Solução do Desafio da Semana
Séries Temporais I - Data: 6 de novembro de 2025.

Nome: Azzure Alves do Carmo

Matrícula: 2023100851

Temos o processo $\{Y_t\}$ com a seguinte representação

$$Y_t = X_t + Z_t, \tag{1}$$
$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t, \qquad |\phi| < 1, \tag{2}$$

onde $\{Z_t\}$ é ruído branco com média zero e variância σ_Z^2 e $\{W_t\}$ é ruído branco com média zero e variância σ_W^2. Suponha que X_t e Z_s sejam não correlacionados para todo t e s.

X_t é estacionário?

Para verificarmos se Y_t é estacionário, primeiro precisamos saber se X_t é.

Da equação (2), temos:

$$X_t = \phi X_{t-1} + W_t = \phi^2 X_{t-2} + \phi W_{t-1} + W_t = \cdots$$

por indução obtemos a representação de soma infinita

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}.$$

Como $|\phi| < 1$, essa série converge e X_t é uma combinação linear convergente de ruído branco, logo X_t é estacionário de segunda ordem. Vamso verificar o primeiro e o segundo momento e a função de autocovariância de X_t.

Primeiro momento de X_t

Tomando esperança em (2) e usando $E[W_t] = 0$:

$$E[X_t] = \phi E[X_{t-1}] + E[W_t] \quad \Rightarrow \quad \mathrm{E[X_t]} = \phi\,\mathrm{E[X_t]}\,.$$

Como $|\phi| \neq 1$, concluímos $\mathrm{E[X_t]} = 0$.

Segundo momento de X_t

Da identidade $X_t = \phi X_{t-1} + W_t$ e usando $\mathrm{Cov}(X_{t-1}, W_t) = 0$,

$$\mathrm{Var}(X_t) = \phi^2\,\mathrm{Var}(X_{t-1}) + \mathrm{Var}(W_t).$$

Dessa maneira,

$$\mathrm{Var}(X_t) = \phi^2\,\mathrm{Var}(X_t) + \sigma_W^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Var}(X_t)(1 - \phi^2) = \sigma_W^2$$

e assim,

$$\mathrm{Var}(X_t) = \mathrm{E}[{X_t}^2] = \mathrm{Var}(X_t) = \frac{\sigma_W^2}{1 - \phi^2} < \infty.$$

Autocovariância de X_t

Defina $\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h})$. Utilizando a representação em soma

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}, \qquad X_{t-h} = \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k W_{t-h-k},$$

temos

$$\gamma_X(h) = E\left[\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \phi^j W_{t-j}\Big)\Big(\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k W_{t-h-k}\Big)\right] = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \phi^{j+k} E[W_{t-j}W_{t-h-k}].$$

Como $\{W_t\}$ é ruído branco, $E[W_{t-j}W_{t-h-k}] = \sigma_W^2$ apenas quando $t-j = t-h-k$, isto é, $k = j-h$. Para $h \geq 0$ isso implica $j \geq h$ e, colocando $m = j-h \geq 0$,

$$\gamma_X(h) = \sigma_W^2 \sum_{j=h}^{\infty} \phi^{j+j-h} = \sigma_W^2 \phi^h \sum_{m=0}^{\infty} \phi^{2m} = \sigma_W^2 \phi^h \frac{1}{1-\phi^2}.$$

Usando a simetria $\gamma_X(-h) = \gamma_X(h)$, obtemos, para todo inteiro h,

$$\gamma_X(h) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\, \phi^{|h|}.$$

Estacionaridade de Y_t

Sabendo que X_t é estacionário com média zero e que $\{Z_t\}$ é ruído branco também com média zero, pela Equação (1) temos que

$$E[Y_t] = E[X_t] + E[Z_t] = 0.$$

Como X_t e Z_t são não correlacionados, podemos fazer:

$$\mathrm{Var}(Y_t) = \mathrm{E}[{Y_t}^2] = \mathrm{Var}(X_t) + \mathrm{Var}(Z_t) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2 < \infty.$$

Além disso, a autocovariância de Y_t é

$$\begin{aligned}\gamma_Y(h) &= \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \mathrm{Cov}(X_t + Z_t,\ X_{t-h} + Z_{t-h}) \\ &= \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h}) + \mathrm{Cov}(Z_t, Z_{t-h}),\end{aligned}$$

pelos termos cruzados serem nulos por não correlação entre X e Z.

Portanto, quando $h = 0$,

$$\gamma_Y(0) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2.$$

Caso contrário,

$$\gamma_Y(h) = \frac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\, \phi^{|h|}.$$

Autocorrelação de Y_t

Quando $h = 0$, $\rho_Y(h) = 1$. Caso contrário,

$$\rho_Y(h) = \frac{\gamma_Y(h)}{\gamma_Y(0)} = \frac{\dfrac{\sigma_W^2}{1-\phi^2}\,\phi^{|h|}}{\dfrac{\sigma_W^2}{1-\phi^2} + \sigma_Z^2}.$$