + \frac{\eta_m K_g J_m \left(\frac{K_g \ddot{x}(t)}{r_{mp}} \right)}{r_{mp}} + B_{eq} \dot{x}(t) &= F_c(t) \\
M_c \ddot{x}(t) + \frac{\eta_m K_g^2 J_m \ddot{x}(t)}{r_{mp}^2} + B_{eq} \dot{x}(t) &= F_c(t) \\
\therefore \left(M_c + \frac{\eta_m K_g^2 J_m}{r_{mp}^2} \right) \ddot{x}(t) + B_{eq} \dot{x}(t) &= F_c(t)
\end{aligned} \tag{6}$$

Para o sistema utilizado neste projeto, a força de controle pode ser expressa com relação a tensão aplicada no motor, conforme descrito pela equação abaixo (QUANSER, 2012):

$$\begin{aligned}
F_c(t) &= \frac{\eta_g K_g K_t}{R_m r_{mp}} \left(-\frac{K_g K_m \dot{x}(t)}{r_{mp}} + \eta_m v_m(t) \right) \\
\therefore F_c(t) &= \frac{-\eta_g K_g^2 K_t K_m \dot{x}(t)}{R_m r_{mp}^2} + \frac{\eta_g K_g K_t \eta_m v_m(t)}{R_m r_{mp}}
\end{aligned} \tag{7}$$

Assim, combinando-se a relação encontrada na Equação 7 com a Equação 3, pode-se obter a relação entre a tensão aplicada no motor e posição horizontal do sistema:

$$\begin{aligned}
\left(M_c + \frac{\eta_m K_g^2 J_m}{r_{mp}^2} \right) \ddot{x}(t) + B_{eq} \dot{x}(t) &= \frac{-\eta_g K_g^2 K_t K_m \dot{x}(t)}{R_m r_{mp}^2} + \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t v_m(t)}{R_m r_{mp}} \\
\therefore \left(M_c + \frac{\eta_m K_g^2 J_m}{r_{mp}^2} \right) \ddot{x}(t) + \left(B_{eq} + \frac{\eta_g K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2} \right) \dot{x}(t) &= \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m r_{mp}} v_m(t)
\end{aligned} \tag{8}$$

Poder-se-á aplicar a transformada de Laplace na Equação 8, considerando condições iniciais nulas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \left\{ \left(M_c + \frac{\eta_m K_g^2 J_m}{r_{mp}^2} \right) \ddot{x}(t) \right\} + \mathcal{L} \left\{ \left(B_{eq} + \frac{\eta_g K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2} \right) \dot{x}(t) \right\} &= \mathcal{L} \left\{ \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m r_{mp}} v_m(t) \right\} \\
\left(M_c + \frac{\eta_m K_g^2 J_m}{r_{mp}^2} \right) \mathcal{L} \{ \ddot{x}(t) \} + \left(B_{eq} + \frac{\eta_g K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2} \right) \mathcal{L} \{ \dot{x}(t) \} &= \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m r_{mp}} \mathcal{L} \{ v_m(t) \}
\end{aligned}$$

$$\left(M_c + \frac{\eta_m K_g^2 J_m}{r_{mp}^2}\right) s^2 X(s) + \left(B_{eq} + \frac{\eta_g K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2}\right) s X(s) = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m r_{mp}} V_m(s)$$

$$\left[s^2 \left(M_c + \frac{\eta_m K_g^2 J_m}{r_{mp}^2}\right) + s \left(B_{eq} + \frac{\eta_g K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2}\right)\right] X(s) = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m r_{mp}} V_m(s)$$

Finalmente, obtém-se a função de transferência da planta $P(s)$:

$$\frac{X(s)}{V_m(s)} = \frac{\frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m r_{mp}}}{\left[s^2 \left(M_c + \frac{\eta_m K_g^2 J_m}{r_{mp}^2}\right) + s \left(B_{eq} + \frac{\eta_g K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2}\right)\right]}$$

$$\frac{X(s)}{V_m(s)} = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{R_m r_{mp} \left[s^2 \left(M_c + \frac{\eta_m K_g^2 J_m}{r_{mp}^2}\right) + s \left(B_{eq} + \frac{\eta_g K_g^2 K_t K_m}{R_m r_{mp}^2}\right)\right]}$$

$$\therefore P(s) = \frac{X(s)}{V_m(s)} = \frac{\eta_g \eta_m K_g K_t}{s^2 \left(R_m r_{mp} M_c + \frac{R_m \eta_m K_g^2 J_m}{r_{mp}}\right) + s \left(R_m r_{mp} B_{eq} + \frac{\eta_g K_g^2 K_t K_m}{r_{mp}}\right)} \quad (9)$$

4 Especificações

Com base no modelo expresso na Equação 9, é possível empregar os parâmetros disponíveis no manual da Quanser (2012) para realizar a representação computacional da referida planta. Essa representação nos permite simular o comportamento do sistema diante de diversas entradas, viabilizando a identificação dos aspectos que necessitam de aprimoramento tanto no domínio da frequência, como margem de fase e largura de banda, quanto no domínio do tempo, como a velocidade de resposta, percentual de sobressinal e erro em regime estacionário.

Tabela 1: Parâmetros do Sistema

Parâmetro	Descrição	Valor
R_m	Resistência da armadura do motor	$2,6 \Omega$
J_m	Momento de inércia do rotor	$3,9 \times 10^{-7} \text{ kg.m}^2$
k_t	Constante de torque-corrente do motor	$7,68 \times 10^{-3} \text{ N.m/A}$
η_m	Eficiência do motor	1
k_m	Constante de força contra-eletromotriz	$7,68 \times 10^{-3} \text{ V/(rad/s)}$
k_g	Relação total de engrenagens	3,71
η_g	Eficiência da caixa de engrenagens	1
M_c	Massa do carro	0,94 kg
r_{mp}	Raio da roda dentada do motor	0,0063 m
B_{eq}	Coefficiente de amortecimento viscoso	$5,4 \text{ N.m/(rad/s)}$
g	Aceleração da gravidade	$9,81 \text{ kg.m/s}^2$

No domínio da frequência, pode-se utilizar os diagramas de Bode em malha aberta e fechada para analisar a margem de fase e largura de banda do sistema:

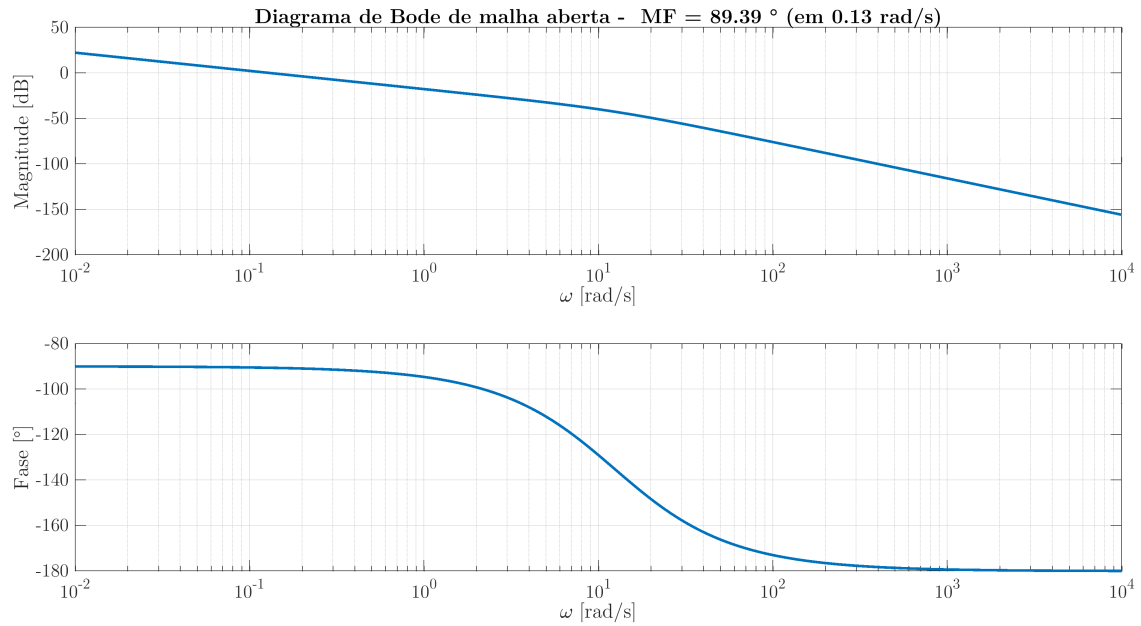


Figura 4: Diagrama de Bode em malha aberta para o sistema não compensado.

