Solução do Desafio da Semana

Séries Temporais I - Data: 5 de novembro de 2025.

Nome: Azzure Alves do Carmo

Matrícula: 2023100851

i

Primeiro momento

Pela definição:

$$X_2 = \phi X_1 + W_2.$$

Como $X_1 = W_1$, obtemos

$$X_2 = \phi W_1 + W_2.$$

Substituição para $t = 3$

$$\begin{aligned} X_3 &= \phi X_2 + W_3 \\ &= \phi(\phi W_1 + W_2) + W_3 \\ &= \phi^2 W_1 + \phi W_2 + W_3. \end{aligned}$$

Substituição para $t = 4$

$$\begin{aligned} X_4 &= \phi X_3 + W_4 \\ &= \phi(\phi^2 W_1 + \phi W_2 + W_3) + W_4 \\ &= \phi^3 W_1 + \phi^2 W_2 + \phi W_3 + W_4. \end{aligned}$$

Em geral, observa-se um padrão na sequência das iterações: a cada passo, o termo mais antigo (W_1) recebe um fator adicional de ϕ. Assim, para um tempo t qualquer,

$$X_t = \sum_{j=1}^{t} \phi^{t-j} W_j.$$

Portanto,

$$E[X_t] = \sum_{j=1}^{t} \phi^{t-j} E[W_j] = 0, \ \forall t.$$

Segundo momento

Como os W_j são independentes com variância σ_W^2,

$$Var(X_t) = E[X_t^2] = \sum_{j=1}^{t} (\phi^{t-j})^2 Var(W_j) = \sigma_W^2 \sum_{j=1}^{t} \phi^{2(t-j)}.$$

Reescrevendo o índice da soma, temos a série geométrica

$$Var(X_t) = \sigma_W^2 \sum_{k=0}^{t-1} \phi^{2k}.$$

Assim,

$$Var(X_t) = \sigma_W^2 \frac{1 - \phi^{2t}}{1 - \phi^2}.$$

A série converge, pois $|\phi| < 1$.

Autocovariância

A função de autocovariância de um processo $\{X_t\}$ é dada por

$$\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t), \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Para o processo

$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t, \quad t = 2, 3, \dots,$$

onde $\{W_t\}$ é ruído branco com média nula e variância σ_W^2, temos:

$$E[W_t] = 0, \quad E[W_t^2] = \sigma_W^2, \quad E[W_t W_s] = 0 \text{ se } t \neq s.$$

Pela equação do processo,

$$X_{t+1} = \phi X_t + W_{t+1}.$$

Logo:

$$\gamma_X(1) = \mathrm{Cov}(\phi X_t + W_{t+1}, X_t) = \phi \,\mathrm{Cov}(X_t, X_t) + \mathrm{Cov}(W_{t+1}, X_t).$$

Como W_{t+1} é independente de X_t, o segundo termo é nulo, e assim:

$$\gamma_X(1) = \phi \gamma_X(0).$$

De forma análoga:

$$X_{t+h} = \phi X_{t+h-1} + W_{t+h}.$$

Portanto,

$$\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(X_{t+h}, X_t) = \mathrm{Cov}(\phi X_{t+h-1} + W_{t+h}, X_t) = \phi \,\mathrm{Cov}(X_{t+h-1}, X_t) + \mathrm{Cov}(W_{t+h}, X_t).$$

Novamente, W_{t+h} é independente de X_t, logo:

$$\gamma_X(h) = \phi \gamma_X(h-1).$$

Aplicando essa relação recursiva repetidamente, obtemos:

$$\gamma_X(h) = \phi^h \gamma_X(0), \quad h \geq 0.$$

Já foi mostrado que:

$$\gamma_X(0) = \text{Var}(X_t) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2},$$

quando o processo é estacionário (i.e., $|\phi| < 1$).

