

Verfahren der digitalen Nachrichtentechnik

Rüdiger Klostermeyer

Rüdiger Klostermeyer

Verfahren der digitalen Nachrichtentechnik

Verfahren der digitalen Nachrichtentechnik

1st edition

© 2013 Rüdiger Klostermeyer & bookboon.com

ISBN 978-87-403-0246-2

Inhalt

Vorwort	6
1 Einführung	7
1.1 Ursprung und Entwicklung	7
1.2 Nachrichtenmodell	15
2 Übertragung im Basisband	20
2.1 Formate	20
2.2 Beschreibung des Nachrichtensignals	23
2.3 Grenzen der Übertragung	52
2.4 Rauschen und Fehler	53
2.5 Optimalfilter	64
2.6 Pulsformung	76
2.7 Mehrstufigkeit	90
2.8 Augendiagramm	93
2.9 Zeitmultiplex	95
2.10 Aufgaben	100



Wir suchen die Besten

Das Wachstum der voestalpine-Gruppe und der weltweite Erfolg kommen nicht allein von guten Produkten. Dahinter steckt eine attraktive Arbeitswelt, die Menschen fordert und fördert. Die voestalpine sieht die Kompetenz, das Engagement und die Identifikation ihrer Mitarbeiter mit dem Unternehmen als zentralen Erfolgsfaktor.

Gestalten Sie Ihre Zukunft mit uns

Lernen Sie unsere interessanten Tätigkeitsfelder und Aufstiegsmöglichkeiten kennen – besuchen Sie unsere Homepage unter www.voestalpine.com

Hier können Sie sich auch gleich online bewerben.

voestalpine Stahl GmbH
www.voestalpine.com

voestalpine
EINEN SCHRITT VORAUS.

3	Übertragung im Bandpaßbereich	104
3.1	Digitale Modulationsverfahren	104
3.2	Binäre Modulationsverfahren	107
3.3	Mehrstufenübertragung	141
3.4	Aufgaben	157
	A Grundsätzliches zur Fourier-Transformation	160
	B Herleitungen und andere Nebensächlichkeiten	167
	C Fehlerfunktion	182
	Literaturverzeichnis	184
	Index	185

**ERFOLG IST EINE FRAGE
DER TECHNIK!**

Du hast die Wahl: 18 technische Master-Studiengänge.
Österreichs einzige rein technische Fachhochschule.



FH University of Applied Sciences
TECHNIKUM
WIEN

Vorwort

Der vorliegende Text befaßt sich mit der digitalen Nachrichtenübertragung. Hierin ist der Weg von dem Bitstrom, der seinen Weg über den Kanal antritt, bis hin zu dem, was er am Empfangsort antrifft, aufgezeichnet. Nichts ist natürlicher als dies, wenn man einige Regeln und Gesetzmäßigkeiten einhält, die uns die Natur vorgibt. Und diese sollten näher beleuchtet werden, wobei es hierbei auf Einfachheit ankommt. Warum soll man in Formelwerke hinabtauchen, wenn zum Erläutern auf einfache Gegebenheiten zurückgegriffen werden kann, die in der freien Natur zu beobachten sind? Langwierige Herleitungen erübrigen sich dadurch sehr schnell, wenn man die Effekte, die es zu untersuchen gilt, in der Praxis nachmessen kann. Denn wenn es in der Natur funktioniert, kann man auf Beweise verzichten. Sind die Herleitungen dennoch unumgänglich, findet der interessierte Leser die Wege im Anhang beschrieben, die Ergebnisse sind im Text zusammengeführt und durch Beispiele vertieft.

Vorausgesetzt für die Lektüre dieses Textes ist die Mathematik des Grundstudiums, hierbei ist besonders die Fourier–Transformation hervorzuheben. Bei der Behandlung der Punkte werden kurz die Einzelheiten hervorgehoben, die ihre Anwendung finden. Im Anhang sind diese auch etwas genauer dargelegt. Viele Beispiele dienen dazu, dem Leser Zusammenhänge aus der Praxis zu verdeutlichen.

Im Text wird deutlich, warum bei der Datenübertragung über einen verrauschten Kanal nur dann keine Fehler gemacht werden, wenn nichts übertragen wird. Mit dem Text wird dem Leser Information übertragen, die fehlerhaft sein kann, und hiermit sind nicht nur Druck- oder Schreibfehler gemeint. Wenn Fehler detektiert werden, würde ich mich über eine Rückmeldung unter *Ruediger.Klostermeyer@fh-stralsund.de* sehr freuen.

In den zurückliegenden Monaten mußte mich meine Frau recht häufig in einem (erweiterten) Zustand der geistigen Abwesenheit "aushalten", viel Papier füllte ich gern und überall mit vielen Bleistiftskizzen und Berechnungen. Rita gilt mein ganz besonderer Dank.

Stralsund, im Juni 2012

Rüdiger Klostermeyer

Kapitel 1

Einführung

Die Anfänge der modernen digitalen Nachrichtenübertragung finden ihren Ursprung in der althergebrachten Telegraphie, wie es die folgende Darstellung kurz beschreibt. Ausgehend hiervon betrachten ist der Begriff der digitalen Nachricht erläutert und wie sich die Beschreibung und Technik der Nachricht selbst und deren Übertragung entwickelt hat. Hierbei sollen in diesem einführenden Kapitel lediglich Begriffe aufgezeigt werden, auf die im weiteren Verlauf und späteren Kapiteln ausführlicher eingegangen wird. Den Abschluß dieses Kapitels bildet die Betrachtung eines Nachrichtenmodells im allgemeinen.

1.1 Ursprung und Entwicklung

In nur wenigen Jahrzehnten entwickelte sich die Nachrichtentechnik, interessanterweise ausgehend von der digitalen Art über die analoge Form und dann wieder zurück zur digitalen Nachrichtenübertragung. Von der Morsetechnik über analoge und althergebrachte Funktechnik und Rundfunk bis hin zur mobilen Telephonie, Satellitenfunk und den aktuellen Methoden der Kommunikationstechnik stellt sich der Entwicklungsweg dar. Die Natur, in der wir leben, kennt nur analoge Signale, also geht kein Weg um diese Signalverarbeitung herum. Es liegt nur an uns, die Signale zusammenzufügen, die digitale Nachrichten darstellen. Signale dieser Art sind somit auch analoge Signale, zumindest wenn sie später über einen analogen ("natürlichen") Kanal übertragen werden. Und wie, d.h. was digitale Nachrichten sind und wie die Signale erscheinen, zeigt die folgende Betrachtung.

Übertragungen von Nachrichten per Brief waren schon früh gängig und auch relativ sicher, nur die Übertragungsgeschwindigkeit der Nachricht ließ einiges zu wünschen übrig. Wenn man bedenkt, daß sich Briefe aus einer begrenzten Anzahl von Schriftzeichen zusammensetzen, ist es erstaunlich, daß sich jede Nachricht mit diesen Schriftzeichen

ausdrücken läßt.¹ Die Mediziner in unseren Reihen nennen einen Finger *digitus*, womit sich eine endliche Anzahl von Ereignissen abzählen läßt. Nehmen wir ein Dezimalsystem, das als Basis 10 verwendet, können mit unseren zehn Fingern zehn Zahlen dargestellt werden, von null bis neun. Damit aber nicht genug, es geht auch weiter: Nehmen wir die Basis 2 ("Finger gestreckt oder nicht"), lassen sich mit einem Finger zwei Zahlen, mit zwei Fingern vier Zahlen, mit drei Fingern acht Zahlen und mit zehn Fingern 2^{10} , also eintausendvierundzwanzig Zahlen darstellen. Die Nachricht setzt sich aus einem begrenzten Alphabet zusammen, man spricht von einer digitalen Nachricht. Wir zählen etwa fünfzig Tasten auf der Tastatur unserer Schreibmaschine oder unseres elektrischen Notizbuches, mit neunundzwanzig Buchstaben und sonst anderen Zeichen, aus denen sich die Nachrichten zusammensetzen. Ohne Rücksicht auf die Grammatik und Unterscheidung zwischen Groß- und Kleinbuchstaben, lassen sich mit einer Stelle für einen Buchstaben 29, mit zwei Stellen 2^9 und mit einem Wort, das aus fünf Buchstaben besteht, $2^5 \approx 20 \times 10^6$ verschiedene Kombinationen angeben. Davon ergibt aber nur eine geringe Teilmenge hiervon einen Sinn. Der Punkt aber, auf den ich hinaus will, besagt, daß sich eine beliebige Nachricht aus einem begrenzten Zeichenvorrat beschreiben läßt. Auch ein Brief ist nachrichtentechnisch gesprochen eine digitale Nachricht, er setzt sich aus einer Folge von Zeichen zusammen, deren Anzahl begrenzt ist.

Eine schnelle Nachrichtenübertragung stand sicher auch früher im Interesse eines jeden Anwenders. Mit der Erkenntnis, daß sich elektrische Stromimpulse über elektrische Leitungen auch über weite Entfernung mit hohen Ausbreitungsgeschwindigkeiten austauschen lassen, entstand der Wunsch, dies zur Übertragung von Nachrichten zu verwenden. So entwickelte sich im neunzehnten Jahrhundert die Telegraphie oder "Fernschrift". Die erste drahtgebundene telegraphische Nachrichtenübertragung fand im Jahre 1833 im Rahmen von Versuchen statt, dem Jahr der Entdeckung der elektromagnetischen Induktion durch Michael Faraday, was sich vereinfacht durch "Strom erzeugt Magnetfeld und umgekehrt" ausdrücken läßt. Der Weg zu einem technischen Telegraphen war damit nicht mehr weit.

In den dreißiger Jahren des neunzehnten Jahrhunderts entwickelte Samuel Morse ein Verfahren, Zeichen durch einen elektromagnetischen Schreibtelegraphen zu übertragen. Dieses Verfahren war zukunftsweisend und wurde durch die Mitarbeit von Alfred Lewis Vail und letztendlich Friedrich Clemens Gerke optimiert, der das bis heute verwendete gültige internationale Telegraphenalphabet in der Morsetelegraphie erarbeitete. Kurze

¹Die besonders persönliche Note eines handgeschriebenen Briefes kann gar nicht genug hervorgehoben werden, wir begrenzen uns aber nur auf die Aspekte der übertragenen Nachricht.

Punkt–Strich–Folgen stellen häufig vorkommende Buchstaben dar, wie den Buchstaben e mit „.” oder a mit „· –“, und längere Folgen folglich selten verwendete Buchstaben, wie den Buchstaben y mit „– · – –“. Abbildung 1.1 zeigt eine praktische Umsetzung, wie sie besonders in Europa üblich war. Ein „.” ist durch einen negativen Stromstoß, ein „–“ durch einen positiven dargestellt, was durch Umpolen einer Batterie erfolgte. Die Lücke zwischen zwei Buchstaben eines Wortes lässt eine Trennung vernehmen, erzielt durch ein Abschalten der Batterie, ein Wort endet mit einer längeren Lücke. Um 1900 entstanden die ersten Funkverbindungen, womit auch die Telegraphie per Funk Einzug hielt. Karl Ferdinand Braun und Guglielmo Marconi erarbeiteten als Konkurrenten eben diese Technik, die auf den von Heinrich Hertz 1886 experimentell nachgewiesenen elektromagnetischen Wellen basierten.

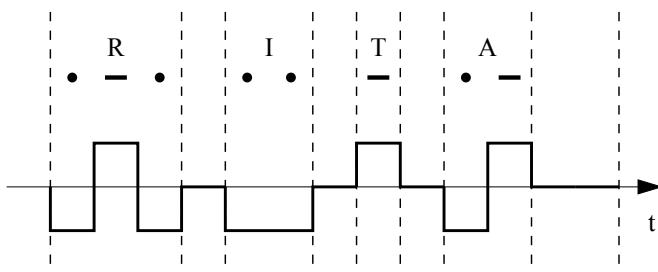
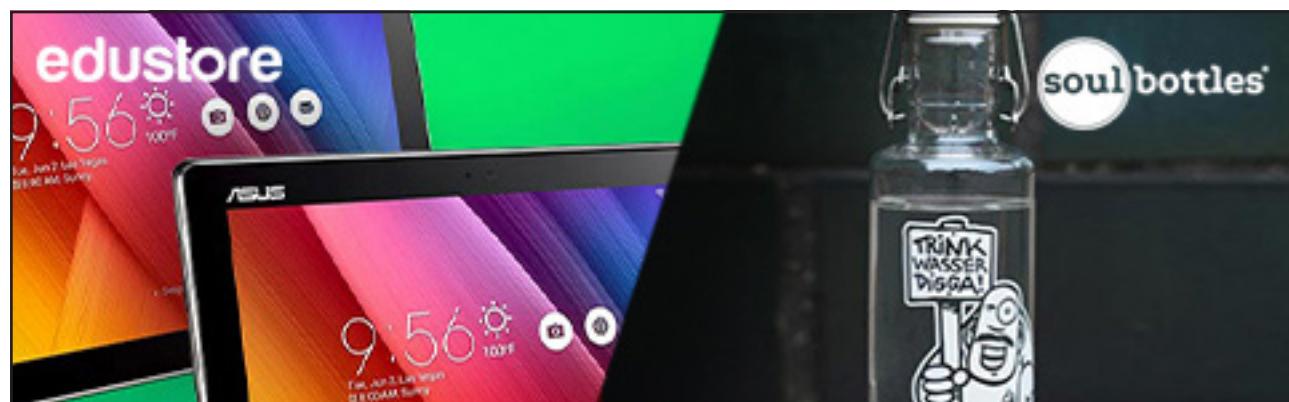


Abbildung 1.1: Morsecode mit Doppelstromtastung

Auch in der Funktechnik stellt der Morsecode ein einfaches Verfahren dar, bei dem ein gesendetes Eintonsignal lang und kurz getastet wird. Es benötigt weniger Gerätetechnik zum Senden und Empfangen als andere Formen der Funkkommunikation und kann auch bei einem sehr ungünstigen Signal–Rausch–Verhältnis noch arbeiten und benötigt dabei nur eine geringe Bandbreite und Sendeleistung. Im Grunde genommen ist dieses Verfahren dem fehlertoleranten Menschen angepaßt, da dieser auch in sehr gestörter Umgebung die Nachricht detektieren kann, in der ein maschinelles Verfahren schon aufgegeben hat.

Wir sind mittlerweile im zwanzigsten Jahrhundert angelangt, das neben der weiteren Entwicklung von drahtgebundener und drahtloser Nachrichtenübertragung ein neues Arbeitsfeld eröffnete, nämlich das der Beschreibung der Nachricht selbst und der damit einhergehenden Information. In den zwanziger Jahren beschrieb Harry Nyquist einen Zusammenhang zwischen der Übertragungsrate von Signalen und der belegten Bandbreite. Eine seiner wichtigen Ausagen ist wie folgt. Nehmen wir einfach den Fall an, daß ein Signal positiv oder negativ übertragen wird. Es nimmt also zwei Zustände an, man spricht von

einer binären Übertragung. Das Signal weist eine Bandbreite auf, die Frage ist nun, wie schnell, d.h. mit welcher Rate die Signale übertragen werden können, ohne daß eine gegenseitige Beeinflussung auftritt. Nyquist zeigte, daß über einen Kanal der Bandbreite B maximal $r_S = 1/T = B$ Symbole pro Sekunde übertragen werden kann, also "Bandbreite gleich Symbolrate". Wir kennen einen ähnlichen Zusammenhang auch mit einem Sinussignal. Bei geringen Änderungen ist die Periode, T_p , groß und die Frequenz, $F = 1/T_p$, als Kehrwert hiervon gering und umgekehrt. Bei dem Mobilfunksystem UMTS beträgt die Symbolrate (engl.: chip rate) 3.84×10^6 Symbole pro Sekunde, die Kanalbandbreite inklusive Sicherheitsabstand ist 5 MHz, also etwas größer als die minimale Bandbreite 3.84 MHz. Daneben beschrieb Nyquist auch das bekannte Abtasttheorem, das aussagt, ein analoges Signal der oberen Grenzfrequenz f_g müsse mit mindestens dem doppelten Wert dieser Frequenz, also mit $2f_g$ abgetastet werden, um das Originalsignal unbeschadet wieder zurückzugewinnen. Auch hierzu ein Beispiel: Ein drahtgebundener Telephonkanal weise die obere Grenzfrequenz 3.4 kHz auf, sodaß das Analogsignal mit mindestens 6.8 kHz abgetastet werden muß, um mit den Methoden der digitalen Nachrichtentechnik übertragen zu werden. In der Praxis wählt man für die Abtastrate 8 kHz, die Abtastbedingung ist somit eingehalten. Auf diesen beiden Aussagen basiert die von Claude Elwood Shannon tiefer und eingehender betrachtete Informationstheorie, auf die weiter unten eingegangen wird.



The advertisement features a top banner showing a smartphone displaying the time as 9:56 and a water bottle with a cartoon character holding a sign that says "TRINK WASSER, DIES RA!". Below this, a large blue call-to-action box contains the text:

Was für dich dabei?
Kostenloses StudentenKonto eröffnen
und **40€ Gutschein** abstauben!

A red button at the bottom left says **Jetzt Konto eröffnen**. To the right, there is a logo for **Bank Austria**, which is a member of **UniCredit**.

Bis zur Beendigung des Studiums, längstens bis zum 30. Geburtstag. Aktion gültig bis 5.11.2017.
Informationen zum Einkaufsgutschein auf [studenten.bankaustralia.at](#).

Kurz darauf beschrieb Ralph Vinton Lyon Hartley den Informationsgehalt eines Symbols, der mit der Vielfachheit eben dieses Symbols zusammenhängt. Ein Beispiel: Wie oben bemerkt, können mit fünf Fingern einer Hand fünf Zustände beschrieben werden, wie man es bei dem Abzählen gelernt hat. Und damit sind wir in der Lage, fünf unterschiedliche Kombinationen zu beschreiben. Wenn aber eine andere Zuordnung gewählt wird, also ein Finger gestreckt ist oder nicht, lassen sich insgesamt $2^5 = 32$ mögliche Zustände einer Hand beschreiben, die Vielfachheit ist damit gestiegen. Die Information, die ein Symbol darstellt, ist laut Hartley direkt proportional zu der Vielfachheit des Signals. Je vielfacher ein Signal ist, d.h. je mehr unterschiedliche Kombinationen möglich sind, umso größer ist der Informationsgehalt des Signals. Nehmen wir rückblickend fünf technische Bits ("Finger"). Ein solches Bit nimmt die Zustände 0 oder 1 an, und fünf Bits eben $2^5 = 32$ Zustände. Wenn die Anzahl der Bits die Information darstellt, ist der Informationsgehalt nichts anderes als $\log_2 2^5 = \text{ld } 2^5 = 5$, also dem Zweierlogarithmus der Wertigkeit. Hartley beschrieb den Informationsgehalt eines Symbols, das M Zustände annehmen kann, als $\log M$, wobei die Basis des Logarithmus eher nebensächlich ist, in der Praxis ist $\log_2 x = \text{ld } x$ gebräuchlich. Wir erkennen, daß der Informationsgehalt von der Codierung, d.h. Zuordnung abhängt ("je vielfältiger ein Signal, umso informationsreicher").

Signale gelangen über einen Kanal vom Sender zum Empfänger, wobei das Signal, das sich auf der Reise befindet, neben dem Übertragungsverhalten des Kanals selbst auch durch Überlagerung mit Kanalrauschen beeinflußt wird. Nehmen wir an, ein Symbol trägt die Information +1 oder -1. Dieses Symbol gelangt über den rauschbehafteten Kanal zum Empfänger, wo wir den Wert +0.2 detektieren. Wurde nun +1 oder -1 gesendet? Norbert Wiener und Andrei Nikolajewitsch Kolmogorov haben sich unabhängig voneinander unter anderem mit diesem Problem der Detektion von Signalen im Rauschen beschäftigt und den Optimalfilterempfang beschrieben. Dieses Filter unterdrückt dabei zu einem gehörigen Maße das Rauschen und hebt das Nutzsignal hervor, sodaß das Signal–Rausch–Verhältnis maximiert wird. Bei stärkstem Nutzsignalanteil und schwächstem Rauschanteil läßt sich am besten und sichersten das gesendete Symbol detektieren. Wie kann diese Unterscheidung zwische Nutz– und Rauschanteil erfolgen? Eine einfaches Beispiel zeigt, wie sich dies umsetzen läßt: Der Sender habe die Information +1 gesendet, das Symbol liege in digitaler Form durch sechs Abtastwerte vor, wie $\{+1, +1, +1, +1, +1, +1\}$, es gelangt über den Kanal zum Empfänger. Diesem Symbol ist Rauschen überlagert, mit den Werten $\{+0.7, -0.1, +0.2, -0.5, -0.8, +0.1\}$, sodaß das verrauschte Signal durch $\{1.7, 0.9, 1.2, 0.5, 0.2, 1.1\}$ vorliegt. Addieren wir die sechs Elemente schrittweise, wie in

Abbildung 1.2 dargestellt, erhalten wir für den Nutzanteil 6 und den Rauschanteil -0.4 und somit insgesamt oder akkumuliert 5.6. Für die gesendete Information -1 würden

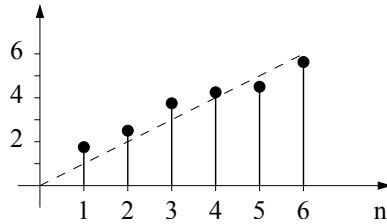


Abbildung 1.2: Akkumulierte Empfangswerte

wir -6.4 erhalten. Um an die Information zu gelangen, brauchen wir nur das Vorzeichen auswerten. Der Nutzanteil ist verstärkt, der Rauschanteil gemindert worden, da sich letzterer zu einem guten Teil herausgemittelt hat. Trotz größerer Rauschwerte ist deren Summe lediglich $+0.1$. Um zum Ziel der optimalen Detektion zu gelangen, muß das gesendete Symbol bzw. Signal bekannt sein und auch die Verteilung der von ihm getragenen Information, mit der damit einhergehenden Vielfachheit. Im Beispiel liegen zwei Zustände vor, das Symbol mit sechs positiven Einsen trägt $+1$, das mit sechs negativen Einsen -1 .

Fast gleichzeitig erarbeitete Claude Elwood Shannon einen wichtigen Beitrag zur Nachrichten- und Informationsübertragung unter Berücksichtigung von Rauschen. Sein Name ist direkt verbunden mit der Codierung von Nachrichtenelementen, gewählt aus einer bekannten Schar, sodaß diese im Empfänger genau und ohne Verlust von Information in einer verrauschten Umgebung detektiert werden können. Die Arbeiten von Morse ("Codierung nach Häufigkeit"), Hartley ("Informationsgehalt & Vielfachheit"), Nyquist ("Bandbreite & Übertragungsrate"), Wiener und Kolmogorov ("Detektion & Rauschen") fließen zusammen zum Thema der effizienten Codierung und der daraus folgenden Konsequenzen, die den Inhalt der Informationstheorie bilden.

Ähnlich wie die einfach anzusehende Formel $E = mc^2$ von Albert Einstein vielen von uns geläufig aber trotzdem unverständlich ist, hat auch Shannon eine Formel mit ziemlicher Ausdruckstärke entwickelt, nämlich $C = B \text{ld}(1 + S/R)$. Mit B als der Bandbreite eines Kanals und S/R als dem Signal–Rausch–Verhältnis gibt dieser Ausdruck die maximale Informationsrate an, d.h. binäre Symbole (engl.: binary digit, bit) übertragen pro Sekunde, ohne daß Information verloren geht. C heißt auch Kanalkapazität. Die Auswertung dieser Formel ist recht einfach. Nehmen wir einen Telephonkanal der Bandbreite 3.4 kHz und ein typisches S/R von 30 dB $\cong 10^{30/10} = 1000$. Damit ist $C = 3400 \text{ld} 1001 \approx 33900 \text{ bps}$ (Bit

pro Sekunde). Ohne Verlust von Information ist somit nur eine Übertragungsrate von 33.9 kbps möglich, nicht mehr. Was passiert mit der Übertragungsrate, wenn das Rauschen gegen null geht? Die Antwort ist einfach, mit abnehmendem Rauschen nimmt das S/R zu, die Übertragungsrate wächst über alle Grenzen. Daß dies nur rein theoretischer Natur sein kann, zeigt ein kleines Beispiel: Mit einem Bit lassen sich zwei Zustände, mit drei Bit $2^3 = 8$ und mit dreißig Bits $2^{30} \approx 10^9$ Zustände beschreiben. Nehmen wir eine räumliche Aufteilung, eine Strecke von 1 m Länge soll in 10^9 Stufen der Schrittweite 10^{-9} m aufgeteilt werden. Der Durchmesser der Hülle eines Atoms ist aber etwa 10^{-10} m, sodaß die Schrittweite nur zehnmal so groß ist wie dieser Durchmesser, wir sind für nur dreißig Bits bereits im Bereich atomarer Strukturen angelangt und könnten nur dann eine treffsichere Entscheidung fällen, wenn nicht die geringsten Bewegungen vorlägen. Dies ist aber nicht der Fall, es ist (fernab vom absoluten Gefrierpunkt) stets mit Molekularbewegungen zu rechnen. Elektrisch gesehen ist Rauschen ("Molekularbewegung") aber allgegenwärtig, die Kanalkapazität stellt einen Grenzwert dar, der von praktischen Systemen unerreichbar ist. Leider hat Shannon der Welt nicht den Code verraten, der diesen Grenzwert erreichen kann. Und somit sind wir auf der Suche danach, um dieser Grenze zumindest sehr nahe zu kommen.

Zur Übertragung von Nachrichten sollten wir zunächst dem Kanal unsere Aufmerksamkeit widmen. Es besteht ein Unterschied zwischen einem drahtgebundenen Kanal, wie etwa ein Koaxialkabel, und einem drahtlosen Kanal, wie eine Funkstrecke. Auch die Anwendungen legen sicher fest, ob ein Signal hoher Leistung ausgesendet werden kann oder eher einer hohen Bandbreite. Nehmen wir wieder ein plausibles Beispiel: Es gilt in der

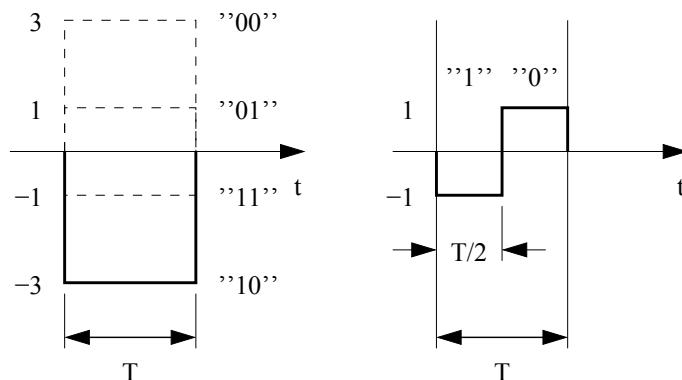


Abbildung 1.3: Codierung der Information

Zeit T zwei Symbole oder Bits zu übertragen. Mit zwei Bits lassen sich vier Zustände beschreiben, sodaß ein Signal der Dauer T vier Auslenkstufen annehmen kann, wie etwa $\{-3, -1, 1, 3\}$. Wir stellen fest, daß der Abstand zwischen zwei Stufen 2 ist. Die Übertragungsrate ist damit 2 Bit pro T . Es geht aber auch anders, indem wir ein Signal der Dauer $T/2$ nehmen, das ein Bit trägt. Die Stufigkeit eines dieser Pulse ist dann zwei mit $\{-1, 1\}$, ebenfalls mit einem Abstand der Stufen von 2.

Wenn Rauschen ins Spiel kommt, dürfte die Anfälligkeit hierauf sicher vergleichbar sein. In beiden Fällen liegen in der Zeit T dann zwei Bits vor, jedoch mit einem Unterschied. Nach Nyquist ist die Bandbreite im ersten Fall $1/T$ ("Bandbreite gleich Übertragungsrate"), die Leistung ist proportional zum mittleren Quadrat der vier Stufen, also $S \sim ((-3)^2 + (-1)^2 + 1^2 + 3^2)/4 = 5$, im letzten Fall ist die Bandbreite $1/(T/2) = 2/T$, die Leistung $S \sim ((-1)^2 + 1^2)/2 = 1$. Wir stellen fest, daß bei der Verdoppelung der Bandbreite die Signalleistung signifikant reduziert wird, hier um den Faktor fünf, und das bei gleichbleibender Übertragungsrate. Man kann somit Leistung gegen Bandbreite tauschen. Bei Satellitenfunk dürfte die Sendeleistung ein Problem sein, nicht aber die Bandbreite. Bei drahtgebundener Telefonie hingegen ist es umgekehrt. Hier ist die Bandbreite beschränkt, jedoch nicht (innerhalb gewisser Grenzen) die Sendeleistung.

3 GB gratis für alle bis 26!

Jetzt zusätzlich zu jedem A1 **Go!** Tarif:



Huawei P9 Lite
4G/LTE

um **€ 0,-**

[Jetzt bestellen](#)



Gerätepreis gültig bei Erstanmeldung zu ausgewählten A1 **Go!** Tarifen.

Basisbandsignale als Ergebnis einer Informationsquelle sind oft nicht geeignet zur direkten Übertragung über einen Kanal. Hierzu bedient man sich geeigneter Modulationsverfahren, um diese Signale den gegebenen Kanälen anzupassen, wie etwa Amplituden-, Phasen- und Frequenzmodulation. Diese Verfahren bedienen sich eines Eintonsträgers mit gegebener Trägerfrequenz, um aus einem Basisbandsignal ein Bandpaßsignal zu erzeugen. Drei Parameter stehen hierfür zur Verfügung, nämlich die Amplitude, die Phase und die Frequenz in Form von Phasenänderungen, wie sie auch aus der analogen Nachrichtenübertragung bekannt sein dürften. Amplitudenmodulation ist häufig bei bandbegrenzten Kanälen anzutreffen, wohingegen bei Phasen- und Frequenzmodulation ein geringeres S/R gegen eine höhere Bandbreite getauscht wird.

Die Leistungen und Errungenschaften derjenigen, die zur Entwicklung der digitalen Nachrichtenübertragung beigetragen haben, finden ihre Anwendung in der Beschreibung der Nachrichtensignale durch Codierung der Information, der Modulation von Eintonträgern, der Demodulation sowie der Detektion der Information in verrauschter Umgebung. Wie diese einzelnen Blöcke ein Nachrichtenmodell bilden, zeigt der folgende Abschnitt.

1.2 Nachrichtenmodell

Nun zur Anwendung dieser Entwicklungsschritte in der Praxis. Abbildung 1.4 zeigt das Blockschaltbild einer Nachrichtenübertragungsstrecke. Aus einer Quelle fließt ein Nachrichtenstrom in Form von einer Bitfolge, die der Sender aufbereitet, um sie über einen ausgewählten analogen Kanal zu übertragen. Auch der Kanal selbst führt eine Signalverarbeitung durch, die allerdings die durch den Sender eingebauten Feinheiten wieder aus dem Gleichgewicht bringt. Der Empfänger hat dann die Aufgabe, diese Auswirkungen zu kompensieren, sodaß die übertragene Nachricht der Senke zur Verfügung gestellt werden kann. Wir betrachten hierzu die markierten Punkte.

zu 1: Die Quelle stößt einen binären Datenstrom aus, wobei ein technisches Bit die Dauer T_b aufweist. Die Bitrate ist somit $r_b = 1/T_b$. Dies kann etwa von einem Telephonesignal herrühren, das eine obere Grenzfrequenz von 3.4 kHz hat und mit 8 kHz abgetastet wird. Wenn 8 Bit zur Darstellung eines Abtastwertes vorliegen, resultiert dies in einem Bitstrom von $r_b = 8 \text{ Bit} \cdot 8000 \text{ 1/s} = 64 \text{ kbps}$.

Die relative Häufigkeit von logischen Nullen und Einsen sei gleich, d.h. eine Sequenz von 2×10^6 Bits weise im Durchschnitt 10^6 Nullen und 10^6 Einsen auf. Auch wir gehen im weiteren Verlauf stets von dieser 50%-Regel aus, wobei aber niemals die

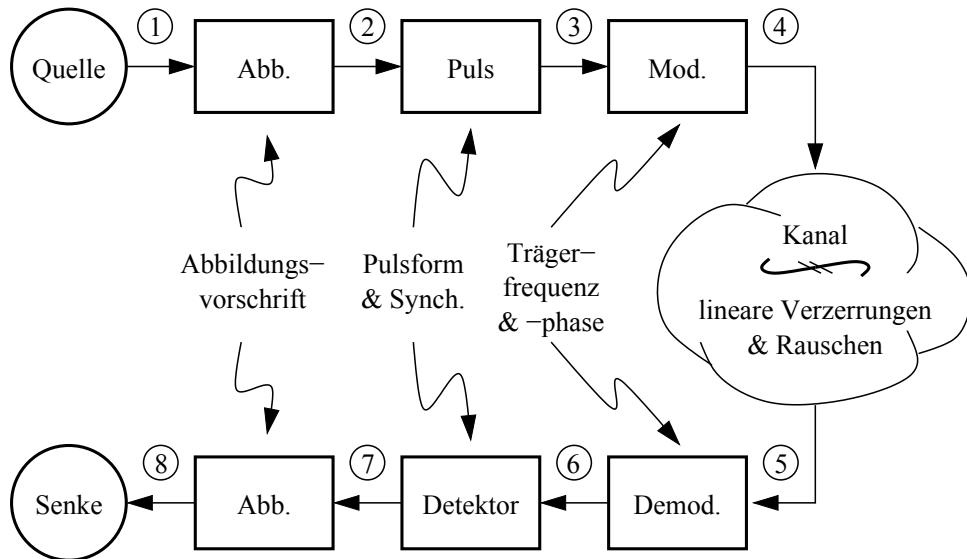


Abbildung 1.4: Nachrichtenmodell

Reihenfolge der Elemente vorhergesagt werden kann, sie sind also beliebig vermischt. Shannon sagte aus, daß damit der maximale Informationsgehalt (gleich Unvorhersehbareit) vorliegt. Mehr hierzu weiter unten.

- zu 2: Die technischen Bits liegen im logischen Bereich vor. Um diese über einen physikalischen Kanal zu übertragen, müssen sie auf einen Zahlenbereich abgebildet werden, dessen Elemente ein physikalisches Signal leicht übernehmen kann. Eine logische 0 kann so etwa durch die Zahl +1, eine logische 1 durch -1 repräsentiert werden. So stellt die Folge -1, +1, +1, -1 die binäre logische Folge 1, 0, 0, 1 dar. Wir sprechen dann von einem Alphabet, hier $\{-1, +1\}$, dessen Elemente die technischen Bits darstellen.
- zu 3: Bei der Telegraphie tragen Spannungs- oder Strompulse die Nachricht, die sich über Leitungen ausbreiten. Das verwendete Alphabet $\{-1, +1\}$ stellt, wie oben dargelegt, die Zustände eines Bits im "normalen" Zahlenbereich dar. Und diese Elemente ± 1 prägen wir einem nachrichtentragenden Puls, $g(t)$, auf, sodaß eine logische 0 durch $+g(t)$ und eine logische 1 durch $-g(t)$ vorliegt, gemessen in Volt oder Ampère. Der Puls kann als Überbringer eines Bits angesehen werden, die Nachricht bzw. Information liegt in der Auslenkung des Pulses verborgen. Die Wahl der Pulsform hat Auswirkungen auf die Bandbreite des Sendesignals sowie auf die Puls- und damit Informationsrate. Folglich sollte dieser mit Bedacht ausgewählt werden.

zu 4: Zur Anpassung des Sende- oder Nachrichtensignals ist eine Anpassung an das zur Verfügung stehende Frequenzfenster des Kanals notwendig. Diese Aufgabe übernimmt der Modulator mit einem eintönigen Trägersignal der Trägerfrequenz F .

Nehmen wir WLAN mit $F = 2.4 \text{ GHz}$ und $B = 22 \text{ MHz}$. Bezogen auf die Trägerfrequenz ist die relative Bandbreite sehr gering, nämlich $22/2.4 \times 10^3 \approx 0.0092$. Bei hochfrequenter Betrachtung reicht also die Näherung, daß nur der unmodulierte Träger vorliegt ("eintöniger" Fall). Die Wellenlänge ist dann $\lambda = c_0/F = 3 \times 10^8 \text{ m/s} / 2.4 \times 10^9 \text{ 1/s} = 0.125 \text{ m}$, mit c_0 als der Lichtgeschwindigkeit. Die Abmessungen einer Antenne liegen im Bereich $\lambda/4 \dots \lambda/2$, sodaß bei dieser Trägerfrequenz die Antenne leicht im Gehäuse des Senders und auch Empfängers untergebracht werden kann.

zu 5: Der Kanal ist in vielen Fällen nicht vorhersehbar und muß oft vor der Übertragung erst durch spezielle Meßsequenzen, die Sender und Empfänger austauschen, ausgemessen werden. Die Übertragungseigenschaften sind üblicherweise alles andere als ideal, sie weisen im einfachsten Fall lineare Verzerrungen wie Dispersion und Dämpfung auf. Die Disperion beschreibt eine Dehnung des gesendeten Pulses, hervorgerufen durch die Faltung mit der Impulsantwort des Kanals, sodaß wir immer von einer Dehnung des Sendepulses ausgehen müssen.² Wird eine Kette von gewichteten Rechteckpulsen der Dauer T im Abstand T gesendet, führt der Kanal durch Dispersion zu einer Überlagerung der Pulse auf der Empfangsseite. Diesen Effekt bezeichnet man Intersymbolinterferenz (ISI). Eine Kompensation dieser Verzerrungen erfordert auf der Empfangsseite einen nicht unbeträchtlichen Aufwand.

Sollen zudem lange Strecken überwunden werden, führt dies zu teilweise starken Dämpfungen, das Empfangssignal ist zumeist erheblich schwächer als das gesendete. Zurück zum WLAN Beispiel: Wir fanden heraus, daß die Wellenlänge 0.125 m beträgt. Um uns auf das Wesentliche, d.h. die Dämpfung zu konzentrieren, betrachten wir auf der Sende- und Empfangsseite Kugelstrahler (unmöglich in der Praxis, nicht aber auf dem Papier). Die Sendeleistung betrage $S_s = 100 \text{ mW}$, zwischen Sender und Empfänger sei die Entfernung $R = 12.5 \text{ m}$. Die Empfangsleistung ist (im Vakuum) $S_r = (\lambda^2/4\pi R)^2 \cdot S_s \approx 6.3 \times 10^{-7} \cdot 100 \text{ mW}$, also etwa $6.3 \times 10^{-5} \text{ mW}$ oder 63 nW. Und aus diesem schwachen Signal soll der Empfänger die Nachricht detektieren!

Daneben führt die Natur, unergründlich wie Sie ist, dem Signal Rauschen hin-

²Falten Sie nur ein Rechteck der Breite oder Dauer eins mit sich selbst. Das Ergebnis ist ein Dreieck der Breite zwei, also doppelt so breit wie ein Rechteck, hervorgerufen durch die Faltung.

zu. Rauschen ist unvorhersehbar, da von rein zufälliger Art, ein Mittelwert ist die Rauschleistung, der man sich bedient, um die Intensität des Rauschens zu beschreiben. Das Verhältnis aus Empfangsleistung S_r und Rauschleistung R gibt die Qualität der Signalsituation am Empfangsort an. Es kann, wie anhand des Beispiels ersichtlich, sehr gering sein.

- zu 6: Das Empfangssignal ist in den meisten Fällen ein Bandpaßsignal und muß wieder in den Tiefpaßbereich umgesetzt werden. Diese Aufgabe übernimmt der Demodulator, der im wesentlichen ähnlich aufgebaut ist wie der Modulator. Hierbei ist nur darauf zu achten, daß das Trägersignal frequenz- und phasengenau zugesetzt wird. Man spricht dann von kohärenter Demodulation.
- zu 7: Das Tiefpaßsignal an dieser Stelle entspricht nicht mehr dem unter Punkt 3 beschriebenen. Das gesendete Signal wurde vom Kanal beeinflußt, einfach zu einem Zeitpunkt das Vorzeichen auszuwerten (siehe Punkt 3), führt sicher zu vielen Fehlentscheidungen. Es muß also eine Strategie gefahren werden, wie weiter oben unter Abbildung 1.2 beschrieben, die selbst bei schwachem S/R Entscheidungen mit niedriger (optimaler) Fehlerwahrscheinlichkeit trifft. Dies nennt man optimale Detektion. Daß dies nicht fehlerfrei erfolgen kann, ist leicht einzusehen, wenn aber bei der reinen Vorzeichenauswertung, d.h. ohne Signalverarbeitung, die Fehlerquote bei $20.000 : 1.000.000 = 2 \times 10^{-2}$ (20.000 Fehler bei 1.000.000 Entscheidungen) liegt, bei der optimalen Detektion jedoch bei 3×10^{-6} , ist das Ziel klar. Die zur Verfügung stehende Information muß gebündelt werden, um den optimalen Detektor zu entwerfen.
- zu 8: Es liegen nun (leicht fehlerbehaftete) Nachrichtenelemente vor, die wieder in technische Bits zu überführen sind. Wie im Sender geschieht dies mit der gleichen Abbildungsvorschrift wie unter Punkt 2 beschrieben.
- zu 9: Der gesendete binäre Datenstrom ist nun in der Senke angelangt. Der Unterschied zwischen dem gesendeten und empfangenen liegt in der Bitfehlerrate.

In diesem Kapitel sind zuerst die Schritte aufgezeigt, die zu der Darstellung und Zusammensetzung eines digitalen Nachrichtensignals zur Anwendung kommen. Das Nachrichtenmodell faßt dies in einem Blockschaltbild zusammen. Hierbei spielt das Zeitverhalten

der Signale eine Rolle wie auch deren Frequenzverhalten. Das Ziel liegt nun darin, bei gegebener Kanalbandbreite und Rauschen eine möglichst hohe Übertragungsrate zu erzielen, die eine maximal zulässige Bitfehlerrate nicht übersteigt.

 CAREER Venture

facebook.com/CAREERVenture
google.com/+CAREER-VentureDe
twitter.com/CAREERVenture



Interessiert an Beratung?



Hier bis
28.01.2019
bewerben!

business & consulting spring
25. Februar 2019 Frankfurt

Teilnehmende Unternehmen

Basycon d-fine     

www.career-venture.de

Kapitel 2

Übertragung im Basisband

Pulse tragen die Nachricht, zusammengenommen stellen sie ein physikalisches Signal dar, das über einen analogen Kanal übertragen werden kann. In diesem Kapitel betrachten wir Signale im Tiefpaßbereich bzw. Basisband. Ausgehend von Formaten gilt das Augenmerk der Signalbeschreibung im Zeit- und Frequenzbereich, vom Sender bis zum Empfänger. Dabei rücken die im vorangegangenen Kapitel einführend gemachten Entwicklungsschritte in den Vordergrund.

2.1 Formate

Das Nachrichtensignal im Tiefpaßbereich oder Basisband ist zusammengesetzt aus den Nachrichtenelementen a_n , die dem Alphabet, z.B. $\{-1, +1\}$, entnommen sind, und dem nachrichtentragenden Puls. Einige Kriterien müssen bei dieser Formatierung betrachtet werden:

1. Die Eigenschaften im Frequenzbereich geben die erforderliche Bandbreite und Übertragungsrate an. Ein weiter Punkt ist der Mittelwert des Signals und ob tiefe Frequenzen stark vorhanden sind. Dies ist besonders wichtig, wenn das Signal über AC-gekoppelte Systemkomponenten, wie bei einem Telefonkanal, übertragen wird.
2. Dem Signal sollte der Takt und auch der richtige Abtastzeitpunkt entnommen werden können, da diese Information anderenfalls separat übertragen werden muß. Zudem darf eine lange Kette von logischen Nullen oder Einsen nicht dazu führen, daß der Takt nicht mehr ableitbar ist. Aus diesem Grund muß der Kanal möglichst wechselhaft erregt werden.

Zur einfachen Darstellung dieser Signale verwenden wir Rechtecksignale, obwohl diese in praktischen Systemen eher keine Anwendung finden. Auf die praktische Pulsfomung gehen

wir später genauer ein. Der Rechteckpuls ähnelt dem griechischen Großbuchstaben Π und ist deswegen durch

$$g(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & : -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben, Abbildung 2.1 zeigt dessen Verlauf. Wir erkennen, daß dieser Puls auf die Dauer T beschränkt ist.

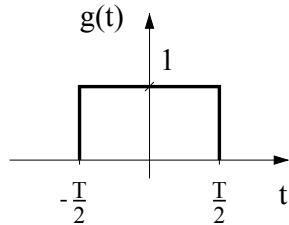


Abbildung 2.1: Rechteckpuls

Verschiedene Signale sollen hiermit zusammengesetzt werden, sie tragen alle die Nachrichtenfolge $\{1, 0, 0, 1, 0, 1\}$. Das obere Signal ist ein unipolares NRZ Format, wobei NRZ für *non-return to zero* steht, d.h. der Puls erstreckt sich über die Dauer T , also dem Pulsintervall. Für eine logische 1 liegt ein Puls der Auslenkung 0 vor, für eine logische 0 ein Puls der Auslenkung 1. Bei 50% Einsen und 50% Nullen stellt sich ein Mittelwert von $1/2$ ein. Der Takt ist diesem Signal bei einer längeren Folge von gleichen Symbolen nicht ableitbar, der Spitze-Spitze-Wert ist 1.

