ENPC 2020-21 Remis le 17/3/2021 - A rendre le 31/3/2021

MÉCANIQUE

Introduction à la théorie linéarisée des ailes - Partie II

Les notations et le cadre d'hypothèses de linéarisation sont identiques à ceux de la partie I. Celle-ci a permis d'identifier trois contributions à la perturbation: effets d'épaisseur, de cambrure et d'incidence. En vertu de la linéarité, on s'intéresse ici à un profil dénué d'épaisseur, doué d'une loi de cambrure $f(x)$, présentant une incidence α au vent relatif.

I - Modélisation des effets d'incidence et de cambrure par une superposition de tourbillons

On se propose d'établir que les effets d'incidence et de cambrure du profil peuvent être décrits par une densité linéique de tourbillons $m(s)$ distribués le long de la corde ($s \in [0, c]$). Le but de cette partie est de préciser la relation entre les fonctions $m(s)$, α et $f(s)$.

1 - Rappeler l'expression de $g^{\pm}(x)$.

2 - Exprimer la condition d'imperméabilité sous la forme d'une relation entre $\delta v(x, 0^{\pm})$, α et $f(x)$. Quelle propriété de régularité de δv cette relation annonce-t-elle ? Comparer à l'effet d'épaisseur.

3 - Donner l'expression du potentiel complexe $\delta F(x + iy)$ d'une distribution de tourbillons destinée à représenter la perturbation sous la forme d'une intégrale calculée sur la corde. On notera s la variable muette d'intégration.

4 - Donner l'expression des composantes $\delta u(x, y)$ et $\delta v(x, y)$ de la perturbation de la vitesse complexe au point $x + iy$ sous la forme d'intégrales faisant intervenir la densité $m(s)$.

5 - *Composante* $\delta v(x, y)$

5a - Sous réserve de l'existence des limites $\lim_{y\to 0^+} \delta v(x, y)$ et $\lim_{y\to 0^-} \delta v(x, y)$, citer l'argument qui établit la continuité de $\delta v(x, y)$ par rapport à y en $y = 0$.

5b - Le passage à la limite $y \to 0$ fait intervenir une intégrale de la forme

$$\int_0^c \frac{m(s)}{x - s} ds$$

Cette intégrale est à prendre au sens de la valeur principale de Cauchy, c'est-à-dire:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \left(\int_0^{x-\varepsilon} \frac{m(s)}{x - s} ds + \int_{x+\varepsilon}^c \frac{m(s)}{x - s} ds \right)$$

Expliciter l'équation intégrale d'inconnue $m(s)$ à vérifier par la densité de tourbillons en fonction des données.

6 - *Composante* $\delta u(x, y)$

6a - Quelle est la parité de $\delta u(x, y)$ en y ?

6b - Déterminer les limites $\lim_{y\to 0^+} \delta u(x, y)$ et $\lim_{y\to 0^-} \delta u(x, y)$ en appliquant le théorème de Stokes à la circulation de la vitesse sur un contour rectangulaire élémentaire joignant les points $(x+dx, -\epsilon dx)$, $(x + dx, +\epsilon dx)$, $(x, +\epsilon dx)$ et $(x, -\epsilon dx)$.

6c - Expliciter la condition de Kutta sous la forme d'une condition sur $m(c)$.

7 - *Perturbation de la pression*

7a - On désigne par $p^{\pm}(x)$ les valeurs de la pression aux points d'abscisse x sur l'extrados et l'intrados. Déterminer la forme linéarisée de la discontinuité de la pression $\delta p(x) = p^+(x) - p^-(x)$.

7b - En déduire l'expression de la portance en fonction de la circulation totale. Quel résultat a-t-on retrouvé ?
7c - En déduire sous la forme d'une intégrale faisant intervenir $m(s)$ l'expression du moment calculé au bord d'attaque.

II - Illustration: effet d'incidence
On se limite désormais à l'effet d'incidence (angle α) en considérant un profil non cambré ($f(x) = 0$).
1 - Ecrire l'équation intégrale d'inconnue $m(s)$.
2 - Déterminer la solution $m(s)$ de l'équation précédente. On donne les intégrales en valeurs principales suivantes ($x^2 < 1$):

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} = 0 \quad ; \int_{-1}^{+1} \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}(x-t)} = -\pi$$

3 - Déterminer la portance et comparer au résultat de la théorie de Joukovski. On donne