Substituindo $\gamma_X(0)$ na expressão anterior:

$$\gamma_X(h) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\phi^{|h|}, \quad h \in \mathbb{Z}.$$

Assim, a autocovariância depende apenas da defasagem h e portanto, o processo é estacionário.

ii

A função de autocorrelação é definida por

$$\rho_X(t,h) = \frac{\gamma_X(h)}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\,\text{Var}(X_{t+h})}} = \frac{\text{Cov}(X_t, X_{t+h})}{\sqrt{\text{Var}(X_t)\,\text{Var}(X_{t+h})}},$$

onde assumimos $t \geq 1$ e $h \in \mathbb{Z}$.

Usando os resultados obtidos para a autocovariância e variância,

$$\gamma_X(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \sigma_W^2\,\phi^h\,\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}, \qquad h \geq 0,$$

e

$$\text{Var}(X_t) = \sigma_W^2\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}, \qquad \text{Var}(X_{t+h}) = \sigma_W^2\frac{1-\phi^{2(t+h)}}{1-\phi^2}.$$

Substituindo na definição de $\rho_X(t,h)$ obtemos, para $h \geq 0$,

$$\begin{aligned}\rho_X(t,h) &= \frac{\sigma_W^2\,\phi^h\,\dfrac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}}{\sqrt{\sigma_W^2\dfrac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}\;\cdot\;\sigma_W^2\dfrac{1-\phi^{2(t+h)}}{1-\phi^2}}} \\ &= \phi^h\sqrt{\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^{2(t+h)}}}.\end{aligned}$$

Note que a autocorrelação $\rho_X(t,h)$ depende de t através do fator $\sqrt{(1-\phi^{2t})/(1-\phi^{2(t+h)})}$.

iii

Para $h \geq 0$, lembramos que

$$\gamma_X(h) = \phi^h\gamma_X(0), \qquad \gamma_X(0) = \text{Var}(X_t) = \sigma_W^2\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2}.$$

Assim, tomando o limite quando $t \to \infty$,

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_X(0) = \lim_{t\to\infty} \sigma_W^2 \frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^2} = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2},$$

pois $|\phi| < 1 \Rightarrow \phi^{2t} \to 0$.

Portanto,

$$\lim_{t\to\infty} \gamma_X(h) = \lim_{t\to\infty} \phi^h \gamma_X(0) = \phi^h \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}.$$

Para a função de autocorrelação, usando

$$\rho_X(t,h) = \phi^h \sqrt{\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^{2(t+h)}}},$$

temos

$$\lim_{t\to\infty} \rho_X(t,h) = \lim_{t\to\infty} \phi^h \sqrt{\frac{1-\phi^{2t}}{1-\phi^{2(t+h)}}} = \phi^h.$$

Vemos que, à medida em que $t \to \infty$, o processo converge para uma versão estacionária do AR(1), com variância constante $\frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}$ e ACF dada por ϕ^h, como esperado para um processo AR(1) estacionário.

iv

Impondo o fator de correção no valor inicial:

$$X_1 = \frac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}},$$

temos:

$$X_t = \phi^{t-1} X_1 + \sum_{j=2}^{t} \phi^{t-j} W_j = \phi^{t-1} \frac{W_1}{\sqrt{1-\phi^2}} + \sum_{j=2}^{t} \phi^{t-j} W_j.$$

Verificaremos se o processo é estacionário.

Primeiro momento

$$E[X_t] = 0, \qquad \forall t,$$

pois $E[W_j] = 0$, assim como o processo sem o fator de correção.

Segundo momento

A variância do processo torna-se

$$\mathrm{Var}(X_t) = \phi^{2(t-1)} \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_W^2 \sum_{j=2}^{t} \phi^{2(t-j)} = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} < \infty.$$

Ou seja, a variância é finita (e constante no tempo) sempre que $\sigma_W^2 < \infty$ e $|\phi| < 1$.

Autocovariância

Para $h \geq 0$,

$$\gamma_X(h) = \phi^h \gamma_X(0) = \phi^h \frac{\sigma_W^2}{1 - \phi^2}.$$

Autocorrelação

$$\rho_X(h) = \frac{\gamma_X(h)}{\gamma_X(0)} = \phi^h.$$

Portanto, com a condição inicial corrigida, o processo é estacionário e possui função de autocorrelação típica do AR(1), ou seja, $\rho(h) = \phi^h$.