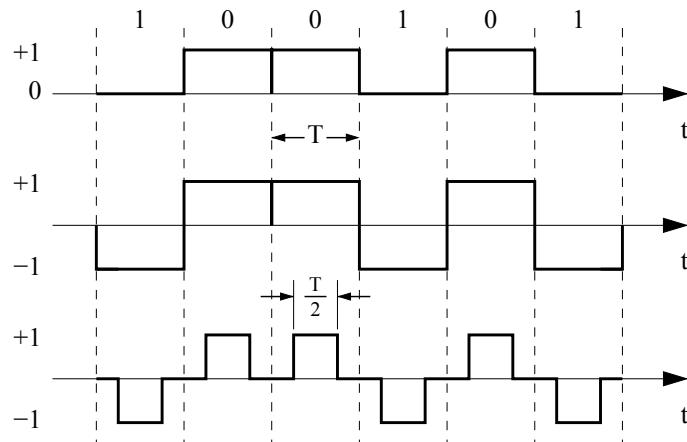


Abbildung 2.2: Unterschiedliche Formate

Bei dem mittleren Signal stellen sich beide Polaritäten ein, die Nachricht liegt in der Auslenkung verborgen. Man spricht von einem polaren NRZ Format. Wegen dieser Polarität ergibt sich nun der Mittelwert null, der Spitze-Spitze-Wert ist 2. Aus diesem Grund ist dieses Format weniger anfällig für Rauschen. Aber auch bei einer längeren Kette von gleichen Symbolen ist der Takt nicht ableitbar.

Das untere Signal ist ebenfalls ein polares Format, nur ist die Dauer eines Pulses auf $T/2$ beschränkt bei gleichem Pulsintervall wie zuvor. Man bezeichnet dies als polares RZ Format, wobei RZ für *return to zero* steht. Der Mittelwert ist wieder gleich null, der Spitze-Spitze-Wert gleich 2. Nur ändert sich das Signal doppelt so schnell wie die beiden zuvor, womit sicher auch doppelt so hohe Frequenzen einhergehen. Hierauf gehen wir weiter unten bei der Betrachtung von Bandbreiten ein.

Lassen Sie uns nun die Leistungen vergleichen. Wir haben in Abbildung 2.2 die Beobachtungsdauer $D = 6T$ mit einem augewogenen Verhältnis von Einsen und Nullen (50%-Regel). Hierfür erhalten wir leicht mit

$$S_{DC} = \left(\frac{1}{D} \int_D x(t) dt \right)^2 = \mu^2, \quad S_{ges} = \frac{1}{D} \int_D x^2(t) dt \quad (2.1)$$

NOW HIRING

A TOP NOTCH LIGHTNING BLASTING
LITHIUM WIELDING

INNOVATOR

AND SHOCKINGLY
MIND BLOWING MASTER OF

**ELECTRO
MOBILITY**

ALSO KNOWN AS
ELECTRICAL ENGINEER

jobs.mahle.com/emobility

MAHLE

für die Gleich- und Gesamtleistung und μ als dem Mittelwert des Nachrichtensignals $x(t)$ folgende Ergebnisse für das unipolare NRZ Format:

$$\begin{aligned} S_{DC} &= \left(\frac{1}{6T} (0 \cdot T + 1 \cdot T + 1 \cdot T + 0 \cdot T + 1 \cdot T + 0 \cdot T) \right)^2 = \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \\ S_{ges} &= \frac{1}{6T} (0^2 \cdot T + 1^2 \cdot T + 1^2 \cdot T + 0^2 \cdot T + 1^2 \cdot T + 0^2 \cdot T) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Aus der Gesamt- und der Gleichleistung ergibt sich die Wechselleistung, S_{AC} , nach $S_{ges} = S_{DC} + S_{AC}$. Die folgende Tabelle zeigt die Leistungen der betrachteten Formate. Wenn

Format	μ	S_{DC}	S_{ges}	S_{AC}
unipol. NRZ	1/2	1/4	1/2	1/4
pol. NRZ	0	0	1	1
pol. RZ	0	0	1/2	1/2

Tabelle 2.1: Vergleich der Leistungen

man bedenkt, daß S_{DC} keinen Beitrag zur Darstellung der Nachricht leistet, sollte dieser Anteil vermieden werden. Demnach ist dem polaren NRZ Format gegenüber den anderen beiden der Vorzug zu geben. Um aber eine Taktableitung zu ermöglichen, bleibt nur das polare RZ Format übrig.

In praktischen Systemen ist das Nachrichtensignal $x(t)$ oft ein Spannungssignal mit der Einheit V. Berücksichtigen wir dies bei der Leitungsbetrachtung nach Gleichung 2.1, liegt das Ergebnis anstelle von W in V^2 vor. Um diesen "Fehler" zu beheben, denken wir uns einen 1Ω -Widerstand hinzu, über dem wir $x(t)$ messen. Die Leistung hat dann die Einheit $V^2/\Omega = W$. In einem 50Ω -System ist die Gesamtleistung dann $S_{ges}/50\Omega$.

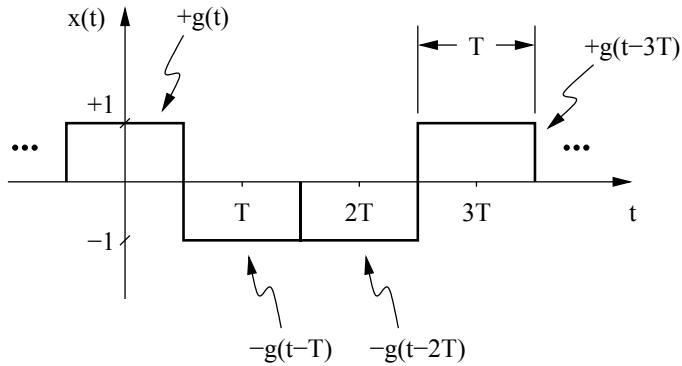
2.2 Beschreibung des Nachrichtensignals

2.2.1 Daten und Pulsformung

Wie läßt sich das Nachrichtensignal fassen, um es im weiteren Verlauf hinsichtlich Bandbreite, Übertragungsrate, Rauschimmunität usw. untersuchen zu können? Abbildung 2.3 zeigt einen Ausschnitt von $x(t)$, es ist eine Überlagerung von gewichteten und verschobenen Pulse, wie es

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \quad (2.2)$$

zum Ausdruck bringt. Hierin stellt a_n die Gewichte dar, die dem Nachrichtenalphabet entnommen sind, hier $a_n \in \{-1, +1\}$. Das Signal besteht aus einem zufälligen und unvor-

Abbildung 2.3: Binäres Nachrichtensignal mit $a_n = \pm 1$

hersagbaren Teil, nämlich a_n , und dem Puls $g(t)$, der bekannt ist. Eine Trennung dieser Anteile ist der nächste Schritt. Ein Filter ist beschrieben durch seine Impulsantwort $g(t)$. Liegt an dessen Eingang ein gewichteter Impuls $a_n\delta(t-nT)$ an, reagiert es hierauf mit einer Faltung von dem Impuls und der Impulsantwort, also $a_n\delta(t-nT)*g(t) = a_ng(t-nT)$. Die Verschiebung von $g(t)$ erfolgt also durch den verschobenen Impuls. Um das Signal in Gleichung 2.2 umzuschreiben, klammern wir mit diesem Schritt $g(t)$ "faltungstechnisch" aus und erhalten

$$x(t) = g(t) * \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\delta(t-nT)}_{=d(t)} = g(t) * d(t),$$

mit $d(t)$ als dem Datensignal. Diese Summe enthält nun die Zufälligkeit des Nachrichtensignals, sie ist eine Impulsfolge, bei der der n -te Impuls zur Zeit $t = nT$ vorliegt und das Element a_n trägt. Abbildung 2.4 zeigt das pulsformende Filter der Impulsantwort $g(t)$, die Impulsfolge, $d(t)$, als dessen Erregung und das Faltungsprodukt $x(t)$. Zur besseren Darstellung ist der Impuls bei $t = 3T$ und die Reaktion des Filters hierauf hervorgehoben. Die Einführung eines Pulsformungsfilters führt zu der gewünschten Trennung.

2.2.2 Zufälligkeit und Autokorrelationsfunktion

Nach der Trennung von deterministischem ("Pulsformung") und stochastischem ("Daten") Anteil, besteht nach wie vor das Anliegen, das Nachrichtensignal zu beschreiben. Wir haben bereits Leistungen betrachtet, die wiederum Mittelwerte sind. Dabei kam für die Gleicheistung der Mittelwert des Signals zum Einsatz, die Gesamtleistung ist der quadratische Mittelwert des Signal. Und genau mit Mittelwerten lassen sich zufällige Signale beschreiben. Wir beginnen mit dem deterministischen Anteil.

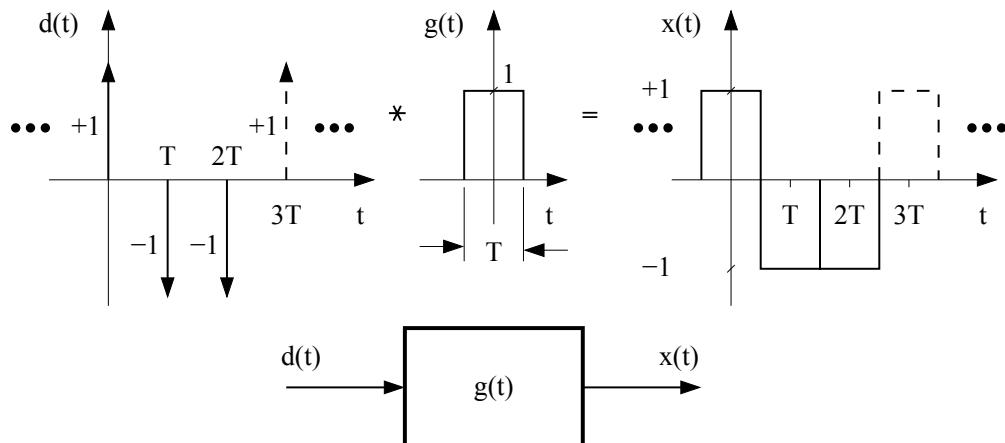
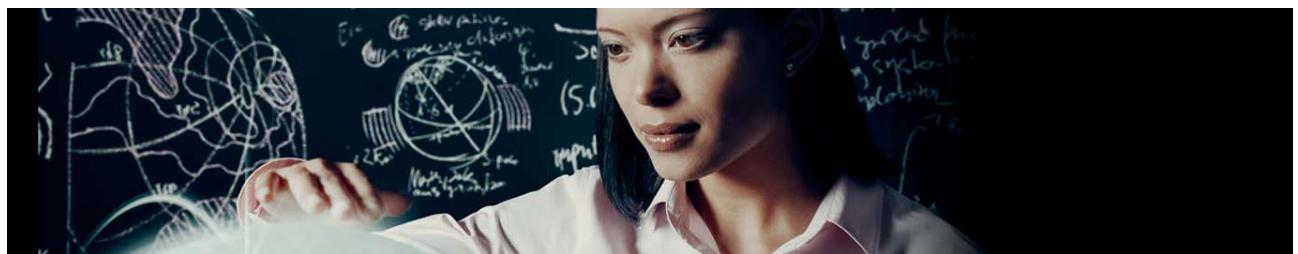


Abbildung 2.4: Pulsformungsfilter

In der Praxis besteht oft das Problem, Signale auf ihre Ähnlichkeit hin zu untersuchen. Um dies zu untersuchen nehmen wir zwei Signale, $u(t)$ und $v(t)$, die einen pulsförmigen Charakter haben sollen. Dies können etwa die Impulsantworten zweier Filter sein, Impulsantworten, die nach einem Einschwingen ein endliches Maximum einnehmen, um danach wieder auszuschwingen. Die Signale oder Pulse haben eine endliche Energie. Um die For-



Join EADS. A global leader in aerospace, defence and related services.

Let your imagination take shape.

EADS unites a leading aircraft manufacturer, the world's largest helicopter supplier, a global leader in space programmes and a worldwide leader in global security solutions and systems to form Europe's largest defence and aerospace group. More than 140,000 people work at Airbus, Astrium, Cassidian and Eurocopter, in 90 locations globally, to deliver some of the industry's most exciting projects.

An **EADS internship** offers the chance to use your theoretical knowledge and apply it first-hand to real situations and assignments during your studies. Given a high level of responsibility, plenty of

learning and development opportunities, and all the support you need, you will tackle interesting challenges on state-of-the-art products.

We take more than 5,000 interns every year across disciplines ranging from engineering, IT, procurement and finance, to strategy, customer support, marketing and sales. Positions are available in France, Germany, Spain and the UK.

To find out more and apply, visit www.jobs.eads.com. You can also find out more on our **EADS Careers Facebook page**.



men beider Signale auf Ähnlichkeit hin zu untersuchen, sollten beide gleich stark sein. Wir normieren sie, sodaß die Energien nun eins sind, und führen eine zeitliche Verschiebung ein:

$$\begin{aligned} \frac{u(t)}{\sqrt{E_u}}, & \quad \text{mit} \quad E_u = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt \\ \frac{v(t+\tau)}{\sqrt{E_v}}, & \quad \text{mit} \quad E_v = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)dt. \end{aligned}$$

Es interessiert der Unterschied zwischen diesen beiden Signalen, d.h.

$$e(t) = \frac{u(t)}{\sqrt{E_u}} - \frac{v(t+\tau)}{\sqrt{E_v}},$$

wir bilden das Quadrat hiervon, integrieren zudem über die Zeit und erhalten die Energie der Abweichung,

$$E_e = \int_{-\infty}^{\infty} e^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u(t)}{\sqrt{E_u}} - \frac{v(t+\tau)}{\sqrt{E_v}} \right)^2 dt.$$

Diese Energie ist gleich null, wenn beide normierten Signale gleich sind, womit gleichzeitig $e(t)$, also die Abweichung gleich null ist. Über

$$E_e = \underbrace{\frac{1}{E_u} \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{E_v} \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t)dt}_{=1} - \frac{2}{\sqrt{E_u E_v}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t+\tau)dt \geq 0$$

ergibt sich

$$1 - \frac{1}{\sqrt{E_u E_v}} \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t+\tau)dt \geq 0,$$

und damit

$$R_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t+\tau)dt \leq \sqrt{E_u E_v}.$$

Diese Funktion ist die Korrelationsfunktion, die die Korrelation oder Wechselbeziehung zwischen den Signalen $u(t)$ und $v(t)$ in Abhängigkeit von der zeitlichen Differenz angibt. Sie ist die Faltung von der Zeitinversen von $u(t)$ und $v(t)$, was durch einen Vergleich mit dem Faltungsintegral $u(\tau) * v(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\vartheta)v(\tau - \vartheta)d\vartheta$ sofort ersichtlich ist.

Zusammengefaßt sind die wichtigsten Ergebnisse und Eigenschaften der Korrelations-

funktion:

$R_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t+\tau)dt$ $= \int_{-\infty}^{\infty} u(-(\tau-t))v(t)dt$ $= u(-\tau) * v(\tau)$ $= R_{vu}(-\tau)$ $\leq \sqrt{E_u E_v}$ $R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t+\tau)dt \leq R_u(0)$ $R_u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t)dt$	Korrelationsfunktion Faltungsintegral Kurzschriftweise Symmetrieeigenschaft obere Grenze AKF Energie.	(2.3)
--	---	-------

Die Korrelation verdeutlicht folgendes

Beispiel: _____

Gegeben sei das Signal $u(t)$, das mit Hilfe der Korrelationsfunktion mit sich selbst für eine Zeitverschiebung τ auf Ähnlichkeiten hin untersucht werden soll. In diesem Fall ist $v(t+\tau) = u(t+\tau)$, man spricht hierbei von einer Autokorrelationsfunktion (AKF). Das Signal selbst ist durch

$$u(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{T} & : 0 \leq t \leq T \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

gegeben. Bestimmen Sie die AKF $R_u(\tau)$.

Mit $v(t+\tau) = u(t+\tau)$ wird die Korrelationsfunktion nach Gleichung 2.3 zu

$$R_{uu}(\tau) \equiv R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)u(t+\tau)dt,$$

was dem Faltungsintegral

$$R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)u(t)dt = u(-\tau) * u(\tau)$$

entspricht. Und hiermit befinden wir uns wieder auf bekanntem Terrain. Die Auswertung dieser Faltung ist in Abbildung 2.5 dargestellt. Wir erkennen, daß beide Faltungspartner,

der verschobene und der unverschobene, die gleiche Ausrichtung haben. Dies kommt daher, daß vor der Faltung $u(t)$ an der Ordinate gespiegelt ("herumgefaltet") wird und dies in $u(-t)$ resultiert. Im Zuge der Faltung wird dies wieder umgekehrt.

Wir betrachten den Bereich $0 \leq \tau + T \leq T$ oder $-T \leq \tau \leq 0$, integriert wird über das Intervall $0 \leq t \leq \tau + T$, und erhalten dafür den Ausdruck

$$R_u(\tau) = \int_0^{\tau+T} \left(1 - \frac{t-\tau}{T}\right) \left(1 - \frac{t}{T}\right) dt = T \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \frac{\tau}{T} - \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{T}\right)^3\right).$$

Für den Bereich $0 \leq \tau \leq T$ erhalten wir mit der in Gleichung 2.3 angegebenen Symmetriebeziehung $R_u(\tau) = R_u(-\tau) = T \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{\tau}{T} + \frac{1}{6} \left(\frac{\tau}{T}\right)^3\right)$ oder insgesamt:

$$R_u(\tau) = \begin{cases} T \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \frac{|\tau|}{T} + \frac{1}{6} \left(\frac{|\tau|}{T}\right)^3\right) & : -T \leq \tau \leq T \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Maximale Ähnlichkeit liegt vor, wenn sich beide Faltungspartner vollständig überlappen.

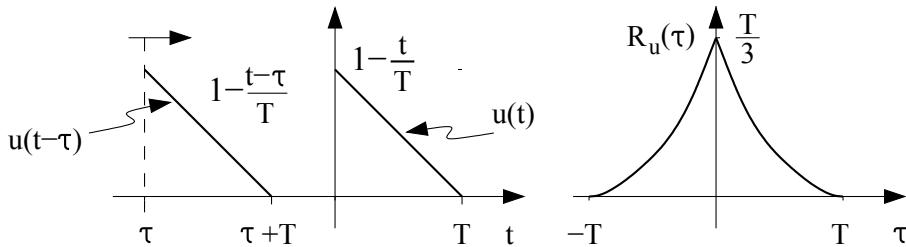


Abbildung 2.5: Autokorrelationsfunktion für deterministische Signale

Im Ursprung liegt daher das Maximum der AKF vor, es ist $T/3$, was auch der Energie von $u(t)$ entspricht. Für $\tau = 0$ ist

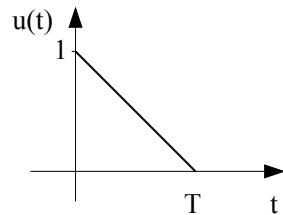
$$R_u(0) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = \frac{T}{3} = E_u.$$

Keine Ähnlichkeit ergibt sich für den Fall, daß keine Überlappung vorliegt. Beide Faltungspartner haben dann nichts gemeinsam, d.h. $R_u(\tau) = 0$. Auf diese Eigenschaften, die in diesem Beispiel angewendet wurden, greifen wir im weiteren Verlauf oft zurück.

In der Praxis kommt oft der Fall vor, daß etwas Bekanntes in Unbekanntem aufgespürt werden muß. Man sucht buchstäblich die Nadel im Heuhaufen und findet diese

nur dann, wenn genügend Information hierüber vorhanden ist, wie etwa Farbe, Form und Abmessungen.

Suchen wir einen Puls in einer unbekannten Umgebung, können wir zum Auffinden die AKF verwenden. Hierzu ist nur die Kenntnis der Pulsform erforderlich. Nehmen wir ein Echolot, um die Vorgehensweise zu beschreiben. Ein Signal bekannter Form wird ausgesendet und an einem Hindernis reflektiert. Das reflektierte Signal wird vom Sender empfangen, aus der Laufzeit lässt sich die Entfernung zum Hindernis ermitteln. Die gesendete Pulsform ist $u(t)$, das reflektierte Signal sei $\rho \cdot u(t - D)$, wobei ρ eine Abschwächung und D eine Verzögerung darstellt. Wie lässt sich D bestimmen? Hierzu betrachten wir die AKF, die nun durch $\rho \cdot u(-(\tau - D)) * u(\tau)$ gegeben ist. Die Verzögerung lässt sich "faltungstechnisch" wieder herausklammern, sodaß wir



$$\begin{aligned}\rho \cdot u(-(\tau - D)) * u(\tau) &= \rho \cdot u(-\tau) * u(\tau) * \delta(\tau - D) \\ &= \rho \cdot R_u(\tau) * \delta(\tau - D) \\ &= \rho \cdot R_u(\tau - D)\end{aligned}$$


CAREER Venture

facebook.com/CAREERVenture
google.com/+CAREER-VentureDe
twitter.com/CAREERVenture



Bereit für Consulting?



business & consulting fall
24. September 2018 Frankfurt
Bewerbungsschluss: 23.08.2018

Auszug unserer Referenzen











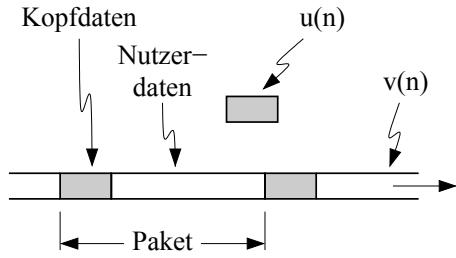

www.career-venture.de

erhalten. Hierbei handelt es sich um eine um D verzögerte AKF des Pulses $u(t)$, deren Maximum $\rho T/3$ bei $\tau = D$ anzutreffen ist. Wegen der Faltung kann ein Filter der Impulsantwort $u(-t)$ verwendet werden. Wenn am Eingang das Signal $\rho \cdot u(t - D)$ anliegt, reagiert es darauf mit $\rho \cdot R_u(t - D)$. Und hiervon muß nur die Lage des Maximums bestimmt werden.

Die Betrachtung der Autokorrelationsfunktion erfolgte für zeitkontinuierliche Signale. Die Ergebnisse für zeitdiskrete Signale erhalten wir auf ähnlichem Weg, die Integrale müssen nur durch Summen ausgetauscht werden. Auch sonst werden hierbei die Methoden der Betrachtung von zeitdiskreten Signalen und Systemen angewendet. Für diese Signale und den zugehörigen Autokorrelationsfolgen ergibt sich dann

$$R_{uv}(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(n)v(n+m) = u(-m) * v(m).$$

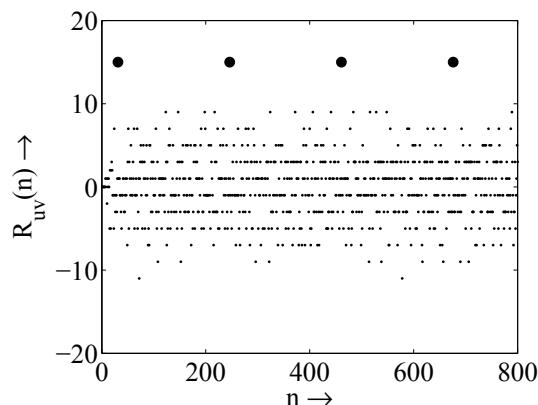
Ein Beispiel aus der Praxis: Auch bei der Übertragung von Daten in Paketen machen wir Gebrauch von etwas Bekanntem in Unbekanntem. Die ersten Daten in einem Paket bestehen üblicherweise aus Kopfdaten (engl.: header). Diese werden benötigt, um am Empfangsort den Beginn eines Paketes zu ermitteln. Vereinfacht ist ein Paket aus den bekannten Kopfdaten, $u(n)$, und folgenden unbekannten Nutzerdaten, $d(n)$, aufgebaut. Nehmen wir an, es liege ein polares Format vor, sodaß die Elemente für $u(n)$ und $d(n)$ aus positiven und negativen Einsen bestehen. Mit 15 Elementen in den Kopfdaten und 200 Elementen in den Nutzerdaten setzt sich das Paket aus 215 Elementen zusammen; ein Paket folgt dem vorangegangenen. Bei der Übertragung über einen Kanal geht meist der Zeitbezug verloren, der Beginn eines Paketes muß also wieder ermittelt werden.



Zur Darstellung sei

$$u(n) \hat{=} \{-1, +1, +1, -1, -1, +1, -1, +1, -1, -1, -1, +1, +1, +1\}_{n=0}^{14},$$

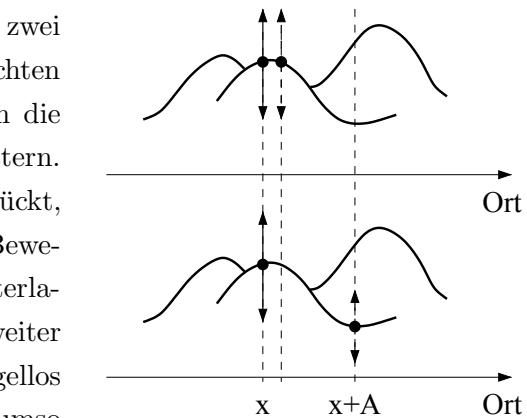
die Elemente von $d(n)$ sind zufälliger Natur. Die Kopfdaten selbst sind quasizufällig, d.h. sie scheinen zufällig zu sein, sind jedoch bekannt. Man spricht hierbei von einer PN-Folge (engl.: pseudo noise). Diese und die Folge von Paketen, $v(n)$, ist oben dargestellt.



Kopfdaten und der Paketfolge darlegen. Die Kopfdaten umfassen 15 Elemente, die Folge von Paketen läuft unter den Kopfdaten entlang. Wenn sich eine perfekte Deckung der Kopfdaten, die in Form der Impulsantwort des Filters vorliegen, mit den Kopfdaten, die in der Paketfolge periodisch vorkommen, ergibt, ist das Resultat der Faltung $(-1)^2 + (+1)^2 + \dots + (+1)^2 = 15$. Und dieses regelmäßig wiederkehrende Ergebnis ist daher etwas deutlicher hervorgehoben, der Abstand zwischen den Punkten ist jeweils 215.

Bisher haben wir bei der Betrachtung von Korrelationsfunktionen deterministische Signale behandelt. Wie aber verhält es sich mit zufälligen Signalen? Bevor wir darauf eingehen, betrachten wir einen recht einfachen Fall, der den Zusammenhang zwischen einem zufälligen Signal und der Korrelationsfunktion verdeutlicht.

Jeder kennt die See bei starkem Wind, es sind starke Wellen zu beobachten. Nun werfen wir zwei kleine Bälle in das kabbelige Wasser und beobachten deren Bewegungen. Mehr oder weniger folgen die Bälle eher zufällig anmutenden Bewegungsmustern. Denken wir uns die Bälle dicht zusammengerückt, werden sie sicher ähnliche, wenn nicht gleiche Bewegungen ausführen, die je nach Wind- und Wetterlage regellos schwankend sind. Driften die Bälle weiter auseinander, führen die Bälle nach wie vor regellos schwankende Bewegungsmuster aus, die aber umso mehr voneinander abweichen, je größer der Abstand, A , dazwischen ist. Bei starkem Wind kann sich zudem ein mittleres Hochwasser bilden,



das beide Bälle gleich in die Höhe treibt. Die Funktion $R_b(A)$ (siehe Abbildung 2.6) gibt an, wie die Korrelation oder Gemeinsamkeit der Bewegungsmuster $b(x)$ und $b(x + A)$ in Abhängigkeit von dem Abstand abnimmt. Von $A = 0$, also der maximalen gemeinsamen Intensität ausgehend ("mittleres Hochwasser plus Wellenschlag"), strebt der Verlauf auf einen konstanten Wert zu, nämlich der mittleren gemeinsamen Intensität ("mittleres Hochwasser"). $R_b(A)$ ist die Autokorrelationsfunktion, sie vergleicht die Bewegungsmuster an den Orten x und $x + A$.

Physikalisch betrachtet ist das mittlere Hochwasser mit potentieller Energie und der Wellenschlag, der die Bälle auf und ab tanzen lässt, mit kinetischer Energie verbunden. Bei Wellen sind auch periodische Muster bekannt. Wer kennt nicht die Aussage "Jede siebte Welle ist hoch."? Es ist daher nicht verwunderlich, daß das Maximum der AKF ("DC plus AC") und auch der konstante Wert ("DC") eine Energie pro Zeiteinheit darstellen. Warum es sich dabei um eine Energie pro Zeiteinheit, also eine Leistung handelt, ist Gegenstand einer genaueren Betrachtung in Anhang B. Wind & Wellen veranschaulichen also einfach die AKF.

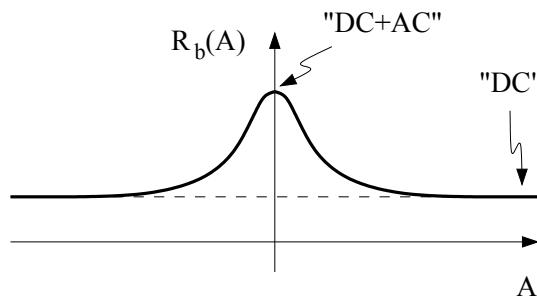


Abbildung 2.6: AKF zufälliger Signale

Zuerst sollte der Begriff des Erwartungswertoperators geklärt werden. Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen als Ergebnis eines Experiments ist der Mittelwert, der sich bei häufigem Ausführen des Experiments ergibt. Ein Würfelexperiment liefert die Ergebnisse $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, wenn die jeweiligen Augen der Symbole addiert werden. Der Erwartungswert oder Mittelwert nach häufigem Würfeln ist $E\{x\} = (1+2+3+4+5+6)/6 = 21/6$, der Erwartungswert von den Quadraten ist somit $E\{x^2\} = (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2)/6 = 91/6$. Wie ermittelt man diese Werte? Viele Würfel, sagen wir 1000 davon, befinden sich in einem Sack. Nach dem Reißen einer Leine öffnet sich dieser und nahezu gleichzeitig fallen diese Würfel auf den Boden. Erst dann kann mit der Auswertung begonnen werden.

Da oft nicht eine solche Anzahl von Würfel vorhanden ist, geht man nacheinander vor und würfelt eben eintausend mal. Das Ergebnis wird das gleiche sein, da sich im Zuge der 1000 Würfe die Umgebung, wie das Gravitationsfeld, nicht geändert haben dürfte. In vielen praktischen Dingen geht man davon aus, daß das Scharmittel gleich dem zeitlichen Mittel ist. So verfügt man in einem Labor üblicherweise über nur einen Bitgenerator anstelle einer großen Anzahl davon. Wenn diese Mittelwerte gleich sind, spricht man von Ergodizität. Wir erweitern diesen Begriff, indem nicht nur Zufallszahlen vorliegen, sondern zufällige Signale, wie $x(t)$, die Zufallsprozesse genannt werden, z.B. ein Spannungssignal. Zum Zeitpunkt t_1 ist $x(t_1)$ eine zufällige Spannung, $x(t_2)$ ist dann eine andere, ebenfalls zufällige Spannung. Ein Rauschsignal ist zufälliger Natur wie auch das in Abbildung 2.3 gezeigte Nachrichtensignal, obwohl sich beide sehr unterscheiden. Bevor wir zu dessen mittlerer Beschreibung übergehen, soll der Erwartungswert von Signalen näher betrachtet werden.

Beispiel: _____

Eine Zufallsvariable A sei gleichverteilt zwischen 0 und 1, die ersten zehn Zahlen einer

The advertisement features a photograph of the Turning Torso building at night, illuminated by OSRAM DRAGONtape LED modules. The building's unique spiral shape is highlighted by the lighting. The OSRAM logo and slogan 'LED CREATING TOMORROW' are visible above the building. The text 'Für eine leuchtende Zukunft. OSRAM.' is overlaid on the image. The background is dark blue, and the overall theme is futuristic and forward-thinking.

www.osram.de/karriere

„The Turning Torso“ in Malmö, Schweden: 2700 OSRAM DRAGONtape®-Module setzen das spiralförmige Gebäude in Szene.

Seit mehr als 100 Jahren forscht OSRAM an der Zukunft des Lichts. Für unsere Kunden entwickeln wir Tag für Tag richtungweisende Beleuchtungslösungen. Rund um den Globus lassen wir Lichtvisionen Wirklichkeit werden. Mit der OLED-Technologie bringt OSRAM das Licht jetzt in eine neue Dimension: Hauchdünn und flächig eröffnen die organischen LED nie da gewesene Möglichkeiten für die Beleuchtung von morgen.

Werden auch Sie Teil der nächsten großen Lichtrevolution made by OSRAM und starten Sie zusammen mit uns in eine leuchtende Zukunft. Mehr Infos unter: www.osram.de/karriere

OSRAM

2.51 OSRAM GmbH, CRM MK AB, 81536 München

langen Folge seien

$$A \cong \{0.0153, 0.7467, 0.4450, 0.9318, 0.4659, 0.4186, 0.8462, 0.5251, 0.2026, 0.6721\}_{n=1}^M.$$

Hierfür bestimmen wir den linearen Mittelwert, $E\{A\}$, und den quadratischen Mittelwert, $E\{A^2\}$, wobei $E\{\bullet\}$ den Erwartungswertoperator darstellt.

Mit den Zahlen ergibt sich leicht der Wert für den linearen Mittelwert als

$$E\{A\} \approx \frac{1}{M} \cdot \sum_{n=1}^M A_n = 0.52692$$

und für den quadratischen Mittelwert als

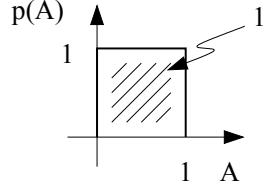
$$E\{A^2\} \approx \frac{1}{M} \cdot \sum_{n=1}^M A_n^2 = 0.35009,$$

mit der Anzahl $M = 10$. Sind diese (praktischen) Mittelwerte nun zutreffend? Wir vergleichen diese mit den theoretischen Mittelwerten: Lesern, die sich bereits mit der Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt haben, ist der Begriff der Gleichverteilung geläufig, er findet etwa in der praktischen Welt Anwendung bei Widerständen, ausgedrückt durch Toleranzbereiche. Ist die sogenannte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(A)$ bekannt, wie etwa gezeigt, ergibt dies

$$E\{A\} = \int_0^1 A p(A) dA = \frac{1}{2}$$

und

$$E\{A^2\} = \int_0^1 A^2 p(A) dA = \frac{1}{3}.$$



Der Vergleich der Ergebnisse zeigt, daß selbst bei einer kurzen Folge die theoretischen Mittelwerte gut erreicht werden können. Es gilt natürlich, daß die praktische Mittelwertbildung der theoretischen umso näher kommt, je mehr Zahlen vorliegen und je größer M gewählt ist.

Die Zufälligkeit liegt in der Folge von Nachrichtenelementen, a_n . Es ist nicht vorhersehbar, wie die Elemente auftreten, man kann hierfür nur ein mittleres Verhalten angeben,

das durch die Autokorrelationsfolge $\alpha_\ell = E\{a_n a_{n+\ell}\}$ beschrieben ist. In der Praxis liegt nur eine Folge vor, sodaß Zeitmittelwerte herangezogen werden müssen, wie es

$$\alpha_\ell = E\{a_n a_{n+\ell}\} = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{M-1} a_n a_{n+\ell}$$

angibt. Wenn sich die interessierenden statistischen Mittelwerte einer zufälligen Folge aus einer einzigen Musterfolge, wie hier die einzig vorliegende bestimmen lassen, spricht man von einem ergodischen Prozeß. In dem zuvor betrachteten Beispiel wurde der lineare Mittelwert und auch der quadratische Mittelwert berechnet, wobei letzterer die AKF für $\ell = 0$ darstellt. Weiter unten gehen wir bei der Auswertung vom polaren und unipolaren Format genauer hierauf ein. An dieser Stelle gehen wir davon aus, daß die AKF α_ℓ vorliegt.

Die AKF des Datensignals

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT)$$

hat, wie in Anhang B genau hergeleitet, die gleiche Form wie das Datensignal selbst,

$$R_d(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell \delta(\tau - nT).$$

Das Datensignal ist impulsförmig, mit a_n als den Gewichten der einzelnen Impulse. Bei der AKF verhält es sich genauso, auch diese besteht aus Impulsen im Abstand T , wobei die Gewichte nun durch α_ℓ gegeben sind. Der einzige Unterschied besteht in dem Vorfaktor $1/T$. Die Antwort auf die Frage, woher dieser Faktor kommt, findet der interessierte Leser in Anhang B.

Die AKF des Nachrichtensignals unterscheidet sich im Grunde genommen nur durch die Pulsformen. Vor dem Filter liegt das Datensignal an mit der Pulsform $\delta(t)$, am Ausgang des Filters liegt das Nachrichtensignal der Pulsform $g(t)$ vor. Es liegt also nahe, nur die Pulse auszutauschen, um die gewünschte AKF des Nachrichtensignals zu erhalten. Das Ergebnis ist dann

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell R_g(\tau - \ell T), \quad (2.4)$$

mit $R_g(\tau) = g(\tau) * g(-\tau)$. Ersetzen wir $g(\tau)$ durch $\delta(\tau)$, ist ergibt das Faltungsprodukt $\delta(\tau) * \delta(-\tau) = \delta(\tau)$, für diese Pulsform ist $R_x(\tau)$ gleich $R_d(\tau)$. Auch dies ist in Anhang B detailliert beschrieben. Diese Herleitungen dienen dazu, die Zusammenhänge aufzuzeigen, ohne die ein Grundverständnis nicht ohne weiteres möglich ist.

Abschließend widmen wir nun zwei Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion von Zufallssignalen unsere Aufmerksamkeit. Bei deterministischen Signalen stellt das Maximum der AKF, das bei $\tau = 0$ vorliegt, die Energie des betrachteten Signals dar. Wie ist dies der Fall bei stochastischen oder zufälligen Signalen? Die AKF des Nachrichtensignals ist in Gleichung 2.4 angegeben, diese bei $\tau = 0$ ausgewertet ergibt anders als bei deterministischen Signalen nun die Leistung des Nachrichtensignals, d.h.

$$S_{\text{ges}} = E\{x^2(t)\} = \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell R_g(\ell T).$$

Man beachte hierbei, daß die AKF eine gerade Funktion ist, d.h. $R_g(\ell T) = R_g(-\ell T)$. Für den Gleichanteil des Nachrichtensignals ergibt dies über

$$E\{x(t)\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} E\{a_n\} g(t - nT)$$

und über eine Periode T gemittelt sowie dieses "scheibchenweise" Integrieren (siehe Anhang B) in ein einheitliches überführt den einfachen Zusammenhang

$$\mu = \frac{1}{T} E\{a_n\} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vartheta) d\vartheta.$$



Willkommen im Erfolgsteam. Auf Vielfalt spezialisieren

Zusammen mit der Liebherr-Hausgeräte Ochsenhausen GmbH haben Sie bereits während Ihres Studiums viele interessante Möglichkeiten. In einem Praktikum können Sie bei uns erste Berufserfahrungen sammeln. Gerne unterstützen wir Sie aber auch bei der Bearbeitung einer herausfordernden Themenstellung im Rahmen Ihrer Abschlussarbeit.

Unser Angebot:

- Mitarbeit in einem international erfolgreichen Familienunternehmen
- Abwechslungsreiches Arbeitsumfeld und faszinierende High-Tech-Produkte
- Sehr gute Möglichkeiten zum Auf- und Ausbau von Fachkompetenz und persönlichen Fähigkeiten

Bewerben Sie sich jetzt. Willkommen im Erfolgsteam.

Weitere Informationen unter:
www.liebherr.com/Karriere

LIEBHERR
Die Firmengruppe

Die Gleichleistung ist damit $S_{DC} = \mu^2$. Warum besteht dieser Unterschied zwischen deterministischem und zufälligen Signalen? Der Grund liegt dabei in der Periodizität bei der Erwartungswertbildung. Ein solches periodisches Signal nennt man Leistungssignal, da die Energie eines solchen nicht berechnet werden kann. Dies liegt auch bei einem Cosinussignal der Amplitude A und Frequenz F vor. Es lässt sich hierfür die Leistung angeben, $A^2/2$, nicht aber die Energie.

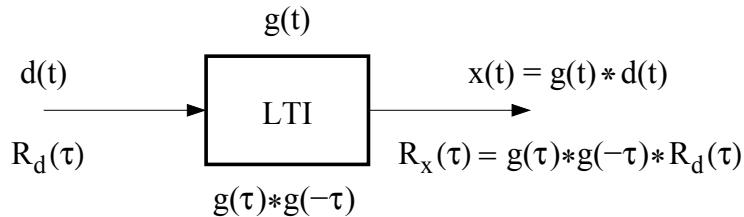


Abbildung 2.7: LTI–System und Autokorrelationsfunktionen

Die folgende Zusammenfassung umfasst die oben erzielten Ergebnisse.

$R_d(\tau)$	$=$	$\frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell \delta(\tau - \ell T)$	AKF des Datensignals
α_ℓ	$=$	$E\{a_n a_{n+\ell}\}$	AKF der Datenelemente
	$=$	$\overline{a_n a_{n+\ell}}$	Schar- gleich Zeitmittel
$R_g(\tau)$	$=$	$g(\tau) * g(-\tau)$	AKF der Impulsantwort
$R_x(\tau)$	$=$	$R_g(\tau) * R_d(\tau)$	AKF des Nachrichtensignals
S_{ges}	$=$	$\frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell R_g(\ell T)$	Gesamtleistung
μ	$=$	$\frac{1}{T} E\{a_n\} \int_{-\infty}^{\infty} g(\vartheta) d\vartheta$	Mittelwert
S_{DC}	$=$	μ^2	Gleichleistung

(2.5)

Für die betrachteten Formate sollen nun die in den Gleichungen 2.5 aufgeführten Zusammenhänge ausgewertet werden.

Polares Format

Wie oben aufgeführt, sind die Datenelemente dem Alphabet $a_n \in \{-1, +1\}$ entnommen. Es liege ein zufälliger Datenstrom vor, die Erwartungswerte sollen mit den zeitlichen Mittelwerten übereinstimmen ("Scharmittel gleich Zeitmittel"). Um rein praktisch α_ℓ zu bestimmen, und dieses Ergebnis benötigen wir zur Ermittlung der Autokorrelationsfunktionen, bedienen wir uns des Zusammenhangs

$$\alpha_\ell = E\{a_n a_{n+\ell}\} = \overline{a_n a_{n+\ell}} \approx \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} a_n a_{n+\ell}.$$

Dieser Schritt führt zu einem genaueren Ergebnis, je größer die Anzahl der Summanden ist, über die gemittelt wird. Diese sind $a_n a_{n+\ell}$ und beschreiben die Produkte

$$a_0 a_\ell, a_1 a_{1+\ell}, a_2 a_{2+\ell}, \dots, a_{M-1} a_{M-1+\ell},$$

deren Mittelwert führt zu Näherungen von α_ℓ .

Genaue Ergebnisse liefert die Berechnung der Erwartungswerte. Der lineare Mittelwert mit den Auftrittswahrscheinlichkeiten ("relative Häufigkeit") der Elemente von jeweils 50% ist $E\{a_n\} = 1/2 \cdot (-1) + 1/2 \cdot (+1) = 0$. Für die AKF ergibt dies $\alpha_\ell = E\{a_n a_{n+\ell}\} = 1/2 \cdot (-1)^2 + 1/2 \cdot (+1)^2 = 1$ für $\ell = 0$ und $\alpha_\ell = E\{a_n a_{n+\ell}\} = E\{a_n\} E\{a_{n+\ell}\} = (E\{a_n\})^2 = 0$ für $\ell \neq 0$. Der Schritt von $E\{a_n a_{n+\ell}\}$ zu $E\{a_n\} E\{a_{n+\ell}\}$ besagt, daß zwischen den Elementen keine statistischen Bedingungen bestehen (siehe kombiniertes Würfel- & Münzexperiment). Und da Mittelwertbildungen unabhängig von der Zeit sein sollen, ist $E\{a_{n+\ell}\} = E\{a_n\}$. Das Ergebnis ist folglich

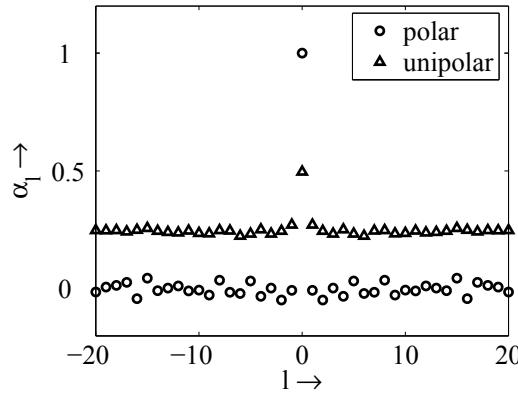
$$\alpha_\ell = \begin{cases} 1 & : \ell = 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases},$$

Theorie und Praxis stimmen gut überein, wie es Abbildung 2.8 zeigt. Hierbei erfolgte die Zeitmittelung über $M = 1000$ Werte. Da nur ein Element der Korrelationsfolge α_ℓ ungleich null ist, reduziert sich die AKF des zufälligen Datenimpulsfolge auf nur einen Impuls,

$$R_d(\tau) = \frac{1}{T} \delta(\tau).$$

Nehmen wir weiter einen rechteckförmigen Puls an, wie in Abbildung 2.1 dargestellt, nur diesmal mit der Auslenkung A , beschrieben durch

$$g(t) = A \Pi\left(\frac{t}{T}\right).$$

Abbildung 2.8: AKF der Datenelemente ($M = 1000$)

Die AKF des Pulsformungsfilters, $R_g(\tau) = g(\tau) * g(-\tau)$, ist bekanntlich

$$A \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right) * A \Pi\left(\frac{\tau}{T}\right) = A^2 T \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right),$$

wobei $\Lambda(\tau) = \Pi(\tau) * \Pi(\tau)$ den genormten Dreieckspuls als Faltung zweier genormter Rechteckpulse darstellt. Das Maximum von $R_g(\tau)$ liegt bei $\tau = 0$ und ist $A^2 T$, was der Energie des Nachrichtenpulses entspricht. Allgemein ist die Energie

$$R_g(0) = E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt,$$

im vorliegenden Fall ist es $E_g = A^2 T$, wovon man sich leicht durch die Fläche von $g^2(t)$ überzeugen kann. Mit diesem Ergebnis ergibt sich sofort die AKF des Nachrichtensignals als

$$R_x(\tau) = R_g(\tau) * R_d(\tau) = \frac{1}{T} A^2 T \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right),$$

wie in Abbildung 2.9 dargestellt.