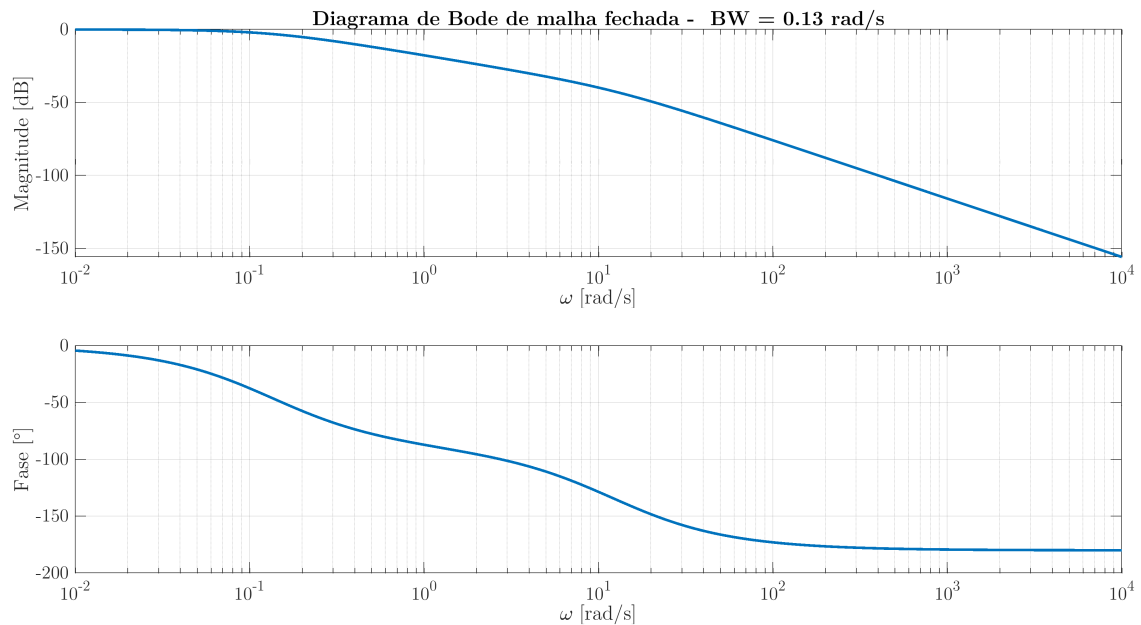


Figura 5: Diagrama de Bode em malha fechada para o sistema não compensado.

Já para a análise temporal, pode-se verificar como o sistema comporta-se para as entradas de degrau e rampa unitária:

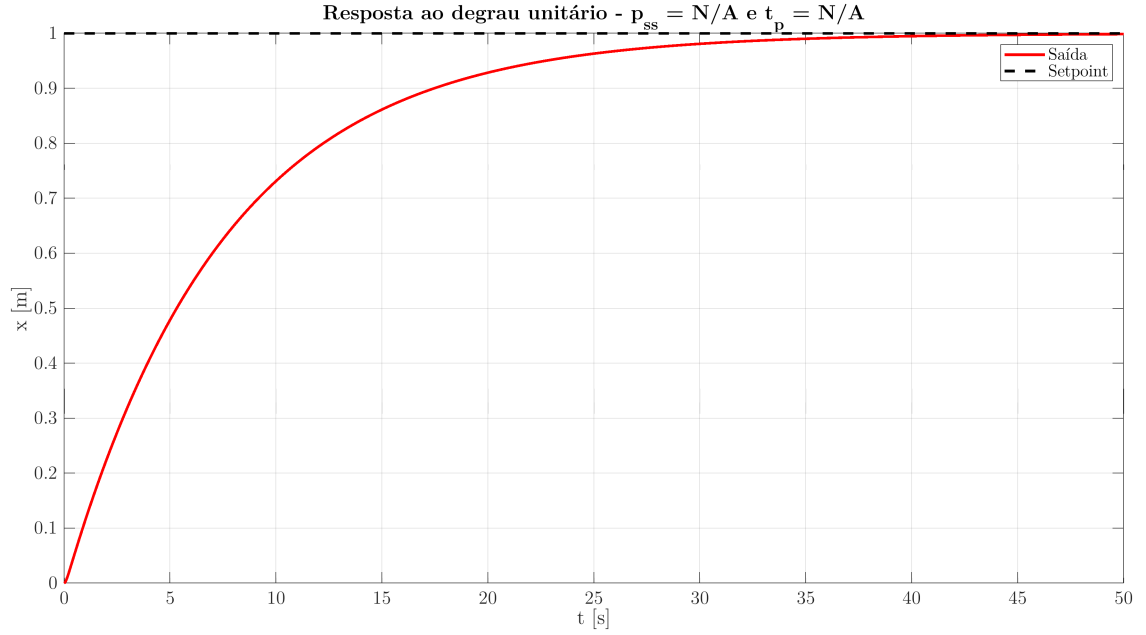


Figura 6: Resposta ao degrau unitário para o sistema não compensado.

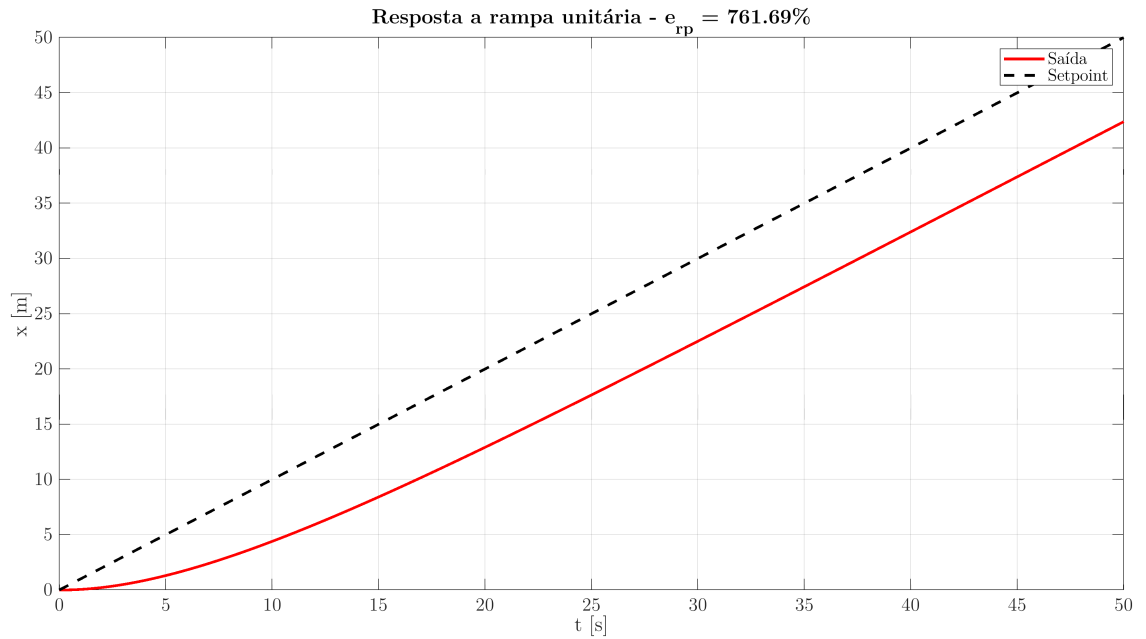


Figura 7: Resposta a rampa unitária para sistema não compensado.

Assim, observa-se que, embora o sistema seja estável, sua resposta temporal ao degrau é excessivamente lenta (o que também é evidenciado pela baixa largura de banda), e a resposta à rampa unitária apresenta um erro em regime estacionário significativo. Diante dessa análise, torna-se indispensável o projeto de compensadores para aprimorar tais respostas.

Isto posto, objetiva-se, neste trabalho, projetar três diferentes tipos de compensadores: avanço, atraso e avanço-atraso. Para cada tipo de compensador, determinou-se requisitos de desempenho que devem ser atingidos para projetar os compensadores que, por sua vez, são aqueles que definem o comportamento do sistema após a inclusão desse dispositivo,

principalmente quando analisa-se a resposta do sistema a entradas em degrau e rampa, conforme indica a tabela:

Tabela 2: Requisitos de Desempenho

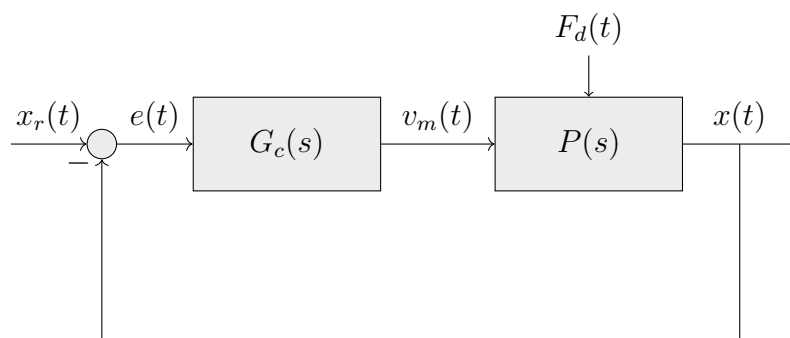
Avanço de Fase	
e_{ss}	$\leq 1\%$
M_p	$\leq 5\%$
Atraso de Fase	
e_{ss}	$\leq 0,1\%$
M_p	$\leq 5\%$
Atraso e Avanço de Fase	
e_{ss}	$\leq 0,1\%$
M_p	$\leq 5\%$
t_p	$\leq 0,1\text{ s}$

O parâmetro e_{ss} é denominado erro estacionário, e representa a diferença entre a resposta do sistema e o sinal de referência de rampa quando o tempo tende para o infinito, principalmente usado para avaliar o desempenho de um sistema em regime permanente. O sobressinal M_p , por sua vez, é a porcentagem pela qual a resposta ultrapassa o valor final desejado em uma resposta transitória quando a entrada é um sinal de degrau. Por fim, o tempo de pico t_p é o tempo necessário para atingir o primeiro pico na resposta transitória para uma entrada de degrau.