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

4 - Déterminer le moment au bord d'attaque et le centre de poussée. On donne

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x)x}\, dx = \frac{\pi}{8}$$

Solution

I - Modélisation des effets d'incidence et de cambrure par une superposition de tourbillons
1 - $g^+(x) = g^-(x) = -\alpha x + f(x)$
2 - La condition d'imperméabilité s'écrit donc:

$$\delta v(x, 0^+) = \delta v(x, 0^-) = U(f'(x) - \alpha)$$

Elle implique la continuité de $\delta v(x, y)$ par rapport à y en $y = 0$.
3 - $\delta F(z) = \displaystyle\int_0^c -\frac{im(s)}{2\pi} \log(z-s)\, ds$
4 - La vitesse complexe est

$$\delta u - i\delta v = -\frac{i}{2\pi} \int_0^c \frac{m(s)}{z-s}\, ds = -\frac{i}{2\pi} \int_0^c \frac{m(s)(x-s-iy)}{(x-s)^2+y^2}\, ds$$

soit

$$\delta u(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{ym(s)}{(x-s)^2+y^2}\, ds \quad ; \quad \delta v(x,y) = +\frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{(x-s)m(s)}{(x-s)^2+y^2}\, ds$$

5a - On observe que $\delta v(x, y) = \delta v(x, -y)$, donc si elles existent, les deux limites sont égales.
5b - $m(s)$ est solution de

$$U\big(f'(x) - \alpha\big) = \frac{1}{2\pi} \int_0^c \frac{m(s)}{x-s}\, ds$$

6a - $\delta u(x,y)$ est visiblement impaire par rapport à y.
6b - En passant à la limite $\varepsilon \to 0$ dans la circulation, il reste: $\big(-u(x,0^+)+u(x,0^-)\big)dx$. Or, le rectangle considéré est un lacet d'indice 1 autour du tourbillon élémentaire de circulation $m(x)dx$. On a donc

$$\big(-u(x,0^+)+u(x,0^-)\big)dx = m(x)dx$$

soit, compte tenu de la parité:

$$\delta u(x,0^+) = -\frac{m(x)}{2} \quad ; \quad \delta u(x,0^-) = +\frac{m(x)}{2}$$

La composante horizontale de la perturbation de la vitesse est donc discontinue.
6c - La condition de Kutta impose que $u(c,0^+) = u(c,0^-)$. On doit donc avoir $m(c) = 0$.
7a - la relation de Bernoulli donne:

$$\frac{p^+(x)-p^-(x)}{\rho} = -\frac{1}{2}\left(\left((U+\delta u(x,0^+))^2+\delta v(x,0^+)^2\right)-\left((U+\delta u(x,0^-))^2+\delta v(x,0^-)^2\right)\right)$$

Sa linéarisation s'écrit:

$$\frac{p^+(x)-p^-(x)}{\rho} = -U\left(\delta u(x,0^+)-\delta u(x,0^-)\right)$$

ou encore, compte tenu de la question 6b:

$$p^+(x)-p^-(x) = \rho m(x) U$$

7b - La portance est

$$F_y = -\int_0^c \delta p(x)\,dx = -\rho U\int_0^c m(x)\,dx = -\rho\Gamma U$$

où

$$\Gamma = \int_0^c m(x)\,dx$$

désigne la circulation totale autour de l'aile. On vient de retrouver la formule de la portance.
7c - En tenant compte du bras de levier, le moment calculé par rapport au bord d'attaque en projection sur $\underline{e}_z$ est:

$$M_O = -\rho U\int_0^c x m(x)\,dx$$

II - Illustration: effet d'incidence

1 - D'après la question I-5b, on a

$$-U\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_0^c \frac{m(s)}{x-s}\,ds$$

2 - Effectuons le changement de variable $s = \frac{c}{2}(1+t)$. Il vient une équation intégrale en $\tilde{m}(t)$:

$$-\pi = \int_{-1}^{+1}\frac{\tilde{m}(t)}{\tilde{x}-t}\,dt \quad \text{avec} \quad \tilde{x} = \frac{2}{c}x-1 \quad ; \quad \tilde{m}(t) = \frac{1}{2U\alpha}m\big(\frac{c}{2}(1+t)\big)$$

Il convient de compléter cette équation avec la condition de Kutta $m(c)=0$, soit $\tilde{m}(1)=0$. En admettant l'unicité de la solution et en considérant le formulaire, on en déduit que:

$$\tilde{m}(t) = -\frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}$$

Il reste à revenir à la variable originale:

$$m(s) = -2U\alpha\sqrt{\frac{c-s}{s}}$$

3 - En appliquant le résultat de I-7b, il vient

$$\Gamma = -\pi U\alpha c \quad \Rightarrow \quad F_y = \pi\rho U^2 c\alpha$$

C'est bien le résultat de la théorie de Joukovski pour une plaque plane (de longueur c), à la linéarisation de $\sin\alpha$ près.
4 - En appliquant le résultat de I-7c, il vient

$$M_0 = \frac{1}{4}\pi\rho U^2 c^2\alpha$$

Le centre de poussée est donc situé au quart avant de la plaque.