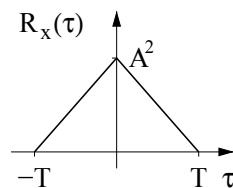
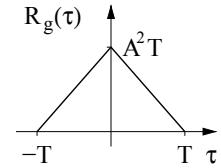


Abbildung 2.9: Autokorrelationsfunktion des polaren Nachrichtensignals

Das Maximum von $R_x(\tau)$ liegt ebenfalls bei $\tau = 0$ und ist A^2 . Trifft dies auch zu, wenn wir Gleichung 2.5 anwenden? Wir betrachten zunächst die Gesamtleistung, gegeben durch

$$S_{\text{ges}} = \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell R_g(\ell T).$$

Mit $\alpha_0 = 1$ und 0 für $\ell \neq 0$ resultiert dies zu $S_{\text{ges}} = \frac{1}{T} \alpha_0 R_g(0) = A^2$, was dem vorherigen Ergebnis entspricht. Liegt ein Gleichanteil vor? Hierzu nehmen wir

$$\mu = \frac{1}{T} E\{a_n\} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) dt$$

und erhalten wegen $E\{a_n\} = 0$ den Gleichanteil $\mu = 0$, sodaß die Gleicheistung ebenfalls gleich null ist. Das Ergebnis der Leistungsbetrachtung ist somit $S_{\text{ges}} = S_{\text{AC}} = A^2$ in einem 1Ω -System. Dies entspricht auch den Leistungen für $A = 1$, die in Tabelle 2.1 aufgeführt sind.

Das andere Format von den zweien ist vermeintlich einfacher zu beschreiben. Lassen Sie uns sehen, was es zu bieten hat.



Unipolares Format

Wie zuvor beginnen wir bei der AKF der Datenelemente, die dem Alphabet $\{0, +1\}$ entnommen sind. Praktisch ist die Auswertung des vorliegenden Datensignals, das wieder rein zufälliger Natur sein soll, d.h. mit einer relativen Häufigkeit von Nullen und Einsen von 50%. Die zeitliche Auswertung ist in Abbildung 2.8 gezeigt. Es scheint so zu sein, daß $\alpha_0 = 1/2$ und $\alpha_\ell = 1/4$ für $\ell = \pm 1, \pm 2, \dots$ ist.

Wieder liefern genaue Ergebnisse die Berechnung der Erwartungswerte. Beginnen wir mit dem linearen Mittelwert, $E\{a_n\} = 1/2 \cdot 0 + 1/2 \cdot 1 = 1/2$. Die AKF für $\ell = 0$ ist $E\{a_n^2\} = 1/2 \cdot 0^2 + 1/2 \cdot 1^2 = 1/4$. Für $\ell \neq 0$ erhalten wir $E\{a_n a_{n+\ell}\} = E\{a_n\} \cdot E\{a_{n+\ell}\}$ wegen der fehlenden Bindungen zwischen den Elementen, d.h. Unkorreliertheit, und zum Schluß $E\{a_n a_{n+\ell}\} = (E\{a_n\})^2 = 1/4$, weil die Mittelwertbildung vom Startpunkt unabhängig ist. Das Ergebnis ist damit

$$\alpha_\ell = \begin{cases} \frac{1}{2} & : \ell = 0 \\ \frac{1}{4} & : \text{sonst} \end{cases},$$

was wiederum mit den gemessenen Ergebnissen von Abbildung 2.8 übereinstimmt. Dies hat natürlich Auwirkungen auf die AKF des Datensignals, diese lautet

$$R_d(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell \delta(\tau - \ell T) = \frac{1}{4T} \delta(\tau) + \frac{1}{4T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(\tau - \ell T),$$

wobei der Impuls bei $\tau = 0$ zur Hälfte im ersten und zur anderen Hälfte im zweiten Term bei $\ell = 0$ erscheint. Es handelt sich hierbei um einen Impulskamm mit "Zinken" gleicher Abmessung, nur der bei $\tau = 0$ ist doppelt so intensiv. Hiermit ergibt sich die AKF des Nachrichtensignals zu

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= R_g(\tau) * R_d(\tau) \\ &= \frac{1}{4T} R_g(\tau) + \frac{1}{4T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} R_g(\tau - \ell T), \end{aligned} \quad (2.6)$$

es handelt sich also um $R_g(\tau)$, zentriert bei $\tau = 0$ und einer Überlagerung von unendlich vielen dieser Funktion, jeweils zentriert um $\tau = 0, \pm T, \pm 2T, \dots$. Abbildung 2.10 veranschaulicht den Zusammenhang. Wir erkennen, daß die AKF aus einer Konstanten ("Podest") und einem sich ändernden Teil besteht.

Wie zuvor sollen nun die Leistungen ermittelt werden. Die Gesamtleistung ist wie oben aufgeführt bei $\tau = 0$ ablesbar,

$$S_{\text{ges}} = R_x(0) = \frac{1}{2T} A^2 T = \frac{A^2}{2}.$$

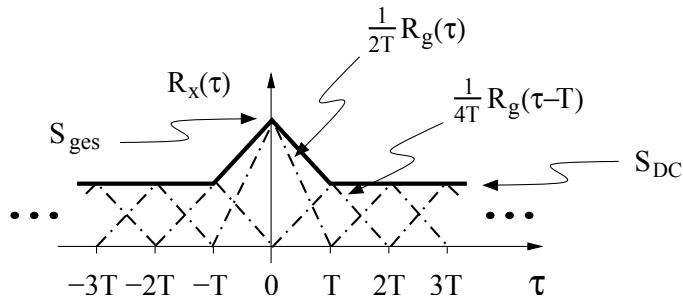


Abbildung 2.10: Autokorrelationsfunktion des unipolaren Nachrichtensignals

Die Konstante, $\frac{1}{4T} \cdot A^2 T$, liefert die Gleichleistung, die sich auch durch den Mittelwert beschreiben lässt. Nach Gleichung 2.5 ist dies $\mu = \frac{1}{2T} AT = \frac{A}{2}$, was zu der Gleichleistung $S_{DC} = \mu^2 = \frac{A^2}{4}$ führt. Die Wechselleistung ergibt sich durch die Differenz, $S_{AC} = S_{ges} - S_{DC} = \frac{A^2}{4}$, Werte, die auch für $A = 1$ in Tabelle 2.1 zu finden sind. Der aufmerksame Leser erkennt sicher den Vergleich mit den Bällen auf stürmischer See (siehe Abbildung 2.6). Das mittlere Hochwasser ("DC") hebt beide Bälle an, die darauf ihre zufälligen Bewegungen ("AC") ausführen. Die Frage, warum es sich bei zufälligen Signalen um Leistungen und nicht Energien handelt, ist somit beantwortet.

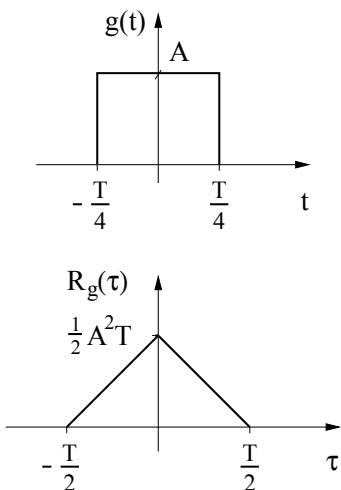
Beispiel:

In Abbildung 2.2 ist das polare RZ Format aufgeführt. Wir wollen in diesem Beispiel zunächst die AKF des unipolaren RZ Formats bestimmen und damit feststellen, wie die Leistungen sich hierfür aufteilen.

Nachdem das unipolare NRZ Format ausgiebig behandelt worden ist, lassen sich die Ergebnisse mit Hilfe von Abbildung 2.11 leicht finden. Zuerst stellen wir die Signalsituation fest. Der Puls habe nun die Dauer $T/2$ und Auslenkung A , die AKF hiervon ist daher dreieckförmig und erstreckt sich von $-T/2$ bis $T/2$, die Auslenkung hiervon ist die Energie des deterministischen, d.h. bekannten Anteils, $A^2 \cdot T/2$, wie es

$$g(t) = A \Pi\left(\frac{t}{T/2}\right) \quad \text{und} \quad R_g(\tau) = \frac{1}{2} A^2 T \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right)$$

kurz beschreiben. Es liegt ein unipolares Format vor, die AKF der Datenelemente ist



damit $\alpha_0 = 1/2$ und $\alpha_\ell = 1/4$ für $\ell \neq 0$. Abbildung 2.10 zeigt, wie sich die AKF des Nachrichtensignals zusammensetzt, nämlich aus einer Überlagerung von gewichteten und verschobenen AKFn $R_g(\tau)$. Da im Vergleich zum NRZ Format hierbei der Puls und damit die AKF gestaucht ist, ergibt sich nicht mehr ein sofort erkennbarer konstanter Anteil ("Podest"). Wenn die AKF jedoch in einen periodischen und einen aperiodischen Teil

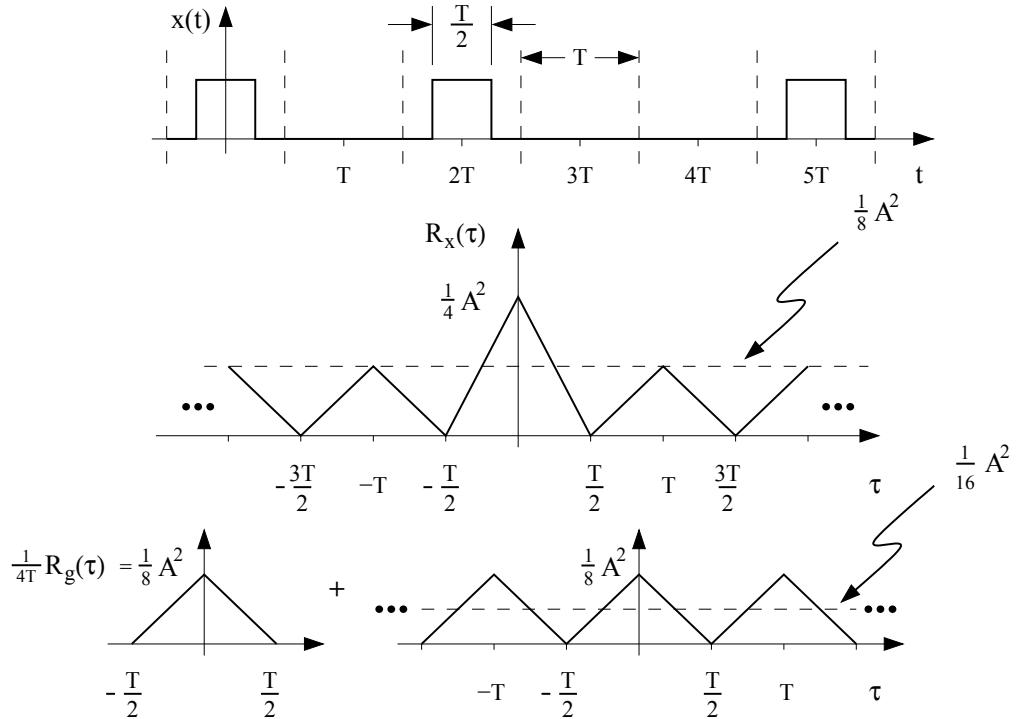


Abbildung 2.11: Nachrichtensignal und AKF für unipolares RZ Format

aufgespalten wird, erkennt man sofort einen Gleichanteil. Dieser ist nach Inspektion von Abbildung 2.11 $A^2/16$. Kann dies sein? Zuerst ermitteln wir den Mittelwert des Nachrichtensignals, der $\mu = \frac{1}{T} \frac{1}{2} \cdot A \frac{T}{2} = \frac{A}{4}$ beträgt. In einem 1Ω -System ist die Gleicheistung damit $S_{DC} = \mu^2 = A^2/16$, was dem Podest entspricht. Für die Gesamtleistung werten wir die AKF bei $\tau = 0$ aus und erhalten $S_{ges} = A^2/4$. Somit ist die Wechselleistung dann $S_{AC} = S_{ges} - S_{DC} = 3A^2/16$ vor. Der Vergleich der Leistungswerte zeigt eine Aufteilung von AC-Leistung zu DC-Leistung von 3:1. Der interessierte Leser mag sich hiervon mit der weiter oben gezeigten herkömmlichen Methode überzeugen.

Bisher galt der Autokorrelationsfunktion zur Beschreibung des mittleren Verhaltens des Nachrichtensignals unser Augenmerk. Dieser Funktion kann entnommen werden, wie stark statistische Bindungen sich ändern. Daneben liefert diese direkte Aussagen über die Verteilung der Signalleistungen.

2.2.3 Leistungsdichespektrum

Das Leistungsdichespektrum (LDS) zeigt an, wie sich die Leistung des Nachrichtensignals in Abhängigkeit von der Frequenz verteilt. Sie erlaubt auch Aussagen hinsichtlich der Bandbreite von $x(t)$ und der spektralen Form im allgemeinen. Das Leistungsdichespektrum und die Autokorrelationsfunktion bilden ein Paar der Fourier–Transformation. Anhang A zeigt die wichtigsten Theoreme und Paare der Fourier–Transformation. Ein gewisses Maß an Grundkenntnissen sei vorausgesetzt, auf die hier und dort auch detaillierter eingegangen wird.

Die AKF beschreibt, wie sich die Leistung im Zeitbereich zusammensetzt, die Einheit der AKF ist Watt. Ausgehend von

$$R_x(\tau) = R_g(\tau) * R_d(\tau) \quad \longleftrightarrow \quad S_x(f) = S_g(f) \cdot S_d(f)$$

The advertisement features a central photograph of a teacher smiling and interacting with two young students who are looking at a laptop screen. The background is a yellow and orange abstract design. In the top left corner is the logo for "e-learning for kids". In the bottom right corner, there is a green oval containing three bullet points: "The number 1 MOOC for Primary Education", "Free Digital Learning for Children 5-12", and "15 Million Children Reached". At the bottom, there is a block of text about the organization's history and impact.

About e-Learning for Kids Established in 2004, e-Learning for Kids is a global nonprofit foundation dedicated to fun and free learning on the Internet for children ages 5 - 12 with courses in math, science, language arts, computers, health and environmental skills. Since 2005, more than 15 million children in over 190 countries have benefitted from eLessons provided by EFK! An all-volunteer staff consists of education and e-learning experts and business professionals from around the world committed to making difference. eLearning for Kids is actively seeking funding, volunteers, sponsors and courseware developers; get involved! For more information, please visit www.e-learningforkids.org.

erhalten wir mit

$$R_g(\tau) = g(\tau) * g(-\tau) \longleftrightarrow S_g(f) = G(f) \cdot G^*(f)$$

und

$$\begin{aligned} R_d(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell \delta(\tau - \ell T) \\ &\uparrow \\ S_d(f) &= \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell e^{-j2\pi f \ell T} \end{aligned}$$

das gesuchte LDS

$$S_x(f) = \frac{1}{T} |G(f)|^2 \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell e^{-j2\pi f \ell T}.$$

Um den Zusammenhang mit der Leistung darzustellen, betrachten wir die Synthesegleichung der Fourier–Transformation

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f \tau} df.$$

Die Gesamtleistung ergibt sich aus der AKF für $\tau = 0$, was zu

$$S_{\text{ges}} = R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

führt. Die Fläche unter dem Leistungsdichtespektrum ist die Gesamtleistung, die Einheit des LDS ist Watt pro Hertz.

Was noch fehlt, ist die Aufteilung von Gleich– und Wechselleistung. Um diese Aufgabe zu lösen, muß ein konstanter Anteil ("Podest") in der AKF aufgespürt werden, wie es Abbildung 2.12 zeigt. Wo findet sich im Spektrum der Gleichanteil wieder? Ist es der Wert $S_x(0)$, also bei $f = 0$? Daß dies nicht zutrifft, läßt sich anhand einer kurzen Betrachtung darlegen.

Wir schreiben hierzu die AKF um in einen konstanten und nichtkonstanten Teil,

$$R_x(\tau) = S_{\text{AC}} R(\tau) + S_{\text{DC}},$$

mit $R(\tau = 0) = 1$. Der erste Term beschreibt dann den wechselhaften Teil der AKF, der für die Wechselleistung verantwortlich ist, der zweite Term beschreibt die Konstante und damit die Gleichleistung. Die Gesamtleistung ist bei $\tau = 0$ wie zuvor $S_{\text{ges}} = S_{\text{AC}} +$

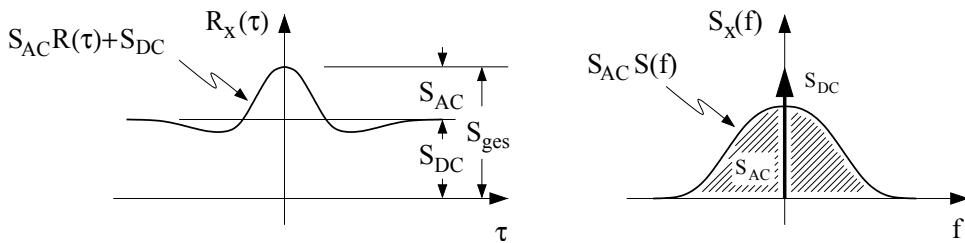


Abbildung 2.12: AKF, LDS und Leistungsaufteilung

S_{DC} . Wenden wir auf $R_x(\tau)$ die Fourier-Transformation an, finden wir bei $f = 0$ einen Impuls mit Gewicht S_{DC} . Der AC-Term resultiert in der Frequenzfunktion $S_{AC}S(f)$, wobei $R(\tau) \leftrightarrow S(f)$ und $R(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f)df = 1$, also entspricht die Wechselleistung der schraffierten Fläche ohne dem Impuls. Die Gesamtfläche gibt dann die Gesamtleistung an. Nur wenn das Spektrum bei $f = 0$ einen Impuls ("Nadel") aufweist, deutet es auf einen Gleichanteil bei $R_x(\tau)$ und $x(t)$ hin.

Gleichung 2.7 faßt Eigenschaften des Leistungsdichthespektrums zusammen. Die Natur hilft dabei, die letzten beiden Aussagen zu erklären. Die Leistung ist eine reelle Größe, sodaß dies auch auf das LDS zutrifft. Warum kann das LDS nicht negativ sein? Falls dem

SELBSTÄNDIGE VERKAUFSPEZIALISTEN/INNEN für Österreich

Bookboon, der weltweit größte Fachbuchverlag für e-books, mit jährlich mehr als 1,3 Mio. Unique Downloads und 6,6 Mio Leser in Österreich sucht.

Ihre Qualifikationen

- Verkaufs- und Organisationstalent mit hoher Begeisterungsfähigkeit
- Gute Kenntnis des österreichischen HR- bzw. Werbemarktes und deren Entscheidungsträger ist von Vorteil
- Gute Englisch- sowie perfekte Deutschkenntnisse in Wort und Schrift sind Grundvoraussetzung

Unser Angebot

- Interessante und abwechslungsreiche Vertretung von Produkten mit hohem Kundennutzen und tollen Referenzen
- Ein modernes und äußerst erfolgreiches Unternehmen mit flachen Hierarchien und angenehmen Betriebsklima
- Regelmäßige nationale und internationale Aus- und Weiterbildungen
- Ab dem dritten Jahr sind € 150.000,- Jahresbrutto und mehr realistisch

Bei Interesse senden Sie bitte Ihre aussagekräftige Bewerbung an Fr. Mag. Isabelle Kerschbaum, MSc: ike@bookboon.com oder +43 664 124 16 09



bookboon.com

so sei, trüte eine negative Leistung auf. Da wir jedoch ein Nachrichtensignal erzeugen, ist das LDS stets größer oder gleich null.

	$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{j2\pi f \tau} df$	Korrelationsfunktion
↑		
	$S_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j2\pi f \tau} df$	Leistungsdichtespektrum
	$S_x(f) \leftrightarrow R_x(\tau)$	
	$S_x(f) = S_g(\tau) \cdot S_d(\tau)$	
	$S_g(f) = G(f) ^2$	
	$S_d(f) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_{\ell} e^{-j2\pi f \ell T}$	
	$S_{\text{ges}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$	Gesamtleistung
	$S_{\text{DC}} \delta(f)$	Gleichleistung
	$S_x(f) = S_x^*(f)$	reelles LDS
	$S_x(f) \geq 0$	LDS nicht negativ

(2.7)

Um den Zusammenhang zwischen AKF und LDS nun darzulegen, betrachten wir wieder das unipolare RZ Format. Der nachrichtentragende Puls und die zugehörige AKF sind in dem letzten Beispiel dargestellt. Zur weiteren Berechnung des Spektrums ist die Beschreibung durch Formelausdrücke hilfreich,

$$g(t) = A \Pi\left(\frac{t}{T/2}\right) \quad \text{und} \quad R_g(\tau) = \frac{A^2 T}{2} \Lambda\left(\frac{\tau}{T/2}\right).$$

Die AKF des Nachrichtensignals und deren Aufteilung in einen aperiodischen Anteil und einen periodischen zeigt Abbildung 2.11. Wir möchten nun das Leistungsdichtespektrum des Nachrichtensignals ermitteln, ohne zu sehr in die Fourier–Transformation einzugehen. Einige Grundlagen sollen hierbei aber anhand dieses Beispiels zur Anwendung kommen.

Zuerst halten wir fest, daß die AKF des Pulses sich durch die Faltung $g(\tau) * g(-\tau)$ zusammensetzt. Nach Gleichung 2.7 benötigen wir zunächst die Übertragungsfunktion

des Pulsformungsfilters, $G(f)$, woraus sich sofort dessen AKF ergibt,

$$G(f) = A \frac{T}{2} \operatorname{si}\left(\pi f \frac{T}{2}\right) \quad \text{und} \quad S_g(f) = |G(f)|^2 = \frac{A^2 T^2}{4} \operatorname{si}^2\left(\pi f \frac{T}{2}\right).$$

Wem die si-Funktion und der Zusammenhang mit der Π -Funktion nicht geläufig ist, sei auf Anhang A verwiesen. Mit diesem Zwischenergebnis erhalten wir für das LDS des aperiodischen Terms (siehe Abbildung 2.11)

$$\frac{1}{4T} S_g(f) = \frac{A^2 T}{16} \operatorname{si}^2\left(\pi f \frac{T}{2}\right).$$

Der periodische Term weist die Periode T auf, die periodisch fortgesetzte Grundfunktion ist $\frac{1}{4T} R_g(\tau)$ mit dem Spektrum $\frac{1}{4T} S_g(f)$. Dieser Term lässt sich mit Hilfe einer Fourier-Reihe beschreiben (siehe Anhang A), das Ergebnis hiervon ist

$$\frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4T} S_g\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right),$$

womit wir letztendlich das LDS des betrachteten unipolaren RZ Formats erhalten,

$$\begin{aligned} S_x(f) &= \frac{1}{4T} S_g(f) + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{4T} S_g\left(\frac{n}{T}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{A^2 T}{16} \operatorname{si}^2\left(\pi f \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A^2 T}{16} \operatorname{si}^2\left(\pi \frac{n}{T} \frac{T}{2}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T}\right). \end{aligned}$$

Das Leistungsdichtespektrum setzt sich aus einem frequenzkontinuierlichen Anteil zusammen, der von der aperiodischen AKF herrührt, und einem Linienspektrum, hervorgerufen durch den periodischen Anteil der AKF. Welches Gewicht hat die Linie bei $f = 0$? Dieses erhalten wir für $n = 0$ als $\frac{1}{T} \frac{A^2 T}{16} \operatorname{si}^2(0) = \frac{A^2}{16}$, es entspricht tatsächlich der Gleichleistung, wie bereits oben im Beispiel berechnet.

Dem praktisch veranlagten Ingenieur bietet die Natur die Möglichkeit, Ergebnisse zu überprüfen. Vergleichen wir die Abbildungen 2.13¹ und 2.14, erkennen wir jeweils einen frequenzkontinuierlichen Anteil und einen linienförmigen. Während die theoretische Lösung wohlgeformt ist, verhält es sich bei der meßtechnischen Lösung nicht so. Dies liegt darin, daß die Zufälligkeit mit dem Spektralanalysator herausgemittelt werden muß, das LDS ist somit das mittlere Spektrum des Nachrichtensignals. Zudem ist das Meßergebnis im halblogarithmischen Maßstab dargestellt, das Rechenergebnis jedoch im linearen Maßstab. Auffallend ist zudem, daß ab 3400 Hz ein Filter aktiv ist, Spektralanteile oberhalb dieser

¹Diese Abbildung zeigt einen idealisierten oder geschönten Verlauf, da die Impulse natürlich unendlich lang sind. Die Gewichte sind natürlich $\frac{1}{T} \frac{1}{4T} S_g\left(\frac{n}{T}\right)$ und nicht deren Länge. Um die verschiedenen Gewichte hervorzuheben, zeichnet man die Impulse oft mit unterschiedlichen Längen.

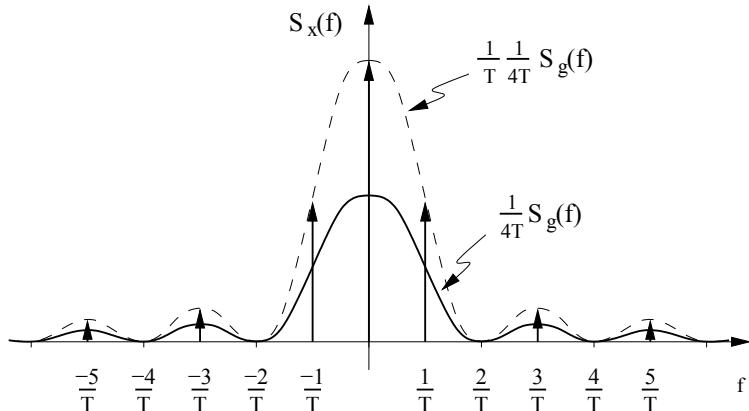
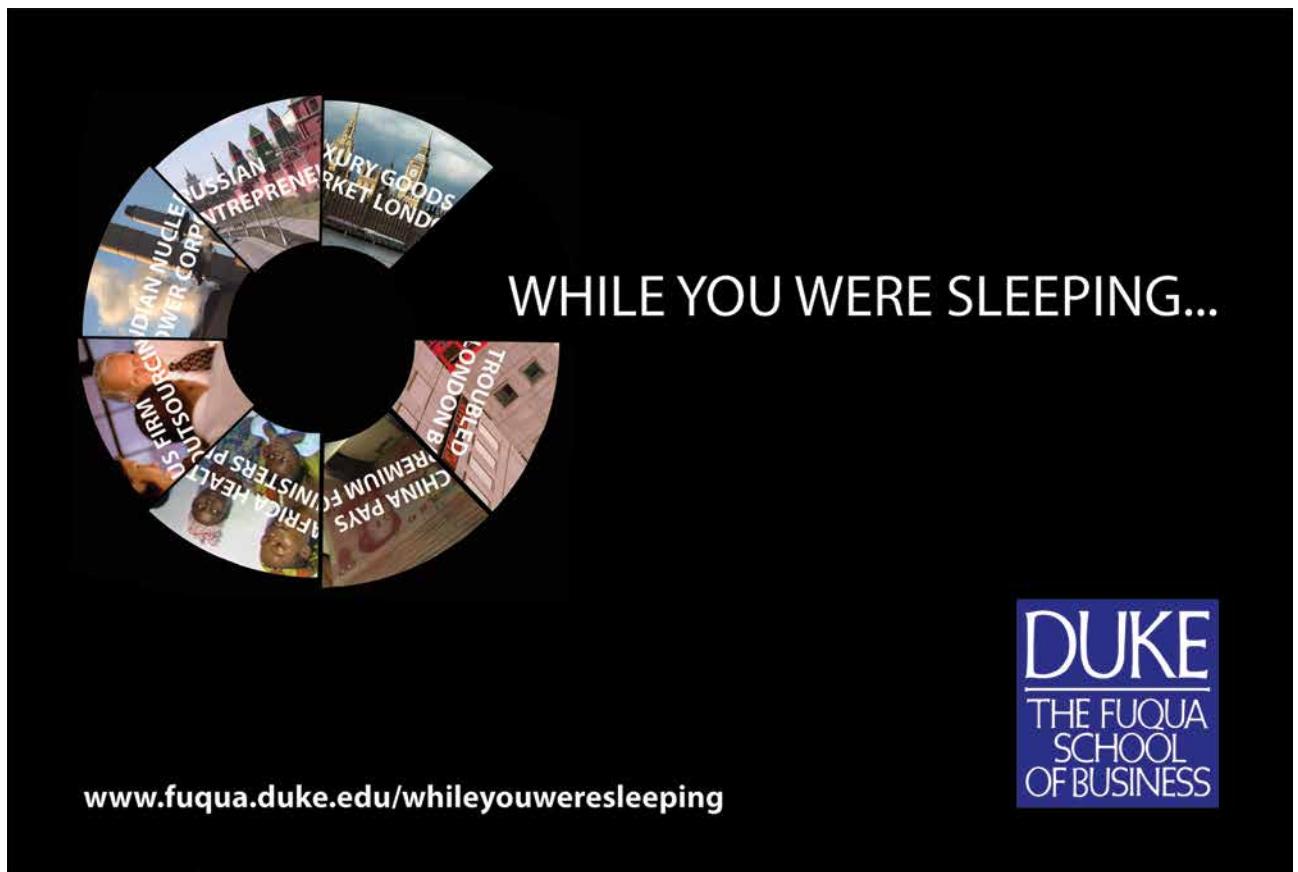


Abbildung 2.13: Leistungsdichtespektrum des unipolaren RZ Formats

Grenzfrequenz werden weitestgehend unterdrückt. Der Grund hierfür liegt daran, daß das Signal mit Hilfe eines digitalen Signalprozessors generiert wurde. Und da im Digital-Analog-Umsetzer ein Anti-Aliasing Filter mit eben dieser Grenzfrequenz zum Einsatz kommt (3.4 kHz bei 8 kHz Abtastrate), ist die Ursache für diese Frequenzunterdrückung bekannt. Wir erkennen an dem Meßergebnis bei $f = 0$ eine Frequenzlinie, die auf einen Mittelwert im Nachrichtensignal hindeutet. Zudem sind Frequenzlinien ersichtlich. Die



erste liegt bei $f = 500$ Hz, was auf eine Signalrate von $r_S = 1/T = 500$ Pulsen pro Sekunde hinweist, die erste Nullstelle des gemittelten frequenzkontinuierlichen Anteils liegt bei 1000 Hz. Die Einhüllende zeigt Nullstellen in diesem Abstand, die Form deutet auf einen rechteckförmigen Verlauf hin, der ein si-förmiges Spektrum hat. Der Vergleich von Theorie und Praxis zeigt eine gute Übereinstimmung.

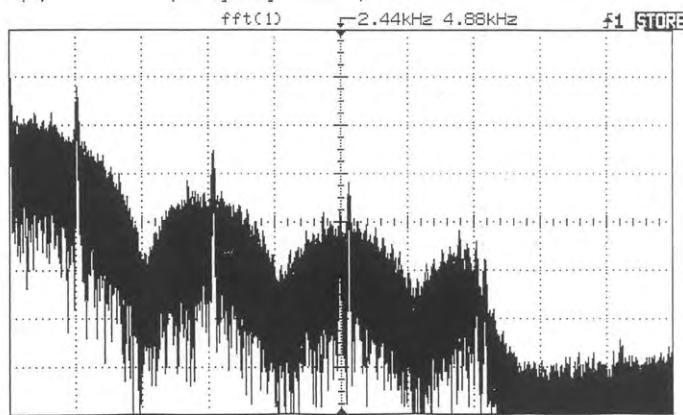
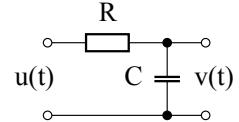


Abbildung 2.14: Gemessenes LDS eines unipolaren RZ Formats

Beispiel:

Nachrichtenelemente des Alphabets $\{-1, +1\}$ sollen übertragen werden, ein RC-Glied ist dabei das pulsformende Filter mit der Auslenkung 10^{-2} . Die Übertragungsrate sei $r_S = 1/T = 500$ Pulse pro Sekunde, für die Zeitkonstante gilt $D = RC = 1$ ms. Gefragt sind die AKF, das LDS und die Leistungen in einem 50Ω -System.



Aus den Grundlagenfächern der Elektrotechnik ist die Impulsantwort eines RC-Gliedes bekannt,

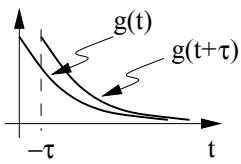
$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{D} e^{-\frac{t}{D}} & : t \geq 0 \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Hieraus resultiert die AKF

$$\begin{aligned} R_g(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau)dt \\ &= \int_{-\tau}^{\infty} \frac{1}{D} e^{-\frac{t}{D}} \cdot \frac{1}{D} e^{-\frac{t+\tau}{D}} dt, \quad -\tau \geq 0 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2D} e^{-\frac{|\tau|}{D}}, \quad -\infty < \tau < \infty,$$

mit $A = 1$ und in einem 1Ω -System. In einem 50Ω -System mit Auslenkung A muß $R_g(\tau)$ mit dem Faktor $\frac{A^2}{50}$ belegt werden.



Der Weg ist kurz aufgezeigt, der interessierte Leser möge dieses Ergebnis aber selbst bestätigen. Gewöhnungsbedürftig ist $-\tau$, um in die rechte Halbebene zu gelangen. Dies trifft nur für negative Werte von τ zu, wie im Zuständigkeitsbereich vermerkt. Weiterhin ist die Symmetriebeziehung $R_g(\tau) = R_g(-\tau)$ sehr hilfreich, d.h. die AKF reeller Signale ist eine gerade Funktion, womit die Betragsstriche erklärt sind. Mit diesen Hinweisen dürfte es aber nicht problematisch sein, das Ergebnis für $R_g(\tau)$ selbst zu ermitteln.

Es handelt sich hierbei um ein polares Format, die AKF des Nachrichtensignals ergibt sich damit zu

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{50} \cdot R_g(\tau) * \frac{1}{T} \delta(\tau) = \frac{A^2}{50} \frac{1}{T} \frac{1}{2D} e^{-\frac{|\tau|}{D}}, \quad -\infty < \tau < \infty,$$

in dem 50Ω -System mit $\alpha_\ell = 1$ für $\ell = 0$ und null sonst. Mit der Tabelle für Paare der Fourier-Transformation erhalten wir für das LDS

$$S_x(f) = \frac{A^2}{50} \frac{1}{T} \cdot \frac{1}{1 + (2\pi f D)^2}.$$

Da kein Impuls bei $f = 0$ vorliegt und damit auch die AKF nicht auf einem "Podest" liegt, ist die Gleichleistung gleich null. Die Gesamtleistung ist folglich gleich der Wechselleistung mit dem Wert $\frac{A^2}{50} \cdot \frac{1}{2D} = 1$ mW in 50Ω .

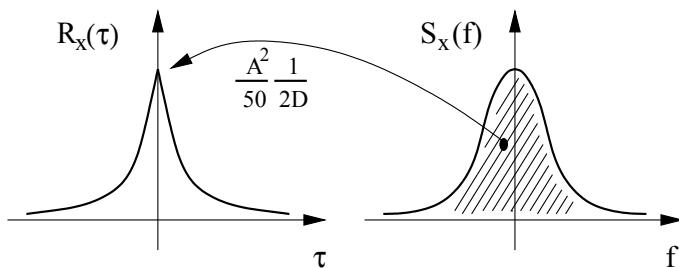


Abbildung 2.15: AKF und LDS für Exponentialsignal

2.3 Grenzen der Übertragung

Bislang galt unser Augenmerk dem Sendesignal, $x(t)$, das den Sender in reinster Form verläßt. Es treten jedoch Kanaleinflüsse auf, wenn das Signal den Sender verläßt, wie bereits bei der Betrachtung des Nachrichtenmodells aufgeführt. Das Signale $x(t)$ durchläuft den Kanal, wobei Disperion auftritt und Rauschen überlagert wird. Am Empfangsort liegt dann $r(t) = x(t) * h(t) + n(t)$ vor, wobei $h(t)$ die Impulsantwort des Kanals ist und $n(t)$ das allgegenwärtige Rauschen darstellt. Die Übertragungsrate der Pulse sei $r_S = 1/T$, die nachrichtentragenden Pulse kommen im Abstand T einher. Was liegt nun näher, das Empfangssignal zu den Zeiten kT auszutasten, um die Nachrichtenelemente zu detektieren? Wir erhalten

$$r(kT) = a_k z(-t_0) + \underbrace{\sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq k}}^{\infty} a_n z(kT - nT - t_0)}_{\text{ISI}} + n(kT),$$

mit $z(0) = h(t) * g(t)|_{t=0} = 1$, die Laufzeit t_0 sei noch ohne Belang, wir nehmen hierfür null an. Der gestörte Puls ist $z(t)$, die Summe stellt Signalüberlauf oder Überlagerungen benachbarter Pulse dar, genannt Intersymbolinterferenz (ISI), Rauschen ist das neben dem Nutzsignal aufgenommene Rauschen. Diese Kombination aus Rauschen und ISI resultiert in Fehlern, wie in Abbildung 2.16 dargestellt, die Ursachen hiervon sind natürlich weitestgehend zu minimieren. Das Empfangssignal $r(t)$ weicht deutlich von dem Sendesignal $x(t)$

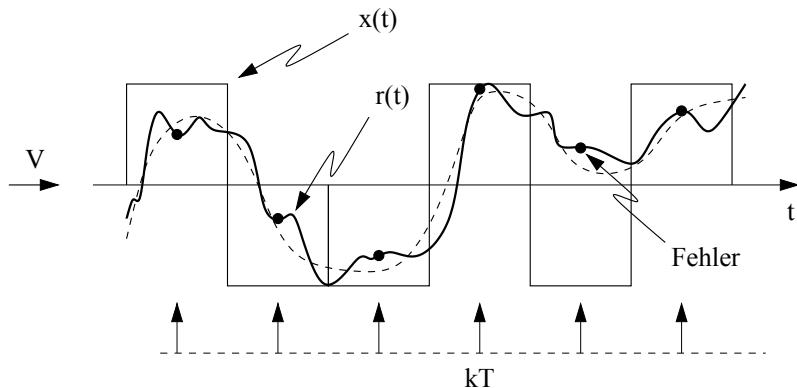


Abbildung 2.16: Sende-, Empfangssignal und Fehler

ab. Gezeigt ist ein polares RZ Format, man muß zu den Austastzeiten nur das Vorzeichen auswerten. Dazu ist eine Schwelle V vorgegeben, hier ist $V = 0$. Liegt der Wert oberhalb dieser Schwelle, wird für einen gesendeten positiven Puls entschieden, liegt er darunter,

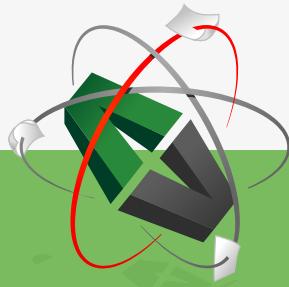
ist es wohl ein negativer. Fehlentscheidungen sind unvermeidlich.

Liegt ein Kanal mit Leistungsbegrenzung vor, dominiert das Rauschen. Spielt die Bandbreite keine Rolle, ist ISI eher vernachlässigbar, da schnelle Signaländerungen möglich sind. Der Empfänger muß ein weitestgehend rauschimmunes Verhalten aufweisen, um ein optimales S/R zu den Austastzeiten zu gewährleisten. Bei einem Kanal mit begrenzter Bandbreite tritt Rauschen eher in den Hintergrund, ISI ist vorherrschend. Der Entwurf des Empfangsfilters muß hierauf abgestimmt sein.

2.4 Rauschen und Fehler

Zunächst widmen wir uns dem allgegenwärtigen Rauschsignal. Die Quellen von Rauschgrößen sind die Natur und auch menschengemachte Prozesse. Viele Signale ergeben für sich betrachtet einen Sinn, die Summe aller hingegen wirken sich als Rauschen aus. Auch Brownsche Molekularbewegungen resultieren in Signale, die sich durch Rauschspannungen bemerkbar machen. Eine Vielzahl von zufälligen Signalen, wovon jedes einzelne einen relativ zur Gesamtsumme sicher unbedeutenden Beitrag liefert, ergibt ein Rauschsignal mit einer besonderen Eigenschaft. Schon Johann Carl Friedrich Gauß hat dies erkannt und formulierte den zentralen Grenzwertsatz, der besagt, daß bei einer Überlagerung von un-

This e-book
is made with
SetaPDF



PDF components for PHP developers

www.setasign.com

abhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen, deren Erwartungswert und Varianz endlich sind, die Summe normalverteilt ist. Im nachhinein bezeichnet man dies auch als Gauß-Verteilung. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion nennt man auch schlicht Glockenkurve, sie ist jedem bekannt.

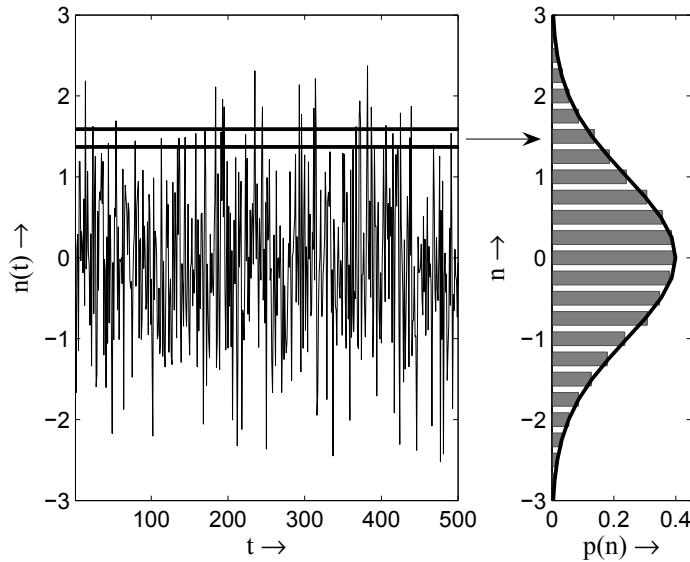


Abbildung 2.17: Gaußverteiltes Rauschen

Abbildung 2.17 zeigt ein Rauschsignal, $n(t)$, deutlich sind die regellosen Schwankungen zu erkennen. Im Mittel läßt sich dieses Signal durch die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p(n)$ beschreiben. Diese ist erforderlich, um etwa die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, daß der Rauschwert innerhalb eines bestimmten Bereiches liegt. Ist dieser $n_u < n < n_o$, berechnet sich die Wahrscheinlichkeit durch $P\{n_u < n < n_o\} = \int_{n_u}^{n_o} p(n)dn$. Es liegt hier jedoch nur eine Musterfunktion vor, sodaß ein Zeitmittelwert ausreichen muß, um $p(n)$ zu ermitteln. Nehmen wir das gezeigte Rauschsignal, es sei durch $N = 500$ Rauschwerte gegeben. Wir wählen einen Schlitz der Breite Δ , platzieren diesen bei $n = 1.5$ und ermitteln die Anzahl der Rauschwerte, N_n , die in diesem Schlitz liegen, es sind weniger als N . Die relative Häufigkeit N_n/N kann sicher als Näherung für die Wahrscheinlichkeit angesehen werden, daß Werte in dem Bereich liegen,

$$\frac{N_n}{N} \approx P\left\{n - \frac{\Delta}{2} < n < n + \frac{\Delta}{2}\right\} \approx p(n)\Delta.$$

Hiermit läßt sich die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion berechnen, das Ergebnis ist rechts

von dem Rauschsignal dargestellt. Wir erkennen den glockenförmigen Verlauf, der die Verteilung der Rauschwerte angibt.

Johann Carl Friedrich Gauß fand schon vor einiger Zeit einen Ausdruck, der diese Verteilung angibt,

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < n < \infty.$$

Diese Kurve ist für jeden Wert von n gegeben. Ein Ergebnis ist etwa, daß kleine Rauschwerte häufiger und damit wahrscheinlicher sind als größere. Die gaußsche Kurve ist durch einen Parameter beschrieben, nämlich σ , der im wesentlichen die Aufbauchung oder Dehnung von $p(n)$ angibt. Das Maximum dieser Kurve liegt bei $n = 0$, da es sich um ein mittelwertfreies Rauschsignal handelt. Erfreulicherweise fanden die

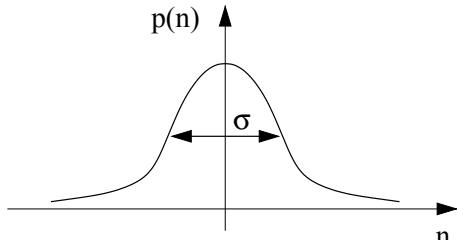


Abbildung 2.18: 10 DM–Schein und Gauß

Beiträge von Gauß ihre Anerkennung auch darin, daß jeder im Lande auf dessen Leistung und Errungenschaften aufmerksam gemacht wurde. Der alte 10 DM Schein trägt sein Bild, im Hintergrund ist auch die nach ihm benannte gaußsche Glockenkurve zu erkennen.