5 Projeto e Implementação Computacional

Apesar de cada compensador buscar atender diferentes especificações, utilizar-se-á o mesmo diagrama de blocos para representar o sistema compensado, sendo este disposto na Figura 8. Por esse motivo, para cada modalidade de compensador, a função de transferência do controlador $G_c(s)$ será diferente, de forma a respeitar os requisitos.

Figura 8: Diagrama de blocos do sistema compensado.



Fonte: Autoria própria.

Além disso, vale ressaltar que a força de perturbação $F_d(t)$ representada no diagrama acima busca caracterizar o distúrbio gerado pela força horizontal no acoplamento devido ao movimento da haste do pêndulo causado por algum fator externo não medido. Todavia, esta força não foi considerada no processo de modelagem visto que, partindo do pressuposto que o controlador será projetado corretamente, o sistema irá rejeitar a presença desta perturbação (que pode ser interpretada como um pulso de curta duração), fazendo com que o sistema retorne à sua posição de equilíbrio.

5.1 Compensador por avanço de fase

Primeiramente, projetar-se-á o compensador por avanço de fase. De forma geral, o projeto de um compensador por avanço visa aprimorar a resposta transitória do sistema em malha fechada. Como tem-se uma relação indireta entre a resposta em frequência e resposta transitória do sistema, parte-se das especificações feitas no domínio da frequência para, então, projetá-lo. Para tal, considera-se a seguinte função de transferência:

$$G_c(s) = K \left(\frac{1 + Ts}{1 + \alpha Ts} \right) \quad (10)$$

em que tem-se $0 < \alpha < 1$, caracterizando este compensador como um filtro passa-alta. Embora essa configuração implique no aumento da largura de banda do sistema (diretamente relacionada ao tempo de resposta do sistema), ela também pode amplificar os efeitos de ruídos de alta frequência, tornando o sistema, portanto, mais sensível a tais ruídos.

Para projetar tal compensador calcula-se, primeiramente, o ganho K a fim de satisfazer o requisito de regime estacionário. Sendo e_{ss} o erro em regime permanente da planta para uma entrada em formato de rampa, pode-se obtê-lo por meio da seguinte relação:

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{sP(s)} \quad (11)$$

Além disso, adotando que e'_{ss} é o erro em regime estacionário do sistema com ganho ajustado mas não compensado (especificação de projeto), pode-se calcular o ganho K do compensador por meio de:

$$\begin{aligned} e'_{ss} &= \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{sKP(s)} = \frac{1}{K} \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{1}{sP(s)} = \frac{1}{K} e_{ss} \\ \therefore K &= \frac{e_{ss}}{e'_{ss}} \end{aligned} \quad (12)$$

Sendo $P_1(s) = KP(s)$ a função de transferência da planta com ganho ajustado mas não compensado, toma-se como segundo passo de projeto o cálculo do ângulo de avanço necessário (ϕ) para que a margem de fase atual do sistema (MF_{atual}) aproxime-se da margem de fase

desejada (MF_{des}):

$$\phi = MF_{des} - MF_{atual} \quad (13)$$

Esta grandeza, por sua vez, relaciona-se com o fator de atenuação do compensador α por meio da seguinte relação:

$$\alpha = \frac{1 - \sin(\phi)}{1 + \sin(\phi)} \quad (14)$$

Em seguida, determina-se a frequência ω_m em que o módulo em dB da planta não compensada $P_1(s)$ corresponda a $-20 \log(1/\sqrt{\alpha})$:

$$\begin{aligned} 20 \log(|P_1(j\omega_m)|) &= -20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right) \\ \therefore 20 \log\left(\frac{|P_1(j\omega_m)|}{\sqrt{\alpha}}\right) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

e, então, adota-se este valor como a nova frequência de cruzamento de ganho do sistema. Finalmente, visto que $\omega_m = 1/(T\sqrt{\alpha})$, pode-se calcular o parâmetro de tempo T do compensador por (OGATA, 2010; FRANKLIN; POWELL; NAIEMI, 2013):

$$T = \frac{1}{\omega_m \sqrt{\alpha}} \quad (16)$$

Visando automatizar o processo de projeto deste compensador, desenvolveu-se a função `projectPhaseLeadCompensator` na linguagem MATLAB[®] que, ao receber como parâmetros a função de transferência da planta a ser controlada, o erro em regime estacionário desejado e a margem de fase desejada, retorna a função de transferência do controlador, que será dada por:

$$G_c(s) = \frac{4,236s \cdot 10^1 + 7,627 \cdot 10^2}{3,963s \cdot 10^{-3} + 1} \quad (17)$$

Código 1: Função de projeto do compensador por avanço.

```
1 function compensator_tf = projectPhaseLeadCompensator(plant_tf,
2   desired_ess, desired_phase_margin)
3
4   % Calculo de K
5   sys_type = sum(pole(plant_tf) == 0);
6   error_constant = evalfr(plant_tf*(s^sys_type), eps);
7   ess = 1/error_constant;
8   K = ess/desired_ess;
9
10  % Calculo de alpha
11  [~, phase_margin] = margin(K*plant_tf);
12  phi = deg2rad(desired_phase_margin - phase_margin);
13  alpha = (1 - sin(phi))/(1 + sin(phi));
14
15  % Calculo de T
16  [~, ~, ~, wm] = margin(K*plant_tf/sqrt(alpha));
17  T = 1/(wm*sqrt(alpha));
18
19  % Funcao de transferencia do compensador
20  compensator_tf = K*(1 + s*T)/(1 + s*T*alpha);
21 end
```

Ademais, implementou-se uma lógica que varia a margem de fase desejada em passos fixos até as especificações de projeto serem completamente atendidas.

Código 2: Exemplo de lógica de busca ótima para margem de fase desejada.

```
1 MF_lead_start = 45; % Valor inicial
2
3 t_ramp_lead = linspace(0, 5, 1E3);
4 t_step_lead = linspace(0, 1, 1E3);
5
6 for MF_lead = MF_lead_start:5:180
7     Gc_lead = projectPhaseLeadCompensator(P, ess_lead, MF_lead);
8
9     [~, mp_i, ess_i, ~, ~] = getMetrics(Gc_lead*P, t_ramp_lead,
10         t_step_lead);
11
12     if ((mp_i <= mp_lead) && (ess_i <= ess_lead))
13         break
14     end
15 end
```

Em que P é a função de transferência da planta, Gc_lead a função de transferência do compensador (projetado na função citada anteriormente) e `getMetrics` é uma função desenvolvida para calcular automaticamente o percentual de sobressinal (`mp_i`), erro de regime estacionário (`ess_i`) e tempo de pico (não utilizado como requisito de projeto neste compensador).

Após a execução do programa, verificou-se que apesar da margem de fase do sistema compensado em malha aberta ter sido reduzida de $89,39^\circ$ para $70,46^\circ$ (vide Figuras 4 e 17), caracterizando-o como menos estável, a largura de banda do sistema compensado em malha fechada subiu de 0,13 rad/s para 96,11 rad/s (vide Figuras 5 e 18), implicando em um tempo de resposta consideravelmente mais rápido.

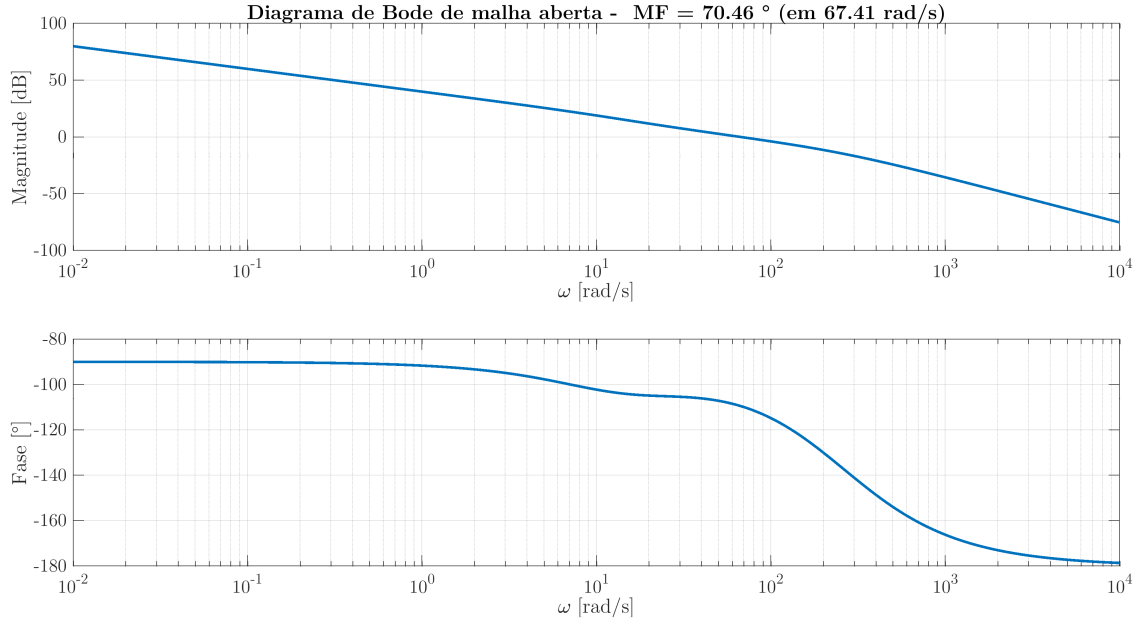


Figura 9: Diagrama de Bode em malha aberta para o sistema com compensador por avanço de fase.