Nun steht noch die Frage an, wie Auftrittswahrscheinlichkeiten in Verbindung mit gaußschem Rauschen berechnet werden können. Abbildung 2.19 veranschaulicht die Vorgehensweise. Das Problem bestehe darin, die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, mit der das Gaußverteilte Rauschen, $n(t)$, größer als die Schwelle V ist. Da die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegeben ist, reduziert sich die Aufgabe auf eine Flächenbetrachtung, wie durch

$$P\{n > V\} = \int_V^\infty p(n)dn$$

beschrieben und in der Abbildung dargestellt.

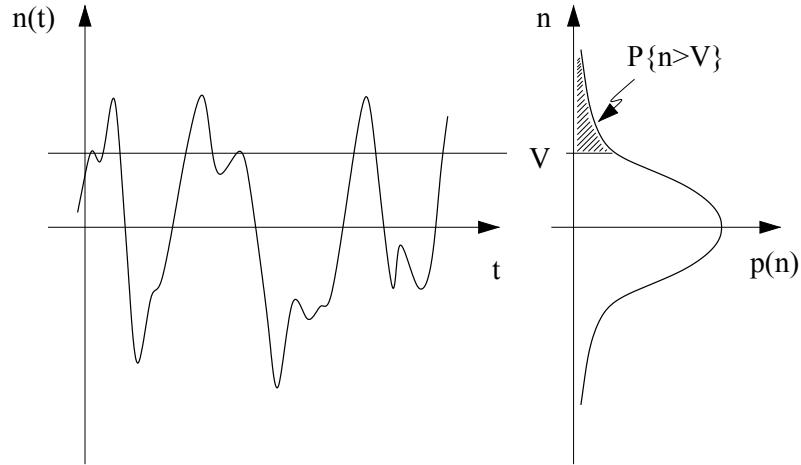


Abbildung 2.19: Rauschen und Wahrscheinlichkeit

Üblicherweise ist Rauschen einem Wert überlagert, den es zu detektieren gilt, sodaß sich dieser Ausdruck zu

$$P\{n + A > V\} = P\{n > V - A\} = \int_{V-A}^{\infty} p(n)dn$$

ändert. Wird $p(n)$ eingesetzt, stellen wir fest, daß das Integral nicht geschlossen lösbar ist. Ausgehend von

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{V-A}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn$$

ändern wir die Variable $n = \sigma v$ und erhalten über $dn = \sigma dv$ sowie den Grenzen $v_u = \frac{V-A}{\sigma}$ und $v_o = \infty$ den Ausdruck

$$P\{n > V - A\} = P\left\{v > \frac{V-A}{\sigma}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{V-A}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = Q\left(\frac{V-A}{\sigma}\right).$$

Eingeführt wurde hier die Q -Funktion,

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{v^2}{2}} dv,$$

mit deren Hilfe sich Wahrscheinlichkeiten für Rauschen mit Gaußverteilung leicht berechnen lassen. Abbildung 2.20 zeigt den Funktionsverlauf.

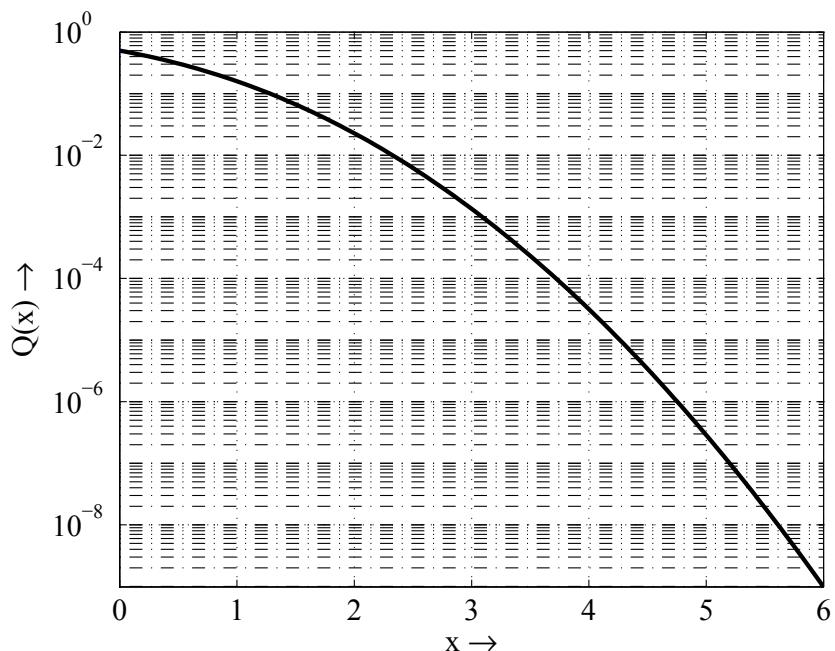


Abbildung 2.20: Q-Funktion, siehe auch Anhang C

**Technical training on
WHAT you need, WHEN you need it**

At IDC Technologies we can tailor our technical and engineering training workshops to suit your needs. We have extensive experience in training technical and engineering staff and have trained people in organisations such as General Motors, Shell, Siemens, BHP and Honeywell to name a few.

Our onsite training is cost effective, convenient and completely customisable to the technical and engineering areas you want covered. Our workshops are all comprehensive hands-on learning experiences with ample time given to practical sessions and demonstrations. We communicate well to ensure that workshop content and timing match the knowledge, skills, and abilities of the participants.

We run onsite training all year round and hold the workshops on your premises or a venue of your choice for your convenience.

**For a no obligation proposal, contact us today
at training@idc-online.com or visit our website
for more information: www.idc-online.com/onsite/**

Phone: +61 8 9321 1702
Email: training@idc-online.com
Website: www.idc-online.com

**OIL & GAS
ENGINEERING**

ELECTRONICS

**AUTOMATION &
PROCESS CONTROL**

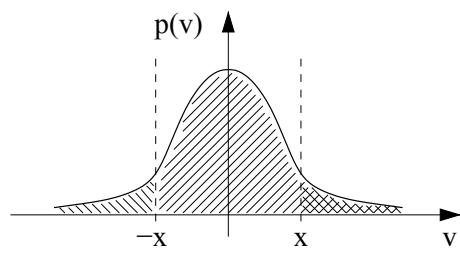
**MECHANICAL
ENGINEERING**

**INDUSTRIAL
DATA COMMS**

**ELECTRICAL
POWER**

Einige Eigenschaften der Q -Funktionen sind:
(1.) Mit wachsendem Argument $x > 0$ nimmt der Funktionswert ab. (2.) Sie nimmt mit moderatem Zuwachs von x rapide ab, wie es auch Abbildung 2.20 zeigt. (3.) Allgemein gilt $Q(x) + Q(-x) = 1$, sodaß für negative Argumente der Wert durch $Q(-x) = 1 - Q(x)$ gegeben ist. Dies ist durch eine reine Flächenbetrachtung sofort ersichtlich, da die Gesamtfläche gleich eins ist und

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(v)dv = 1 = \int_{-\infty}^{-x} p(v)dv + \int_{-x}^{\infty} p(v)dv = \underbrace{\int_x^{\infty} p(v)dv}_{=Q(x)} + \underbrace{\int_{-x}^{-x} p(v)dv}_{=Q(-x)}.$$



Oft ist in der Praxis auch eine andere Funktion als die Q -Funktion zu finden. Die Fehlerfunktion etwa ist durch

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-v^2} dv$$

gegeben. Sie läßt sich in die Q -Funktion transformieren.

In vielen praktischen Anwendungen reicht es vollkommen aus, einen Schätzwert für Entscheidungsfehler zu verwenden. Auch obere Grenzwerte hierfür sind oft zu finden. Soll etwa der Fehlerwert von 10^{-6} im Durchschnitt nicht überschritten werden, sollte das Argument von $Q(x)$ den Wert 4.8 nicht unterschreiten. Nimmt man etwa eine (grobe) Schätzung, um dem Integral zu entgehen, wie etwa

$$Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

und löst dies nach nach dem Argument x auf, erhält man über

$$x > \sqrt{-2 \ln(\sqrt{2\pi} \cdot Q(x))} \approx 5.1.$$

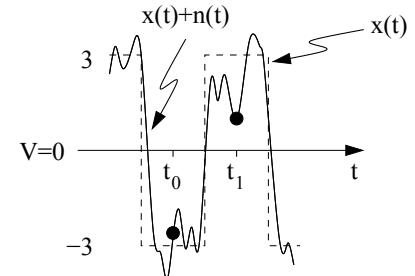
Diese Abschätzung reicht für die meisten Probleme in der Praxis aus. Der praktizierende Nachrichtingenieur greift auch oft auf die graphische Darstellung der Q -Funktion zurück, wie sie in Anhang C dargestellt ist. Die dadurch erzielte Genauigkeit ist für praktische Belange vollkommen ausreichend.

Zusammengefaßt erhalten wir

$$\begin{aligned}
 Q(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\
 Q(x) &= 1 - \Phi(x), \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{v^2}{2}} dv \\
 Q(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad \operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) \\
 Q(x) &= 1 - Q(-x)
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Beispiel:

Ein Signal mit **polarem NRZ Format** sei verrauscht. Für eine logische Null liege ein Rechteckpuls der Auslenkung -3 , für eine logische Eins die Auslenkung $+3$ vor. Die Nachrichtenelemente seien gleichverteilt. Das Rauschsignal sei gaußverteilt mit Effektivwert $\sigma = 2$. Für die Auftrittswahrscheinlichkeiten der Auslenkungsstufen gilt $P(+3) = P(-3) = 1/2$. Bestimmen Sie die Fehlerrate, wenn die Vorzeichen ausgewertet werden sollen.



Eine logische Null ist durch $x(t_0) + n(t_0) = -3 + n$ dargestellt. Ist dieser kleiner als null, liegt kein Fehler vor. Zur Detektion werde die Schwelle $V = 0$ gewählt, da dies der Mittelwert zwischen $+3$ und -3 ist. Für den Fehlerfall gilt

$$P_{e0} = P\{n - 3 > 0\} = P\{v > \frac{3}{2}\} = Q\left(\frac{3}{2}\right).$$

Liegt eine logische Eins vor, ist dies durch $x(t_1) + n(t_1) = +3 + n$ gegeben, womit sich der Fehlerfall durch

$$P_{e1} = P\{n + 3 < 0\} = P\{v < -\frac{3}{2}\} = P\{v > \frac{3}{2}\} = Q\left(\frac{3}{2}\right)$$

beschreiben lässt. Da in nicht vorhersehbarer Reihenfolge logische Nullen und Einsen auftreten, ergibt sich der mittlere Fehler zu

$$P_e = P(-3) \cdot P_{e0} + P(+3) \cdot P_{e1} = \frac{1}{2}Q\left(\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}Q\left(\frac{3}{2}\right) = Q\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.06.$$

Liegt ein **unipolares NRZ Format** vor, sei eine logische Null durch $x(t_0) + n(t_0) = 0 + n$ vertreten, eine logische Eins durch $x(t_1) + n(t_1) = +3 + n$. Zur Detektion werde die Schwelle $V = 3/2$ gewählt, da dies der Mittelwert zwischen +3 und 0 ist. Der Fehlerfall für eine logische Null ist

$$P_{e0} = P\{n > \frac{3}{2}\} = P\{v > \frac{3}{4}\} = Q(\frac{3}{4}),$$

der für eine logische Eins

$$P_{e1} = P\{n + 3 < \frac{3}{2}\} = P\{v > \frac{3-6}{4}\} = Q(\frac{3}{4}).$$

Für den mittleren Fehler erhalten wir

$$P_e = 2 \cdot \frac{1}{2} Q(\frac{3}{4}) \approx 0.23.$$

Wie ist der Unterschied zwischen diesen Fehlerraten zu erklären? Die Antwort ist einfach, sie liegt in dem Spitze–Spitze–Wert dieser beiden Formate begründet. Ist dieser Wert bei dem polaren Format 6, liegt bei dem unipolaren Format 3 vor. Und da die Entscheidungsschwelle V die Hälfte des Spitze–Spitze–Wertes ist, das Rauschen in beiden

Gemeinsam bewegen wir die Welt



Zukunft gestalten bei Schaeffler



Schaeffler – das ist die Faszination eines internationalen Technologie-Konzerns mit über 76.000 Mitarbeitern, verbunden mit der Kultur eines Familienunternehmens. Als Partner aller bedeutenden Automobilhersteller sowie zahlreicher Kunden im Industriebereich bieten wir Ihnen viel Raum für Ihre persönliche Entfaltung. Die Basis dafür bildet eine kollegiale Arbeitsatmosphäre – ganz nach unserem Motto: Gemeinsam bewegen wir die Welt.

Gestalten Sie mit uns die Zukunft. Spannende Aufgaben und hervorragende Entwicklungsperspektiven warten auf Sie.

Sie wollen mit uns die Welt bewegen? Dann informieren Sie sich über die vielseitigen Karrierechancen bei Schaeffler unter www.schaeffler.de/career

SCHAEFFLER

Jetzt kennenlernen unter:
facebook.com/schaefflerkarriere



Fällen gleichstark mit $\sigma = 2$ ist, sind die Austastwerte bei letzterem Fall näher an der Entscheidungsschwelle zu finden als bei dem erstgenannten. Die Fehlerrate für das polare Format ist besser als die des unipolaren Formats.

Was sagt aber das Ergebnis $P_e = 0.23$ aus? Dies bedeutet, daß im Durchschnitt 23% der übertragenen Elemente und damit Bits fehlerhaft sind. Bei einer Fehlerrate von 10^{-4} liegt durchschnittlich ein fehlerhaftes Bit in 10^4 gesendeten vor. Bei einer Übertragungsrate von 10^5 Bits oder Pulsen pro Sekunde ergibt sich im Mittel alle 10^{-1} Sekunden ein Fehler oder 10 Fehler pro Sekunde.

Ein Nachtrag am Rande: Wie muß die Entscheidungsschwelle gewählt werden, wie im Beispiel angewendet, um das bestmögliche Ergebnis zu erzielen? Zwei Stufen liegen vor, nämlich 0 und A , hierum zentriert ist Rauschen. Die Fehlerrate ist

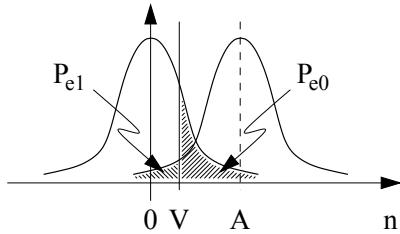
$$P_e = \frac{1}{2} P_{e0} + \frac{1}{2} P_{e1} = \frac{1}{2} \int_V^\infty p(n)dn + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^V p(n - A)dn,$$

differenziert nach V und ausgewertet ergibt

$$\frac{dP_e}{dV} = -\frac{1}{2} p(V) + \frac{1}{2} p(V - A) = 0.$$

Damit ist die Bedingung für eine optimale Schwelle durch $p(V) = p(V - A)$ gegeben, die optimale Schwelle ist durch den Schnittpunkt der verschobenen gaußschen Kurven gegeben, das heißt $V = V_{\text{opt}} = \frac{A}{2}$.

Ein weiterer Nachtrag: Die Argumente der Q -Funktionen sind für polares Format $\frac{A}{\sigma}$ und für unipolares Format $\frac{A}{2\sigma}$. Diese stehen mit den Signal–Rausch–Verhältnissen in engem Verhältnis. Bei dem polaren Format ist das S_{AC}/R , also der aktive Teil oder Wechselanteil, $\frac{A^2}{\sigma^2}$, bei dem unipolaren Format $\frac{A^2}{(2\sigma)^2}$. Die Entscheidungsschwelle ist jeweils auf der Ebene des Mittelwertes, die Wechselleistungen bleiben übrig und sind für das polare Format $\frac{A^2}{\sigma^2}$ und das unipolare Format $\frac{A^2}{(2\sigma)^2}$. Die Argumente der Q -Funktionen sind folglich die Verhältnisse der Effektivwerte, $\sqrt{\frac{A^2}{\sigma^2}} = \sqrt{S_{\text{AC}}/R}$ für das polare Format und $\sqrt{\frac{A^2}{(2\sigma)^2}} = \sqrt{S_{\text{AC}}/R}$ für das unipolare, das Signal–Rausch–Verhältnis des Wechselanteils steht also einen direkten Zusammenhang mit der Fehlerrate. Je stärker das Nachrichtensignal im



Vergleich zum Rauschanteil, umso besser. Mehr zum Thema Zufallszahlen ist etwa in [Ash 1993] zu finden.

Weißes Rauschen

In der Praxis wendet man das weiße Rauschen an. Es handelt sich hierbei um ein Modell, um sich von den Bandbreiten der Nachrichtensignale unabhängig zu machen. So liegt bei einem UMTS-Signal die Bandbreite von etwa 4 MHz vor, bei einem WLAN-Signal ist es bis zu 455 MHz. Beiden Signalen überlagert sich auf dem Weg vom Sender zum Empfänger Rauschen, das letztere wird sicher aufgrund der größeren Bandbreite mehr Rauschen aufnehmen als das UMTS-Signal. Um unabhängig von den Bandbreiten zu sein, betrachtet man ein Rauschen, dessen Rauschleistungsdichte konstant ist, die Höhe des Rauschteppichs ist $N_0/2$ und wird Rauschleistungsdichte bezeichnet. In Anlehnung an das weiße Licht, das sämtliche Spektralanteile enthält, nennt man dieses Rauschen auch weißes Rauschen. Weist es zudem eine Gaußverteilung auf, heißt es additives weißes gaußsches Rauschen, kurz AWGN (engl.: additive white Gaussian noise). Abbildung 2.21 zeigt das Leistungsdichtespektrum und die Autokorrelationsfunktion des in der Praxis auftretenden AWGN.

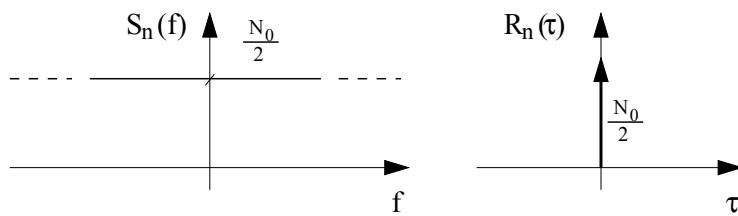


Abbildung 2.21: Weißes Rauschen

Wenn wir uns die Leistung betrachten, stellen wir fest, daß diese unendlich groß ist. Das LDS ist nämlich eine Konstante, die für alle Frequenzen gilt. Allein aus diesem Grund ist dies nicht möglich. Nachrichtensignale hingegen sind bandbegrenzt, die erste Stufe in einem Empfänger ist daher ein Filter, das derart bemessen ist, daß das Nachrichtensignal durchgelassen und das Rauschsignal weitestgehend unterdrückt wird. Die Bandbreite des Filters ist auf das Nachrichtensignal abgestimmt, AWGN bedeutet lediglich, daß es konstant mit $N_0/2$ im interessierenden Frequenzbereich ist. Das aufgenommene Rauschen am Ausgang des Filters weist dann eine endliche Rauschleistung auf. Somit handelt es sich bei weißem Rauschen um ein Modell, das nur in Verbindung mit einem Filter Bestand

hat.

Nehmen wir ein ideales Tiefpaßfilter

$$H(f) = \Pi\left(\frac{f}{2B}\right),$$

das den Durchlaßbereich $-B < f < B$ aufweist.

Wenn am Eingang des Filters AWGN mit $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$ anliegt, ergibt sich am Ausgang des Filters ein bandbegrenztes Rauschen mit dem LDS

$$S_m(f) = S_n(f) \cdot |H(f)|^2 = \frac{N_0}{2} \cdot \left| \Pi\left(\frac{f}{2B}\right) \right|^2.$$

Die aufgenommene Rauschleistung ist dann

$$R = \int_{-B}^B S_m(f) df = \frac{N_0}{2} \cdot 2B = N_0 B,$$

sie ist endlich. Wie wirkt sich das Filter auf das Eingangsrauschen aus? AWGN zeigt sehr starke und schnelle Änderungen wegen der hohen Bandbreite. Das bandbegrenzte Rauschen am Ausgang hat die obere Grenzfrequenz B , sodaß die Änderungen viel langsamer stattfinden. Trotzdem ist es nach wie vor unvorhersehbar.

Beispiel:

Gegeben sei ein RC-Glied mit $RC = 1 \text{ ms}$. Am Eingang dieses Tiefpaßfilters liege AWGN mit $N_0/2 = 10^{-6} \text{ W/Hz}$ vor. Ermitteln Sie die Leistung des Ausgangssignals in einem 50Ω -System.

Zuerst berechnen wir die Übertragungsfunktion,

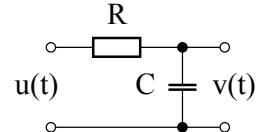
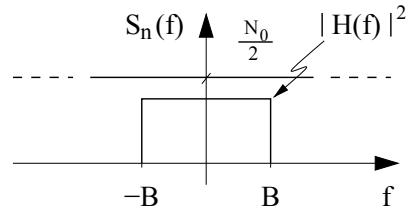
$$H(f) = \frac{1}{1 + j2\pi f RC},$$

womit sich die Leistung nach

$$R = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df$$

bestimmen lässt. Dies ausgeführt ergibt mit

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$



die gesuchte Rauschleistung

$$R = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + (2\pi f RC)^2} df = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2\pi RC} \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{\infty} = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2RC}.$$

In einem 1Ω -System ist dies 0.5 mW , in einem 50Ω -System $10\mu\text{W}$.

2.5 Optimalfilter

Die Aufgabe des Eingangsfilters im Empfänger besteht darin, das Rauschen zu begrenzen, ohne aber Intersymbolinterferenz, also ein ineinanderschwimmen der benachbarten Pulse zu verursachen. Liegt ein Tiefpaßsignal vor, das es zu detektieren gilt, muß das Filter ein Tiefpaßverhalten aufweisen. Man spricht von einem optimalen Empfangsfilter, wenn die resultierende Fehlerwahrscheinlichkeit minimal ist. Wie oben dargelegt, ist die Fehlerwahrscheinlichkeit abhängig von der Signalauslenkung und dem Effektivwert des Rauschens oder der Wurzel aus dem Signal-Rausch-Verhältnis, das zum Austastzeitpunkt besteht. Zur Herleitung der Übertragungsfunktion des Filters betrachten wir das Blockschaltbild in Abbildung 2.22.



CHALLENGING PERSPECTIVES

Opportunities for Internships

EADS unites a leading aircraft manufacturer, the world's largest helicopter supplier, a global leader in space programmes and a worldwide leader in global security solutions and systems to form Europe's largest defence and aerospace group. More than 140,000 people work at Airbus, Astrium, Cassidian and Eurocopter, in 90 locations globally, to deliver some of the industry's most exciting projects.

An **EADS internship** offers the chance to use your theoretical knowledge and apply it first-hand to real situations and assignments during your studies. Given a high level of responsibility, plenty of learning and development opportunities, and all the support you need, you will tackle interesting challenges on state-of-the-art products.

We welcome more than 5,000 interns every year across disciplines ranging from engineering, IT, procurement and finance, to strategy, customer support, marketing and sales. Positions are available in France, Germany, Spain and the UK.

To find out more and apply, visit www.jobs.eads.com. You can also find out more on our **EADS Careers Facebook page**.

AIRBUS **ASTRIUM** **CASSIDIAN** **EUROCOPTER**

EADS

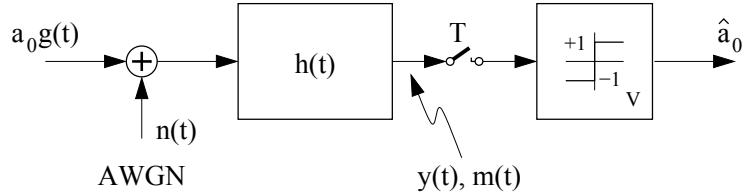


Abbildung 2.22: Optimalempfänger

Wir beginnen mit dem Nutzsignal, $y(t)$. Am Eingang des Filters liege ein Puls des Nachrichtensignals an, $a_0 g(t)$, der eben optimal detektiert werden soll. Für die Nachrichtenelemente gelte $a_0 \in \{-1, +1\}$. Hierzu ist die Impulsantwort des Filters zu bestimmen, also eine Funktion, um am Ausgang das maximale S/R zu erzielen. Mit dem Faltungszusammenhang erhalten wir sofort

$$y(t) = a_0 \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta)g(t - \vartheta)d\vartheta, \quad (2.9)$$

ausgetastet zum Zeitpunkt $t = T$ und quadriert, um die momentane Leitung zu erhalten, ergibt dies dann

$$y^2(T) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta)g(T - \vartheta)d\vartheta \right)^2,$$

mit $a_0^2 = 1$. Hierfür lässt sich mit der Schwarzschen Ungleichung ein Maximum angeben, wie es

$$y^2(T) \leq \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\vartheta)d\vartheta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g^2(T - \vartheta)d\vartheta = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\vartheta)d\vartheta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g^2(\vartheta)d\vartheta$$

beschreibt. Das Maximum für reellwertige Impulsantworten liegt vor, wenn der Zusammenhang zwischen $h(t)$ und $g(t)$ in der Form

$$h(t) = k \cdot g(T - t)$$

vorliegt, mit k als reellem und beliebigem Proportionalitätsfaktor. Wir wählen $k = 1$. Die optimale Impulsantwort, die zum Maximum führt, ist somit direkt an den zu detektierenden Nachrichtenpuls gekoppelt. Setzen wir die gefundene Impulsantwort in Gleichung 2.9 ein, resultiert dies zu

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(T - \vartheta)g(t - \vartheta)d\vartheta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\vartheta)g(t - T + \vartheta)d\vartheta \\ &= a_0 R_g(t - T), \end{aligned}$$

was der mit a_0 gewichteten AKF des Nachrichtenpulses entspricht. Wir wissen, daß diese maximal ist für $t = T$ und daß das Maximum selbst der Energie des Pulses $g(t)$ entspricht. Folglich ist der maximale Nutzanteil am Augang des Filters $y(T) = a_0 E_g$, mit E_g als der Energie des Pulses.

Ähnliches liegt bei dem Rauschsignal vor. Am Eingang des Filters sei für $n(t)$ AWGN der Rauschleistungsdichte $\frac{N_0}{2}$ angenommen, was am Ausgang zu einem bandbegrenzten gaußschen Rauschen $m(t)$ führt. Die Rauschleistung ist damit

$$\sigma_m^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) dt = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \frac{N_0}{2} E_g,$$

wobei hier vom Parsevalschen Theorem Gebrauch gemacht wurde. Den Schritt von der Synthesegleichung der Fourier–Transformation zum Faltungsintegral zeigt

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df &= \left. \int_{-\infty}^{\infty} H(f) H^*(f) e^{j2\pi f t} df \right|_{t=0} \\ &= \left. \int_{-\infty}^{\infty} h(\vartheta) h(\vartheta + t) d\vartheta \right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(\vartheta) d\vartheta. \end{aligned}$$

Die einzelnen Zwischenergebnisse zusammengefaßt ergeben das Verhältnis aus Maximalauslenkung des Nutzanteils und Effektivwert des Rauschanteils am Eingang der Entscheidungsstufe

$$\frac{y(T)}{\sigma_m} = \sqrt{\frac{2E_g}{N_0}},$$

was ausschließlich durch die Energie des Nachrichtenpulses und der Rauschleistungsdichte gegeben ist. Die Form von $g(t)$ spielt hierbei keine Rolle.

Zusammenfassende Wiederholung: Der Empfang mit einem Optimalfilter, das auf den nachrichtentragenden Puls abgestimmt ist, stellt für Signaldetektion die beste Wahl dar, die die Fehlerwahrscheinlichkeit im Zusammenhang mit AWGN minimiert. Der Grund hierfür liegt in der Maximierung des Verhältnisses aus Auslenkung des Nutzanteils und Effektivwert des Rauschanteils. Jede andere Filtercharakteristik resultiert in schlechterem Fehlerverhalten. Das Konzept sei anhand zweier Fälle erläutert.

Unipolares NRZ Format

Die Nachrichtenelemente sind entweder $a_n = 0$ oder 1 , was für den Nutzsignalanteil die maximale Auslenkung E_g bedeutet, wenn $a_n = 1$ gesendet wurde, oder aber 0 , wenn $a_n = 0$ vorliegt. Die Entscheidungsschwelle V liegt genau zwischen diesen beiden Werten,

d.h. hier bei $V = \frac{E_g}{2}$. Der Schnittpunkt der beiden Gaußkurven liegt bei diesem Wert, die Abszisse zeigt die Summe beider Anteile, $r(T) = y(T) + m(T)$.

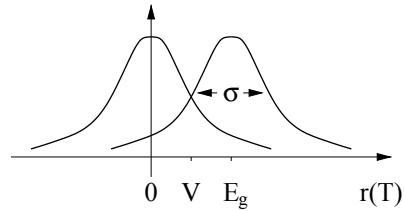
Oft bezieht man sich bei der Betrachtung praktischer Übertragungsstrecken auf "Bitgrößen", wie Energie pro Bit, Bitrate und Bitfehlerwahrscheinlichkeit. Bei der Fehlerbetrachtung ist dann die durchschnittliche Energie von Interesse, die für ein Bit aufgebracht wird. Für eine 1 liegt der Nutzanteil $y(T) = E_g$ vor, für eine 0 ist es $y(T) = 0$. Nehmen wir wieder die 50%-Regel, ist die durchschnittliche Energie für ein Bit

$$E_b = \frac{1}{2}E_g + \frac{1}{2}0,$$

womit sich die Bitfehlerrate durch

$$P_b = Q\left(\frac{V - 0}{\sigma_m}\right) = Q\left(\frac{\frac{E_g}{2}}{\sqrt{\frac{N_0}{2}E_g}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{2}\frac{E_g}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

gibt. Im nächsten Schritt betrachten wir das polare NRZ Format.



**Verbinde Deine Ziele mit
faszinierenden Perspektiven.**
Your career connection.

LEONI ist führender, international präsenter Hersteller von Drähten, optischen Fasern, Kabeln und Kabelsystemen. Mit mehr als 60.000 Mitarbeitern in 32 Ländern bieten wir überall auf der Welt Chancen, damit Menschen optimale Bedingungen vorfinden, um ihre Begabungen zu entfalten. Unsere Unternehmenskultur, die individuelle Förderung von Talenten und unser Teamgeist machen LEONI zu einem Top-Arbeitgeber für anspruchsvolle Persönlichkeiten, die offen für neue Herausforderungen sind. Gehören Sie dazu? Dann freuen wir uns auf Ihre Bewerbung.

www.leoni.com

LEONI

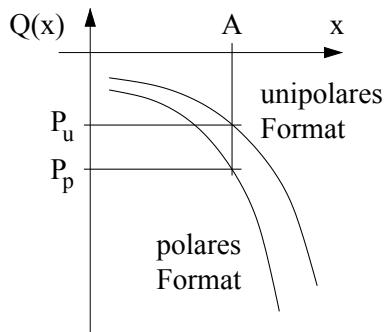
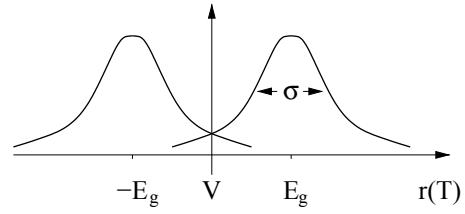
Polares NRZ Format

Die Nachrichtenelemente sind nun -1 und $+1$, was zu den maximalen Auslenkungen $\pm E_g$ führt. Zwischen diesen beiden Werten liegt V bei 0. Die Energie für eine $+1$ ist dann $\int_{-\infty}^{\infty} (+1 \cdot g(t))^2 dt = E_g$, für eine -1 ist es $\int_{-\infty}^{\infty} (-1 \cdot g(t))^2 dt = E_g$, sodaß die durchschnittliche Energie pro Bit

$$E_b = \frac{1}{2}E_g + \frac{1}{2}E_g = E_g$$

ergibt. Die Bitfehlerrate ist damit

$$P_b = Q\left(\frac{0 - (-E_g)}{\sigma_m}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_g}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right).$$



Vergleichen wir die Fehlerraten, stellen wir fest, daß das Argument für das polare Format um den Faktor $\sqrt{2}$ größer ist als das für das unipolare Format. Da die Q -Funktion mit wachsendem Argument abfällt, ist etwa für $x = A$ die Bitfehlerwahrscheinlichkeit des polaren Formats besser als die des unipolaren, d.h. $P_p < P_u$. Allgemein zeigt ersteres ein besseres Fehlerverhalten. Der Grund hierfür liegt in dem Mittelwert des Signals. Ist dieser gleich null, wird die Gesamtleistung zur Darstellung der Information aufgewendet. In beiden Fällen sind die Bitfehlerwahrscheinlichkeiten angegeben, die durch andere Empfängerstrukturen nicht unterschritten werden können. Das Optimalfilter oder signalangepaßte Filter bietet die bestmögliche Fehlerperformanz.

Zusammenfassend sind die Ergebnisse in Gleichung 2.10 dargestellt, wobei auf Abbildung 2.22 Bezug genommen wird.

$g(t)$	Nachrichtenpuls	
$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt$	Energie des Nachrichtenpulses	
$n(t)$	AWGN mit $S_n(f) = \frac{N_0}{2}$	
$h(t) = g(T-t)$	Impulsantwort des Optimalfilters	
$\sigma_m = \sqrt{\frac{N_0}{2} E_g}$	Effektivwert des Rauschanteils	
$\{-E_g, +E_g\}$	Nutzanteil für polares Format	(2.10)
$V = 0$	Entscheidungsschwelle für polares Format	
$P_b = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right)$	Bitfehlerrate für polares Format	
$\{0, +E_g\}$	Nutzanteil für unipolares Format	
$V = \frac{E_g}{2}$	Entscheidungsschwelle für unipolares Format	
$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$	Bitfehlerrate für unipolares Format.	

Beispiel:

Das empfangene Signal setzt sich aus rechteckförmigen Pulsen der Auslenkungen ± 1 zusammen. Die Dauer eines Pulses sei T . Die Natur überlagert diesem Signal AWGN der Rauschleistungsdichte $0.5 \mu\text{W}/\text{Hz}$. Ein signalangepaßtes Filter empfängt das Signal.

1. Bestimmen Sie T , sodaß die Bitfehlerrate den Wert 10^{-6} im Durchschnitt nicht übersteigt.
2. Das Rauschen verstärke sich auf $5 \mu\text{W}/\text{Hz}$. Ermitteln Sie für das berechnete T die Auslenkung des Rechteckpulses, damit die Fehlerrate nicht über 10^{-6} hinausgeht.
3. Die Signalrate werde nun halbiert, die Signalparameter und auch das Rauschen sind wie in Punkt 1. Wie lautet die Fehlerrate?

Da keine Angabe über das Widerstandssystem vorliegt, gehen wir von einem 1Ω -System aus. Zur Lösung dieser Aufgabe betrachten wir lediglich die Energie von dem verwendeten Puls und die Formel für die Bitfehlerrate.

zu 1: Die Fehlerrate darf 10^{-6} nicht überschreiten, d.h.

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0/2}}\right) \leq 10^{-6}.$$

Aus Abbildung 2.20 finden wir den Wert für das Argument, $\sqrt{\frac{E_b}{N_0/2}} \geq 4.8$, womit sich für die Pulsenegie $E_g = E_b \geq 4.8^2 \cdot 0.5 \times 10^{-6} \approx 11.5 \mu\text{Ws}$ ergibt. Da die Energie eines Rechteckpulses der Dauer T und der Auslenkung 1 gleich 1^2T ist, erhalten wir für die Pulsdauer $T = 11.5 \mu\text{s}$ und für die maximale Bitrate $r_b = \frac{1}{T} \approx 87 \text{ kbps}$.

- zu 2: Das stärkere Rauschen erfordert einen Puls mit größerer Auslenkung, um die gleiche Fehlerperformanz zu erhalten. Mit $E_g = E_b = A^2T = 4.8^2 \cdot 5 \times 10^{-6} \approx 115 \mu\text{Ws}$ muß für die Auslenkung nun

$$A = \sqrt{\frac{1}{T}E_g} = \sqrt{r_bE_g} \approx \sqrt{87 \times 10^3 \cdot 115 \times 10^{-6}} \approx 3.2 \text{ V}$$

gewählt werden.

- zu 3: Wenn die Bitrate halbiert wird, ist die Dauer nun $T = 23 \mu\text{s}$, mit $A = 1$ ist die Energie nun $E_g = E_b = 23 \mu\text{Ws}$. Hiermit ergibt sich für die Fehlerwahrscheinlichkeit

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{23 \times 10^{-6}}{0.5 \times 10^{-6}}}\right) = Q\left(\sqrt{46}\right).$$

Für dieses Argument läßt sich Abbildung 2.20 nicht mehr auswerten. Daher bedienen wir uns einer guten Abschätzung, wie sie in der Praxis häufig zu finden ist. Ohne

**Ich startete den Elektromotor
und es blieb still. Da wusste ich:
Wir erfinden Mobilität neu.**

Meine Doktorarbeit stand unter dem Motto: Jede Zukunft beginnt mit einer Vision. Sechs Monate später steht die Zukunft vor mir: der erste Audi A6 für China, der rein elektrisch fährt. Unterstützt haben mich 30 Kollegen aus Deutschland und China. Aber der Audi A6 bleibt immer ein Teil von mir.

Zhi Till
Doktorand
Studium: Maschinenbau/Fahrzeugtechnik

f **Twitter** **YouTube**

Mehr erfahren und selbst magische Momente erleben: www.audi.de/karriere oder www.facebook.com/audikarriere

Audi **Vorsprung durch Technik**

auf die näheren Einzelheiten einzugehen geht der Weg zur Abschätzung über eine partielle Integration, das Ergebnis ist

$$Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-\frac{n^2}{2}} dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \frac{1}{n} \cdot ne^{-\frac{n^2}{2}} dn \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

und trifft für $x > 3$ gut zu. Der interessierte Leser möge den angegebenen Weg einmal selbst beschreiten, wobei $\frac{d}{dt} e^{-\frac{n^2}{2}} = -ne^{-\frac{n^2}{2}}$ recht hilfreich ist. Nun, für die Q -Funktion ergibt sich damit der Schätzwert

$$Q(\sqrt{46}) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{46}} e^{-\frac{46}{2}} \approx 6 \times 10^{-12},$$

also ein recht geringer Wert.

Eine Frage am Rande: Wie lange muß ein Bitstrom durchschnittlich übertragen werden, damit ein Fehler auftritt? Die Bitrate ist $r_b = 43.7$ kbps, in der Dauer D liegen dann $r_b D$ Bits vor, von denen nur eins fehlerhaft sein darf. Folglich erhalten wir nach $P_b = \frac{1}{r_b D}$ für die Dauer $D = \frac{1}{6 \times 10^{-12} \cdot 43.5 \times 10^3} \approx 3.83 \times 10^6$ s $\approx 1.06 \times 10^3$ h ≈ 44.34 Tage. Das Optimalfilter muß also im Durchschnitt ununterbrochen nahezu sechs Wochen arbeiten, bevor eine Fehlentscheidung auftritt.

Der nachrichtentragende Puls in dem vorangegangenen Beispiel ist rechteckförmig, woraus sich sofort die Impulsantwort des Optimalfilters ableitet. Mit $g(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ ergibt dies $h(t) = g(T-t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) = g(t)$. Zuerst wird die Pulsform an der Ordinate gespiegelt, was anhand der stärker hervorgehobenen Flanke in Abbildung 2.23 ersichtlich ist. Wenn wir uns daran erinnern, daß dies die Impulsantwort des Optimalfilters sein soll, kann das Filter physikalisch nicht existieren. Die impulsförmige Erregung wirkt zur

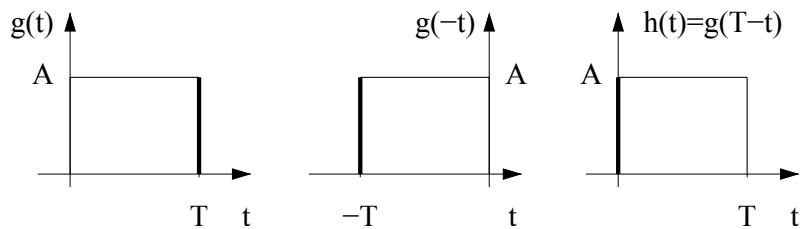


Abbildung 2.23: Impulsantwort des Optimalfilters

Zeit $t = 0$, die Antwort darauf allerdings schon vorher, worin ein Problem besteht. Wir verzögern diese Antwort, sodaß diese nur nach der Erregung zu beobachten ist, und schon ist das Filter kausal oder realisierbar.

Die Reaktion eines Filters mit der Impulsantwort $h(t)$ auf einen Puls der Form $g(t)$ ist durch die Faltung $h(t) * g(t)$ beschrieben. Zwei rechteckförmige Signale der Dauer T und Auslenkung A miteinander gefaltet ergibt ein Dreiecksignal, das sich von 0 bis $2T$ erstreckt. Das Maximum ist $A^2 T = E_g$ und ist bei $t = T$ vorzufinden, wie rechts dargestellt. Es liegt eine Kette von Dreiecksignalen im Abstand von T vor, deren Überlagerung die Reaktion des Optimalfilters auf das Nachrichtensignal $x(t)$ ist. Zu den Austastzeitpunkten bei $0, \pm T, \pm 2T \dots$ sind stets die Zahlen $\pm E_g$ vorzufinden. Um die Leistungsfähigkeit des Optimalfilters zu zeigen, betrachten wir Abbildung 2.24. Das Nachrichtensignal ist recht verrauscht, das S/R weist den Wert 1 oder 0 dB auf. Würde man das Signal ohne Filterung abtasten, lägen in den fünfzig dargestellten Pulsen acht Fehlentscheidungen vor. Mit einem

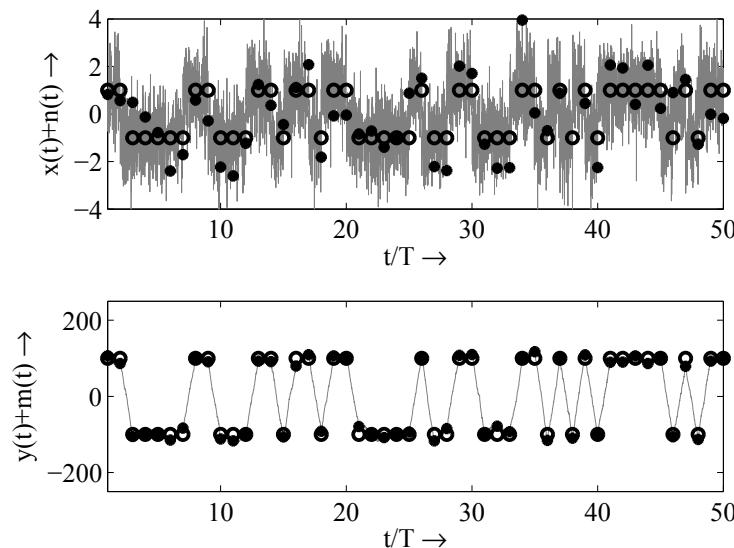
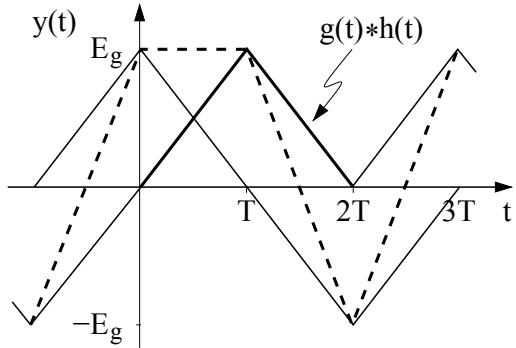


Abbildung 2.24: Optimalfilter mit $S/R|_{\text{ein}} = 1$, $S/R|_{\text{aus}} \approx 61$, 8 Fehler in 50

Optimalfilter wird das Rauschen stark gemindert, deutlich erkennbar ist auch, daß sich das Nutzsignal durch Dreiecksignale zusammensetzt. Wie ist die Leistungsfähigkeit des Optimalfilters zu erklären? Bei Rechtecksignalen mit der einhergehenden rechteckförmigen Impulsantwort des Optimalfilters vollzieht das Filter eine Integration über die Dauer T , d.h. auf den verrauschten Puls $A + n(t)$ für $0 \leq t \leq T$ reagiert das Filter durch die Faltung mit $\int_0^T A(A + n(t))dt = A^2 \int_0^T dt + A \int_0^T n(t)dt = y(T) + m(T)$ und mittelt das Rauschen weitestgehend heraus. Liegen ohne Optimalfilterung acht Fehler vor, ergibt sich mit dem Einsatz eines Optimalfilters kein Fehler in dem dargestellten Zeitabschnitt. Auf diese Art wirkt sich das Optimalfilters stark fehlermindernd aus, indem es den Nutzanteil gegenüber dem Rauschanteil bevorzugt behandelt, wie es das S/R von 61 oder 17.8 dB darlegt.