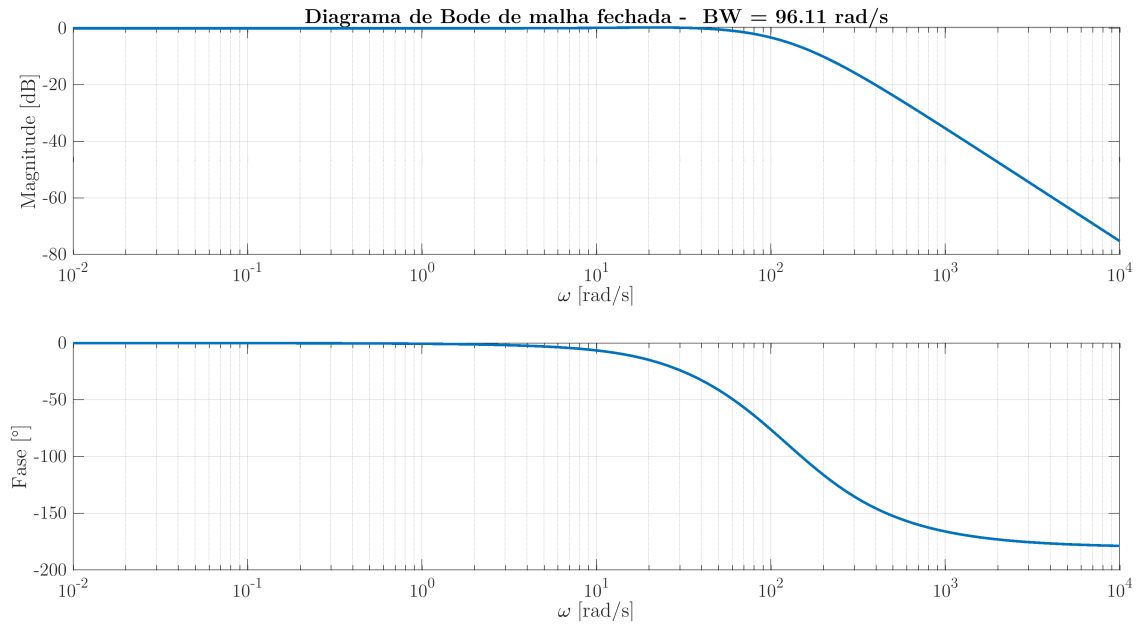


Figura 10: Diagrama de Bode em malha fechada para o sistema com compensador por avanço de fase.

Além disso, é possível verificar, por meio das respostas ao degrau (Figura 19) e à rampa (Figura 20), que as especificações de projeto foram atendidas. Para a primeira entrada, observou-se um percentual de sobressinal abaixo do valor especificado ($p_{ss} = 4,73\% \leq 5\%$), e para a segunda entrada, o erro em regime estacionário, conforme definido no projeto, foi de $e_{ss} = 1\%$.

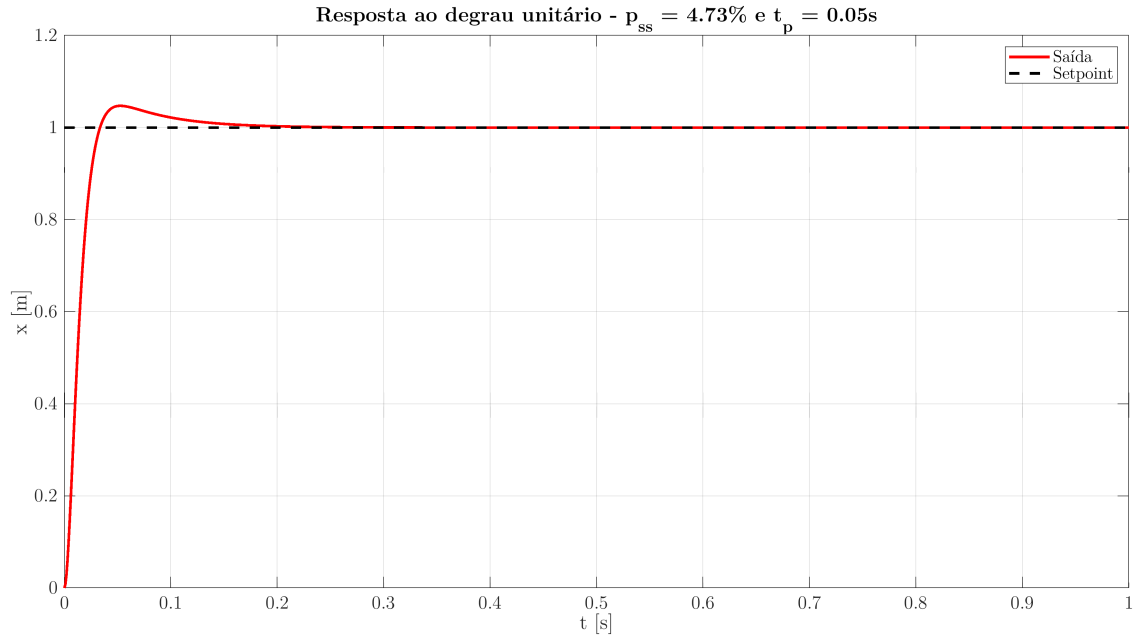


Figura 11: Resposta do sistema com compensador por avanço de fase em malha fechada para o degrau unitário.

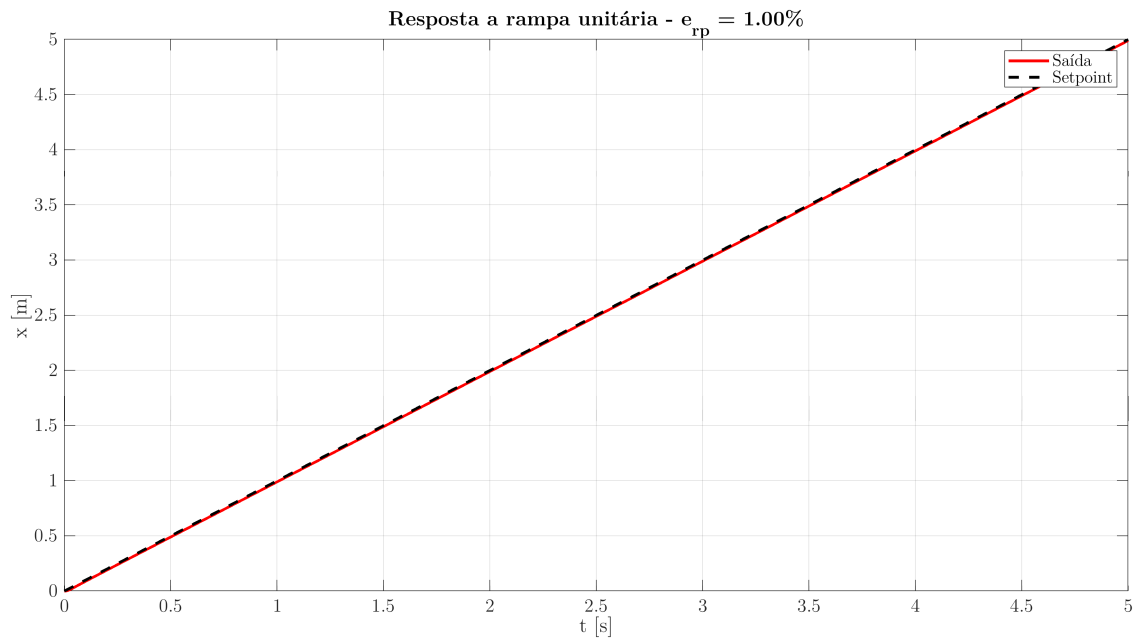


Figura 12: Resposta do sistema com compensador por avanço de fase em malha fechada para a rampa unitária.

5.2 Compensador por atraso de fase

Em seguida, projetar-se-á o compensador por atraso de fase, que, por sua vez, tem como objetivo principal, reduzir o erro em estado estacionário. Para este caso adota-se a seguinte função de transferência:

$$G_c(s) = K \left(\frac{Ts + 1}{\beta Ts + 1} \right) \quad (18)$$

em que tem-se $\beta > 1$, caracterizando o controlador como um filtro passa-baixa. Em contrapartida ao compensador citado anterior, este sistema reduz a banda passante do sistema, fazendo com a resposta seja mais lenta, e atenua altas frequências, tornando o sistema menos sensível a ruídos neste espectro.