Ein Optimalfilter läßt sich entwerfen wie jedes andere Filter auch, sofern die Übertragungseigenschaften, also die Übertragungsfunktion oder die Impulsantwort gegeben sind. Oft ist eine einfachere Implementierung schaltungstechnisch problemloser umzusetzen. Wir haben festgestellt, daß von dem nachrichtenträgenden Puls lediglich die Energie eine Rolle spielt, das Filter dient dazu, diesen Wert zu ermitteln. Und dies läßt sich durch eine direkte Umsetzung auch erzielen, wie in Abbildung 2.25 dargestellt. Diese Imple-

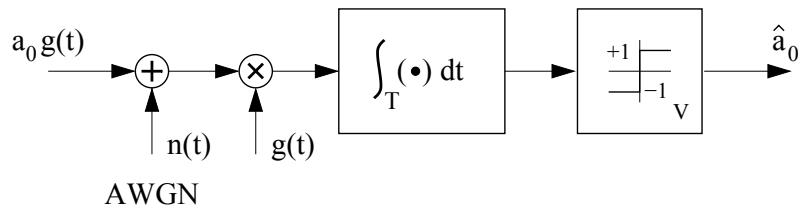


Abbildung 2.25: Optimalfilter als direkter Korrelator

mentierung ist unter der Bezeichnung Korrelator bekannt. Die Ergebnisse, die hiermit erzielt werden, entsprechen der Realisierung nach Abbildung 2.22. Für das Nutzsignal ist es sofort ersichtlich, zuerst multipliziert man das Signal $a_0 g(t)$ mit $g(t)$, integriert darüber und erhält $y(T) = a_0 \int_0^T g^2(t)dt = a_0 E_g$. Dies ist das Ergebnis wie zuvor. Bei dem Rauschanteil ist es etwas aufwendiger, hierfür liegt $m(T) = \int_0^T g(t)n(t)dt$ vor. Von dieser Rauschvariablen bestimmen wir nun die Leistung,

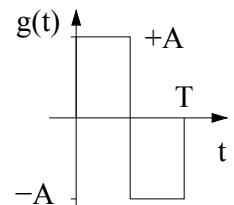
$$\begin{aligned} \sigma_m^2 = E\{m^2(T)\} &= \int_0^T \int_0^T g(t)g(\vartheta) \underbrace{E\{n(t)n(\vartheta)\}}_{=\frac{N_0}{2}\delta(t-\vartheta)} dt d\vartheta \\ &= \frac{N_0}{2} \int_0^T \int_0^T g(t)g(\vartheta) \delta(t-\vartheta) dt d\vartheta \end{aligned}$$

$$= \frac{N_0}{2} \int_0^T g^2(t) dt = \frac{N_0}{2} E_g.$$

Dieser Schritt dient nur dazu zu zeigen, daß bei dieser Realisierung auch die Ergebnisse zutreffen, die in Gleichung 2.10 angegeben sind. Ein Punkt ist hierbei zu beachten: Die Korrelatorimplementierung ist nur dann umsetzbar, wenn die Energie des Nachrichtenpulses innerhalb von T ermittelbar ist. Folglich gilt für $g(t)$ eine zeitliche Beschränkung auf $0 \leq t \leq T$. Ist dies nicht der Fall, muß die Berechnung der Energie einem Filter überlassen werden. Denn auch wenn die Dauer der Pulse T weit überschreitet, liegt zu den richtig gewählten Zeitpunkten die mit dem Nachrichtensymbol gewichtete Energie vor. Die Voraussetzung ist allerdings, daß $g(t) * g(-t)$ der Nyquist-Bedingung entspricht.

Beispiel:

Bei einem polaren Format mit $a_n = \pm 1$ wird der nebenstehende Puls verwendet. Es liege AWGN mit $\frac{N_0}{2} = 10^{-6}$ W/Hz vor, die Übertragungsrate sei 20 ksps. Entwerfen Sie das Optimalfilter, bestimmen Sie hierzu dessen Impulsantwort, die optimale Entscheiderschwelle, den Nutzanteil $y(T)$, den Effektivwert des Rauschanteils $m(T)$ sowie den Ausdruck für die Bitfehlerrate. Vergleichen Sie die erzielten Ergebnisse mit der Implementierung



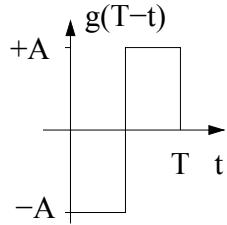
**"I studied English for 16 years but...
...I finally learned to speak it in just six lessons"**

Jane, Chinese architect

ENGLISH OUT THERE

Click to hear me talking
before and after my unique course download

als Korrelator. Wie muß die Auslenkung gewählt werden, damit die durchschnittliche Fehlerrate 10^{-4} nicht übersteigt? Ermitteln Sie die Gleich-, Wechsel- und Gesamtleistung des Nachrichtensignals für ein 50Ω -System.



Die Impulsantwort des Optimalfilters ist nach Gleichung 2.10 durch $h(t) = g(T - t)$ gegeben. Der Verlauf ist links dargestellt. Auffällig ist hierbei die Abweichung von $g(t)$ und $h(t)$. Mit $a_n = \pm 1$ stellt sich für den Nutzanteil vor dem Entscheider $\pm E_g$ ein, wobei die Energie durch

$$\int_0^T g^2(t) dt = A^2 T$$

gegeben ist. Damit ergibt sich für die Entscheiderschwelle $V = 0$, da dieser Wert genau zwischen $-E_g$ und E_g liegt. Der Effektivwert des Rauschanteils ist damit $\sigma_m = \frac{N_0}{2} E_g$, für die Bitfehlerrate finden wir $P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$, mit $E_b = E_g$. Nebenbei bemerkt entspricht dies auch dem Wert für einen rechteckförmigen Puls der Auslenkung A und Dauer T .

Führt eine Implementierung als Korrelator, d.h. die Integratorlösung zum gleichen Ziel wie die Optimalfilterlösung? Um diese Frage zu beantworten, stellen wir fest, daß die Dauer des nachrichtentragenden Pulses T ist. Da die Energie in der Integrationszeit $0 \leq t \leq T$ berechnet werden kann, ist der Korrelatoransatz möglich. Die Ergebnisse entsprechen denen Implementierung als Filter, wie im Text dargelegt.

Die Bitfehlerrate soll 10^{-4} nicht überschreiten, d.h.

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-4}, \quad \text{und damit} \quad \sqrt{2\frac{E_b}{N_0}} \geq 3.7.$$

Damit gilt für die Energie des Pulses $E_g = E_b \geq \frac{N_0}{2} 3.7^2 = 3.7^2 \times 10^{-6}$. Die Energie ist wiederum durch $E_g = A^2 T$ gegeben, dies nach A aufgelöst resultiert in $A \geq \sqrt{E_g/T} = \sqrt{E_g r_S} = \sqrt{3.7^2 \times 10^{-6} \cdot 20 \times 10^3} \approx 0.52$. Zu den Leistungen: Die Gleichleistung ist wegen des polaren Formats gleich null, für die verbleibenden Leistungen erhalten wir $S_{DC} = S_{ges} = E_b r_b = E_g r_S = A^2 \approx 0.27 \text{ W}$ in 1Ω und etwa 5.4 mW in 50Ω .

Fragen dieser Art haben die Auswertung der Abschätzung

$$Q = Q(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

zum Inhalt, oft ist dabei, wie auch in dieser Aufgabe, nach dem Argument für einen vorgegebenen Q -Wert gefragt. Da eine geschlossene Lösung nicht bekannt ist, kann man

dies auf ein Nullstellenproblem zurückführen und mit dem Newton–Verfahren lösen. Dies ist in Kürze wie folgt beschrieben: Ausgehend von dem Startwert x_0 bewegen wir uns schrittweise auf die Nullstelle der Funktion $y(x)$ zu, wobei

$$x_{n+1} = x_n - \frac{y(x_n)}{y'(x_n)},$$

mit $y'(x)$ als der ersten Ableitung von $y(x)$ bezüglich x . Für diese Funktion liegen

$$y(x) = \sqrt{2\pi} x Q - e^{-\frac{x^2}{2}}$$

und

$$y'(x) = \sqrt{2\pi} Q + x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

vor, was zur Rekursionsbeziehung

$$x_{n+1} = x_n - \gamma \frac{\sqrt{2\pi} Q x_n - e^{-\frac{x_n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi} Q + x_n e^{-\frac{x_n^2}{2}}}$$

führt. Nach einigen Schritten erhält man für $Q = 10^{-4}$ das Ergebnis $x = 3.74$. Probleme der Konvergenz lassen sich leicht umgehen, wenn ein "Leck" in Form von $0 < \gamma < 1$ eingefügt wird. Änderungen von x_n ergeben sich nicht mehr, wenn der Zähler des rechten Terms gleich null ist, was natürlich der gesuchten Nullstelle von $y(x)$ entspricht. Man kann den Wert aber auch der Abbildung 2.20 entnehmen.

Dieser Abschnitt hatte die Behandlung des Optimalfilters oder signalangepaßten Filters zum Inhalt. Hierbei haben wir uns mit Nachrichtenpulsen beschäftigt, die zeitlich auf T beschränkt sind. Nur besagt die Fourier–Transformation, daß Pulse dieser Art eine recht hohe Bandbreite aufweisen, die in vielen praktischen Anwendungen aber vermieden werden sollten. Im nächsten Abschnitt betrachten wir den Zusammenhang von Pulsformung und Bandbreiten.

2.6 Pulsformung

Bei der Betrachtung von der Übertragung im Basisband haben wir uns auf Pulse beschränkt, die auf die Dauer T beschränkt ist, die Übertragungsrate war dabei $r_S = 1/T$. Soll die Datenrate erhöht werden, ist eine kürzere Dauer erforderlich, was jedoch auch zu

einem höheren Bandbreitebedarf führt. In der Praxis sind jedoch die meisten Übertragungskanäle bandbegrenzt, sodaß zum Beispiel ein rechteckförmiger Puls zu hohe Spektralkomponenten aufweist, die eine störungsfreie Übertragung unmöglich machen. Tritt nämlich eine Bandbegrenzung auf, führt dies automatisch zu einer Vergrößerung der Dauer und damit zu Intersymbolinterferenz (ISI). Es liegt nun an, eine Pulsform zu finden, deren Spektrum nicht über eine obere Grenzfrequenz hinausgeht, ohne dabei ISI aufzuweisen.

Wir erinnern uns, daß ein Pulsformungsfilter der Impulsantwort $q(t)$ aus dem mit den Nachrichtenelementen a_n gewichteten Impulskamm $d(t)$ das Nachrichtensignal $x(t)$ hervorbringt, wie es

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT) \quad \longrightarrow \quad x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q(t - nT)$$

beschreibt. Hierin beschreibt $q(t)$ das Faltungsprodukt aus dem nachrichtentragenden Puls, der Impulsantwort des Übertragungskanals und der des Empfängers, also die Impulsantwort der gesamten Übertragungsstrecke. Damit keine ISI am Orte des Entscheiders vorliegt, muß $q(t)$ der Bedingung

$$q(t) = \begin{cases} 1 & : t = 0 \\ 0 & : t = \pm T, \pm 2T, \dots \end{cases}$$

genügen. Diese beschreibt, daß äquidistante Nullstellen im Abstand T vorliegen müssen, mit nur einer Ausnahme bei $t = 0$. Es gibt unendlich viele Pulse, für die dies zutrifft, wie etwa der Rechteckpuls

$$\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) = \begin{cases} 1 & : 0 \leq t < T \\ 0 & : \text{sonst,} \end{cases}$$

bei $t = 0$ ist der Funktionswert 1, bei $t = \pm T, \pm 2T, \dots$ ist er 0. Betrachten wir das Spektrum, ergibt sich nach

$$\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) * \delta\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad \longleftrightarrow \quad T \cdot \text{si}(\pi f T) \cdot e^{-j2\pi f \frac{T}{2}}$$

eine si-Funktion im Frequenzbereich mit sehr schlechten Konvergenzeigenschaften. Der Nachrichtingenieur ist jedoch nur an solchen Pulsen $q(t)$ interessiert, die ISI vermeiden und zugleich mit der Ressource Bandbreite sparsam umgehen.

Um Bandbreite auf ein vorgegebenes Maß zu reduzieren, ist eine Vertauschung von Zeit- und Frequenzbereich bei dem soeben betrachteten Fall denkbar. Dabei liegt das ideale Spektrum in Rechteckform vor, was eine si-förmige Impulsantwort beinhaltet,

$$Q(f) = \frac{1}{F} \cdot \Pi\left(\frac{f}{F}\right) \quad \longleftrightarrow \quad q(t) = \text{si}(\pi F t).$$

Wenn wir $q(t)$ betrachten, bietet es sich an, $F = r_S = \frac{1}{T}$ zu wählen, das Ergebnis ist in Abbildung 2.26 dargestellt

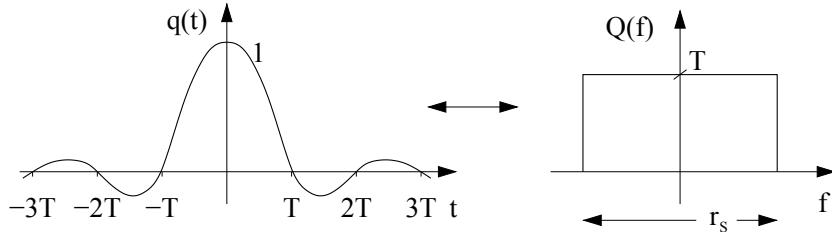
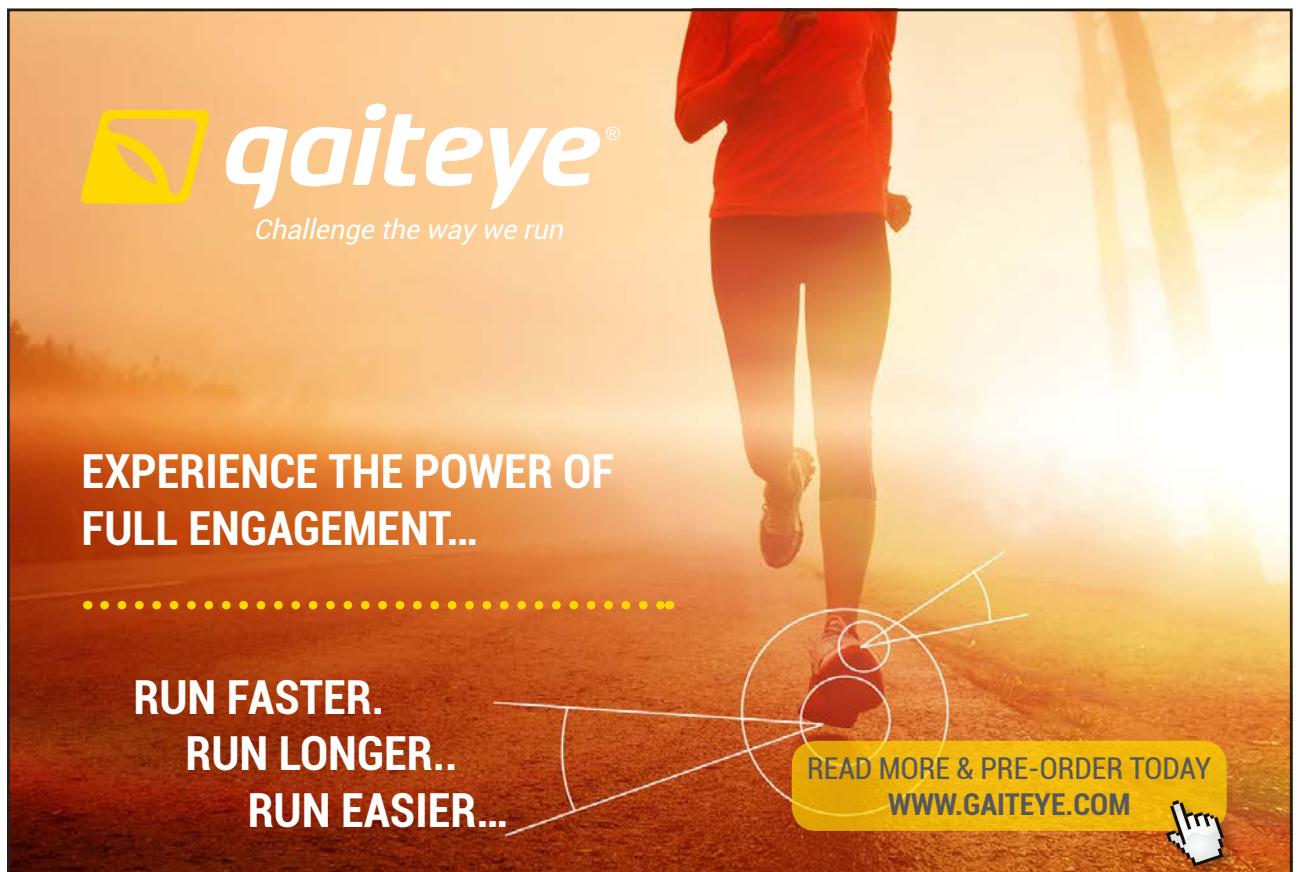


Abbildung 2.26: si-Puls und Nyquist-Rate

Bei dem Puls $q(t)$ liegen äquidistante Nullstellen vor, die Bedingung für ISI-freie Übertragung ist eingehalten. Ein Problem stellt die schlechte Konvergenz des si-Pulses dar, was in diesem Fall zu einer relativ großen Dauer führt. Der Vorteil liegt eindeutig darin, daß die Frequenzfunktion, $Q(f)$, strikt bandbegrenzt ist. Das Frequenzband erstreckt sich von $-\frac{r_S}{2}$ bis $\frac{r_S}{2}$, die gesamte Bandbreite ist r_S . Dies ist der Grund für die in der Praxis oft gemachten Annahme "Bandbreite gleich Übertragungsrate", sie beschreibt im wesentlichen einen von Nyquist gefundenen Grenzwert. So benötigt man zur Datenübertragung der Rate r_S mindestens den gleichen Wert für die Bandbreite, d.h. für 10 ksps sind mindestens



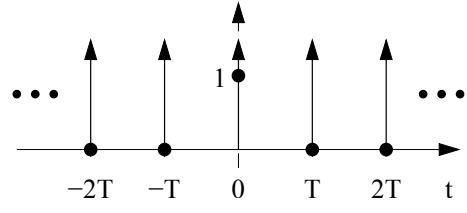
10 kHz Bandbreite erforderlich. Oder wenn die gesamte Bandbreite von 4 MHz gegeben ist, lassen sich maximal 4 Msps übertragen, ohne daß ISI auftritt. Diese Rate trägt den Namen Nyquist–Rate.

Nyquist–Pulse

Der si–Puls liefert zwar die maximale Übertragungsrate für eine vorgegebene Bandbreite, er findet in der Praxis jedoch kaum Anwendung. Zuerst weist dieser aufgrund der schlechten Konvergenz im Zeitbereich eine große Länge auf. Sollte der Puls realisierbar sein, müßte er zeitlich begrenzt werden, was wiederum zu einer größeren Bandbreite führt. Weiterhin weist der si–Puls bei den Nullstellen eine starke Steigung auf. Wird mit einem selbst geringen Fehler bei der Wahl des Abtastwertes gearbeitet, führt dies ebenfalls zu einer nicht vernachlässigbaren ISI, da die Nullstellen nicht getroffen werden. In praktischen Systemen sind zeitliche Störungen (engl.: jitter) nicht vermeidbar, sodaß dieser Puls nicht die erste Wahl ist. Für Abschätzungen hinsichtlich Bandbreite und Übertragungsrate ist er aber unentbehrlich.

Der Weg von der Nyquist–Bedingung hin zu Forderungen, die an das Spektrum gestellt sind, ist relativ einfach nachzuvollziehen. Wir beginnen bei der Bedingung

$$q(t) = \begin{cases} 1 & : t = 0 \\ 0 & : t = \pm T, \pm 2T, \dots \end{cases},$$



die durch Multiplikation mit einem Impulskamm zu dem Ergebnis

$$q(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = q(0) \cdot \delta(t) = \delta(t) \quad (2.11)$$

führt, wie es die Skizze zeigt. Die Punkte stellen $q(t)$ zu den Zeiten $t = 0, \pm T, \pm 2T, \dots$ dar, das Produkt mit dem Impulskamm läßt nur den Zinken bei $t = 0$ übrig bleiben. Der Impulskamm ist periodisch, die Periode ist T , eine Beschreibung mit Hilfe der Fourier–Reihe ergibt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{j2\pi \frac{m}{T} t} = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{j2\pi \frac{m}{T} t},$$

mit den Fourier–Koeffizienten

$$c_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \cdot e^{-j2\pi \frac{m}{T} t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) \cdot 1 dt = \frac{1}{T}.$$

Mit dem Paar $\delta(t - nT) \leftrightarrow e^{-j2\pi fnT}$ und dem damit sich ergebenden Zusammenhang

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \leftrightarrow \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - \frac{m}{T})$$

erhalten wir aus Gleichung 2.11

$$Q(f) * \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{m}{T}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Q(f - \frac{m}{T}) = T.$$

Die Aussage der ISI–Freiheit nach Gleichung 2.11 im Zeitbereich ist kurz und bündig. Soll diese nämlich gültig sein, muß das zugehörige Spektrum, periodisch im Abstand $\frac{1}{T}$ versetzt, die Konstante (!) T ergeben, wie es Abbildung 2.27 zeigt. Und daß in diesem

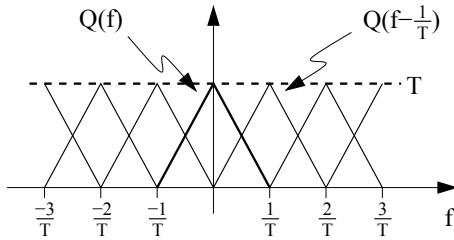


Abbildung 2.27: Nyquist–Bedingung im Frequenzbereich

Fall äquidistante Nullstellen bei $q(t)$ vorliegen, sieht man einerseits an der Konstanten T und andererseits an dem Paar $Q(f) = T \Lambda(\frac{f}{1/T}) \longleftrightarrow q(t) = \sin^2(\pi \frac{t}{T})$ (siehe Anhang A).

In der Praxis besteht der Wunsch nach bandbegrenzten Pulsen, die gleichzeitig eine gute Konvergenz im Zeitbereich aufweisen. Bei dem Puls mit rechteckförmigem Spektrum sind die Flanken mit unendlicher Steilheit eher problematisch. Werden diese Flanken geschliffen, erfolgt also ein kontinuierlicher Übergang, resultiert dies zu einer besseren Konvergenz auf Kosten einer größeren Bandbreite. Abbildung 2.28 zeigt die Frequenzfunktion eines solchen Pulses, bei dem die Flanken cosinusförmig sind. Dieser Puls wird als RC–Puls bezeichnet, wobei RC für "raised cosine" steht. Die Cosinusflanke steht auf einem Podest, daher der Name. Wir können an $Q(f)$ erkennen, daß der Puls $q(t)$ der Nyquist–Bedingung genügt. Überlagern wir dieses Spektrum mit dem um $\frac{1}{T}$ verschobenen, also $Q(f - \frac{1}{T})$, kommt eine Konstante zwischen 0 und $\frac{1}{T}$ zustande. Und dies ist die Bedingung für ISI–Freiheit im Zeitbereich.

In Anhang B findet der Leser die Herleitung für die Form des RC–Pulses, die durch

$$q(t) \equiv q_{RC}(t) = \frac{\cos(\pi F t)}{1 - (2Ft)^2} \cdot \sin(\pi \frac{t}{T}), \quad F = \frac{\alpha}{T} \quad (2.12)$$

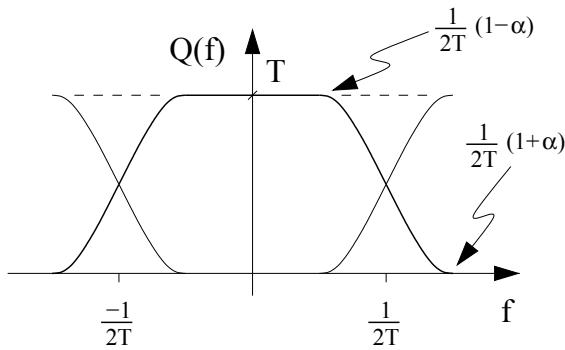


Abbildung 2.28: RC-Spektrum

gegeben ist, mit dem Flankenfaktor $0 \leq \alpha \leq 1$. In Abhängigkeit von diesem Faktor ergibt sich die obere Grenzfrequenz des Pulses nach

$$f_g = \frac{1}{2T} (1 + \alpha),$$

für $\alpha = 0$ ist diese $\frac{1}{2T}$, es liegt dann ein rechteckförmiges Spektrum vor, für $\alpha = 1$ ergibt sich $\frac{1}{T}$, der Frequenzverlauf ist dann ohne konstantem Anteil, d.h. nur cosinusförmig. Abbildung 2.29 zeigt den Zusammenhang zwischen Bandbreite und Konvergenz für verschiedene Werte für α .

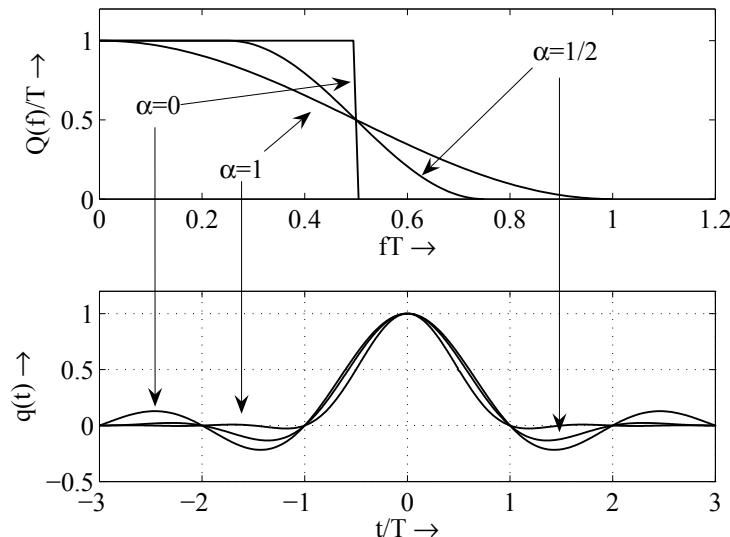


Abbildung 2.29: RC-Puls in Zeit- und Frequenzbereich

Es ist direkt im Zeitbereich ersichtlich, daß wegen der äquidistanten Nullstellen im Abstand T ISI–Freiheit vorliegt. Der Grund hierfür liegt in dem Produkt aus flankenformendem Faktor und dem si–Verlauf in $q(t)$. Die Konvergenz verbessert sich für größer werdenden Flankenfaktor, der Preis hierfür ist jedoch eine vergrößerte Bandbreite.

Beispiel:

1. Ein System soll 9600 Bits pro Sekunde übertragen. Hierzu werde ein polares NRZ Format mit RC–Puls verwendet. Wie lautet die minimale (theoretische) Bandbreite von $-f_g$ bis f_g ?

Es liegt eine polares NRZ Format vor, jeder der Pulse trägt ein Bit. Somit ist die Übertragungsrate $r_S = \frac{1}{T} = 9600$ Pulse pro Sekunde. Die minimale Bandbreite ergibt sich für $\alpha = 0$ als $B_{\min} = 2 \cdot f_g = 2 \frac{1}{2T} = 9600$ Hz.

2. Nun soll aus Gründen einer besseren Konvergenz ein Flankenfaktor von 0.5 verwendet werden. Wie lautet in diesem Fall die Bandbreite?

**STUDY FOR YOUR MASTER'S DEGREE
IN THE CRADLE OF SWEDISH ENGINEERING**

Chalmers University of Technology conducts research and education in engineering and natural sciences, architecture, technology-related mathematical sciences and nautical sciences. Behind all that Chalmers accomplishes, the aim persists for contributing to a sustainable future – both nationally and globally.

Visit us on **Chalmers.se** or **Next Stop Chalmers** on facebook.

CHALMERS
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Die Bandbreite geht über die minimale Bandbreite hinaus, wir erhalten nun $B = 2 \cdot f_g = \frac{1}{T}(1 + 0.5) = 14.4 \text{ kHz}$.

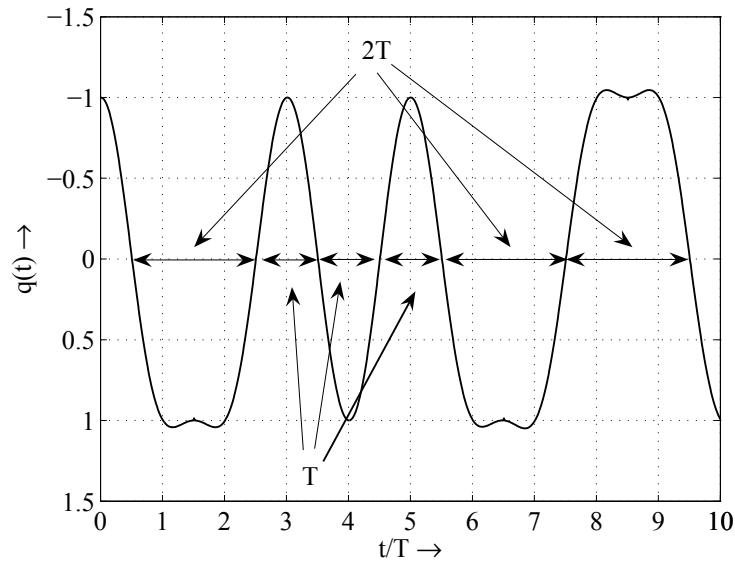
Der RC-Puls in seiner reinsten Form ist der mit $\alpha = 1$ und dem Spektrum sowie der Pulsform

$$Q(f) = T \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2}fT\right), \quad -\frac{1}{T} \leq f \leq \frac{1}{T}, \quad \text{und} \quad q_{\text{RC}}(t) = \frac{\sin(2\pi\frac{t}{T})}{1 - (2\frac{t}{T})^2}.$$

Der Zähler von der Pulsform weist Nullstellen im Abstand $\frac{T}{2}$ auf, die bei $\pm\frac{k}{2}T$, mit $k = 1, 2, 3, \dots$ anzutreffen sind, auch der Nenner hat zwei Nullstellen bei $\pm\frac{T}{2}$. Wie verhält es sich mit dem Funktionswert bei $\pm\frac{T}{2}$? Wenden wir die Regel von L'Hospital an, finden wir die Funktionswerte $\frac{1}{2}$, die Nullstellen des Pulses liegen also bei $\pm T, \pm\frac{3}{2}T, \pm\frac{5}{2}T, \dots$, wie auch in Abbildung 2.29 zu erkennen ist.

Dieser Puls mit $\alpha = 1$ weist mehrere Vorteile auf: Erstens ist die Breite des Pulses bei $q_{\text{RC}}(\pm\frac{T}{2})$ gleich T , sie entspricht also dem Symbolintervall. Zweitens liegen ausgehend von diesen Punkten Nullstellen im Abstand des halben Symbolintervalls vor. Dies erklärt sich dadurch, daß ein polares NRZ Format Nullstellenabstände genau in der Mitte zwischen zwei Pulsmitten hat und ein Polaritätswechsel dadurch zwischen den Pulsen auftritt. Diese Nullstellen vereinfachen das Auffinden des Synchronsignals aus dem Empfangssignal, wie es Abbildung 2.30 zeigt. In diesem Verlauf sind die Abstände entweder $2T$ oder T lang. Ein weiterer Vorteil ist die relativ schnelle Konvergenz des Pulses. Der einzige Nachteil besteht in der Höhe der oberen Grenzfrequenz, $f_g = r_S$. Zusammengenommen überwiegen jedoch die Vorteile, sodaß dieser Puls eine breite Anwendung in der Praxis findet, wie etwa in dem weitverbreiteten amerikanischen Trunk 1 Telephonesystem. Hierbei liegt eine Datenrate von 1.544 Mbps vor, das sich aus 24 ISDN-Kanälen der Übertragungsrate 64 kbps zusammensetzt. Näherer hierzu etwas später.

Praktische Betrachtungen liefern folgende Ergebnisse. Wir müssen bedenken, daß sich der tatsächliche Puls aus einer Hintereinanderschaltung von Teilen des Nachrichtenkanals zusammensetzt, nämlich dem Sendefilter, dem Kanal und dem Empfängerfilter. Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß der Kanal breitbandig ist und sich nur durch eine Verzögerung t_0 bemerkbar macht, wie etwa im Fall eines Koaxialkabels, so ist die Über-

Abbildung 2.30: Nachrichtensignal mit RC-Puls und $\alpha = 1$

tragungsfunktion der oben genannten drei Elemente

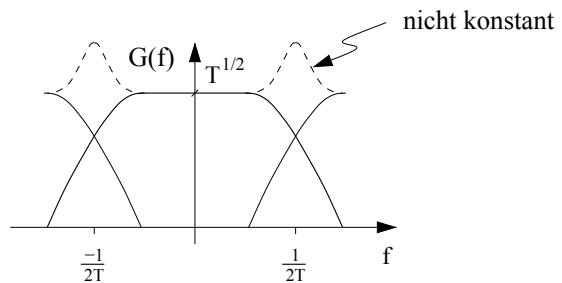
$$G(f) \cdot e^{j2\pi f t_0} \cdot G(f),$$

wenn für das optimale Empfangsfilter $h(t) = g(-t) = g(t)$ gilt. Hierbei gehen wir aufgrund der obigen Betrachtung von einem geraden Verlauf des Pulses aus, was in einem reellen Verlauf der Frequenzfunktion $G(f)$ resultiert. Wir halten fest, daß der äquivalente Puls im Frequenzbereich durch

$$G^2(f) \cdot e^{j2\pi f t_0} = Q(f) \cdot e^{j2\pi f t_0}$$

gegeben ist.

Wir haben aber gerade festgestellt, daß der äquivalente Puls $q(t)$ der Nyquist-Bedingung genügen muß, damit keine ISI auftritt. Dies bedeutet aber, daß sich für den tatsächlich verwendeten Nachrichtenpuls im Frequenzbereich $G(f) = \sqrt{Q(f)}$ ergeben muß. Nun sollte die Frage geklärt werden, ob der Puls $g(t) \longleftrightarrow G(f)$ ebenfalls der Nyquist-Bedingung genügt. Diese Bedingung in den Frequenzbereich umgesetzt muß eine Konstante ergeben, wenn der Puls um ganzzahlige Vielfache von $\frac{1}{T}$ versetzt und überlagert werden. Abbildung 2.28 zeigt dies für $Q(f)$, wie es sich bei $G(f) = \sqrt{Q(f)}$ verhält, zeigt Abbildung 2.31.

Abbildung 2.31: Frequenzfunktion $G(f) = \sqrt{Q(f)}$

Weitere Bemerkungen zu den Flanken: $Q(f)$ weist eine cosinusförmige Flanke auf, der Symmetriepunkt liegt bei $\frac{1}{2T}$, der Funktionswert ist für diese Frequenz $\frac{T}{2}$. Bei sich überlappenden Flanken addieren sich beide Werte, das Ergebnis ist T , was auch dem Funktionswert bei $f = 0$ entspricht. Bei $G(f)$ liegt eine Wurzelcosinusflanke vor, bei dem Schnittpunkt der Flanken benachbarter Frequenzfunktionen finden wir $\sqrt{\frac{T}{2}}$, die Addition ist nun $\sqrt{2T}$, was nicht gleich dem Funktionswert bei $f = 0$ ist, denn dieser ist $G(0) = \sqrt{T} \neq \sqrt{2T}$. Der Schluß ist also, daß der Zeitverlauf von $g(t)$ nicht der Nyquist-Bedingung genügt und folglich ISI hervorruft.



Wir suchen die Besten

Das Wachstum der voestalpine-Gruppe und der weltweite Erfolg kommen nicht allein von guten Produkten. Dahinter steckt eine attraktive Arbeitswelt, die Menschen fordert und fördert. Die voestalpine sieht die Kompetenz, das Engagement und die Identifikation ihrer Mitarbeiter mit dem Unternehmen als zentralen Erfolgsfaktor.

Gestalten Sie Ihre Zukunft mit uns

Lernen Sie unsere interessanten Tätigkeitsfelder und Aufstiegsmöglichkeiten kennen – besuchen Sie unsere Homepage unter www.voestalpine.com

Hier können Sie sich auch gleich online bewerben.

voestalpine Stahl GmbH
www.voestalpine.com

voestalpine
EINEN SCHRITT VORAUS.

Eine Bemerkung am Rande: Für die Frequenzfunktionen gilt der einfache Wurzelzusammenhang $G(f) = \sqrt{Q(f)}$. Hieraus sollte man jedoch nicht schließen, daß dies ebenfalls für die Pulse im Zeitbereich gilt. Um dies dennoch zu betonen, wählen wir den Begriff Wurzelcosinuspuls, der durch $g(t) = q_{\sqrt{RC}}(t)$ ausgedrückt werden soll. In Anhang B ist der Vollständigkeit halber auch die Herleitung für diesen Puls aufgeführt, der interessierte Leser wird feststellen, daß dies vollkommen ohne technische Rechenhilfe möglich ist. Das Ergebnis lautet

$$g(t) = q_{\sqrt{RC}}(t) = \frac{\sqrt{T}}{\pi t} \cdot \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{1}{T} - F\right)t\right) + 4Ft \cos\left(\pi\left(\frac{1}{T} + F\right)t\right)}{1 - (4Ft)^2}, \quad F = \frac{\alpha}{T}. \quad (2.13)$$

Vergleicht man die Gleichungen 2.12 und 2.13, stellt man einen gänzlich unterschiedlichen Verlauf fest, denn letzterer ist weitaus unhandlicher als ersterer.

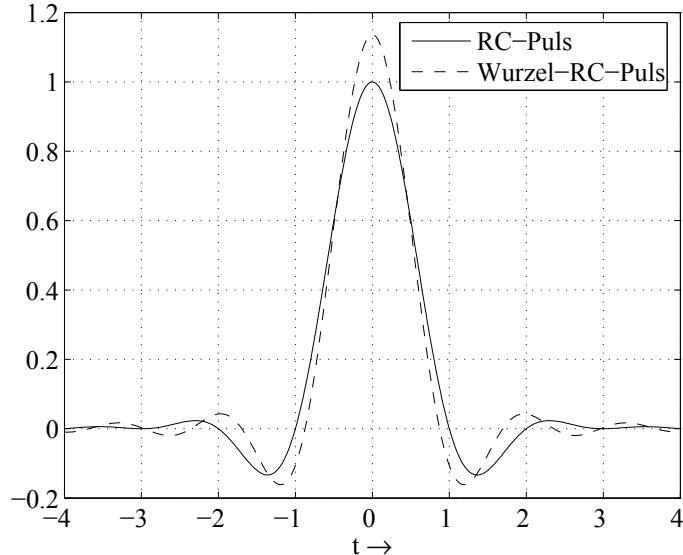


Abbildung 2.32: RC- und \sqrt{RC} -Puls mit $\alpha = 1/2$

Wir betrachten Abbildung 2.32 und stellen folgendes fest. Der RC-Puls weist äquidistante Nullstellen bei $t = \pm 1, \pm 2, \dots$ auf, was nicht bei dem \sqrt{RC} -Puls zutrifft. Die Folge ist somit ISI. Zur einfacheren Darstellung wurde $T = 1$ s gewählt.

Anders verhält es sich hingegen, wenn der gesendete \sqrt{RC} -Puls durch ein Optimalfilter hindurchläuft, dessen Impulsantwort eben dem \sqrt{RC} -Puls entspricht. Zu beachten ist hierbei der gerade Verlauf des Empfangspulses, d.h. $g(t) = g(-t)$. Abbildung 2.33

zeigt die Reaktion des Optimalfilters auf den Empfangspuls. Wir erkennen, daß sich nun äquidistante Nullstellen einstellen und der gezeigte Puls mit dem in Abbildung 2.31 dargestellten Puls $q(t)$ übereinstimmt. Ein Unterschied ist jedoch zu erkennen, vergleicht man die Lage der Maxima, liegt das in der zuerst genannten Abbildung bei $t = 0$, im zweiten Fall ist dies $t = 4$. Wie ist dieser Unterschied zu deuten? Das Optimalfilter faltet das Eingangssignal mit dessen Impulsantwort, die sich nach Abbildung 2.32 von von -4 bis $+4$ erstreckt. Das Filter muß realisierbar sein, die Impulsantwort darf keine Signalanteile für negative Zeiten aufweisen. Um dies zu erzielen, verzögert man die Impulsantwort $g(t)$ um 4 und erhält $g(t - 4)$, das Filter ist nun kausal und folglich realisierbar. Wegen dieser eingefügten Grundverzögerung liegt das Maximum nun bei $t = 4$, die Impulsantwort liegt nun von 0 bis 8 vor.

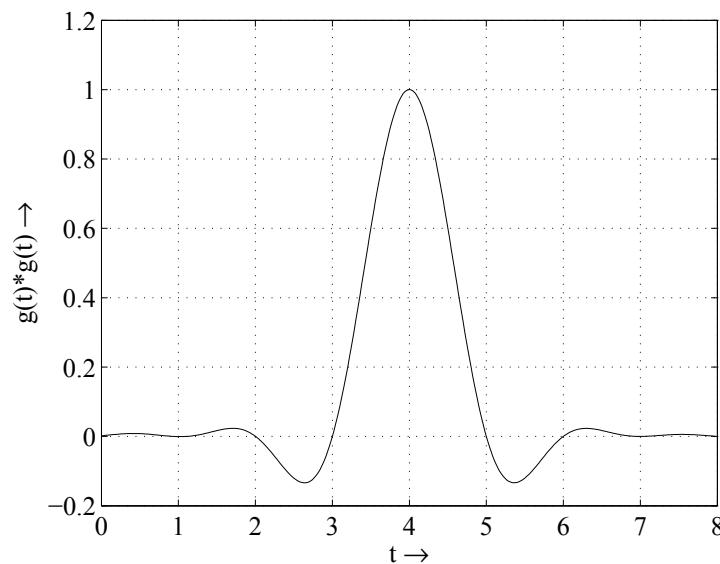


Abbildung 2.33: RC-Puls als Faltung zweier gleicher \sqrt{RC} -Pulse mit $\alpha = 1/2$

Soll ein Optimalfilter die gesendeten Symbole detektieren, kann nur eine Implementierung zum Zuge kommen, nämlich die mit einem Filter. Da die Länge des \sqrt{RC} -Pulses über das Symbolintervall T hinausgeht, verbleibt nicht die Zeit, um die Energie des Pulses mit einem Integrator zu ermitteln. Aus diesem Grund kommt nur die Realisierung durch ein Filter in Betracht, da die Energie zur rechten Zeit nur das das Faltungsintegral liefert.

Und damit stellt sich gleichzeitig die Frage, wie der Wert der Energie sich ermitteln

läßt. Wie so oft lassen sich sowohl der RC- als auch der \sqrt{RC} -Puls im Frequenzbereich einfacher beschreiben als im Zeitbereich, sodaß wir auf das rayleighsche Energietheorem zurückgreifen,

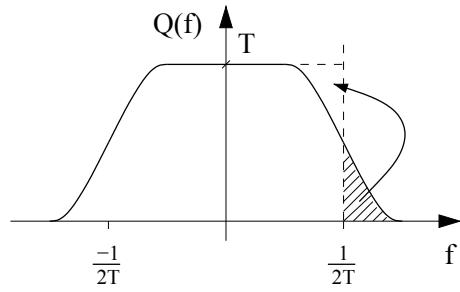
$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |G(f)|^2 df,$$

welches besagt, daß sich die Energie eines Signals sowohl im Zeit- als auch im Frequenzbereich bestimmen läßt. Man erkennt dies sofort durch die Faltung $g(\tau) * g(-\tau)$, deren Spektrum durch $G(f) \cdot G^*(f)$ gegeben ist oder zusammengefaßt

$$g(\tau) * g(-\tau) \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)g(t+\tau) dt \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{\infty} G(f) \cdot G^*(f) e^{j2\pi f\tau} df \Big|_{\tau=0}.$$

Manche Dinge lassen sich einfach erklären.

Das Spektrum des Nachrichtenpulses, $G(f) = \sqrt{Q(f)}$, ist in Abbildung 2.31 gezeigt, das Quadrat hiervon finden wir in Abbildung 2.28, es ist $G^2(f) = Q(f)$ mit seinen wohlgeformten cosinusförmigen Flanken. Die Fläche darunter ergibt sich leicht durch Umlagerung der schraffierten Fläche, das Ergebnis ist ein Quadrat der Fläche eins. Die Energie des \sqrt{RC} -Pulses ist somit $E_g = 1$. Der aufmerksame Leser hat sicher bemerkt, daß die Bragsstriche unberücksichtigt geblieben sind. Liegt ein Fehler vor? Nein, der Puls ist gerade, wodurch sich eine reelle Frequenzfunktion ergibt. Aus diesem Grund wird aus dem Betragsquadrat das einfache Quadrat - und das Ergebnis ist richtig.



Beispiel:

Wir betrachten ein polares Format, das für $a_n = \pm 1$ auf einen nachrichtenträgenden \sqrt{RC} -Puls mit $\alpha = 1/3$ zurückgeföhrt. Das durch den Kanal hinzugefügte Rauschen habe das Leistungsdichtespektrum 0.04 W/Hz , die Pulse werden mit der Rate $r_S = 10 \text{ ksps}$ übertragen. Entwerfen Sie das Optimalfilter und bestimmen Sie dessen Güte. Wie lautet die Bandbreite, die zur Verfügung gestellt werden muß? Geben Sie hierfür die maximale Übertragungsrate an.