De forma semelhante ao procedimento realizado no compensador por avanço de fase, toma-se como primeiro passo o cálculo do ganho K do compensador, o que é feito de forma idêntica ao anterior.

Em seguida, calcular-se-á o ângulo, que denominamos de gamma (γ), que representa o ângulo de fase da função de transferência de malha aberta que é igual a margem de fase desejada (MF_{des}) decrescida de 180° :

$$\gamma = MF_{des} - 180^\circ \quad (19)$$

Quer-se, no entanto, obter a frequência em que esta defasagem ocorre. Partindo-se da curva de defasagem do sistema com ganho ajustado mas não compensado, obtêm-se tal frequência e determina-se que está será, portanto, a nova frequência de cruzamento de ganho ω_{cg} do sistema.

Após esse processo, escolher-se-á a frequência de canto correspondente ao zero do compensador $\omega_z = 1/T$ de uma oitava a uma década abaixo da nova frequência de cruzamento de ganho². Por questões de praticidade, arbitrou-se, neste projeto, que a esta frequência deveria estar uma década abaixo, ou seja, $\omega_z = \omega_{cg}/10$. Desta forma, pode-se obter o parâmetro T do compensador por:

$$T = \frac{1}{\omega_z} = \frac{1}{\omega_{cg}/10} \quad (20)$$

Pela curva de magnitude do sistema com ganho ajustado mas não compensado, pode-se obter o ganho G_{cg} (em dB) equivalente à nova frequência de corte de ganho ω_{cg} , que corresponde à atenuação necessária para baixar a curva de módulo a 0 dB na nova frequência de cruzamento de ganho. Assim, notando que esta atenuação necessária é de $-20 \log(\beta)$, possibilita-se o cálculo do β do compensador pela seguinte relação (OGATA, 2010; FRANKLIN; POWELL; NAIEMI, 2013):

$$\begin{aligned} G_{cg} - 20 \log(\beta) &= 0 \\ \therefore \beta &= 10^{G_{cg}/20} \end{aligned} \quad (21)$$

Analogamente ao que fez-se para o compensador por avanço, desenvolveu-se a função `projectPhaseLagCompensator` no MATLAB® para projetar o compensador de atraso de fase a partir da função de transferência da planta e margem de fase e erro em regime estacionário

²É relevante observar que essa escolha é necessária para evitar efeitos prejudiciais do atraso de fase, pois tanto o polo quanto o zero do compensador devem estar posicionados abaixo da nova frequência de cruzamento de ganho.

desejados, e aplicou-se a mesma lógica representada no Código 2 para encontrar a margem de fase necessária para que as especificações de projeto fossem atendidas. A função de transferência resultante para o compensador fora:

$$G_c(s) = \frac{2,162s \cdot 10^4 + 7,627 \cdot 10^3}{7,722s \cdot 10^2 + 1} \quad (22)$$

Código 3: Função de projeto do compensador por atraso.

```

1 function compensator_tf = projectPhaseLagCompensator(plant_tf,
  desired_ess, desired_phase_margin)
2     s = tf('s');
3
4     % Calculo de K
5     sys_type = sum(pole(plant_tf) == 0);
6     error_constant = evalfr(plant_tf*(s^sys_type), eps);
7     ess = 1/error_constant;
8     K = ess/desired_ess;
9
10    % Calculo de gamma
11    gamma = desired_phase_margin - 180;
12    [mag, phase, w] = bode(K*plant_tf);
13
14    % Obter a frequencia onde a fase e igual (proxima) a gamma
15    [~, index] = min(abs(phase - gamma));
16    index = index(1);
17    frequency_at_gamma = w(index);
18
19    % Frequencia do zero do compensador
20    zero_comp = frequency_at_gamma/10;
21    T = 1/zero_comp;
22
23    % Ganho em frequency_at_gamma
24    gain_at_gamma = mag2db(mag(index));
25
26    % Calculo de beta
27    beta = 10^(gain_at_gamma/20);
28
29    % Funcao de transferencia do compensador
30    compensator_tf = K*(1 + s*T)/(1 + s*T*beta);
31 end

```

A partir do código desenvolvido, construir-se-á os diagramas de Bode em malha aberta e malha fechada do sistema:

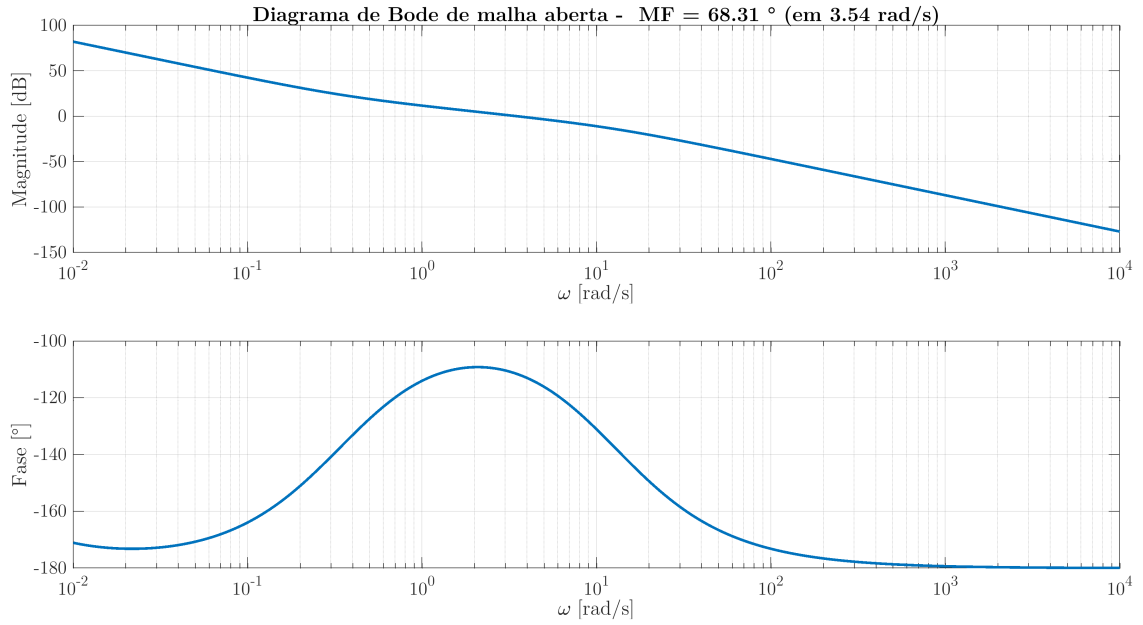


Figura 13: Diagrama de Bode em malha aberta para o sistema com compensador por atraso de fase.

Nota-se que a margem de fase em malha aberta apresenta um valor de $70,46^\circ$, que evidencia o atraso proporcionado por esse tipo de compensador se comparado ao sistema inicial, cuja margem de fase era de $89,39^\circ$. Ademais, percebe-se que o comportamento da curva de fase teve uma alteração significativa entre os sistemas não-compensado e compensado. Isso se dá pelo caráter de passa-baixas do compensador por atraso descrito anteriormente, notório na faixa de baixas frequências.

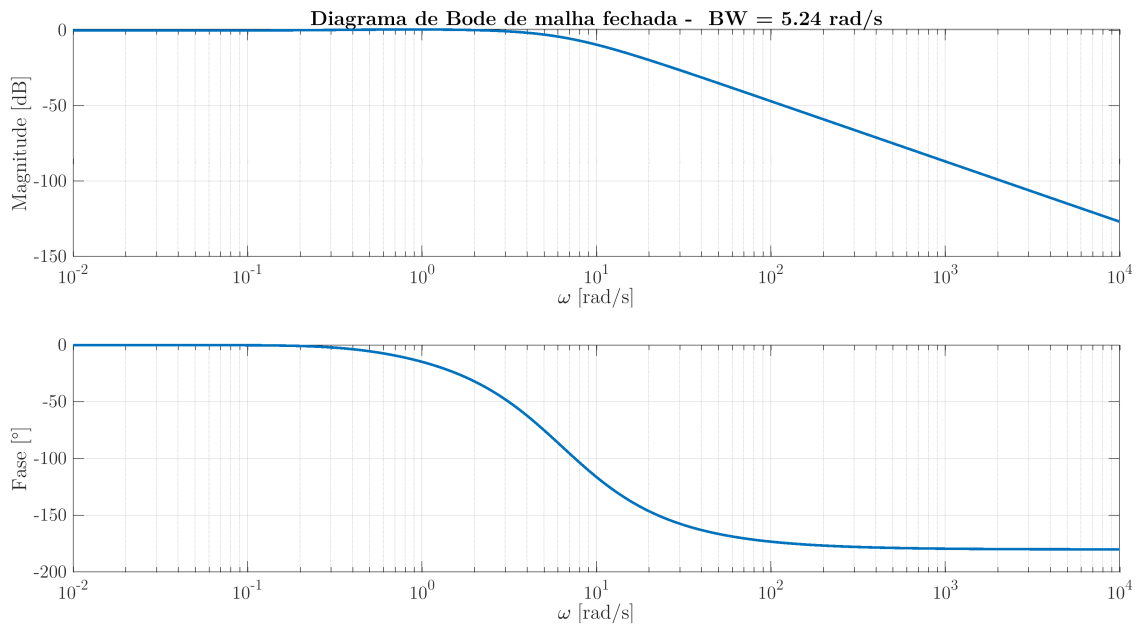


Figura 14: Diagrama de Bode em malha fechada para o sistema com compensador por atraso de fase.

No diagrama de Bode de malha fechada, por sua vez, nota-se que houve um pequeno

aumento na largura de banda se comparado com o sistema não compensado, de 0,13rad/s para 5,24rad/s. Isso ocorre pois, embora o foco do compensador seja atuar no regime permanente, sua presença acaba refletindo parcialmente no transitório também. No entanto, é perceptível que a largura de banda, se comparado com o sistema com compensador por avanço de fase, é significativamente menor, o que torna o sistema mais lento, de menor velocidade de resposta, porém com melhoria no regime permanente, que será observado na curva da resposta à diferentes entradas dispostos posteriormente.

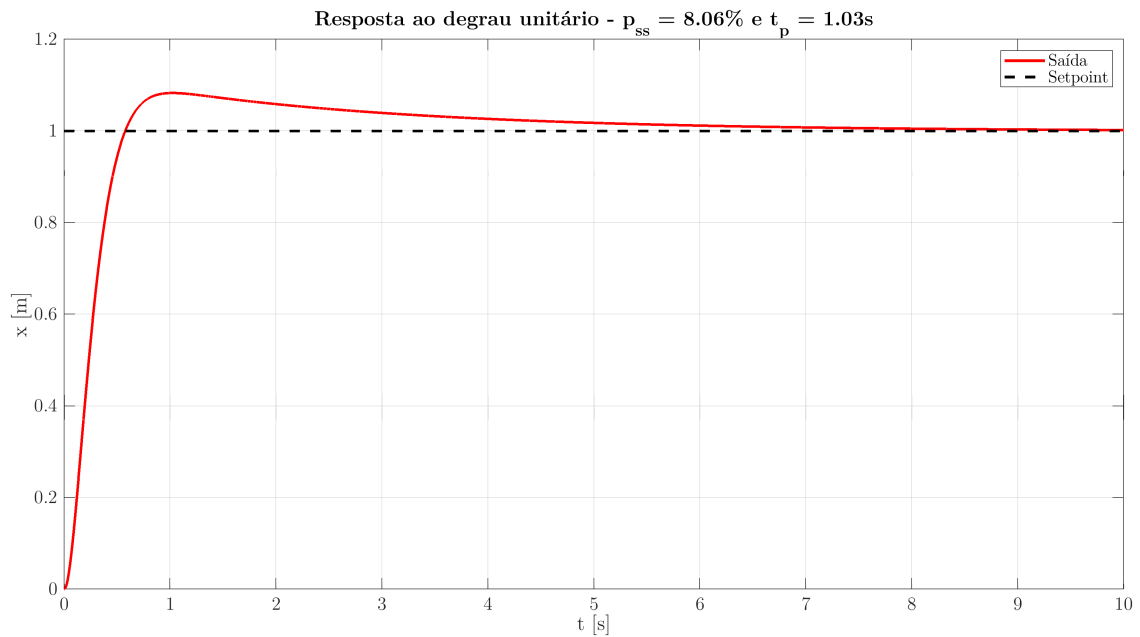


Figura 15: Resposta do sistema com compensador por atraso de fase em malha fechada para o degrau unitário.

Avaliando o comportamento do sistema ao ser submetido a uma entrada de degrau unitária, obteve-se um sobressinal M_p de 8,06% e tempo de pico t_p de 1,03s. Note que o percentual de overshoot ficou ligeiramente superior ao demandado. Independente da margem de fase fornecida no projeto do compensador, o valor descrito na especificação não era possível de ser atingido. Esse comportamento, no entanto, era esperado, tendo em vista que a principal função do compensador por atraso de fase é melhorar o desempenho do sistema em regime estacionário, reduzindo o erro do mesmo.

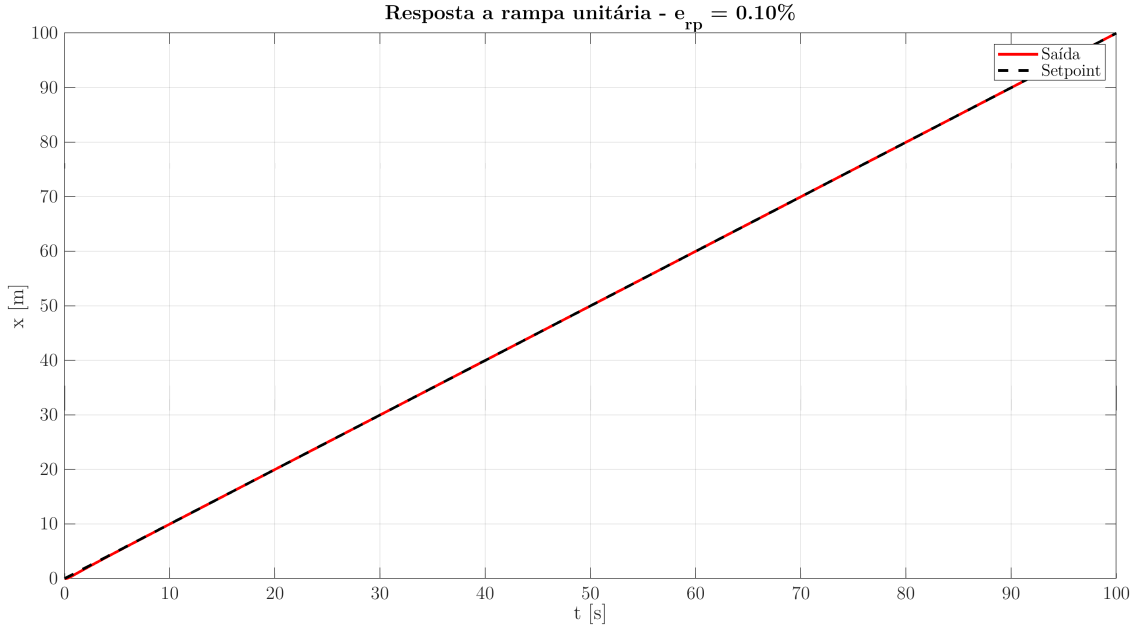


Figura 16: Resposta do sistema com compensador por atraso de fase em malha fechada para a rampa unitária.

Pela curva de resposta à rampa unitária é possível justamente observar o fenômeno anteriormente descrito. O erro em estado estacionário para esse tipo de entrada é drasticamente reduzido para valores próximos de 0,1%, muito inferior ao obtido tanto no sistema não-compensado, quanto após a adição do compensador por avanço de fase.

Vale ressaltar que, a fim de buscar melhoria principalmente no quesito de tempo de assentamento e de pico da curva de resposta ao degrau do sistema em malha fechada, optou-se por uma flexibilização do valor de máximo sobressinal escolhido tal que o sistema respondesse de forma mais rápida. Adotou-se tal medida para que fosse possível obter uma melhor velocidade de resposta do sistema pois, ao aumentar o percentual de sobressinal pode-se reduzir o tempo de pico do sistema, aumentando sua velocidade de resposta, resultando em um melhor *trade-off* entre sobressinal e tempo de resposta.

5.3 Compensador por avanço e atraso de fase

Por fim, o projeto de compensador por avanço e atraso de fase busca conciliar os dois tipos definidos acima, de forma a atender de forma satisfatória tanto os requisitos de regime transiente quanto permanente. Isto posto, a função de transferência deste compensador pode ser representada por uma associação série dos dois anteriores:

$$G_c(s) = K \left(\frac{T_1 s + 1}{\alpha T_1 s + 1} \right) \left(\frac{T_2 s + 1}{\beta T_2 s + 1} \right) \quad (23)$$

Assim como feito anteriormente, o primeiro passo de projeto deste compensador é definir qual o ganho necessário para atender o erro em regime estacionário. Para tal, adota-se o

mesmo procedimento já descrito.