Mit dem Puls $g(t)$ ergibt sich die Impulsantwort des Optimalfilters als $h(t) = g(-t) = g(t)$, wobei wir dabei den geraden Verlauf des Pulses berücksichtigt haben. Da die Energie von $g(t)$ gleich eins ist, liegt am Eingang des Entscheiders der Nutzanteil $\pm E_g = \pm 1$ vor.

Für den Rauschanteil, der sich diesem Nutzanteil überlagert, erhalten wir die Rauschleistung $\sigma^2 = \frac{N_0}{2} E_g = 0.04$. Aus dem Nutzanteil läßt sich die Entscheidungsschwelle ermitteln, die genau zwischen den beiden Werten $+1$ und -1 , also bei 0 liegt. Diese Werte beschreiben die Fehlerrate und damit die Güte,

$$P_e = Q\left(\frac{E_g}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{N_0/2}}\right) = Q(5) \approx 3 \times 10^{-7}.$$

Von 10^7 Werten sind im Durchschnitt 3 fehlerhaft, ein nicht so schlechter Wert für die Performanz des Detektors. In welchem zeitlichen Abstand (durchschnittlich!) passieren Fehlentscheidungen? Diese Frage kann man leicht mit der Übertragungsrate und der Fehlerrate lösen. Drei Fehler liegen in 10^7 übertragenen Werten vor, sodaß unter Berücksichtigung der "Geschwindigkeit" und $r_s T_e = \frac{10^7}{3}$ wir für den mittleren zeitlichen Abstand zwischen zwei Fehlern

$$T_e = \frac{10^7}{3r_s} = \frac{10^7}{3 \times 10^4} \approx 333 \text{ s} = 5'33''$$

erhalten. Etwa alle fünfeinhalb Minuten müssen wir mit einem Fehler rechnen.

Zum Schluß betrachten wir die Bandbreite und die Übertragungsrate. Die Bandbreite insgesamt erstreckt sich im Bereich $-\frac{1+\alpha}{2T} \leq f \leq \frac{1+\alpha}{2T}$, für die obere Grenzfrequenz liegt $f_g = \frac{1+\alpha}{2T} = r_s \frac{1+\alpha}{2} = 10 \times 10^3 \frac{1+1/3}{2} \approx 6.7 \text{ kHz}$ vor. Die Bandbreite insgesamt ist dann $B =$

**ERFOLG IST EINE FRAGE
DER TECHNIK!**

Du hast die Wahl: 18 technische Master-Studiengänge.
Österreichs einzige rein technische Fachhochschule.

FH University of Applied Sciences
TECHNIKUM
WIEN

$2f_g \approx 13.4 \text{ kHz}$. Lassen Sie uns die Bandbreite mit der Übertragungsrate vergleichen. In unserem Fall ist $B \approx 13.4 \text{ kHz} > r_S = 10 \text{ ksps}$. Nach Nyquist ist die minimale Bandbreite für eine gegebene Übertragungsrate $B = r_S = 10 \text{ kHz}$. Dieser Wert ist nur für ein rechteckförmiges Spektrum erreichbar, was bei dem $\sqrt{\text{RC}}$ -Puls für $\alpha = 0$ vorliegt, nicht aber für $1/3$. Und dies ist der Grund für einen erhöhten Bandbreitebedarf.

2.7 Mehrstufigkeit

Es besteht immer der Wunsch nach einer "schnellen" Datenübertragung, wobei man darunter eine Übertragung mit hoher Rate versteht. In der zur Verfügung stehenden Zeit sollen möglichst viele Bits übertragen werden, was einer entsprechend hohen Bitrate gleichkommt. Kanäle weisen jedoch meist eine begrenzte Bandbreite auf, wie etwa die etwa 3 kHz bei einem Telefonkanal. Wie aber können darüber Raten von bis zu 54 kbps erzielt werden? Nach Nyquist lassen sich über einen Kanal der Bandbreite $B = 3 \text{ kHz}$ maximal $r_S = 3 \text{ ksps}$ übertragen. Die obige Frage läßt sich leicht lösen, die Antwort heißt Pulsamplitudenmodulation (PAM).

Der Schlüssel hierzu liegt in den Einheiten, d.h. es muß ein Zusammenhang zwischen "Bits pro Sekunde" und "Symbole pro Sekunde" gefunden werden. Abbildung 2.34 zeigt diesen Zusammenhang. Hierin ist oben ein binäres polares Format dargestellt, ein negativer Puls repräsentiert das Bit 1, ein positiver das Bit 0. Ein Puls trägt ein Bit in der Zeit T , sodaß die Bitrate der Symbol- oder Pulsrate entspricht. Im Bild darunter sind zwei Bits auf einen Puls abgebildet, wie aber ist dies möglich, d.h. wie können die Bits eindeutig untergebracht werden? Wir erkennen, daß nun vier Stufen vorliegen. Jeder der Stufen ist ein Dibit zugeordnet, wie es die Abbildungstabelle zeigt. Allgemein gilt zwischen der

Dibit	Stufe
00	$+A$
01	$+A/3$
10	$-A/3$
11	$-A$

Tabelle 2.2: Abbildungstabelle

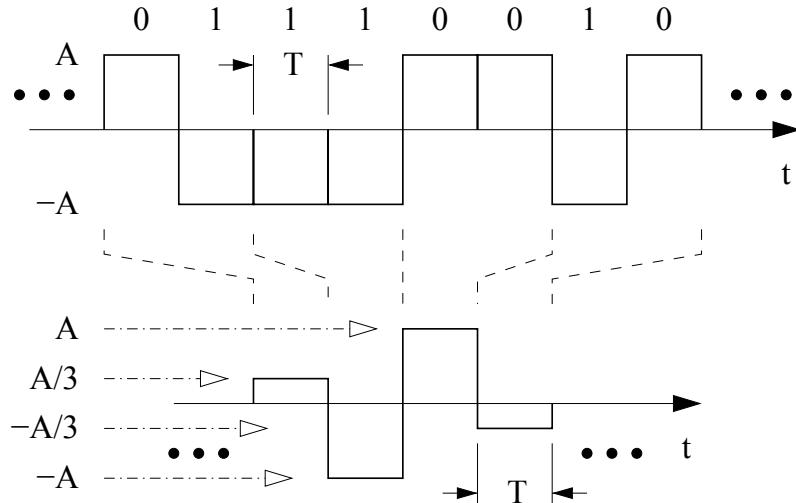


Abbildung 2.34: Pulsamplitudenmodulation (PAM)

Anzahl der Stufen, M , und den abgebildeten Bits, n , der Zusammenhang

$$M = 2^n.$$

Der Vorteil ist sicher eine höhere Bitrate, r_b , als die tatsächliche Symbolrate, r_S , wie es

$$r_b = n r_S$$

beschreibt. Bei binärer Übertragung sind $n = 1$ und $M = 2$, sodaß die Bitrate und die Symbol- oder Pulsrate gleich sind. Bei $n = 2$ ist $M = 2^2$, was eine doppelt so hohe Bitrate wie die Symbolrate ergibt.

Nehmen wir einmal wieder den Telefonkanal mit 3 kHz Bandbreite. Nach Nyquist lassen sich dann bis zu 3 ksps übertragen. Um eine Bitrate von 12 kbps zu erzielen, sind vier Bits pro Puls erforderlich, d.h. $n = 4$, um die gewünschte Bitrate nach $r_b = 4$ Bits/Symbol·3000 Symbole/Sekunde zu erreichen. Die Folge davon sind dann $M = 2^4 = 16$ Stufen. Der Vorteil dieser Aufteilung ist klar ersichtlich. Bei näherem Hinsehen erkennen wir aber auch Nachteile. Nehmen wir einmal an, daß das mehrstufige Signal den gleichen Spitze-Spitze-Wert aufweisen soll wie das binäre Signal, nämlich $2A$. Hierin sind M Stufen im Abstand

$$\Delta = \frac{2A}{M-1}$$

unterzubringen, der mit wachsender Stufenzahl abnimmt. Bei der Übertragung tritt Rauschen auf, dessen Stärke durch den Effektivwert σ gegeben ist. Wenn nun entschieden

werden soll, welche Stufe vorliegt, ist aufgrund eines geringen Stufenabstands eine Fehlentscheidung vorprogrammiert. Eine kleine Frage am Rande: Wie ist der Stufenabstand, wenn die in Abbildung 2.34 gezeigten acht Bits auf einen Puls abgebildet werden?

Der Einfachheit halber betrachten wir zur Klärung des Einflusses eines kleinen Stufenabstands ein binäres Format wie oben dargestellt. Hierfür sind $n = 1$ und $M = 2$, sodaß $\Delta = 2A$. Liegt nun Rauschen vor, dessen Effektivwert dem Stufenabstand entspricht, führt dies zu einer Fehlerrate von

$$Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{\Delta}{2\sigma}\right) = Q\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.3,$$

also einem nicht akzeptablen Wert. Die Konsequenz ist, daß bei einem derart rauschbehafteten Kanal eine hohe Stufigkeit nicht ratsam ist und man auf robuste Signale mit geringen Stufen zurückgreifen muß. Das robusteste Verfahren ist ein zweistufiges, was aber auch die geringste Bitrate mit sich führt. Wie geht man in der Praxis mit diesem Problem um? Moderne Übertragungssysteme messen zunächst den Kanal durch, um die Stärke des Rauschens zu ermitteln. Hiermit läßt sich dann die Stufigkeit festlegen, die nur ein Kompromiß zwischen der erzielbaren Bitrate und der sich ergebenen Fehlerrate sein kann. Über stark verrauschte Kanäle läßt sich bei gegebener Bitfehlerwahrscheinlichkeit nur ei-

Was für dich dabei?

Kostenloses StudentenKonto eröffnen
und **40€ Gutschein** abstauben!

Jetzt Konto eröffnen

Bank Austria
Member of **UniCredit**

Bis zur Beendigung des Studiums, längstens bis zum 30. Geburtstag. Aktion gültig bis 5.11.2017.
Informationen zum Einkaufsgutschein auf studenten.bankaustralia.at.

ne geringe Bitrate anwenden, bei Kanälen mit geringerem Rauschen können höherwertige Verfahren, d.h. solche mit mehreren Stufen problemlos zur Anwendung kommen.

Beispiel: _____

Wir betrachten eine 64-PAM, die über einen Kanal der Bandbreite 10 kHz übertragen werden soll. Hierzu verwendet man einen \sqrt{RC} -Puls mit $\alpha = 1/2$. Bestimmen Sie die maximal mögliche und die tatsächliche Bitrate.

Zunächst sollte die Bandbreite näher betrachtet werden. Nyquists Beschreibung beruht auf der Bandbreite von $-f_g$ bis $+f_g$, hier soll $f_g = 5 \text{ kHz}$ betragen. Hierüber lassen sich maximal 10 ksp/s erzielen. Mit $M = 64$ ist $n = 6$, d.h. sechs Bits werden auf einen Puls abgebildet, ergibt sich eine maximale Bitrate von 60 kbps.

Die tatsächliche Symbolrate, $r_s = \frac{1}{T}$, bei der Verwendung von \sqrt{RC} -Pulsen lässt sich durch $B = r_s(1 + \alpha)$ ermitteln. Hierfür erhalten wir

$$r_s = \frac{B}{1 + \alpha} = \frac{20}{3} \text{ ksp/s.}$$

Mit $n = 6$ ist damit die Bitrate $r_b = 6 \cdot r_s = 40 \text{ kbps}$.

Die Frage von oben ist noch nicht beantwortet. Die Lösung lautet $\Delta \approx 8 \times 10^{-3} A$.

2.8 Augendiagramm

Das Augendiagramm stellt ein einfaches Mittel dar, um die Qualität des Empfangssignals etwa am Ausgang des Optimalfilters anzuzeigen. Hiermit lassen sich Kanaleinflüsse, wie Rauschen und lineare Verzerrungen anzeigen, um damit Rückschlüsse auf den optimalen Abtastzeitpunkt zu gewinnen. Auch die Einflüsse von Instabilitäten von Taktgeneratoren lassen sich damit anzeigen. Das Augendiagramm lässt sich problemlos mit Hilfe eines Oszilloskops produzieren, indem das Nachrichtensignal dargestellt und über den Systemtakt T extern getriggert wird. Bei alten Oszilloskopen erlaubt die Trägheit der Röhre und das Nachleuchten eine Überlagerung von nacheinander erscheinenden Signalintervallen, bei modernen Oszilloskopen ist der Speichermodus zu aktivieren.

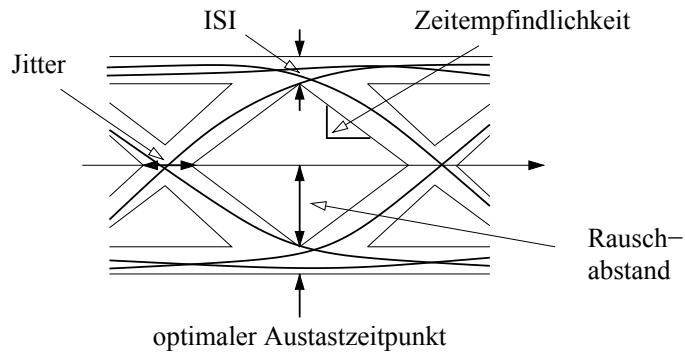


Abbildung 2.35: Augendiagramm, das Prinzip

Abbildung 2.35 zeigt das erzeugte Ergebnis für ein allgemeineres binäres Signal. Da es aussieht wie ein Auge, das aus den Tiefen des Oszilloskops den Betrachter selbst anblickt, nennt man es einfach Augendiagramm. Der optimale Austastzeitpunkt liegt zu der Zeit vor, in der das Auge die maximale Öffnung aufweist. Wenn im Signal ISI vorliegt, führt dies unweigerlich zu einem Verschließen des Auges und erhöht damit die Fehlerwahrscheinlichkeit oder vermindert die Sicherheit, daß das ausgetastete Ergebnis richtig ist. Störungen bei den Nulldurchgängen (engl.: jitter) zeigen ein Problem bei dem Austasten auf. Die Steigung des Augendiagramms ist ein Maß für die Zeitempfindlichkeit hinsichtlich Fehler bei der Wahl des Austastzeitpunktes. Lineare Verzerrungen des Kanals können erkannt werden, wenn das Auge asymmetrisch ist, d.h. wenn es "schielt".

Abbildung 2.36 zeigt praktische Augendiagramme. In beiden Fällen liegt ein \sqrt{RC} -Puls mit $\alpha = 1/2$ vor, das Symbolintervall ist normiert auf eins. Gesendet wurde ein binäres polares Format, der Empfang erfolgte mit einem Optimalfilter. Am Ausgang des Optimalfilters stellt sich ein Signal ein, dessen Augendiagramm oben dargestellt ist. Auffällig ist, daß sämtliche Signalteile durch die Punkte ± 1 verlaufen. Der Grund hierfür liegt zum einen darin, daß der Puls der Nyquist-Bedingung genügt und zum anderen kein Rauschen vorliegt. Genau zu diesem Zeitpunkt, hier eins, sollte das Signal ausgetastet werden, da die vertikale Augenöffnung maximal ist. Die horizontale Öffnung spiegelt die Empfindlichkeit gegenüber Schwankungen des Abtastzeitpunktes wider. Nur wenn α gleich eins ist, durchlaufen die Signalteile einen Punkt. Eine allgemeine Aussage ist, "je kleiner α , desto kleiner die horizontale Augenöffnung". Das untere Augendiagramm ergibt sich, wenn das Eingangssignal verrauscht vorliegt. Die Signalsituation ist hier durch $S/R = 4 \hat{=} 6 \text{ dB}$ gegeben. Am Ausgang des Optimalfilters beobachten wir ein Augen-

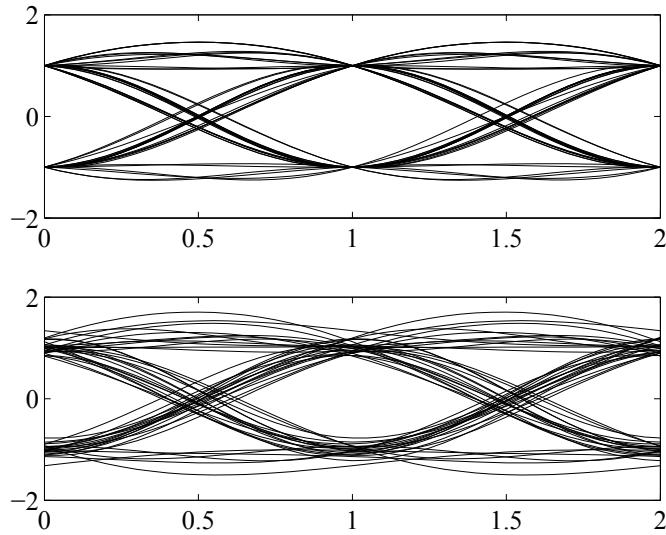


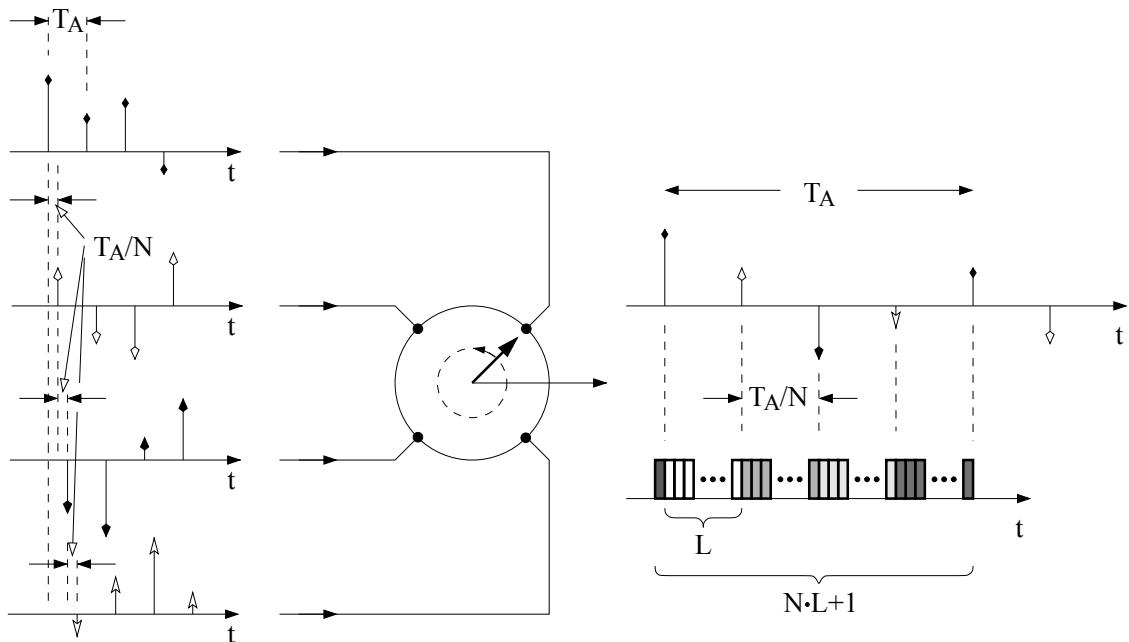
Abbildung 2.36: Augendiagramm, eine Messung

diagramm, bei dem sowohl die vertikale als auch die horizontale Augenöffnung durch den Rauscheinfluß gemindert sind, das Auge hat sich leicht geschlossen. Beachtenswert ist die Leistungsfähigkeit des Filters, das aus einem sehr fehlerträchtigen Empfangssignal das optimale Ergebnis erzielt, wie es das Augendiagramm zeigt.

2.9 Zeitmultiplex

Viele Nutzer greifen gleichzeitig auf die Dienste zurück, die Telephonie oder Datenübertragung ermöglichen. Steht dafür nur ein Übertragungskanal zur Verfügung, muß insgesamt recht sparsam mit der zur Verfügung stehenden Ressource Bandbreite umgegangen werden. Was liegt näher als die Signale der unterschiedlichen Nutzer zu kombinieren, sodaß ein Gesamtsignal übertragen werden kann? Bei dem Multiplexverfahren werden Signale gebündelt und anschließend über den zur Verfügung stehenden Kanal übertragen. Abbildung 2.37 zeigt den entscheidenden Schritt, bei dem N Signale zur simultanen Übertragung vorbereitet werden.

Auch hierbei wenden wir die Verfahren der digitalen Nachrichtenübertragung an. N unterschiedliche analoge Signale, wie etwa Telephonsignale, werden zunächst abgetastet. (Näheres hierzu siehe Anhang B.) Sollen Sprachsignale mit Telephonqualität übertragen

Abbildung 2.37: Zeitmultiplex, dargestellt für $N = 4$

3 GB gratis für alle bis 26!
Jetzt zusätzlich zu jedem A1 **Go!** Tarif:

Huawei P9 Lite
4G/LTE
um **€ 0,-**

Jetzt bestellen

A1

Gerätepreis gültig bei Erstanmeldung zu ausgewählten A1 **Go!** Tarifen.

werden, was anfänglich die Hauptanwendung war, ist die obere Grenzfrequenz eines solcher Signale zu betrachten. In diesem Fall liegt hierfür $f_g = 3.4 \text{ kHz}$ vor, um dieses Signal abzutasten, ist eine minimale Abtastrate von $2 \cdot 3.4 \text{ kHz}$ einzuhalten, in der Praxis wählt man für die Abtastrate $f_A = 8 \text{ kHz}$, was ausreichend ist, um die Abtastbedingung $f_A \geq 2f_g$ einzuhalten. Das Abtastintervall ist damit $T_A = \frac{1}{8000} \text{ s} = 125 \mu\text{s}$. Nach Abbildung 2.37 sollen nun N zeitdiskrete Signale ineinander verschachtelt werden, d.h. jedes dieser Signale erfährt eine Verzögerung um T_A/N , womit N Signale in einem Abtastintervall Platz finden. Dieser Schritt ist erforderlich, da nur die Lücke zwischen zwei Abtastwerten zur Verfügung steht. Der Verschachtelungsprozeß von N Abtastwerten, die von unterschiedlichen Signalen herrühren, muß innerhalb von T_A abgeschlossen sein. Dies ist in der Abbildung durch den rotierenden Verteilerfinger kenntlich gemacht.

Bei der digitalen Nachrichtenübertragung werden Bits auf Nachrichtenpulse abgebildet. Nachdem also die Abtastwerte ineinander verschachtelt sind, können diese nun quantisiert und durch eine Anzahl von Bits dargestellt werden. Nehmen wir an, daß jeder Abtastwert durch L Bits beschrieben wird, so erhalten wir für N gebündelte Abtastwerte die Menge von $N \cdot L$ Bits. Diese beschreiben nun das Bündel von eben N Abtastwerten der einzelnen Signale zum Zeitpunkt 0, dann das Bündel derer zum Zeitpunkt T_A , daraufhin das Bündel derer zum Zeitpunkt $2T_A$ &c. Abbildung 2.37 zeigt den Zusammenhang. Bei genauerem Hinsehen fällt ein weiteres Bit auf, das der Menge von $N \cdot L$ Bits (hier links) hinzugefügt wurde. Wozu dient dies?

Wenn viele Signale derart verschachtelt werden, muß später eine richtige Entschachlung möglich sein. Dies erfordert eine genaue Kenntnis, welche Signalkomponenten wo in dem Verbund zu finden sind. In dem Bild begannen wir bei Signal Nr. 1, danach kam Nr. 2 &c. Wenn ein solches Signal allerdings übertragen wird, geht aufgrund der unbekannten Laufzeit der Zeitbezug verloren. Um dieses Problem zu lösen, ist eine genaue Synchronisation im Empfänger erforderlich, und diese funktioniert nur mit geeigneten Maßnahmen. Eine solche ist das Hinzufügen eines Pulses am Anfang von N ineinander verschachtelten Signalen. Wenn dieser Puls in regelmäßigen Abständen erscheint, ist der Beginn eines Paketes erkennbar, unabhängig davon, welche Information der Rest des Pakets nun enthält. Um die Datenrate nun zu bestimmen, stellen wir fest, daß $N \cdot L + 1$ Bits in der Zeit T_A übertragen werden. Die Bitrate ist folglich

$$r_b = \frac{N \cdot L + 1}{T_A} = (N \cdot L + 1)f_A.$$

Zur Praxis: Im Jahre 1958 entschloß man sich in Nordamerika, d.h. der USA, das sogenannte T1–PCM System einzuführen. Hierin steht PCM für den englischen Ausdruck "pulse-code modulation", womit die Umsetzung eines zeit- und wertkontinuierlichen Signals, also ein analoges Signal, in ein zeit- und wertdiskretes Signal, also ein digitales Signal, gemeint ist. Wie dies geschieht ist oben dargelegt. T1 steht für die besondere Zusammensetzung des Sendesignals durch unterschiedliche Nutzersignale, ebenfalls wie oben beschrieben. 24 Sprachkanäle werden zusammengefaßt, die Abtastrate ist 8000 kHz. Wenn wie hier jeder Abtastwert mit 8 Bit aufgelöst wird, erhalten wir $N \cdot L + 1 = 24 \cdot 8 + 1 = 193$ Bits pro Paket. Die Datenrate ist damit $r_b = 193 \text{ Bits} \cdot 8000 \text{ s}^{-1} = 1.544 \text{ Mbps}$. Bei einer binären Übertragung mit \sqrt{RC} -Pulsen und Flankenfaktor $\alpha = 1$ ergibt sich eine obere Grenzfrequenz von 1.544 MHz, d.h. die Bandbreite über alles ist 3.088 MHz. Bei dem T1–System verwendete man nur ein Extrabit für die "Haushaltsführung" oder besser den Betrieb des Systems (engl.: operation, administration & maintenance), was sich allerdings etwas später als problematisch herausstellte. Ende der sechziger Jahre entschloß man sich, das eine Bit durch acht Bits zu ersetzen, um dies dem europäischen E1–System anzupassen. So ist es nun einmal, wenn ein Land im Alleingang mit Canada und Japan im Schlepptau etwas einführt, was dem akzeptierten Standard des "Rests der Welt" nicht entsprach. Das europäische E1–System, was vom "Rest der Welt" übernommen wurde, ist auch bekannt unter der Bezeichnung PCM30, wobei 30 Nutzerkanäle plus zwei Steuerkanäle (zur "Haushaltsführung") mit jeweils einer Übertragungsrate von 64 kbps, also insgesamt $32 \cdot 64 \text{ kbps} = 2.048 \text{ Mbps}$, arbeiten. Zur Zeit sind immer noch Umsetzter erforderlich, um die 1.6 Mbps an die 2.048 Mbps der "restlichen Welt" anzupassen. Woher kommen die 1.6 Mbps? Nehmen Sie 24 Kanäle mit jeweils 8 Bits pro Abtastwert und addieren Sie anstelle eines Bits nun acht Bits hinzu. Sie erhalten nun 200 Bits pro Paket. Wenn die Abtastrate nach wie vor 8 kHz entspricht, ist die Bitrate des modifizierten T1–Systems $200 \text{ Bits} \cdot 8000 \text{ Bits/s} = 1.6 \text{ Mbps}$. Diese Einsicht zur Verbesserung kam Ende der sechziger Jahre, also etwa zehn Jahre nach der Einführung.

Zum Schluß dieses Kapitels eine kleine Betrachtung hinsichtlich möglicher Probleme, die bislang gar nicht betrachtet worden sind, eine Betrachtung in Form eines kleinen Beispiels:

Beispiel: _____

Betrachten Sie ein Kabel der Länge von 100 km, worüber ein 2 Mbps Datenstrom über-

tragen wird. Wir nehmen eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von $2 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ an. Bestimmen Sie die Anzahl von Bits, die sich gerade in der Leitung befinden, d.h. das Gedächtnis der Leitung. Was passiert, wenn die Temperatur der Leitung sich um 10°C erhöht und die Leitung wegen des Dielektrikums einen positiven Temperaturkoeffizienten von $0.02\%/\text{1}^\circ\text{C}$ aufweist?

Bei der normalen Temperatur ist die Übertragungszeit $\frac{100 \times 10^3}{2 \times 10^8} \text{ s} = 0.5 \text{ ms}$. Bei der vorliegenden Datenrate befinden sich $2 \times 10^6 \text{ bps} \cdot 0.5 \times 10^{-3} \text{ s} = 1000 \text{ Bits}$ in der Leitung.

Wie sind die Auswirkungen auf eine erhöhte Umgebungstemperatur, wenn sich ein Temperatursprung um $+10^\circ\text{C}$ einstellt? Die Antwort ist recht einfach, es erhöht sich die Übertragungsgeschwindigkeit um $0.02\%/\text{1}^\circ\text{C} \cdot 10^\circ\text{C} = 0.2\%$, also von $2 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ auf $2.004 \times 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Bei der vorherrschenden Temperatur ergibt sich $\frac{100 \times 10^3}{2.004 \times 10^8} \text{ s} = 0.499 \text{ ms}$, was 998 Bits in der Leitung ergibt. Wegen der erhöhten Übertragungsgeschwindigkeit gelangen die Daten schneller zum Empfänger, letzterer "sieht" eine erhöhte Datenrate, auf die reagiert werden muß.

Glücklicherweise erfährt ein Übertragungskabel nicht einen derart drastischen Temperaturanstieg innerhalb kurzer Zeit. Wenn aber die Datenrate um den Faktor 100 angehoben wird, kann dies auch bei moderaten Temperaturschwankungen zu einem Problem führen. Wir erkennen, daß sich viele physikalische Effekte dort auswirken können, wo man es auf dem ersten Blick gar nicht vermutet.

Dieses Kapitel hat die Beschreibung eines zufälligen Nachrichtensignals zum Inhalt. Im Zeitbereich erfolgt dies durch die Autokorrelationsfunktion, die darlegt, wie die statistischen Bindungen sich in Abhängigkeit von dem Zeitunterschied verhalten. Schnelle Änderungen haben einen größeren Frequenzbedarf zur Folge. Das Leistungsdichtespektrum gibt Auskunft über die notwendige Bandbreite und auch die Verteilung der Leistung in Abhängigkeit von der Frequenz. Rauschen ist ein Grund für Fehlentscheidungen, ein Optimalfilter liefert beste Ergebnisse bei der Detektion der übertragenen Nachricht. Die verwendeten nachrichtentragenden Pulse müssen der Nyquist-Bedingung genügen. RC-Pulse und $\sqrt{\text{RC}}$ -Pulse finden dabei in vielen praktischen Systemen wegen schneller Konvergenz im Zeitbereich und strikter Bandbegrenzung eine breite Anwendung.

2.10 Aufgaben

- Ein Nachrichtensignal, $x(t)$, mit $E\{x(t)\} = 0$ hat das gezeigte Leistungsdichtespektrum. Wie lautet die mittlere Leistung des Signals? Bestimmen und skizzieren Sie die Autokorrelationsfunktion $R_x(\tau)$. Zeigen Sie, daß der rms-Wert des Signals 1 mV beträgt und Werte im Abstand von jeweils $1\mu\text{s}$ unkorreliert sind.

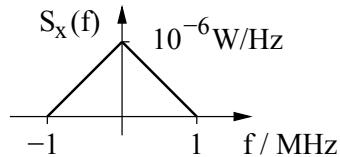


Abbildung 2.38: Leistungsdichtespektrum

- Gegeben ist eine binäre Sequenz, $x(t)$, mit gleichwahrscheinlichen Symbolen. Die Sequenz ist durch ein unipolares NRZ-Format beschrieben. Die Signalrate ist 2 ksps, die durchschnittliche Leistung in 600Ω -10 dBm . Wie lautet die Auslenkung des rechteckförmigen Pulses, $g(t)$, der zur Darstellung der Daten verwendet wird? Geben Sie die Leistungen von $x(t)$ an. Bestimmen und skizzieren Sie das LDS und die AKF.


CAREER Venture

facebook.com/CAREERVenture
google.com/+CAREER-VentureDe
twitter.com/CAREERVenture

Interessiert an Beratung?



Hier bis
28.01.2019
bewerben!

business & consulting spring
25. Februar 2019 Frankfurt

Basycon d-fine
FINBRIDGE
based on competence and commitment
ppi
pwc
SENACOR
STRANGE
Die Managementberatung für Strategischen Change

www.career-venture.de

3. Betrachten Sie eine binäre Sequenz mit gleichwahrscheinlichen Symbolen. Die Sequenz kann entweder durch polare oder unipolare Formate dargestellt werden. Zeigen Sie, daß das polare Format bei einem Puls mit gleicher Auslenkung weniger Leistung benötigt als ein unipolares Signal.
4. Bandbegrenztes weißes Rauschen, $n(t)$, hat eine Leistungsdichte von 10^{-6} W/Hz über einen Frequenzbereich von -100 kHz bis 100 kHz . Zeigen Sie, daß der rms-Wert des Rauschens in einem 1Ω -System etwa 0.45 V beträgt. Wie lautet $R_n(\tau)$? Bei welchen Abständen sind $n(t)$ und $n(t+T)$ unkorreliert? Wenn $n(t)$ gaußverteilt ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Rauschwert größer als 0.45 V ist?
5. Weißes Rauschen erregt ein Filter. Die Übertragungsfunktion lautet

$$H(f) = \frac{1}{1 + jf/f_0} .$$

Ermitteln Sie die AKF des Rauschsignals am Ausgang. Wie lautet die Gesamt-, Gleich- und Wechselleistung?

6. Gegeben ist eine binäre Sequenz, $x(t)$, mit gleichwahrscheinlichen Symbolen. Die Sequenz ist durch ein unipolares NRZ-Format beschrieben. Die Signalrate ist 2 ksps , die durchschnittliche Leistung in $600\Omega -10 \text{ dBm}$. Wie lautet die Auslenkung des rechteckförmigen Pulses, $g(t)$, der zur Darstellung der Daten verwendet wird? Geben Sie die Leistungen von $x(t)$ an. Bestimmen und skizzieren Sie das LDS und die AKF.
7. Betrachten Sie eine binäre Sequenz mit gleichwahrscheinlichen Symbolen. Die Sequenz kann entweder durch polare oder unipolare Formate dargestellt werden. Zeigen Sie, daß das polare Format bei einem Puls mit gleicher Auslenkung weniger Leistung benötigt als ein unipolares Signal.
8. Ein polares NRZ-Format weist Symbole mit den Auftrittswahrscheinlichkeiten $P(a_k = -1) = 0.3$ und $P(a_k = 1) = 0.7$ auf. Das ausgetastete Signal plus Rauschanteil ist entweder $y(t_m) = 1 + n(t_m)$ oder $y(t_m) = -1 + n(t_m)$. Bei dem Rauschen handelt es sich um AWGN mit $\sigma = 0.5$. Bestimmen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit für die Entscheidungsschwellen ± 2 .
9. Ein rampenförmiger Puls, wie in Abbildung 2.39 gezeigt, mit $T = 3 \text{ ms}$ wird zur Darstellung binärer Daten verwendet. $g(t)$ repräsentiert eine logische Eins, $-g(t)$ eine logische Null. Bestimmen Sie die AKF und das LDS.

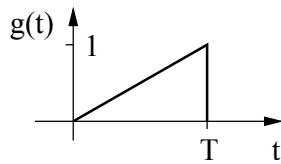


Abbildung 2.39: Nachrichtenpuls

10. Eine polare NRZ-Pulskette ist durch AWGN mit 4×10^{-6} W/Hz gestört. Der verwendete Puls ist rechteckförmig, die Signalrate beträgt $r_S = 10$ ksps. Die Nachricht soll mit einem Optimalfilter detektiert werden. Wie lautet die Impulsantwort, $h_{opt}(t)$, des Filters? Wie ist die Entscheiderschwelle, V , zu wählen? Bestimmen Sie $y(t_m)$ mit $t_m = 0, \pm 1/r_S, \pm 2/r_S, \dots$. Bestimmen Sie den rms-Wert des Rauschens am Eingang des Entscheiders. Ermitteln Sie die Bitfehlerrate.

11. Ein rampenförmiger Puls der Form

$$g(t) = \left(1 - \frac{t}{T}\right) \cdot \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$$

mit $T = 3$ ms wird zur Darstellung binärer Daten verwendet. $g(t)$ repräsentiert eine logische Eins, $-g(t)$ eine logische Null. Bestimmen Sie die Impulsantwort des entsprechenden signalangepaßten Filters. Das Filter muß realisierbar sein. Wie lautet der Maximalwert des Ausgangssignals des Filters? Wenn das Signal durch AWGN mit 0.5×10^{-6} W/Hz gestört ist, wie lautet der rms-Wert des Ausgangsrauschen? Wie muß der nachgeschaltete Entscheider dimensioniert sein? Berechnen Sie die Bitfehlerrate.

12. Ein Nyquist-Puls mit $\alpha = 1$ wird zur Datenübertragung verwendet. Die Symbolrate beträgt 1 ksps. Geben Sie die Bandbreite des Nachrichtensignals für den binären Fall an. Wenn diese Bandbreite nicht überschritten werden darf, die Bitrate jedoch verdoppelt werden soll, welche Möglichkeit bietet sich dann an?
13. Ein Rechner liefert binäre Daten mit 56 kbps, die mit einem binären PAM system übertragen werden. Ermitteln Sie die Bandbreite für α gleich 0.25, 0.5, 0.75 und 1.
14. Ein Analogsignal ist abgetastet, in 128 Stufen quantisiert und durch eine quaternäre PAM übertragen. Ein Synchronpuls wird einem Abtastwort angehängt. Die Bandbreite des Kanals beträgt 12 kHz. Als Puls kommt ein Nyquist-Puls mit $\alpha = 1$ zum Einsatz. Wie lautet die Bitrate, mit der das Signal über den Kanal gelangt?

Bestimmen Sie die Rate, mit der das Analogsignal abgetastet wird. Geben Sie die obere Grenzfrequenz des Signals an.

The image shows a job advertisement for Mahle. The background is dark blue on the left and white on the right, separated by a diagonal line. On the left, large white text reads "NOW HIRING" and "INNOVATOR". Below these, smaller white text reads "A TOP NOTCH LIGHTNING BLASTING LITHIUM WIELDING" and "AND SHOCKINGLY MIND BLOWING MASTER OF ELECTRO MOBILITY". To the right, in a white box, the text "ALSO KNOWN AS ELECTRICAL ENGINEER" is followed by the website "jobs.mahle.com/emobility". The Mahle logo is at the bottom right.

NOW HIRING

A TOP NOTCH LIGHTNING BLASTING
LITHIUM WIELDING

INNOVATOR

AND SHOCKINGLY
MIND BLOWING MASTER OF

**ELECTRO
MOBILITY**

ALSO KNOWN AS
ELECTRICAL ENGINEER

jobs.mahle.com/emobility

MAHLE

Kapitel 3

Übertragung im Bandpaßbereich

Das vorangegangene Kapitel hat unterschiedliche Aspekte der digitalen Übertragung von Signalen bei deren ursprünglichen Frequenzen im Tiefpaßbereich zum Inhalt. In diesem Kapitel betrachten wir, wie die Basisbandsignale den zur Verfügung stehenden Kanälen angepaßt werden. Ausgehend von einem Überblick über die gängigen Modulationsverfahren analysieren wir Empfangsstrukturen und deren Güte und Robustheit gegenüber Rauscheinflüssen.

3.1 Digitale Modulationsverfahren

Ein Übertragungsmedium steht zur Verfügung, damit Nachrichtensignale vom Sender zum Empfänger gelangen können. Als Medium können hierzu unterschiedliche Übertragungskanäle zum Einsatz kommen, wie etwa Zweidrahtleitungen, Koaxialkabel, Hohlleiter, Glasfaserkabel und Antennenstrecken. Jeder dieser Kanäle weist einen Frequenzbereich auf, über den das digitale Nachrichtensignal nicht direkt übertragen werden kann. Ein Mobilfunktelephon, das nach dem GSM-Standard arbeitet, überträgt ein Sprachsignal, dessen obere Grenzfrequenz 4 kHz nicht überschreitet. Dieses mit 8 kHz abgetastet und mit 13 Bits aufgelöst ergibt einen Bitstrom der Rate 104 kbps, den ein Sprachcodierer zudem auf 13 kbps reduziert. Dieses digitale Signal kann nur über eine Antennenstrecke vom Sender zum Empfänger übertragen werden, hierzu steht der Frequenzbereich im 900 MHz-Bereich zur Verfügung. Dieses Beispiel verdeutlicht, daß der zu übertragende Bitstrom aus dem Basisband in den Frequenzbereich des Kanals überführt werden muß, wobei die Besonderheiten des Kanals zu berücksichtigen sind, wie zum Beispiel die auftretenden Dämpfungserscheinungen, Leistungsgrenzen, Bandbreitenbeschränkungen und derlei Dinge. Eine Verschiebung des Spektrums aus dem Basisband- in den Bandpaßbereich erfolgt durch Modulation eines Eintonträgers.

Das Trägersignal hat drei Parameter, nämlich Frequenz, Amplitude und Phase, die allgemeine Form ist durch

$$s(t) = a(t) \cdot \cos(2\pi F t + \varphi(t))$$

gegeben. Hierbei ist $a(t)$ die zeitabhängige Amplitude, F die Trägerfrequenz und $\varphi(t)$ die zeitabhängige Phase. Die grundlegenden Arten der Modulation zeigt Abbildung 3.1, sie sind bekannt unter der Bezeichnung Amplitudensprungverfahren (engl.: amplitude-shift keying, ASK), Frequenzsprungverfahren (engl.: frequency-shift keying, FSK) und Phasensprungverfahren (engl.: phase-shift keying, PSK). Obwohl aus Gründen der Einfachheit ein rechteckförmiger Puls zur Darstellung gewählt ist, sind in der Praxis eher beliebige Pulssformen zu finden, solange diese der Nyquist-Bedingung genügen. Die Pulsfomung geschieht entweder im Basisband oder im Bandpaßbereich. Bei der ASK erkennen wir,

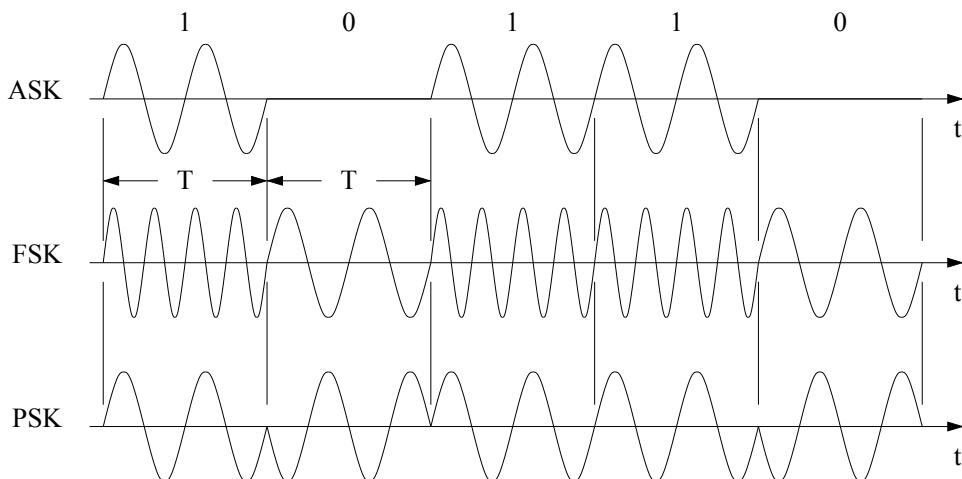


Abbildung 3.1: Digitale Modulationsverfahren

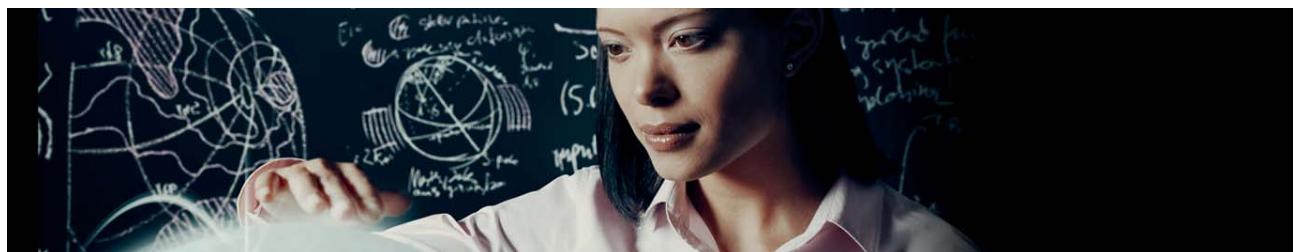
dass die Amplitude die Nachricht trägt, weder Trägerfrequenz noch Trägerphase ändern sich. Liegt eine logische Eins vor, wird das Trägersignal hier eingeschaltet, für eine logische Null ausgeschaltet. Bei der FSK sind Amplitude und Phase konstant, die Nachricht ist in der Frequenz verborgen. Hier repräsentiert eine höhere Frequenz eine logische Eins und eine niedrigere Frequenz eine logische Null. Auch bei der PSK sind Amplitude und Frequenz konstant, die Nachricht ist durch Phasensprünge um 180° gegeben, eine logische Null durch -180° und eine logische Eins durch 0° Phase.

Am Empfangsort erfolgt zunächst eine Demodulation, d.h. der Träger wird entfernt und das originale Nachrichtensignal extrahiert. Zur Detektion bestehen im wesentlichen

zwei Methoden, zum einen die kohärente (synchrone) Detektion, bei der der Empfänger die Trägerphase genau auswertet. Zum anderen kann lediglich die Einhüllende ausgewertet werden, wobei die Kenntnis der aktuellen Phase nicht erforderlich ist. Dieses Verfahren nennt man nichtkohärente oder Enhüllendendetektion. Der Implementierungsaufwand bei letztgenannter Detektion ist relativ gering im Vergleich zur kohärenten Detektion, da hierbei eine Baugruppe allein zur Ermittlung der momentanen Phasenlage notwendig ist. Der Preis für eine einfachere Empfangsstruktur ist jedoch eine erhöhte Fehlerrate.