Em seguida, busca-se aproximar a planta a um sistema de segunda ordem, de forma que possa ser descrita por grandezas como coeficiente de amortecimento ξ , frequência natural ω_n e banda passante em malha fechada BW . Assim, parte-se dos requisitos de projeto de percentual de sobressinal e tempo de pico para definir quais devem estes valores. Sendo M_p o percentual de sobressinal especificado, o coeficiente de amortecimento desejado pode ser calculado por:

$$\xi = \frac{-\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} \quad (24)$$

enquanto que a frequência natural pode ser dada em função deste valor e do tempo de pico especificado:

$$\omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1 - \xi^2}} \quad (25)$$

e a banda passante do sistema em malha fechada possa ser calculada a partir destes valores:

$$BW = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{4\xi^4 - 4\xi^2 + 2}} \quad (26)$$

Finalmente, pode-se calcular a margem de fase desejada por meio de:

$$MF_{des} = \text{atan} \left(\frac{2\xi}{\sqrt{-2\xi^2 + \sqrt{1 + 4\xi^4}}} \right) \quad (27)$$

Definida estas grandezas, busca-se colocar a nova frequência de cruzamento de ganho do sistema ω'_{cg} próxima a largura de banda desejada. Para este projeto, utilizou-se que a relação entre estas grandezas deveria ser de 80%, *i.e.*,:

$$\omega'_{cg} = 0,8BW \quad (28)$$

de forma que a margem do sistema passe a ser, portanto:

$$MF_{atual} = 180^\circ + \gamma \quad (29)$$

em que γ é a defasagem do sistema com ganho ajustado na nova frequência de corte de ganho (*i.e.*, $\gamma = \angle KP(j\omega'_{gc})$). Com esse resultado, pode-se calcular o avanço de fase desejado por meio da Equação 13 e os parâmetros α e T_1 por meio das Equações 14 e 16.

Por fim, como o projeto da parcela de atraso não é crítica, visto que a parcela de margem de fase adequada é deixada a cargo do avanço, adota-se que o coeficiente β será definido como o inverso de α :

$$\beta = \frac{1}{\alpha} \quad (30)$$

enquanto que o parâmetro T_2 poderá ser calculado pela Equação 20 (NISE, 2002).

Assim como feito para os outros compensadores, elaborou-se a função `projectPhaseLeadLagCompensator` no MATLAB® para projetar de forma automática este compensador. Para este caso, tem-se como argumentos a função de transferência da planta, erro em regime estacionário desejado, *overshoot* desejado, tempo de pico e a tolerância adicionada ao avanço desejado (somada ao valor descrito pela Equação 13).

Código 4: Função de projeto do compensador por avanço e atraso.

```

1 function compensator_tf = projectPhaseLeadLagCompensator(
    plant_tf, desired_ess, desired_overshoot, peak_time,
    tolerance)
2     s = tf('s');
3
4     % Calculo de K
5     sys_type = sum(pole(plant_tf) == 0);
6     error_constant = evalfr(plant_tf*(s^sys_type), eps);
7     ess = 1/error_constant;
8     K = ess/desired_ess;
9
10    % Aproximacao de segunda ordem - calculo xi, wn e BW
11    xi = -log(desired_overshoot)/sqrt(pi^2 + (log(
        desired_overshoot))^2);
12    wn = pi/(peak_time*sqrt(1 - xi^2));
13    BW = wn*sqrt((1 - 2*xi^2) + sqrt(4*xi^4 - 4*xi^2 + 2));
14
15    % Projeto avanço
16    desired_phase_margin = atand(2*xi/sqrt(-2*xi^2 + sqrt(1 +
        4*xi^4)));
17    wcg = 0.8*BW;
18    w = linspace(0.9*wcg, 1.1*wcg, 1E3);
19    [~, phase] = bode(K*plant_tf, w);
20    [~, index] = min(abs(w - wcg));
21    gamma = phase(index);
22    phase_margin = 180 + gamma;
23    phi = desired_phase_margin - phase_margin + tolerance;
24    alpha = (1 - sind(phi))/(1 + sind(phi));
25    T1 = 1/(wcg*sqrt(alpha));
26    lead_compensator_tf = (1 + s*T1)/(1 + s*T1*alpha);
27
28    % Projeto atraso
29    beta = 1/alpha;
30    T2 = 1/(wcg/10);
31    lag_compensator_tf = (1 + s*T2)/(1 + s*T2*beta);
32
33    % Funcao de transferencia do compensador
34    compensator_tf = K*lead_compensator_tf*lag_compensator_tf;
35 end

```

De forma análoga ao que fora feito antes, implementou-se uma lógica automática de projeto. Todavia, como para este compensador não define-se explicitamente a margem de fase desejada, modificou-se a lógica citada anteriormente para que o parâmetro a ser variado fosse a tolerância adicionada ao avanço de fase. Assim, utilizou-se o seguinte código para encontrar o melhor compensador:

Código 5: Exemplo de lógica para busca ótima de tolerância.

```

1  tol_leadlag_start = 0;  % Valor inicial
2
3  w_bode_leadlag = logspace(-2, 4, 1E3);
4  t_ramp_leadlag = linspace(0, 10, 1E3);
5  t_step_leadlag = linspace(0, 1, 1E3);
6
7  for tol_leadlag = tol_leadlag_start:1:20
8      Gc_leadlag = projectPhaseLeadLagCompensator(P, ess_leadlag,
9          mp_leadlag, tp_leadlag, tol_leadlag);
10
11     [tp_i, mp_i, ess_i, ~, ~] = getMetrics(Gc_leadlag*P,
12         t_ramp_leadlag, t_step_leadlag);
13
14     if ((mp_i <= mp_leadlag) && (ess_i <= ess_leadlag)) && (
15         tp_i <= tp_leadlag)
16         break
17     end
18 end

```

Executando-se o programa, obtém-se a seguinte função de transferência, bem como os diagramas de Bode em malha aberta e fechada para o sistema compensado:

$$G_c(s) = \frac{2,664s^2 \cdot 10^2 + 3,092s \cdot 10^3 + 7,627 \cdot 10^3}{3,493s^2 \cdot 10^{-2} + 5,493s + 1} \quad (31)$$

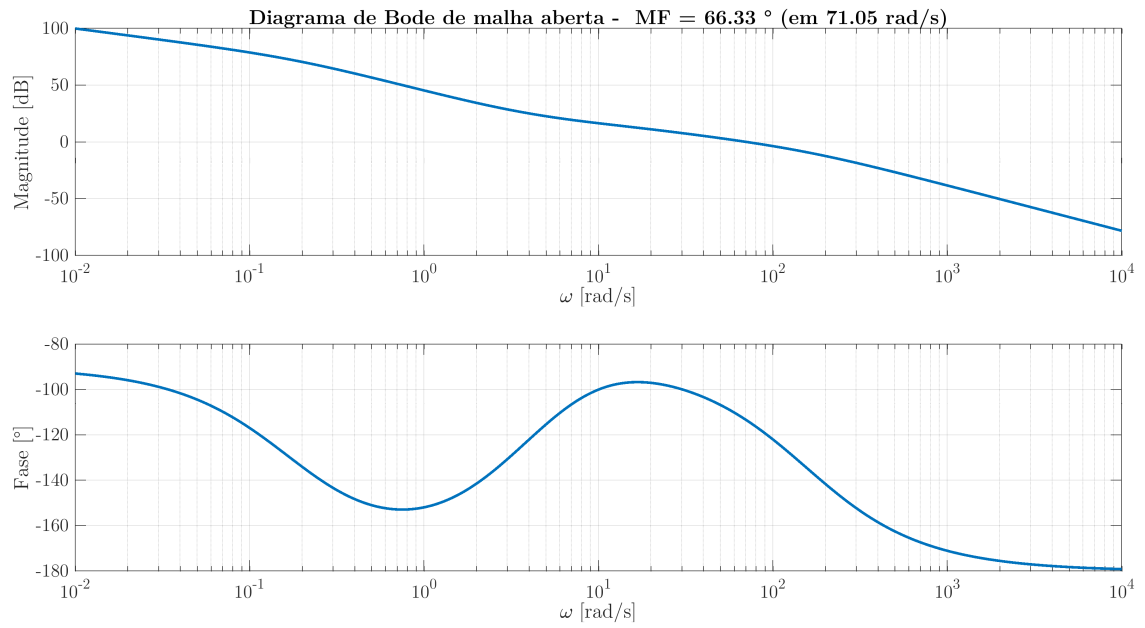


Figura 17: Diagrama de Bode em malha aberta para o sistema com compensador por avanço-atraso de fase.