Erfolgt die Datenübertragung entweder gleichzeitig im Vollduplexbetrieb oder nacheinander im Halbduplexbetrieb, moduliert der ausgesendete Datenstrom im Sender das Trägersignal zur Nachrichtenübertragung über den Kanal. Im Empfänger findet dann eine Demodulation des eintreffenden Signals statt. Beide Seiten verfügen dann über einen Sender und einen Empfänger, oft als Transceiver bezeichnet, die in einem Block mit dem Namen MODEM enthalten sind. Neben den beschriebenen Funktionen sind weitere implementiert, die im wesentlichen Steuerfunktionen zur Koordinierung des Datenflusses zwischen den Datenendeinrichtungen an beiden Enden des Kanals ausüben.

In dem vorangegangenen Kapitel haben wir mehrstufige Verfahren kennengelernt, die es ermöglichen, den Bitstrom in Dauer und Bandbreite aufzuteilen. Ein binäres Verfahren



Join EADS. A global leader in aerospace, defence and related services.

Let your imagination take shape.

EADS unites a leading aircraft manufacturer, the world's largest helicopter supplier, a global leader in space programmes and a worldwide leader in global security solutions and systems to form Europe's largest defence and aerospace group. More than 140,000 people work at Airbus, Astrium, Cassidian and Eurocopter, in 90 locations globally, to deliver some of the industry's most exciting projects.

An **EADS internship** offers the chance to use your theoretical knowledge and apply it first-hand to real situations and assignments during your studies. Given a high level of responsibility, plenty of

learning and development opportunities, and all the support you need, you will tackle interesting challenges on state-of-the-art products.

We take more than 5,000 interns every year across disciplines ranging from engineering, IT, procurement and finance, to strategy, customer support, marketing and sales. Positions are available in France, Germany, Spain and the UK.

To find out more and apply, visit www.jobs.eads.com. You can also find out more on our **EADS Careers Facebook page**.



EADS

mit $M = 2$ Stufen benötigt bei gegebener Bitrate Pulse von kurzer Dauer, was sich auf einen relativ hohen Bandbreitebedarf niederschlägt. Liegen viele Stufen vor, sagen wir $M = 16$, trägt ein Puls vier Bits, die Pulssrate kann gegenüber dem binären Fall geviertelt werden, wenn die Bitrate nicht geändert werden soll. Die Folge ist eine um 75% geringere Bandbreite. M -Stufen mit Modulation kombiniert stellen einen effizienten Weg zur Nutzung der Bandbreite dar, was besonders bei bandbegrenzten Kanälen, wie den Telephonkanal zutrifft.

3.2 Binäre Modulationsverfahren

3.2.1 Amplitudensprungverfahren, ASK

Der einfachste Fall einer digitalen Amplitudensprungmodulation ist das Ein- und Ausschalten des Trägersignals. Zur Formung des Leistungsdichtespektrums sollen Nyquist-Pulse wie zuvor zur Anwendung kommen. Bevor wir uns der ASK widmen, soll kurz der Modulationsvorgang beschrieben werden. Ein Signal $x(t)$ moduliere den komplexen Träger $e^{j2\pi Ft}$, wie es das Produkt $x(t) \cdot e^{j2\pi Ft}$ angibt, das im Zeitbereich ausgeführt wird. Um das Spektrum dieses Signals zu erhalten, setzen wir es in die Analysegleichung der Fourier-Transformation ein und erhalten

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{j2\pi Ft} e^{-j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j2\pi(f-F)t} dt = X(f - F).$$

Kurz zusammengefaßt ist das Ergebnis

$$x(t) \cdot e^{j2\pi Ft} \longleftrightarrow X(f - F)$$

oder in Worten: Das Produkt eines Signals $x(t)$ mit einem eintönigen komplexen Träger-Signal der Frequenz F ergibt eine Verschiebung des Spektrums $X(f) \longleftrightarrow x(t)$ um F hin zu positiven Frequenzen. Auf diesem Modulationssatz beruht nicht nur die Amplitudensprungmodulation.

Modulation

Das Blockschaltbild eines solchen Modulators zeigt Abbildung 3.2. Zuerst wird das Basisbandsignal erstellt, das im Anschluß daran einen Eintonträger moduliert. Das zufällige Nachrichtensignal im Basisband ist

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT),$$

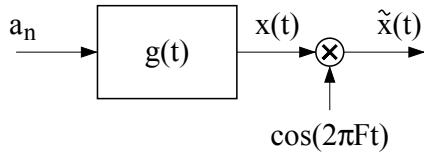


Abbildung 3.2: ASK Modulator

soll es zu einem Ein– und Ausschalten des Trägers führen, wie in Abbildung 3.1 dargestellt, gilt $a_n = 0$ für eine logische Null und $a_n = 1$ für eine logische Eins. Moduliert dieses Signal nun das reelle Trägersignal $\cos(2\pi F t)$, erhalten wir

$$\tilde{x}(t) = x(t) \cdot \cos(2\pi F t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \cdot \cos(2\pi F t).$$

Es interessiert wiederum nur das mittlere Verhalten des Signals, was durch die Autokorrelationsfunktion (AKF) und das Leistungsdichtespektrum (LDS) beschrieben ist. Wie in Kapitel 2 aufgeführt bilden wir zunächst das Produkt $\tilde{x}(t)\tilde{x}(t + \tau)$ und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t)\tilde{x}(t + \tau) &= x(t)x(t + \tau) \cos(2\pi F t) \cos(2\pi F(t + \tau)) \\ &= \frac{1}{2}x(t)x(t + \tau) \left(\cos(2\pi F\tau) + \cos(2\pi F(2t + \tau)) \right) \end{aligned}$$

Wir wenden den Erwartungswertoperator an, um die Zufälligkeit, und ein Integral, um die Zeitableitigkeit herauszumitteln und erhalten für die gesuchte AKF des modulierten Signals

$$\begin{aligned} R_{\tilde{x}}(\tau) &= E\{\tilde{x}(t)\tilde{x}(t + \tau)\} \\ &= \frac{1}{2}R_x(\tau) \frac{1}{T_p} \int_{-T_p/2}^{T_p/2} (\cos(2\pi F\tau) + \cos(2\pi F(2t + \tau))) dt \\ &= \frac{1}{2}R_x(\tau) \cos(2\pi F\tau). \end{aligned}$$

Hierbei ist T_p die Periode des zweiten Cosinusterms im Integral. Der Modulationsvorgang, der von dem Basisbandsignal $x(t)$ zum Bandpaßsignal $\tilde{x}(t)$ führt, ist auch bei den AKFn zu beobachten. Die AKF des ersten, $R_x(\tau)$ mit dem Trägersignal $\cos(2\pi F\tau)$ multipliziert, ergibt die AKF des letzten, nämlich $R_{\tilde{x}}(\tau)$. Der Weg von hier zum LDS ist ein einfacher,

$$R_{\tilde{x}}(\tau) \longleftrightarrow S_{\tilde{x}}(f) = \frac{1}{4}S_x(f + F) + \frac{1}{4}S_x(f - F).$$

Die folgende Darstellung faßt die Ergebnisse kurz zusammen.

$$\begin{aligned}
 R_x(\tau) &\stackrel{\cong}{=} \text{AKF des Basisbandsignals} \\
 S_x(f) &\stackrel{\cong}{=} \text{LDS des Basisbandsignals} \\
 R_{\tilde{x}}(\tau) = \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos(2\pi F\tau) &\stackrel{\cong}{=} \text{AKF des Bandpaßsignals} \\
 S_{\tilde{x}}(f) = \frac{1}{4} S_x(f+F) + \frac{1}{4} S_x(f-F) &\stackrel{\cong}{=} \text{LDS des Bandpaßsignals}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Mit dieser Vorbetrachtung läßt sich nun das ASK-Signal im Zeit- und Frequenzbereich beschreiben.

Zuerst betrachten wir das Nachrichtensignal im Tiefpaßbereich. Da der Träger ein- und ausgeschaltet werden soll, wählen wir für die Nachrichtensymbole $a_n = 0$ für eine logische Null und $a_n = 1$ für eine logische Eins. Der nachrichtenträgende Puls ist rechteckförmig der Dauer T und Auslenkung A . Das zufällige Nachrichtensignal $x(t)$ läßt sich dann durch die Autokorrelationsfunktion im Mittel beschreiben, deren Werdegang wir als Wiederholung noch einmal kurz hervorheben. Der Rechteckpuls $\Lambda(\frac{t}{T})$ weist eine dreieckförmige AKF auf, $R_g(\tau) = A^2 T \Lambda(\frac{\tau}{T})$ (siehe auch Anhang A), womit die AKF des Nachrichtensignals nach Gleichung 2.6 durch

$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{4} \Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) + \frac{A^2}{4}$$



facebook.com/CAREERVenture
google.com/+CAREER-VentureDe
twitter.com/CAREERVenture



Bereit für Consulting?



business & consulting fall
24. September 2018 Frankfurt
Bewerbungsschluss: 23.08.2018

Auszug unserer Referenzen

Basycon **d-fine**

FINBRIDGE
based on competence and commitment

ppi

SKS GROUP

STRANGE
Die Managementberatung für Strategischen Change

www.career-venture.de

gegeben ist. Nun moduliert $x(t)$ das Trägersignal, indem die Amplitude des Trägers sich im Takt von $x(t)$ ändert, wodurch die Umsetzung des Basisbandsignals in ein Bandpaßsignal ("TP/BP-Transformation") erfolgt. Nach Gleichung 3.1 wirkt sich diese Modulation auch auf der Ebene der Autokorrelationsfunktionen aus, die AKF des modulierten Signals $\tilde{x}(t)$ ist folglich

$$\begin{aligned} R_{\tilde{x}}(\tau) &= \frac{1}{2} R_x(\tau) \cos(2\pi F\tau) \\ &= \left(\frac{A^2}{8} \Lambda \left(\frac{\tau}{T} \right) + \frac{A^2}{8} \right) \cos(2\pi F\tau). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Abbildung 3.3 zeigt diese Funktion. Wir erkennen, daß die stärker hervorgehobene Einhüllende dem Verlauf des Basisbandanteils $R_x(\tau)$ folgt. Zwischen dieser Einhüllenden und deren negiertem Verlauf ist der Träger zu sehen, dessen Frequenz ist durch den Kehrwert der Periode gegeben.

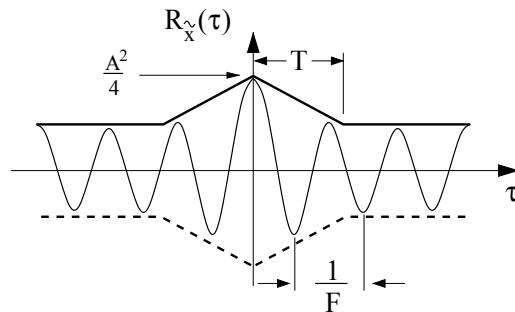


Abbildung 3.3: AKF des amplitudenmodulierten Signals

Gleichung 3.1 entnehmen wir ebenfalls, wie sich das mittlere Spektrum des amplitudenmodulierten Signals aus dem Leistungsdichtespektrum des Basisbandsignals ermitteln läßt. Das LDS von $x(t)$ ist durch die AKF gegeben und resultiert zu

$$R_x(\tau) \longleftrightarrow S_x(f) = \frac{A^2}{4} T \operatorname{si}^2(\pi f T) + \frac{A^2}{4} \delta(f)$$

(siehe Anhang A). Aufgrund der Konstanten der AKF ist neben dem si^2 -Anteil auch eine impulsförmige Frequenzkomponente bei $f = 0$ vorhanden. Durch die Multiplikation des TP-Signals, $x(t)$, mit einem Cosinusträger der Frequenz F ergibt sich eine Verschiebung des Spektrums hin zu den Frequenzen $\pm F$. Da sich dies auch bei den AKFn einstellt, ist das LDS

$$S_{\tilde{x}}(f) = \frac{1}{4} S_x(f + F) + \frac{1}{4} S_x(f - F)$$

$$\begin{aligned}
 &= \underbrace{\frac{A^2}{16} T \sin^2(\pi(f + F)T) + \frac{A^2}{16} T \sin^2(\pi(f - F)T)}_{\text{Spektrum der Einhüllenden, Lage bei } \pm F} \\
 &\quad + \underbrace{\frac{A^2}{16} \delta(f + F) + \frac{A^2}{16} \delta(f - F)}_{\text{Träger bei } \pm F}. \quad (3.3)
 \end{aligned}$$

Abbildung 3.4 zeigt das mittlere Spektrum des amplitudensmodulierten Signals. Wir erkennen die Linien bei $\pm F$, die den Cosinusträger darstellen, und das \sin^2 -Spektrum, das von dem rechteckförmigen Signal herröhrt und den Träger ein- und ausschaltet.

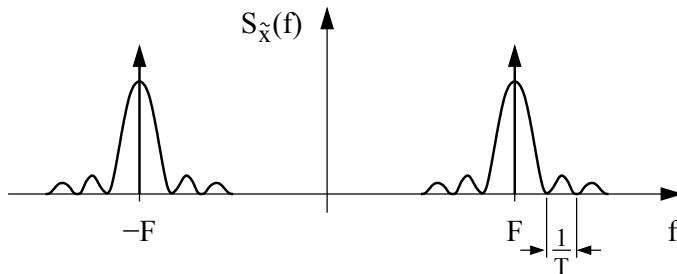


Abbildung 3.4: LDS des amplitudensmodulierten Signals

Die Frage, welche Leistung im Signal $\tilde{x}(t)$ enthalten ist, lässt sich mit Hilfe von den Gleichungen 3.2 und 3.3 leicht ermitteln. Zuerst stellen wir fest, daß keine "Nadel" bei $f = 0$ vorliegt, d.h. im Signal ist keine Gleichkomponente vorhanden. Somit ist die Gesamtleistung gleich der Wechselleistung, die leicht aus der AKF (siehe Gleichung 3.2) bei $\tau = 0$ abzulesen ist. Der Wert hierfür ist schlichtweg $\frac{A^2}{4}$, gemessen in Watt in einem Ohm.

Kohärente Demodulation

Der Demodulator für ein solches Signal ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Dem eintreffenden Bandpaßsignal wird zunächst der Träger phasengenau (!) hinzugefügt, das Produktsignal durchläuft anschließend das Optimalfilter. Die Abtastwerte im Abstand T sind die übertragenen Nachrichtensymbole, vorausgesetzt es liegt der rauschfreie Fall vor.

Am Empfangsort trifft das Bandpaßsignal $\tilde{x}(t) = x(t) \cos(2\pi F t)$ ein. Zum Herabmischen in den Tiefpaßbereich führt man das Trägersignal kohärent, d.h. phasenrichtig hinzu und erhält $\tilde{x}(t) \cos(2\pi F t) = x(t) \cos^2(2\pi F t)$. Dieses Produktsignal liegt am Eingang des Optimalfilters an, das wiederum mit

$$y(t) = (\tilde{x}(t) \cos(2\pi F t)) * g(-t)$$

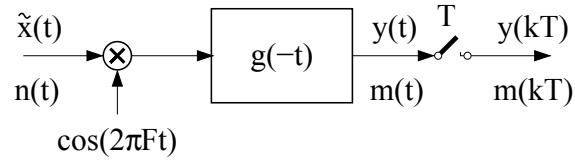


Abbildung 3.5: ASK Demodulator

darauf reagiert. Wir erinnern uns daran, daß sich das Basisbandsignal durch

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT)$$

beschreiben läßt, sodaß wir für die Reaktion des Filters

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (g(t - nT) \cdot \cos^2(2\pi F t)) * g(-t)$$

erhalten. Mit $\cos^2 u = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2u$ ergibt sich für den Summanden

$$\begin{aligned} (g(t - nT) \cdot \cos^2(2\pi F t)) * g(-t) &= \frac{1}{2} g(t - nT) * g(-t) \\ &\quad + \frac{1}{2} (g(t - nT) \cdot \cos(2\pi 2F t)) * g(-t). \end{aligned}$$

Im ersten Term ist kein Trägersignal vorhanden, es handelt sich hierbei also um ein Tiefpaßsignal. Wie aus Kapitel 2 bekannt ist, beschreibt dies die AKF des nachrichtenträgenden Pulses, die allerdings mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ gewichtet und um nT verschoben ist, wie es

$$\frac{1}{2} g(t - nT) * g(-t) = \frac{1}{2} R_g(t - nT)$$

angibt. Abbildung 3.6 zeigt den Verlauf.

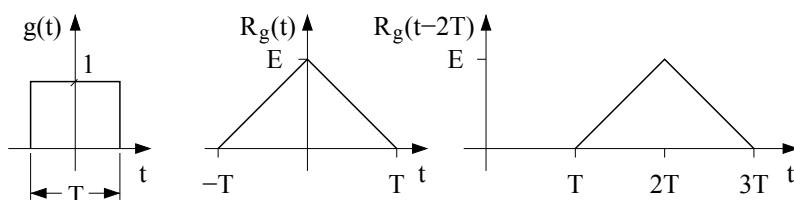


Abbildung 3.6: Nachrichtenpuls und AKF

Der zweite Term ist recht interessant, es handelt sich hierbei um die Faltung eines Bandpaßsignals mit der Impulsantwort eines Tiefpasses. Ohne daß sich eine Auswirkung

auf die Allgemeingültigkeit des Ergebnisses ergibt, wählen wir $n = 0$, wodurch sich einiges an Schreibarbeit ersparen lässt. Für den betrachteten Term erhalten wir dann

$$\frac{1}{2} \left(g(t) \cdot \cos(2\pi 2Ft) \right) * g(-t)$$

und damit den Frequenzanteil hiervon,

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} G(f + 2F) + \frac{1}{2} G(f - 2F) \right) \cdot G^*(f).$$

Schalten wir den Träger nur ein und aus, lässt sich dies durch den Puls $\Pi(\frac{t}{T})$ bewerkstelligen, die Frequenzfunktion hierfür ist $G(f) = T \operatorname{sinc}(\pi f T)$. Bei $G(f \pm 2F) = T \operatorname{sinc}(\pi(f \pm 2F)T)$ handelt es sich um Versionen von $G(f)$, die hin zu den Mittenfrequenzen $\pm 2F$ verschoben sind. Das Produkt $G(f) \cdot G(f \pm 2F)$ ist damit nahezu gleich null, vorausgesetzt die Trägerfrequenz F ist entsprechend hoch gewählt, was jedoch in der Realität gewährleistet ist. Abbildung 3.7 zeigt die spektrale Situation. Hieraus können wir zudem schließen, daß das Produkt $G(f) \cdot G(f - 2F)$ verschwindend gering ist, wenn die Bandbreite des Pulses viel geringer ist als die Trägerfrequenz. Ein Zahlenbeispiel aus der Praxis: Die Bandbreite eines WLAN-Signals ist 25 MHz, übertragen wird es im 2 GHz-Bereich. Die Trägerfrequenz ist etwa achtzig mal größer als die Bandbreite, das Bandpaßsignal gelangt also nicht durch den Tiefpaß.

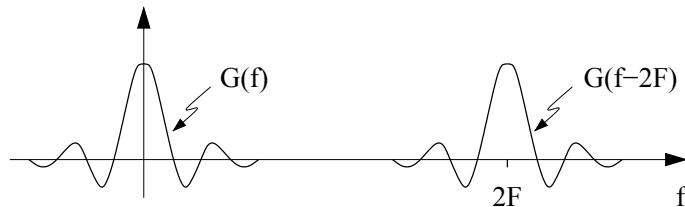


Abbildung 3.7: Produkt aus $G(f)$ und $G(f - 2F)$

Zu guter Letzt erhalten wir für den Nutzanteil des filtrierten Empfangssignals,

$$y(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R_g(t - nT). \quad (3.4)$$

Genügt $R_g(t)$ der Nyquist-Bedingung, liegen also äquidistante Nullstellen im Abstand T vor, ergibt das Signal zum Zeitpunkt $t = kT$ abgetastet den Wert

$$y(kT) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R_g(kT - nT) = \frac{1}{2} a_k E_g.$$

Dies ist der Fall, wenn $g(t)$ ein \sqrt{RC} -Puls ist und $R_g(0) = E_g$ ist.

Beispiel:

Ein Träger der Frequenz F wird in zufälliger Reihenfolge von einem Nachrichtensignal ein- und ausgeschaltet. Aus Gründen der Bandbegrenzung wird nicht hartgetastet, d.h. man verwendet keinen rechteckförmigen Puls mit unendlichen Flankensteilheiten, die Übergänge sind vielmehr langsamer. Ein Puls, der dies durchführt, ist ein \sqrt{RC} -Puls mit Flankenfaktor $\alpha = 1$. Wie auch oben im Text beschrieben, handelt es sich um ein binäres unipolares Format mit $a_n = 0$ oder 1 . Wir betrachten das Signal im Zeit- und Frequenzbereich.

Abbildung 3.8 zeigt das ASK-Signal im Zeitbereich. Deutlich sind die endlichen Flankensteilheiten zu erkennen, abrupte Übergänge treten im Gegensatz zu Abbildung 3.1 nicht auf. Aus diesem Grund können wir annehmen, daß sich das Signal eher auf einen begrenzten Frequenzbereich aufhält. Nach Gleichung 3.1 läßt sich das Spektrum ermitteln. Zuerst berechnen wir das Spektrum des Basisbandsignals nach

$$S_x(f) = S_d(f) \cdot S_g(f)$$

The advertisement features a photograph of the Turning Torso building at night, illuminated by OSRAM LED lights. The building's unique spiral shape is highlighted by the lighting. The OSRAM logo is visible at the top of the building. The text "www.osram.de/karriere" is at the top left, and "Für eine leuchtende Zukunft. OSRAM." is in the center. The right side contains text about OSRAM's research and development in lighting technology, mentioning the use of OSRAM DRAGONtape modules in the building's lighting. The bottom right corner shows the OSRAM logo with a lightbulb icon.

2.51 OSRAM GmbH, CRM MK AB, 81536 München

www.osram.de/karriere

LED
CREATING TOMORROW

„The Turning Torso“ in Malmö, Schweden: 2700 OSRAM DRAGONtape®-Module setzen das spiralförmige Gebäude in Szene.

Seit mehr als 100 Jahren forscht OSRAM an der Zukunft des Lichts. Für unsere Kunden entwickeln wir Tag für Tag richtungweisende Beleuchtungslösungen. Rund um den Globus lassen wir Lichtvisionen Wirklichkeit werden. Mit der OLED-Technologie bringt OSRAM das Licht jetzt in eine neue Dimension: Hauchdünn und flächig eröffnen die organischen LED nie da gewesene Möglichkeiten für die Beleuchtung von morgen.

Werden auch Sie Teil der nächsten großen Lichtrevolution made by OSRAM und starten Sie zusammen mit uns in eine leuchtende Zukunft. Mehr Infos unter: www.osram.de/karriere

OSRAM

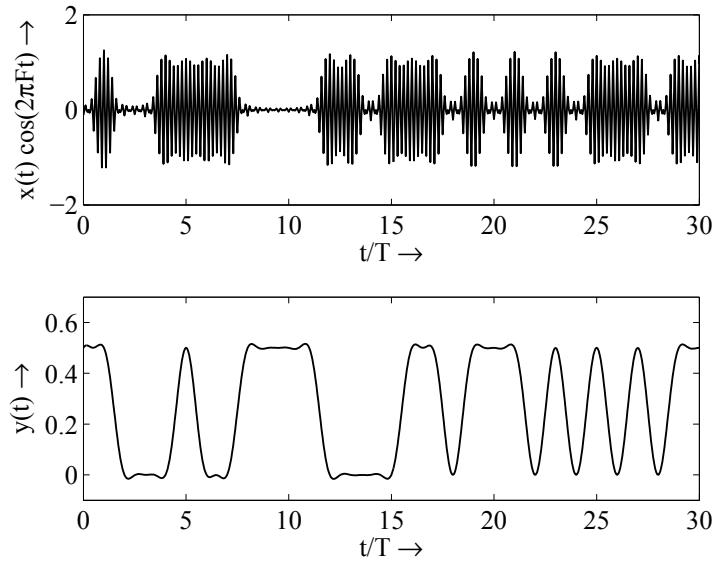


Abbildung 3.8: ASK vor und hinter dem Empfangsfilter

$$= \left(\frac{1}{4T} + \frac{1}{4T} \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \delta(f - \frac{\ell}{T}) \right) \cdot |G(f)|^2$$

und erhalten hierfür über

$$S_x(f) = \frac{1}{4T} |G(f)|^2 + \frac{1}{4T^2} \underbrace{\delta(f) |G(f)|^2}_{=\delta(f) |G(0)|^2}$$

das Ergebnis

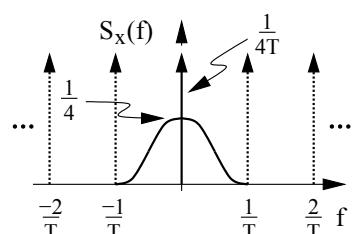
$$S_x(f) = \frac{1}{4T} |G(f)|^2 + \frac{1}{4T} \delta(f),$$

mit \$G(0) = \sqrt{T}\$.

Die Abbildung zeigt, daß von den vielen Nadeln im Abstand $\frac{1}{T}$ nur die im Ursprung übrig bleibt. Der Grund hierfür ist die Bandbreite von $G(f)$, d.h. $-\frac{1}{T} \leq f \leq \frac{1}{T}$. Das Spektrum des ASK-Signals ist mit

$$S_{\tilde{x}}(f) = \frac{1}{4} S_x(f + F + \frac{1}{4}) S_x(f - F))$$

das um $\pm F$ verschobene und mit dem Faktor $\frac{1}{4}$ belegte Basisbandspektrum $S_x(f)$. Abbildung 3.9 zeigt das Resultat. Wir erkennen, daß das Nachrichtensignal bandbegrenzt ist,



die Trägerfrequenz ist in üppiger Stärke vorhanden. Im Vergleich zu Abbildung 3.4 ist die Bandbreite stark begrenzt. Ist sie im ersten Fall (theoretisch) unendlich, verringert sie sich im letzteren auf $\frac{2}{T}$.

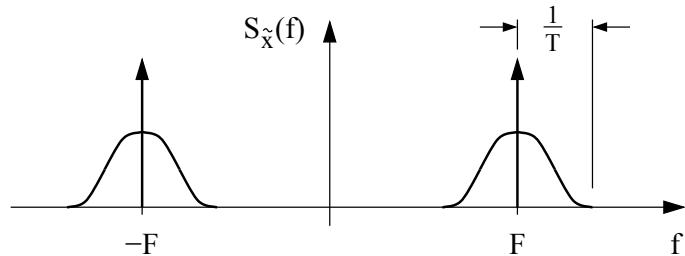


Abbildung 3.9: LDS des Nachrichtensignals

Abbildung 3.8 zeigt neben dem Empfangssignal auch das am Ausgang des Optimalfilters. Hierbei handelt es sich um ein Tiefpaßfilter, wie oben im Text hervorgehoben, die Hochfrequenzkomponenten gelangen nicht hierdurch. Wir erkennen an der unteren Darstellung, daß der Maximalwert nun $\frac{1}{2}$ ist. Den Grund hierfür finden wir im obigen Text. Der Anteil bei der doppelten Trägerfrequenz erscheint nicht am Ausgang des Filters, es handelt sich hierbei schließlich um ein Tiefpaßfilter. Im Abstand T sind die Ergebnisse zu



Willkommen im Erfolgsteam. Auf Vielfalt spezialisieren

Zusammen mit der Liebherr-Hausgeräte Ochsenhausen GmbH haben Sie bereits während Ihres Studiums viele interessante Möglichkeiten. In einem Praktikum können Sie bei uns erste Berufserfahrungen sammeln. Gerne unterstützen wir Sie aber auch bei der Bearbeitung einer herausfordernden Themenstellung im Rahmen Ihrer Abschlussarbeit.

Unser Angebot:

- Mitarbeit in einem international erfolgreichen Familienunternehmen
- Abwechslungsreiches Arbeitsumfeld und faszinierende High-Tech-Produkte
- Sehr gute Möglichkeiten zum Auf- und Ausbau von Fachkompetenz und persönlichen Fähigkeiten

Bewerben Sie sich jetzt. Willkommen im Erfolgsteam.

Weitere Informationen unter:
www.liebherr.com/Karriere

LIEBHERR
Die Firmengruppe

finden.

Warum liegt eine Zeitverschiebung zwischen dem ASK-Signal (oben) und dem Ausgangssignal des Optimalfilters (unten) vor? Die Antwort liegt in der Realisierung begründet. Das Filter muß realisierbar sein, was eine Reaktionszeit beinhaltet. In der Natur verläuft alles, wirklich alles nach der Erregung. Das Filter muß also einschwingen. Bei genauerem Hinsehen erkennt der investigative Leser eine Verzögerung von $4T$. Das Filter mit diesem Wert von α , der hier 1 ist, erfordert einen Einschwingbereich von etwa $4T$. Daher kommt alles um diese Zeit verzögert am Entscheider an, der hinter dem Filter zu finden ist.

Bei dem Rauschanteil greifen wir auf ein Ergebnis zurück, dessen Herleitung der wissenschaftige Leser in Anhang B findet. Zusammengefaßt ist dies schlicht und ergreifend

$n(t) = i(t) \cos(2\pi F t) + q(t) \sin(2\pi F t)$	Bandpaßrauschen
$R_n(\tau) = R_i(\tau) \cos(2\pi F \tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$	AKF des BP-Rauschens
$R_i(\tau) = R_q(\tau) = R_n(\tau)$	I- und Q-Komponente

(3.5)

Hierbei steht "i" für die I- oder Cosinuskomponente und "q" für die Q- oder Sinuskomponente des Rauschens.

Weiter oben im Text, als das Basisbandmodell behandelt wurde, fanden wir heraus, daß die AKFn von Eingangs- und Ausgangssignal durch die Faltungsbeziehung $R_n(\tau) * g(\tau) * g(-\tau) = R_m(\tau)$ beschrieben ist. Am Eingang des Filters liegt nach Abbildung 3.5 $n(t) \cos(2\pi F t)$ vor, dessen AKF

$$\underbrace{E\{n(t)n(t+\tau)\}}_{=\frac{N_0}{2}\delta(\tau)} \cos(2\pi F t) \cos(2\pi F(t+\tau)) = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2} \delta(\tau) \cos(2\pi F \tau) + \frac{N_0}{2} \frac{1}{2} \delta(\tau) \cos(2\pi 2Ft + 2\pi F\tau)$$

ist. Wir mitteln bei dem zweiten Cosinusterm die Zeitabhängigkeit heraus und erhalten für die AKF des Eingangsrauschens

$$\frac{N_0}{2} \delta(\tau) \frac{1}{2} \cos(2\pi F \tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \frac{1}{2} \cos(0) = \frac{1}{2} \frac{N_0}{2} \delta(\tau).$$

Hiermit ergibt sich sofort die AKF des Rauschens am Ausgang des Filters zu

$$R_m(\tau) = \frac{1}{2} \frac{N_0}{2} \delta(\tau) * R_g(\tau) = \frac{1}{2} \frac{N_0}{2} R_g(\tau),$$

womit wir für die Rauschleistung

$$R_m(0) = \frac{1}{2} \frac{N_0}{2} E_g$$

erhalten. Wir halten fest, daß der Nutzanteil das ausgetasteten Empfangssignals für den betrachteten Fall mit $a_n = 0$ oder 1 gleich 0 oder $\frac{E_g}{2}$ ist, der Effektivwert des ausgetasteten Rauschanteils $\sqrt{\frac{1}{2} \frac{N_0}{2} E_g}$ beträgt.

Mit diesen Angaben läßt sich nun die Fehlerrate bestimmen. Wie in Kapitel 2 durchgeführt, erhalten wir mit der nebenstehenden Abbildung sofort den Ausdruck für die Fehlerrate, nämlich

$$P_e = Q\left(\frac{V}{\sigma}\right),$$

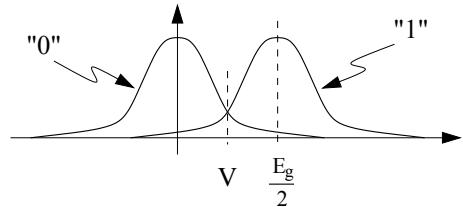
wenn die optimale Entscheiderschwelle bei dem Schnittpunkt der beiden Gaußkurven gewählt ist. Mit $V = \frac{E_g}{4}$ und dem oben angegebenen σ ergibt sich die Fehlerrate zu $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{4N_0}}\right)$. Um verschiedene Modulationsverfahren miteinander vergleichen zu können, sollten die Größen bezogen werden auf ein Bit. In diesem Fall ist die mittlere Energie pro Bit $E_b = \frac{1}{2}E_0 + \frac{1}{2}E_1 = \frac{1}{2}E_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}E_g$, mit E_0 als der Energie für eine logische Null und E_1 für die einer logischen Eins. Wir erinnern uns aber daran, daß E_g die Energie des Basisbandpulses $g(t)$ ist, durch die Modulation und Demodulation tritt zudem der Faktor $\frac{1}{2}$ auf, die Energie des empfangenen Pulses für eine logische Eins ist folglich $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}E_g$. Damit ergibt sich die Fehlerrate

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

Hierbei ist zu bedenken, daß ein Puls ein Bit trägt und damit die Symbolfehlerrate gleich der Bitfehlerrate ist.

Bei der kohärenten Demodulation muß im Empfänger der augenblickliche Träger phasenrichtig zugeführt werden. Was passiert, wenn dies nicht der Fall ist? Diese Frage ist leicht zu beantworten. Das gesendete Bandpaßsignal ist bekanntlich $x(t) \cos(2\pi F t)$, wenn diesem der Empfangsoszillator nun den Träger richtig zuführt, resultiert dies zu $x(t) \cos(2\pi F t) \cdot \cos(2\pi F t)$ und weiter zu

$$y(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R_g(t - nT),$$



wie in Gleichung 3.4 beschrieben. Bei einer Phasendifferenz um ϑ zwischen dem eintreffenden Träger- und dem hinzugefügten Oszillatorsignal liegt hingegen

$$x(t) \cos(2\pi F t + \vartheta) \cos(2\pi F t) = x(t) \frac{1}{2} \cos \vartheta + x(t) \frac{1}{2} \cos(2\pi 2F t + \vartheta)$$

vor. Der erste ist der effektive TP-Anteil, der zweite, also der BP-Anteil bei der Trägerfrequenz $2F$, gelangt nicht durch das Optimalfilter und kann ignoriert werden. Führen wir die Schritte aus, die zu Gleichung 3.4 führen, ist der Nutzanteil nun

$$y(t) = \frac{1}{2} \cos(\vartheta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n R_g(t - nT).$$

Sind die Argumente des Trägersignals und des Oszillatorsignals gleich, was für $\vartheta = 0$ der Fall ist, liegt der beste Fall vor. Bei $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ hingegen kommt es zu einer totalen Auslöschung, der Nutzanteil verschwindet. Wir erkennen, wie wichtig es ist, das Oszillatorsignal phasenrichtig dem Trägersignal zuzufügen, ausgedrückt durch den Begriff kohärente Demodulation. In der Praxis macht man dafür Gebrauch von einer Phasenregelung, die die Abgleichung der Phasen durchführt. Neben der nicht ganz so simplen Produktbildung in Sender und Empfänger ist auch eine Phasenregelschleife unumgänglich, was bei der kohärenten Demodulation einem nicht unbeträchtlichen Aufwand von Gerätetechnik zur Folge hat.



Nichtkohärente Demodulation

Es gibt Anwendungen im alltäglichen Leben, bei denen kleinste "Sender & Beantworter", genannt Transponder (engl.: transmitter & responder), auf Anfrage von außen gespeicherte Informationen aussenden. Diese Transponder sind oft recht klein, wir finden sie im neuen deutschen Personalausweis, in Büchern, die der Leser sich aus der Bibliothek ausleiht usw. Die Technik, die hierbei zu Einsatz kommt, ist unter RFID bekannt (engl.: radio frequency identification). Diese Transponder ("Funketiketten") kommen ohne eigene Stromversorgung aus, hierzu entnehmen sie eigens hierfür ausgesendeten elektromagnetischen Wellen ihre Energie, der Aufwand von Funktionalitäten und Gerätetechnik muß somit sehr minimal sein, Oszillatoren, Phasenregelkreise und dererlei Dinge können somit nicht zum Einsatz kommen.

Bei der RFID-Technik kommen digitale Modulationsverfahren zum Einsatz, die jedoch möglichst einfach umzusetzen sind. Die Lösung hierzu bieten Verfahren, die zu Beginn der Rundfunktechnik in Form von Einhüllendendetektoren zum Einsatz kamen. Auch diese bestanden aus einer geringen Anzahl von Bauelementen, der gerätetechnische Aufwand war sehr gering, außerdem entnahmen diese zum Betrieb ebenfalls die Energie aus der empfangenen elektromagnetischen Wellen. Es stellt sich nun die Frage, wie diese Einhüllendendetektoren oder besser nichtkohärennten Demodulatoren funktionieren.

Wir gehen wieder von dem Fall der ASK aus, bei der der Träger der Nachricht entsprechend ein- und ausgeschaltet wird, man spricht dabei auch von OOK (engl.: on-off keying, OOK). Um auf aufwendige Maßnahmen zur Phasenrückgewinnung zu verzichten, bedienen wir uns nun eines Einhüllendendemodulators, der in Abbildung 3.10 dargestellt ist.

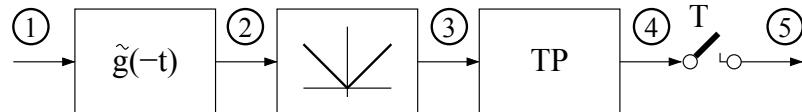


Abbildung 3.10: Einhüllendendemodulator

Nutzanteil

- Am Eingang liege der Puls

$$g(t) \cos(2\pi F t + \vartheta)$$

an. Um den Vorgang möglichst einfach darzulegen, nehmen wir an, die Trägerfrequenz sei ein ganzzahliges Vielfaches von $\frac{1}{T}$. Damit ist nämlich $\cos(2\pi F t) = \cos(2\pi F(t - T))$ und wir können uns bei der weiteren Betrachtung auf einen Bandpaßpuls $\tilde{g}(t) = g(t) \cos(2\pi F t)$ konzentrieren.

2. Das Optimalfilter soll auf $\tilde{g}(t)$ angepaßt sein, die Impulsantwort dieses BP–Filters ist somit $\tilde{g}(-t)$. Wir erkennen einen Phasenunterschied ϑ zwischen dem empfangenen Träger und dem Träger in $\tilde{g}(t)$. Die Faltung ergibt

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(-t') g(t - t') \cos(2\pi F(t - t') + \vartheta) dt' \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(-t') g(t - t') (\cos(2\pi F t + \vartheta) + \cos(2\pi 2F t' - 2\pi F t - \vartheta)) dt' \\ &= \frac{1}{2} \cos(2\pi F t + \vartheta) \int_{-\infty}^{\infty} g(t') g(t + t') dt' \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{g(t')}_{\text{TP}} \underbrace{g(t + t') \cos(2\pi 2F(t + t') + \vartheta)}_{\text{BP@}\pm 2F} dt'. \end{aligned}$$

Bei dem zweiten Anteil wird ein Tiefpaß–Anteil mit einem Bandpaß–Anteil der Mittelfrequenzen $\pm 2F$ gefaltet, das Ergebnis ist gleich null, wenn $2F$ größer ist als die Bandbreite des TP–Anteils. Folglich ist das Ergebnis dieses Filtervorgangs schlicht und ergreifend

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \cos(2\pi F t) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} g(t') g(t + t') dt'}_{= R_g(t)} = \frac{1}{2} R_g(t) \cos(2\pi F t). \end{aligned}$$

3. Zur Einhüllendendemodulation greift man zuerst auf eine Nichtlinearität zurück, in dem vorliegenden Fall ist es ein Zweiweggleichrichter, der aus dem Eingangssignal

$$\frac{1}{2} |R_g(t)| \cdot \frac{\pi}{2} |\cos(2\pi F t + \vartheta)|$$

macht. Der Faktor $\frac{\pi}{2}$ ist nur eingeführt worden, um die Betrachtung auf das Wesentliche zu beschränken. Ohne diesem Faktor würde sich eine weitere "Baustelle" ergeben, lassen wir diese am besten geschlossen. Nun besteht wieder einmal die Kunst darin, das, was die Natur mit vier Dioden in Brückenschaltung nebenbei so hinbekommt, auf dem Papier nachzubilden. In nun jeder mathematischen Formelsammlung, wie etwa dem Bronstein (siehe Literaturverzeichnis), findet man die Fourier–Reihe von dem Betrag einer Cosinusfunktion,

$$\frac{\pi}{2} |\cos x| = 1 + 2 \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2x - \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4x + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6x \pm \dots \right).$$

Mit $x = 2\pi F t + \vartheta$ finden wir das Signal am Ausgang des Gleichrichters als

$$\underbrace{\frac{1}{2} |R_g(t)|}_{\text{TP}} + \underbrace{|R_g(t)| \frac{1}{3} \cos(2\pi 2Ft + 2\vartheta)}_{\text{BP@}\pm 2F} - \underbrace{|R_g(t)| \frac{1}{15} \cos(2\pi 4Ft + 4\vartheta)}_{\text{BP@}\pm 4F} \pm \dots$$

4. Das Tiefpaßfilter trennt die Signalkomponenten, nur die im Tiefpaßbereich gelangen durch dieses Frequenzfenster, sodaß am Eingang des Austasters nun $\frac{1}{2} |R_g(t)|$ anliegt. Hierbei gehen wir davon aus, daß die Bandbreite von $R_g(t) = g(t) * g(-t)$ von der Trägerfrequenz F weit überschritten wird, sodaß dies auch für die höhere Bandbreite von $|R_g(t)|$ zutrifft, die tatsächlich oberhalb derer von $R_g(t)$ liegt. Bei Übertragungsraten im Kilohertzbereich und Trägerfrequenzen im Megahertzbereich dürfte dies in der Tat zutreffen.

Warum ist der Betrag eines Signals breitbandiger als das Signal selbst? Die Betragsbildung führt dazu, daß bei Nulldurchgängen scharfe Spitzen auftreten, die auf hohe Frequenzanteile hindeuten.

5. Zum richtigen Zeitpunkt ausgetastet, und dies sei vorausgesetzt, erhalten wir

$$\frac{1}{2} |R_g(t)| \Big|_{t=0} = \frac{1}{2} E_g,$$

mit E_g als der Energie des Tiefpaßpulses $g(t)$.

Rauschanteil

1. In Anhang B ist das Bandpaßrauschen aufgeführt. Kurz umrissen handelt es sich hierbei um weißes Rauschen, das im interessierenden Frequenzbereich "weiß" ist. Es ist durch

$$n(t) = i(t) \cos(2\pi F t) + q(t) \sin(2\pi F t)$$

beschrieben. Die Autokorrelationsfunktionen sind allesamt gleich, nämlich

$$R_n(\tau) = R_i(\tau) = R_q(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau),$$

und ein Rauschen dieser Art liegt am Empfangsort an.

2. Nun interessiert das Rauschen am Ausgang des optimalen Empfangsfilters. Auch hierbei handelt es sich um ein Bandpaßrauschen, nun aber ist es bandbegrenzt und durch die Faltung $m(t) = n(t) * \tilde{g}(-t)$ beschrieben. Die AKF hierfür ist

$$R_m(\tau) = R_n(\tau) * \tilde{g}(\tau) * \tilde{g}(-\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \tilde{g}(\tau) * \tilde{g}(-\tau),$$

weiterhin können wir allgemein für das bandbegrenzte Rauschen

$$m(t) = m_i(t) \cos(2\pi F t) + m_q(t) \sin(2\pi F t),$$

mit

$$R_m(\tau) = R_{m_i}(\tau) = R_{m_q}(\tau) = \frac{N_0}{2} \cdot \tilde{g}(\tau) * \tilde{g}(-\tau) = \frac{1}{2} R_g(\tau) \cos(2\pi F \tau)$$

schreiben. Hierbei gelten die gleichen Argumente wie für das Bandpaßrauschen $n(t)$. Für die Leistung des Rauschens $m(t)$ erhalten wir für die I- wie auch die Q-Komponente $\sigma_m^2 = \frac{N_0}{2} \frac{E_g}{2}$, wobei $R_g(0) = E_g$ wie gehabt die Energie des Basisbandpulses $g(t)$ darstellt.

3. Wegen der folgenden Nichtlinearität müssen nun Nutz- und Rauschanteil den weiteren Weg gemeinsam gehen. Vor dem Zweiweggleichrichter liegt dann das Signal

$$\left(\frac{1}{2} R_g(t) + m_i(t) \right) \cos(2\pi F t) + m_q(t) \sin(2\pi F t)$$

The advertisement features a central photograph of a teacher smiling and interacting with two young students who are looking at a laptop screen. This central image is framed by large, stylized orange and yellow swirling lines. In the top left corner, there is a logo for "e-learning for kids" consisting of a colorful grid of squares. In the bottom right corner, there is a green oval containing text about the organization's impact: "The number 1 MOOC for Primary Education", "Free Digital Learning for Children 5-12", and "15 Million Children Reached".