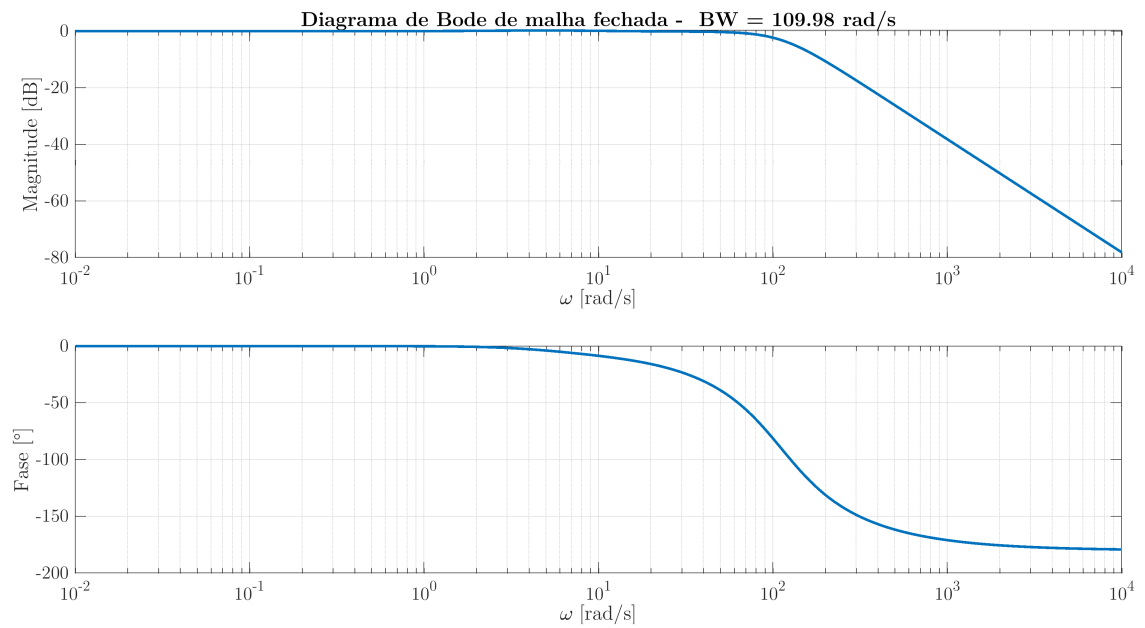


Figura 18: Diagrama de Bode em malha fechada para o sistema com compensador por avanço-atraso de fase.

e as seguintes curvas de resposta ao degrau e rampa, respectivamente:

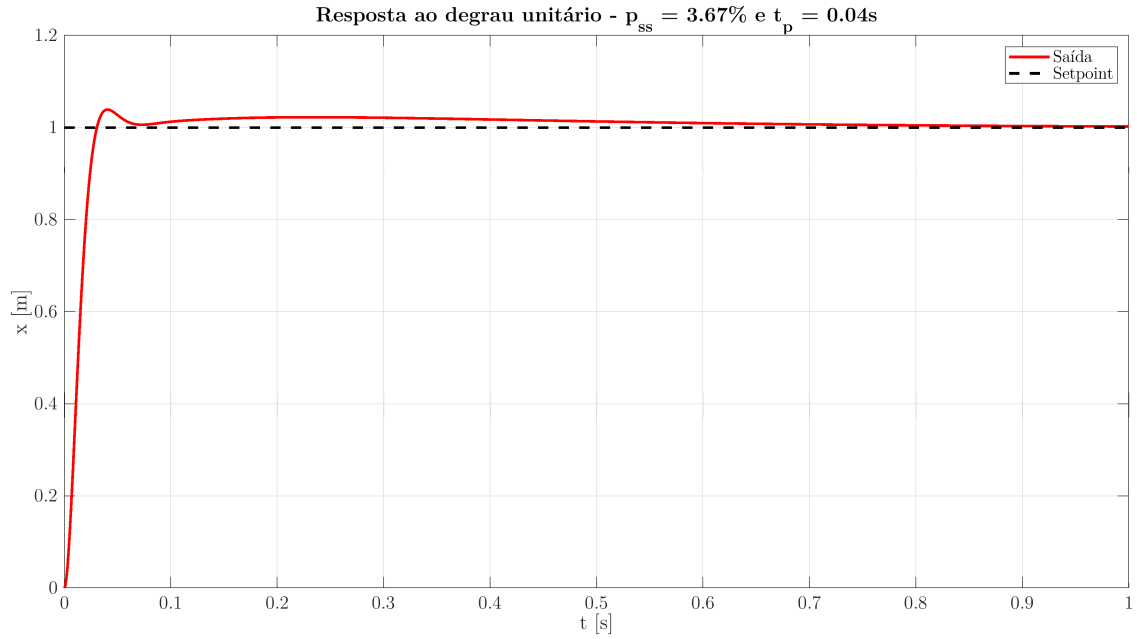


Figura 19: Resposta do sistema com compensador por avanço-atraso de fase em malha fechada para o degrau unitário.

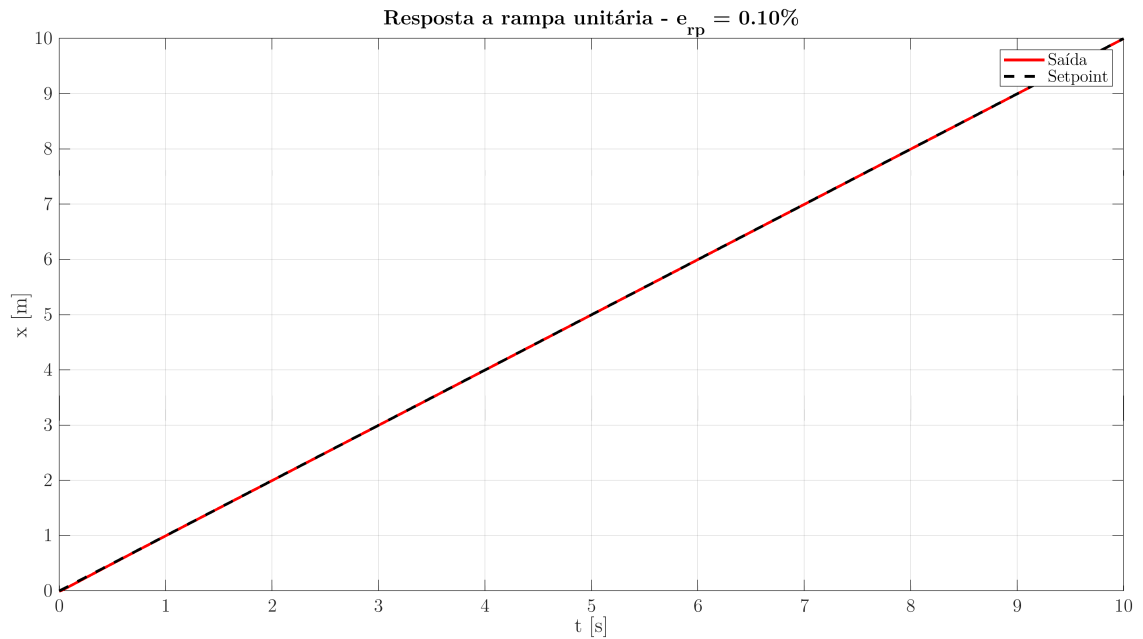


Figura 20: Resposta do sistema com compensador por avanço-atraso de fase em malha fechada para a rampa unitária.

Comparando estes resultados com aqueles verificados nos projetos anteriores, pode-se verificar uma performance satisfatória tanto em regime transiente quanto permanente, resultado este esperado para esta modalidade de compensador. Além disso, destaca-se que todas as especificações foram atendidas: percentual de sobressinal abaixo de 5% ($M_p = 3,67\%$), tempo de pico abaixo de 0,1s ($t_p = 0,04s$) e erro em regime permanente para entrada em degrau de 0,1%, implicando em um projeto bem sucedido.

6 Conclusão

Partindo dos conhecimentos adquiridos ao longo da disciplina de Sistemas de Controle II, buscou-se realizar modelagem de um pêndulo invertido para, então, realizar o projeto de três diferentes tipos de compensadores, cada um visando aprimorar diferentes aspectos do sistema.

Primeiramente, buscou-se realizar o projeto do compensador por avanço de fase. Como o próprio nome sugere, este compensador busca reconfigurar a resposta em frequência para compensar o atraso de fase excessivo na planta. Assim, apesar de conseguir melhorar parcialmente a resposta em regime permanente, tem como principal objetivo melhorar a resposta transiente do sistema. Tomando-se como base as especificações, pode-se concluir que o projeto deste compensador foi bem sucedido, visto que foi possível atender todos estes requisitos com êxito.

Em seguida, partiu-se para o projeto do compensador por atraso de fase. Antagônica ao anterior, neste caso busca-se atenuar altas frequências sendo, portanto, indicado para atenuar ruídos nesta região e melhorar a resposta do sistema em regime permanente. Para este caso, apesar da especificação de erro em regime permanente ter sido atendida, não foi possível atender a especificação de percentual de sobressinal.

Por fim, projetou-se o compensador por atraso e avanço de fase que consiste, basicamente, da combinação dos anteriores. Desta forma, ao utilizar-se este compensador pode-se atender tanto as especificações de regime transitório quanto permanente. Assim como no avanço, conseguiu-se atender a todas as especificações.

Referências

FAZZOLARI, H. A. *Auxílio para a modelagem do pêndulo invertido IP02*. 2023. ESTA008-17 – Sistemas de Controle II.

FRANKLIN, G. F.; POWELL, J. D.; NAIEMI, A. E. *Sistemas de Controle Para Engenharia*. 6a. ed. [S.l.]: Bookman, 2013.

NISE, N. S. *Engenharia de Sistemas de Controle*. 8a. ed. [S.l.]: LTC, 2002.

OGATA, K. *Engenharia de Controle Moderno*. 5a. ed. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2010.

QUANSER. *Laboratory guide: Linear Flexible Inverted Pendulum Experiment for MATLAB/Simulink Users*. [S.l.], 2012.

Apêndice

Os códigos, bem como as instruções de execução, encontram-se disponíveis em um repositório no GitHub: <https://github.com/azzolinovarella/inverted-pendulum-control-project>.