About e-Learning for Kids Established in 2004, e-Learning for Kids is a global nonprofit foundation dedicated to fun and free learning on the Internet for children ages 5 - 12 with courses in math, science, language arts, computers, health and environmental skills. Since 2005, more than 15 million children in over 190 countries have benefitted from eLessons provided by EFK! An all-volunteer staff consists of education and e-learning experts and business professionals from around the world committed to making difference. eLearning for Kids is actively seeking funding, volunteers, sponsors and courseware developers; get involved! For more information, please visit www.e-learningforkids.org.

vor, das wir zunächst mit

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \cos \left(x - \arctan \frac{b}{a} \right)$$

in eine andere Form bringen,

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}R_g(t) + m_i(t) \right)^2 + m_q^2(t)} \cdot \cos(2\pi F t + \Phi),$$

wobei Φ allerdings wegen der Gleichrichtung keine weitere Rolle spielt. Hieraus produziert der Zweiweggleichrichter das Signal

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}R_g(t) + m_i(t) \right)^2 + m_q^2(t)} + \text{Rest } @ \pm 2F, \pm 4F, \dots$$

mit einer Tiefpaßkomponente und vielen Bandpaßkomponenten bei den angegebenen Mittenfrequenzen.

4. Aus diesem Gemenge fischt das Tiefpaßfilter lediglich die Tiefpaßkomponente heraus, sodaß hinter dem Filter das Signal

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}R_g(t) + m_i(t) \right)^2 + m_q^2(t)}$$

erscheint.

5. Und tasten wir dieses etwa zum Zeitpunkt $t = 0$ ab, erhalten wir

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}E_g + m_i \right)^2 + m_q^2},$$

wobei unter $m_{i,q}$ der Wert $m_{i,q}(0)$ verstanden werden soll. Für das gesendete, hier nullte Symbol, $a_0 = 0$, ist $E_0 = 0$, d.h. die Energie eines Pulses der Auslenkung null, und folglich

$$\sqrt{m_i^2 + m_q^2},$$

für $a_0 = 1$ ist $E_1 = \frac{E_g}{2}$ und wir erhalten

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}E_g + m_i \right)^2 + m_q^2}.$$

Im ersten Fall, also den Fall einer Null, liegt am Eingang des Entscheiders nur ein Rauschen vor, das durch eine Rayleigh–Verteilung beschrieben ist. Im letzteren liegt eine Rice–Verteilung vor (siehe Anhang B).

Lassen Sie uns die Signalsituation am Eingang des Entscheiders betrachten. Unten ist die Situation für den Nutzanteil $A = R_g(0) = 4$ und dem Rauschanteil $\sigma = 1$ dargestellt. Hierbei ist die Auslenkung

$$r = \sqrt{(a_0 \cdot \frac{1}{2}E_g + m_i)^2 + m_q^2}$$

Die Bitfehlerrate lässt sich damit folgendermaßen ermitteln.

Wo Rayleigh und Rice ihre Wege kreuzen, finden wir die optimale Entscheiderschwelle. Nur, wo genau liegt dieser Punkt? Die Rayleigh- und Rice-Verteilung müssen gleich sein,

$$p_{\text{Ray}}(V) = \frac{V}{\sigma_m^2} e^{-\frac{V^2}{2\sigma_m^2}} = \frac{V}{\sigma_m^2} e^{-\frac{V^2+A^2}{2\sigma_m^2}} I_0\left(\frac{VA}{\sigma_m^2}\right) = p_{\text{Rice}}(V),$$

mit $A = \frac{E_g}{2}$. Die "Kreuzung" finden wir also durch

$$I_0\left(\frac{VA}{\sigma_m^2}\right) = e^{-\frac{A^2}{2\sigma_m^2}}.$$

Da für diese Lösung ein geschlossener Ausdruck (noch) nicht vorliegt, greifen wir auf eine sehr gute Näherung zurück (siehe etwa [Peebles 1987, p. 302]). Für $I_0(\beta\sqrt{2\alpha}) = e^\alpha$ liegt die Lösung sehr nahe bei $\beta = \sqrt{2 + \frac{\alpha}{2}}$. Wenden wir dies an, erhalten wir für die Entscheiderschwelle

$$V = \frac{A}{2} \sqrt{1 + 8 \frac{\sigma_m^2}{A^2}} \approx \frac{A}{2},$$

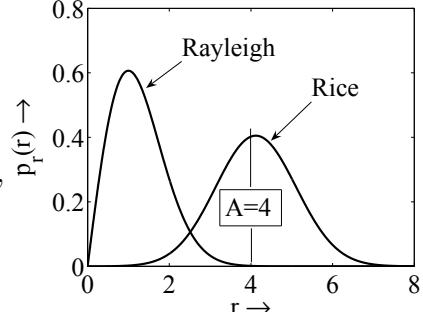
für $A \gg \sigma_m$. Die Verläufe in dem Bild gelten für $A = 4$ und $\sigma_m = 1$, was zu $V \approx 2.4$ führt. Bei kleiner werdendem σ_m nähert sich V dem Wert 2 an. Wir erkennen aber ein Problem, die Schwelle ist abhängig von der Auslenkung A . Und liegt ein Kanal mit Schwunderscheinungen (engl.: fading) vor, muß dieser Wert immer der aktuellen Signalauslenkung angepaßt werden.

Zur Fehlerwahrscheinlichkeit ermitteln wir zuerst den Fehler, wenn $a_n = 0$ vorliegt. Dies bedeutet die Rayleigh-Verteilung, der Fehlerfall ist durch

$$P_{e0} = \int_V^\infty \frac{r}{\sigma_m^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_m^2}} dr = - \int_V^\infty de^{-\frac{r^2}{2\sigma_m^2}} = e^{-\frac{V^2}{2\sigma_m^2}}$$

gegeben, da wunderbarerweise der Zusammenhang

$$\frac{d}{dr} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_m^2}} = -\frac{r}{\sigma_m^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_m^2}}$$



zutrifft. Für die Fehlerwahrscheinlichkeit des Falles, daß $a_n = 1$ gesendet wurde, erhalten wir mit der Näherung, daß die Rice–Verteilung für große Werte von A in eine Gauß–Verteilung übergeht (siehe Anhang B),

$$P_{e1} \approx \int_0^V \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_m} e^{-\frac{(r-A)^2}{2\sigma_m^2}} dr = Q\left(\frac{0-A}{\sigma_m}\right) - Q\left(\frac{V-A}{\sigma_m}\right) = Q\left(\frac{A}{2\sigma_m}\right) - Q\left(\frac{A}{\sigma_m}\right) \approx Q\left(\frac{A}{2\sigma_m}\right).$$

Wir vergleichen erst einmal die Fehlerwahrscheinlichkeiten für $A = 4$ und $\sigma_m = 1$. Hierfür ist $P_{e0} = e^{-2} \approx 0.135$, für den anderen Fehlerfall erhalten wir $P_{e1} \approx Q(2) - Q(4) \approx 0.002275 - 0.00003 = 0.02272 \ll P_{e0}$. Bei dem Fehlerverhalten dominiert der Fall, daß eine Null übertragen wird. Eine Null für eine Eins zu halten ist viel wahrscheinlicher als umgekehrt. Wo bleibt da die Gleichgerechtigkeit? Die Fehlerwahrscheinlichkeit ist letztendlich

$$P_e = \frac{1}{2}P_{e0} + \frac{1}{2}P_{e1} \approx \frac{1}{2}e^{-\frac{A^2}{8\sigma_m^2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{A^2}{2N_0E_g}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{E_g}{8N_0}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\frac{E_b}{N_0}} = P_b,$$

wobei die bekannten Zusammenhänge $V \approx \frac{A}{2}$, $A = \frac{E_g}{2}$, $\sigma_m^2 = \frac{N_0}{2}\frac{E_g}{2}$ und $E_b = \frac{1}{2}\frac{E_g}{2} + \frac{1}{2}0$ verwendet wurden. Da ein Bandpaßpuls ein Bit trägt, ist die Fehlerrate gleich der Bitfehlerrate.

Fazit: Der heutige Ingenieur sollte nicht die Erkenntnisse aus der guten alten Anfangszeit des Rundfunks über Bord werfen. Nicht von ungefähr hat man diese Lösungswege bekannter Probleme bei der RFID–Technik gewählt. Nur, je einfacher der Geräteaufwand, umso schwieriger die Signalbeschreibung nebst Fehlerperformanz. Aber zu guter Letzt zählt wie immer die Praxis.

3.2.2 Phasensprungverfahren, PSK

Bei der binären Phasentastung gelten die gleichen Betrachtungen wie bei der ASK, die oben behandelt wurde. Wir konzentrierten uns dabei auf das OOK–Verfahren, wohinter sich ein unipolares Format verbirgt. Bei der PSK ist die Nachricht in der Phase verborgen, sodaß die Einhüllende des PSK–Signals konstant ist. Wir zeigen zunächst den Weg von einem polaren ASK– zum PSK–Signal auf. Die Verläufe sind in Abbildung 3.1 dargestellt.

Das Bandpaßsignal ist wie gehabt

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \cdot \cos(2\pi F t),$$

nun seien die Nachrichtensymbole jedoch $a_n = \pm 1$. Soll die Nachricht in Phasensprüngen liegen und das phasenmodulierte Signal eine konstante Einhüllende aufweisen, ist sicher

für den Nachrichtenpuls $g(t) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$ zu wählen. Nun erwarten wir für ein solches Signal die Form

$$\tilde{x}(t) = \cos\left(2\pi F t + \phi(t)\right),$$

mit der Phase

$$\phi(t) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} a'_n g(t - nT),$$

nun aber mit $a'_n = 0$ für die Phase 180° und 1 für 0° , wie in Abbildung 3.11 dargestellt. Beide Darstellungen von dem Bandpaßsignal sind gleich, nur hängt die Form davon ab, welcher Punkt hervorgehoben werden soll.

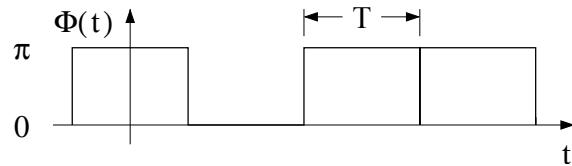


Abbildung 3.11: Phasensignal

Nach Gleichung 3.1 und der Vorgehensweise wie bei der ASK erhalten wir nun für die

SELBSTÄNDIGE VERKAUFSPEZIALISTEN/INNEN für Österreich

Bookboon, der weltweit größte Fachbuchverlag für e-books, mit jährlich mehr als 1,3 Mio. Unique Downloads und 6,6 Mio Leser in Österreich sucht.

Ihre Qualifikationen

- Verkaufs- und Organisationstalent mit hoher Begeisterungsfähigkeit
- Gute Kenntnis des österreichischen HR- bzw. Werbemarktes und deren Entscheidungsträger ist von Vorteil
- Gute Englisch- sowie perfekte Deutschkenntnisse in Wort und Schrift sind Grundvoraussetzung

Unser Angebot

- Interessante und abwechslungsreiche Vertretung von Produkten mit hohem Kundennutzen und tollen Referenzen
- Ein modernes und äußerst erfolgreiches Unternehmen mit flachen Hierarchien und angenehmen Betriebsklima
- Regelmäßige nationale und internationale Aus- und Weiterbildungen
- Ab dem dritten Jahr sind € 150.000,- Jahresbrutto und mehr realistisch

Bei Interesse senden Sie bitte Ihre aussagekräftige Bewerbung an Fr. Mag. Isabelle Kerschbaum, MSc: ike@bookboon.com oder +43 664 124 16 09



bookboon.com

AKF und das LDS

$$\begin{aligned} R_{\tilde{x}}(\tau) &= \frac{1}{2}\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right) \cdot \cos(2\pi F\tau) \\ S_{\tilde{x}}(f) &= \frac{1}{4}T \sin^2\left(\pi(f+F)T\right) + \frac{1}{4}T \sin^2\left(\pi(f-F)T\right), \end{aligned}$$

Abbildung 3.12 zeigt das Leistungsdichtespektrum des PSK-Signals. Ein Vorteil dieses

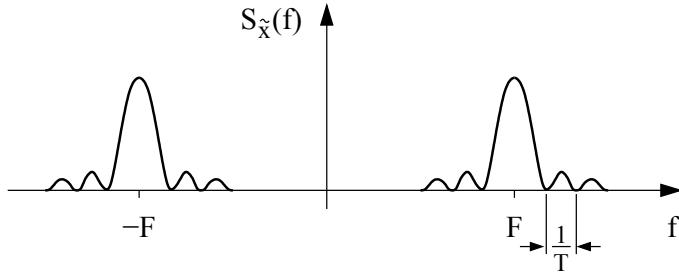


Abbildung 3.12: LDS eines PSK-Signals

Phasensprungverfahrens ist sicher ein stärkeres Signal als bei der OOK, was sich durch eine höhere Energie pro Bit ausdrückt. Wegen des polaren Formats erhalten wir bei Optimalfilterempfang, wie es Abbildung 3.5 zeigt, mit Gleichung 3.4 für den Nutzanteil $y(kT) = a_k \frac{1}{2}E_g$, mit $a_k = \pm 1$, und dem Rauschanteil $\sigma_m^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2}E_g$ die Fehlerrate

$$P_e = Q\left(\frac{E_g/2}{\sigma_m}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_g}{N_0}}\right) = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right) = P_b.$$

Hierin ist $E_b = \frac{1}{2}E_0 + \frac{1}{2}E_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}E_g + \frac{1}{2}\frac{1}{2}E_g$ wieder die mittlere Energie pro Bit, die nun doppelt so groß ist wie die bei dem OOK-Verfahren. Die Fehlerperformanz der PSK ist folglich besser als die der betrachteten ASK, was auch an dem Faktor $\sqrt{2}$ im Argument zu erkennen ist. Ein nichtkohärentes Demodulationsverfahren ist bei der PSK ungeeignet. Da die Einhüllende konstant ist, der Träger "nur" mit dem Faktor ± 1 belegt ist, fällt die Information nach der Gleichrichtung weg, sie ist auf diesem Wege einfach nicht detektierbar. Nur ein kohärentes Verfahren zur Demodulation, wie in Abbildung 3.5 darstellt, führt zur Wiedergewinnung der gesendeten Symbolen $a_n = \pm 1$. Lediglich ein differentielles PSK-Verfahren (DPSK) lässt sich auf nichtkohärente Art & Weise demodulieren. Der interessierte Leser sei hierfür auf weiterführende Literatur verwiesen, wie etwa [Lahti 1983].

Ein Punkt macht phasen- oder frequenzmodulierte Signale unschlagbar im Vergleich zu ASK-Signalen. Nehmen wir einmal einen Fall aus der Praxis, wie etwa Satellitenkommunikation. Bei Rundfunksatelliten kommt oft PSK zum Einsatz, was aber ist der Grund

hierfür? Nun, der Satellit muß auf der geostationären Bahn "parken", damit er das Zielgebiet dauerhaft beleuchten kann. Dies bedeutet aber, daß er sich oberhalb des Äquators in einer Höhe von etwa 35800 km aufhalten muß, um seine Lage relativ zum beleuchteten Gebiet nicht zu ändern. Der Satellit wird von der Erdfunkstelle punktuell angestrahlt, er empfängt und rekonstruiert das Signal, um es dann postwendend über ein breiteres Gebiet zurückzustrahlen. Es ist einleuchtend, daß das Sendesignal dort oben verstärkt werden muß, damit es den weiten Weg nach unten so gut wie möglich übersteht. Verstärker haben nur eine Eigenheit, sind diese sehr effizient, weisen sie einen guten Wirkungsgrad auf, so sind sie in nicht geringem Maße nichtlinear. Anders als bei dem sehr linearen HiFi-Verstärker zu Hause, der an einer Steckdose hängt und bei dem nicht Effizienz, sondern Linearität eine Rolle spielt, ist die Stromversorgung dort oben im Orbit sehr begrenzt. Hocheffektive Verfahren können in Satelliten nur zum Einsatz kommen, das Sendesignal muß mit nichtlinearen Systemen klarkommen. Und damit scheiden ASK-Verfahren aus, nur PSK- und FSK-Signale zeigen eine weitreichende Immunität gegenüber Nichtlinearitäten, wie etwa den Sendeverstärker in einem Satelliten.

Wir nehmen ein PSK-Signal der Form

$$\tilde{x}(t) = \cos(2\pi Ft + \phi(t)),$$

das mit einem nichtlinearen System verarbeitet werden soll. Abbildung 3.13 zeigt das zu untersuchende Blockschaltbild. Das System habe die nichtlineare Kennlinie

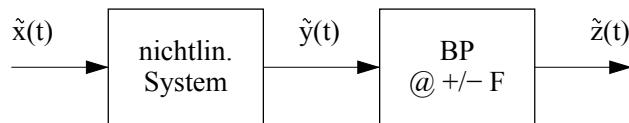


Abbildung 3.13: Rekonstruktion eines PSK- oder FSK-Signals

$$\tilde{y} = c_0 + c_1 \tilde{x} + c_2 \tilde{x}^2 + \cdots + c_L \tilde{x}^L,$$

wir können bei dem Ausgangssignal $\tilde{y}(t)$ davon ausgehen, daß es neben einem konstanten Anteil auch Bandpaßanteile bei den Mittenfrequenzen $\pm F, \pm 2F, \dots, \pm LF$ aufweist, wenn es mit $\tilde{x}(t)$ erregt wird. Ein Bandpaßfilter trennt die erwünschte Signalkomponente bei $\pm F$ von den anderen.

Ein Beispiel zeigt die Wirkungsweise des Blockschaltbilds. Das nichtlineare System sei ein Verstärker, der durch $\tilde{y}(t) = 10\left(\tilde{x}(t) - \frac{1}{3}\tilde{x}^3(t)\right)$ gegeben ist. Mit $\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x +$

$\frac{1}{4} \cos 3x$ erhalten wir als Reaktion hierauf

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t) &= 10 \cos(2\pi F t + \phi(t)) - \\ &\quad \frac{10}{3} \left(\frac{3}{4} \cos(2\pi F t + \phi(t)) + \frac{1}{4} \cos(2\pi 3F t + 3\phi(t)) \right) \\ &= \underbrace{\left(10 - \frac{10}{4} \right) \cos(2\pi F t + \phi(t))}_{\text{BP@}\pm F} - \underbrace{\frac{10}{12} \cos(2\pi 3F t + 3\phi(t))}_{\text{BP@}\pm 3F}.\end{aligned}$$

Das Resultat enthält zwei Bandpaßsignale, eins bei der Trägerfrequenz F , das andere bei der dreifachen Trägerfrequenz. Das erstere ist aber eine Überlagerung, und zwar eine vom Originalsignal und von einem Mischprodukt des Anteils der dritten Potenz. Da die Einhüllende von $\tilde{x}(t)$ aber konstant ist, trifft dies auch für die anderen Term zu. Das Bandpaßfilter trennt die Komponenten, sodaß wir am Ausgang

$$\tilde{z}(t) = \frac{15}{2} \cos(2\pi F t + \phi(t))$$

erhalten, also dem ursprünglichen PSK-Signal, nur mit anderer Amplitude. Dies gilt für jedes PSK- oder FSK-Signal, sie sind weitestgehend immun gegen Nichtlinearitäten. Weitestgehend in folgendem Sinne: Was etwa passiert bei einer rein quadratischen Kennlinie, d.h. $\tilde{y}(t) = \tilde{x}^2(t)$? Der interessierte Leser möge selbst untersuchen, wie das Ausgangssignal $\tilde{z}(t)$ für diesen Fall lautet.

Wie sieht es aus bei allgemeinen ASK-Signalen, die durch

$$\tilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT) \cdot \cos(2\pi F t) = x(t) \cdot \cos(2\pi F t)$$

beschrieben sind? Der kubische Anteil hiervon ist

$$\tilde{x}^3(t) = x^3(t) \cdot \cos^3(2\pi F t) = \frac{3}{4} x^3(t) \cos(2\pi F t) + \frac{1}{4} x^3(t) \cos(2\pi 3F t).$$

Somit ist für dasselbe System wie zuvor das Ausgangssignal nunmehr

$$\tilde{z}(t) = 10 \left(x(t) - \frac{1}{4} x^3(t) \right) \cos(2\pi F t).$$

Es liegt eine Überlagerung des Basisbandanteile $x(t)$ und $x^3(t)$ vor, sodaß von einer ISI-Freiheit keine Rede mehr sein kann, es sei denn, man verwendet einen rechteckförmigen Puls, $g(t) = \Pi(\frac{t}{T})$. Aber dann liegt ein PSK-Signal vor, und hierbei ist dieses Problem wegen der konstanten (!) Einhüllenden unbekannt.

3.2.3 Frequenzsprungverfahren, FSK

Ist es bei der PSK die Phase, die das Nachrichtensignal trägt, folgt bei der FSK die momentane Frequenz dem Nachrichtensignal. So gilt bei einer binären FSK der Zusammenhang

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} g(t) \cos(2\pi(F - \Delta f)t) & : a_n = 0 \\ g(t) \cos(2\pi(F + \Delta f)t) & : a_n = 1 \end{cases}$$

mit Δf als dem Frequenzhub. Hierbei trifft in Regel & Praxis der Fall zu, daß die Frequenzen $F \pm \Delta f$ sehr viel größer sind als die Datenrate $r_S = \frac{1}{T}$. Ein solches Signal zeigt Abbildung 3.1. Es, d.h. das FSK-Signal, kann auch als zwei ineinander verschachtelte ASK-Signale interpretiert werden, die nach dem OOK-Verfahren arbeiten. Das LDS wird sich folglich aus zwei LDSn zusammensetzen, die um die Frequenzen $F \pm \Delta f$ zentriert sind. Ist das Verhältnis $\frac{\Delta f}{F}$ groß, resultiert dies in zwei LDSn, die sich mehr oder weniger nicht überlappen. Für ein kleines Frequenzverhältnis reduziert sich die Bandbreite, sie wird allerdings die Bandbreite eines ASK- oder PSK-Signals nicht unterschreiten. Abbildung 3.14 zeigt das Leistungsdichtespektrum eines FSK-Signals.

The graphic consists of a circle divided into several segments, each containing a small image and some text. The segments include:

- INDIAN NUCLEAR ENERGY CORPORATION
- RUSSIAN ENTREPRENEURS
- LUXURY GOODS MARKET LONDON
- TROUBLE IN CHINA PAYROLLS
- CHINA PREMIUM FINANCIALS
- AFRICA HEALTH SURGEON
- US FARMERS FIGHT SOURCE
- INDIAN FARMERS FIGHT SOURCE
- RUSSIAN ENTREPRENEURS
- LUXURY GOODS MARKET LONDON
- TROUBLE IN CHINA PAYROLLS
- CHINA PREMIUM FINANCIALS
- AFRICA HEALTH SURGEON
- US FARMERS FIGHT SOURCE
- INDIAN NUCLEAR ENERGY CORPORATION

Below the circle, the text "WHILE YOU WERE SLEEPING..." is displayed. At the bottom left, the URL "www.fuqua.duke.edu/whileyouweresleeping" is shown. On the right side, there is a logo for "DUKE THE FUQUA SCHOOL OF BUSINESS".

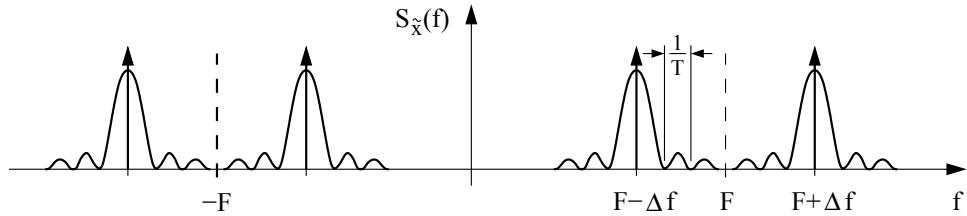


Abbildung 3.14: LDS eines FSK-Signals

Kohärente Demodulation

Wir betrachten nun die Fehlerperformanz einer binären kohärenten FSK. Abbildung 3.15 zeigt die Empfängerstruktur, die auf zwei Optimalfilter basiert. Das obere Filter ist auf den Puls $\tilde{g}_0(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \cos(2\pi(F - \Delta f)t)$, das untere auf $\tilde{g}_1(t) = \Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right) \cos(2\pi(F + \Delta f)t)$ abgestimmt. Am Eingang liege der Puls $\tilde{g}_0(t)$ und AWGN an. Da der Basisbandpuls $\Pi\left(\frac{t-T/2}{T}\right)$ den Wert eins in der Zeit $0 < t \leq T$ aufweist und sonst gleich null ist, also auf die Symbolperiode T beschränkt ist, kann die gezeigte Struktur verwendet werden.

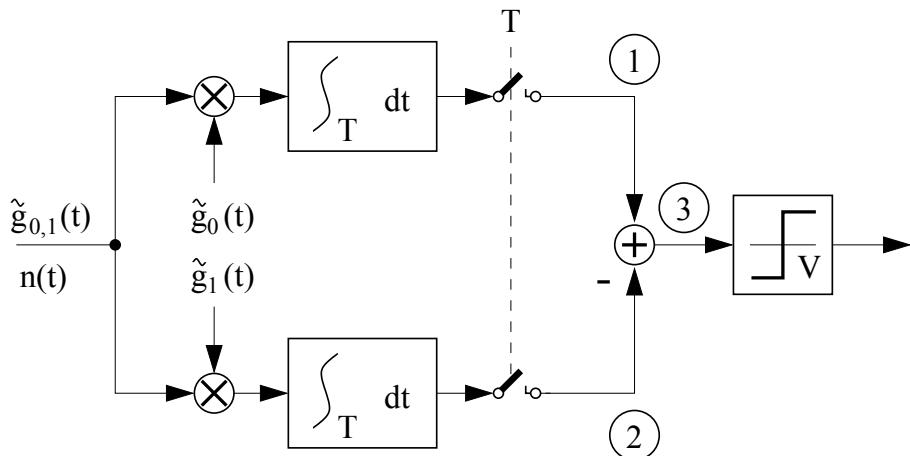


Abbildung 3.15: Optimalempfänger für FSK

- Der Nutzanteil an diesem Punkt ist

$$\int_0^T \cos^2(2\pi(F - \Delta f)t) dt = \frac{1}{2} \int_0^T dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\pi(F - \Delta f)t) dt \approx \frac{1}{2}T,$$

da das zweite Integral ein Cosinussignal mit der doppelten Trägerfrequenz als Integrand aufweist und der Wert für das Integral sehr gering ist.

Liegt AWGN mit $\frac{N_0}{2}$ am Eingang vor, so erhalten wir für den Rauschanteil, m_0 , ein Bandpaßrauschen, dessen Leistung $\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2} T$ ist.

2. Auch in dem unteren Zweig schlägt der betrachtete Nutzanteil zu Buche, da davon auszugehen ist, daß sich die Spektren der verwendeten Pulse $\tilde{g}_0(t)$ und $\tilde{g}_1(t)$ zumindest teilweise überlappen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_0^T \cos(2\pi(F - \Delta f)t) \cos(2\pi(F + \Delta f)t) dt &= \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\pi 2\Delta f t) dt + \frac{1}{2} \int_0^T \cos(2\pi 2Ft) dt \\ &= \frac{1}{2} T \frac{\sin(2\pi 2\Delta f T)}{2\pi 2\Delta f T} + \underbrace{\frac{1}{2} T \frac{\sin(2\pi 2FT)}{2\pi 2FT}}_{\approx 0} \approx \frac{1}{2} T \text{si}(2\pi 2\Delta f T), \end{aligned}$$

wobei der Wert des zweiten Integrals erheblich kleiner als der des ersten, da $F \gg \Delta f$.

Der Rauschanteil am Ausgang des unteren Korrelators ist m_1 , mit der Rauschleistung wie oben, d.h. $\sigma_1^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2} T$. Da beiden Korrelatoren unterschiedliche Frequenzbereiche auswerten, sind die Rauschanteile unkorreliert, die Leistungen sind jedoch gleich, $\sigma_0^2 = \sigma_1^2$.

3. Der Nutzanteil an diesem Punkt ist die Differenz der beiden zuvor ermittelten, d.h.

$$\frac{1}{2} T - \frac{1}{2} T \text{si}(2\pi 2\Delta f T).$$

Dieser sollte so groß wie möglich sein, um das bestmögliche Ergebnis zu erzielen. Die

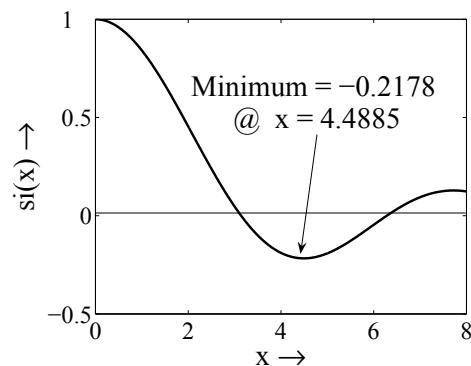


Abbildung 3.16: Minimum der si-Funktion

si-Funktion weist auch negative Anteile auf, wir sollten dann den Wert ermitteln,

bei dem diese Funktion das Minimum hat. Mit den bekannten Minimax Aufgaben läßt sich dies sicher gut ermitteln, es geht aber auch einfacher, wenn wir einen Blick auf den Verlauf werfen. Wir erkennen in der Darstellung, daß das gesuchte Minimum von $si(x)$ etwa -0.2178 ist, es liegt ungefähr bei $x = 4.4885$. Um den Frequenzhub zu ermitteln, bei dem der Nutzanteil größtmöglich ist, setzen wir $2\pi 2\Delta f T \approx 4.4885$ und erhalten als Ergebnis für den optimalen Optimalfilterempfang $\Delta f T \approx 0.3572$. Dies bedeutet, daß ein Zusammenhang zwischen dem Frequenzhub und der Übertragungsrate besteht, nämlich $\Delta f \approx 0.3572 \frac{1}{T} = 0.3572 \cdot r_S$. Für den optimalen Fall erhalten wir schließlich für den Nutzanteil $\frac{1}{2}T(1 + 0.2178)$.

Der Rauschanteil am Eingang des Entscheiders ist dann $m_0 - m_1$, also die Differenz der beiden Rauschkomponenten. Man könnte nun annehmen, daß dies wegen der Differenzbildung zu einem schwächeren Rauschsignal führt, nur trifft diese Annahme leider nicht zu. Um dies zu ergründen, ermitteln wir die Rauschleistung. Diese ist

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= E\{(m_0 - m_1)^2\} = E\{m_0^2 - 2m_0m_1 + m_1^2\} \\ &= E\{m_0^2\} - 2\underbrace{E\{m_0m_1\}}_{=0} + E\{m_1^2\} = \sigma_0^2 + \sigma_1^2 = 2\frac{N_0}{2}\frac{1}{2}T.\end{aligned}$$

Da die Rauschkomponenten unkorreliert sind, entfällt der mittlere Teil und die Rauschleistung ist trotz der Differenz die Summe der Teilleistungen.

Nun können wir die Fehlerrate ermitteln, sie ist

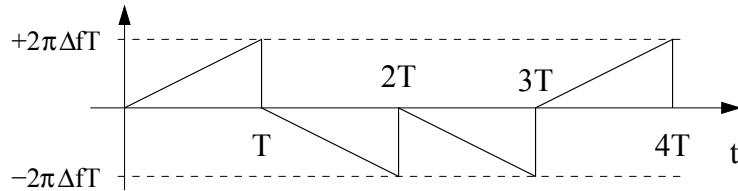
$$P_e = Q\left(\frac{\frac{1}{2}T(1 + 0.2178)}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{\frac{1}{2}T(1 + 0.2178)}{\sqrt{2\frac{N_0}{2}\frac{T}{2}}}\right) = Q\left(1.2178\sqrt{\frac{\frac{T}{2}}{N_0}}\right).$$

Die Energie der Pulse $\tilde{g}_{0,1}(t)$ ist jeweils $\frac{T}{2}$, für die mittlere Energie pro Bit ist dann $E_b = \frac{T}{2} = \frac{E_a}{2}$, womit sich die Bitfehlerrate zu

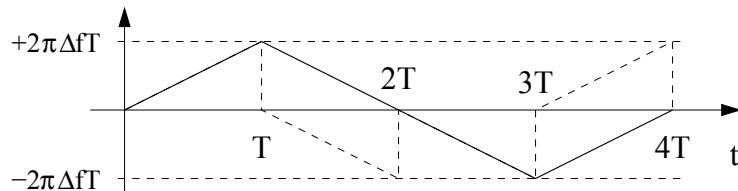
$$P_b = Q\left(1.2178\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

ergibt. Wenn wir uns den Verlauf der momentanen Phase eines FSK-Signals betrachten, stellen wir Phasensprünge fest. Solche sind in Abbildung 3.17 dargestellt. Sprünge jeder Art sind die Ursache für hohe Spektralanteile und damit auch für hohe Bandbreiten. Besser ist es auf jedem Fall, diese zu vermeiden.

Es geht glücklicherweise auch anders. Der Verlauf der Momentanphase, wie es Abbildung 3.18 zeigt, ist nicht sprunghaft sondern kontinuierlich. Man "merkt" sich die letzte Phase

Abbildung 3.17: Phasenverlauf einer FSK ohne Trägerphase $2\pi F t$

und fährt hiervon ausgehend für das nächste Symbol fort. Die Phase verläuft damit ohne Sprünge, es ist hierbei auch von der CPFSK (engl.: continuous phase FSK) die Rede. Ohne zu sehr in die Signalbeschreibung einzugehen kann man sofort von einem schmalbandigeren Signal ausgehen, als bei der "sprunghaften" FSK. Nun ist nur noch

Abbildung 3.18: Phasenverlauf einer CPFSK ohne Trägerphase $2\pi F t$

die Frage zu klären, wie groß der Frequenzhub zu wählen ist, damit eine Trennung der Komponenten, wie in Blockschaltbild 3.15 gezeigt, möglich ist. Zur Klärung dieser Frage betrachten wir Punkt 2. Hierbei stießen wir auf eine si-Funktion, die angibt, welchen Anteil der Komponente \tilde{g}_0 auch im unteren Signalzweig hervorruft. Ist die si-Funktion gleich null, verhält sich dieser Zweig neutral, was durch den Begriff orthogonales Verhalten ausgedrückt ist. Die erste Nullstelle der si-Funktion liegt bei $4\pi\Delta f T = \pi$ und resultiert zum minimalen Frequenzhub $\Delta f = \frac{1}{4T}$. Dieser gibt den kleinstmöglichen Abstand von der Trägerfrequenz, F , an, für den eine Trennung noch gerade möglich ist. Man spricht hierbei auch von MSK (engl.: minimum shift keying). Abbildung 3.19 zeigt die spektralen Komponenten, die zum MSK-Signal führen.

Auf die genaue Analyse dieses Signals werde allerdings hier verzichtet, da diese einen gewissen Aufwand erfordert. In Kürze sei allerdings vermerkt, daß das LDS eine sehr geringe Bandbreite aufweist. Dieser Schritt liegt darin begründet, daß die MSK eine Sonderform der CPFSK ist. Und da dabei die Phasensprünge fehlen, ist diese Aussage nicht verwunderlich. Weiterhin ist bei dem Phasenverlauf zu einem Zeitpunkt, sagen wir für $t = 2T$ zu berücksichtigen, von welchem Vorgängerwert der Phase zur Zeit $t = T$ dieser er-

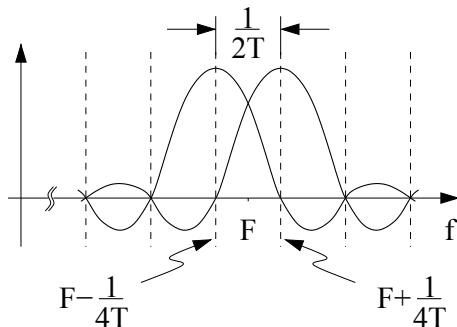


Abbildung 3.19: Spektralkomponenten von MSK

reicht wurde. Er könnte von $+2\pi\Delta ft$ kommen, wie eingezeichnet, oder aber von $-2\pi\Delta ft$ mit einer positiven Steigung. Salopp gesagt beobachten wir das Signal über den Verlauf von zwei Pulsen hinweg und nehmen mehr Information auf. Denn, je länger man etwas betrachtet, umso mehr Details und Informationen nimmt der Betrachter auf. Im Grunde entspricht die Fehlerrate eines MSK-Signals der eines PSK-Signals. Um jedoch der gehobenen Augenbraue des investigativen Lesers, der sicher bemerkt hat, daß nach der obigen Darlegung die Fehlerrate der einer ASK entspricht und nicht der besseren einer PSK, sofort zu begegnen, sei folgende Bemerkung angebracht. In Abbildung 3.15 ist die Beobachtung

This e-book
is made with
SetaPDF



PDF components for PHP developers

www.setasign.com

auf die Pulsdauer T begrenzt. Verlängern wir diese Beobachtungsdauer auf zwei aufeinander folgende Symbole und werten die "Geschichte" oder besser "Herkunft" aus, erhalten wir einen erweiterten Empfänger mit Bitfehlerrate $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$ anstatt $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right)$. Mehr zu diesem Thema findet der interessierte Leser in [Pasupathy 1979, pp. 14-22]. Hierauf basiert das Modulationsverfahren, das im Mobilfunksystem GSM angewendet wird. Es handelt sich hierbei um eine Erweiterung von MSK, genauer ausgedrückt um GMSK (engl.: Gaussian MSK). Um die Diskontinuitäten im Phasenverlauf zu mindern und damit die Bandbreite weiter zu reduzieren, wird das gezeigte Phasensignal durch ein Tiefpaßfilter geschickt, dessen Impulsantwort eben einer gaußförmigen Kurve folgt. Daher röhrt der Name.

Nichtkohärente Demodulation

Oft besteht die Anforderung nach einer möglichst einfachen Demodulation von FSK-Signalen. Wenn auf eine Phasenregelstufe oder Phasenableitung verzichtet werden kann, reduziert sich der schaltungstechnische Aufwand in nicht geringem Maße. Weiter oben, bei der Betrachtung von ASK-Signalen haben wir den nichtkohärenten Empfang behandelt. Und da die FSK unter Umständen als zwei ASK-Modulationsarten, die nach dem OOK-Verfahren arbeiten, angesehen werden kann, ist eine nichtkohärente Demodulation möglich. Das in Abbildung 3.20 gezeigte Blockschaltbild wollen wir analysieren, dabei

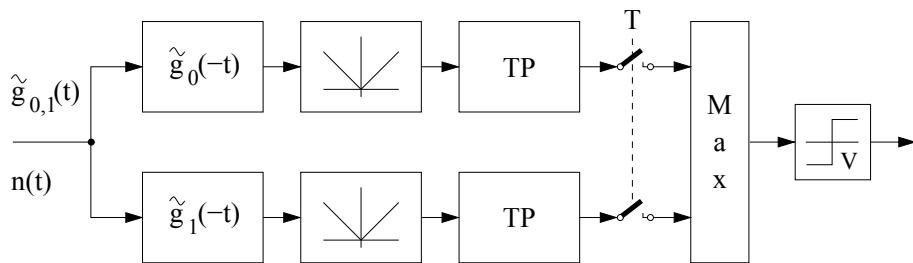


Abbildung 3.20: Nichtkohärenter FSK-Empfang

gehen wir davon aus, daß $\tilde{g}_0(t) = \cos(2\pi(F - \Delta f)t)$ über die Zeit $0 \leq t < T$ gesendet wurde. Dadurch werde lediglich der obere Zweig erregt, der untere bleibe "regungslos". Dies bedeutet, daß die Pulse $\tilde{g}_0(t)$ und $\tilde{g}_1(t) = \cos(2\pi(F + \Delta f)t)$ orthogonal sind und lediglich im oberen Optimalfilter eine Reaktion auf $\tilde{g}_0(t)$ zu beobachten ist, nicht aber im unteren. Neben dem Nutzanteil macht sich die Natur aus unerklärlichen Gründen ebenfalls durch AWGN bemerkbar, dessen LDS durch $\frac{N_0}{2}$ gegeben ist.

Mit den Ergebnissen, die wir bei der nichtkohärenten ASK gewonnen haben, erhalten wir im oberen Zweig für das Nutzsignal $\frac{1}{2}|R_g(0)| = \frac{1}{2}E_g = \frac{1}{2}T$. Der unvermeidliche Rauschanteil ist r_0 , der mit einer Rice–Verteilung daherkommt. Die Varianz des Rauschens ist wieder $\sigma_0^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2}T = \sigma^2$. Im unteren Zweig, am Ausgang des Optimalfilters, beobachten wir lediglich Rauschen, r_1 , das eine Rayleigh–Verteilung aufweist. Die Varianz dieses Rauschens ist ebenfalls $\sigma_1^2 = \frac{N_0}{2} \frac{1}{2}T = \sigma^2$. Der Prozeß im oberen Zweig ist durch

$$p_0(r_0) = \frac{r_0}{\sigma^2} e^{-\frac{r_0^2+A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{r_0 A}{\sigma^2}\right),$$

der im unteren durch

$$p_1(r_1) = \frac{r_1}{\sigma^2} e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}}$$

gegeben, mit $A = \frac{1}{2}E_g = \frac{1}{2}T$ und mit $r_{0,1} \geq 0$ wegen der Gleichrichter. Die Rauschkomponenten r_0 und r_1 haben eine solche Abhängigkeit untereinander, wie das Ergebnis eines Münzwurfs auf das eines Würfelwurfs hat, nämlich keine. Dies vereinfacht die weitere Vorgehensweise beträchtlich, die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte ist schlicht und ergreifend das Produkt aus $p_0(r_0)$ und $p_1(r_1)$. Wir ermitteln nun die Wahrscheinlichkeit, daß ein Fehler vorliegt. Eine "Null" wurde gesendet, folglich muß der obere Zweig einen größeren Wert vorzeigen als der untere. Wenn dem nicht so ist, ist die Fehlerwahrscheinlichkeit $P_{e0} = P\{0 \leq r_0 < \infty \cap r_1 > r_0\}$. Für diesen Ausdruck erhalten wir (zum Nachvollziehen)

$$\begin{aligned} P_{e0} &= \int_0^\infty \int_{r_0}^\infty p_0(r_0)p_1(r_1) dr_1 dr_0 \\ &= \int_0^\infty p_0(r_0) \underbrace{\int_{r_0}^\infty p_1(r_1) dr_1}_{\frac{r_1}{\sigma^2} e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}}} dr_0 \\ &= \int_0^\infty \frac{r_0}{\sigma^2} e^{-\frac{r_0^2+A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{r_0 A}{\sigma^2}\right) \underbrace{\int_{r_0}^\infty \frac{r_1}{\sigma^2} e^{-\frac{r_1^2}{2\sigma^2}} dr_1}_{= e^{-\frac{r_0^2}{2\sigma^2}}} dr_0 \\ &= \int_0^\infty \frac{r_0}{\sigma^2} e^{-\frac{2r_0^2+A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{r_0 A}{\sigma^2}\right) dr_0, \end{aligned}$$

ein Ausdruck, der nun wirklich nach einer Rice–Verteilung aussieht. Setzen wir $x = \sqrt{2}r_0$ und $A = \sqrt{2}A'$, erhalten wir hierfür

$$P_{e0} = \frac{1}{2} e^{-\frac{A'^2}{2\sigma^2}} \underbrace{\int_0^\infty \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2+A'^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{x A'}{\sigma^2}\right) dx}_{=1}.$$

Da die Fehlerwahrscheinlichkeit sich für den oberen und unteren Zweig gleich aufteilt, ist letztendlich die Bitfehlerwahrscheinlichkeit für nichtkohärente FSK–Demodulation $P_e =$

$\frac{1}{2}P_{e0} + \frac{1}{2}P_{e1} = P_{e0} = P_{e1}$ und weiter

$$P_e = \frac{1}{2}e^{-\frac{A'^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{A^2}{4\sigma^2}} = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\frac{E_b}{N_0}} = P_b,$$

mit $A = \frac{1}{2}E$ und $E_b = \frac{1}{2}E_g = \frac{1}{2}T$, was zu $\frac{A^2}{\sigma^2} = 2\frac{E_b}{N_0}$ führt.

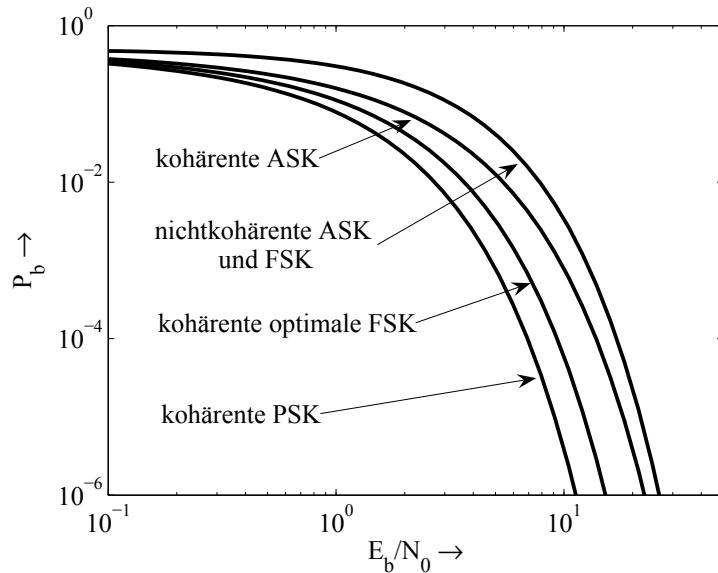


Abbildung 3.21: Bitfehlerrate unterschiedlicher binärer Modulationsarten

Welche Modulationsart ist vorzuziehen, ASK oder FSK? Beide weisen schließlich die gleiche Fehlerwahrscheinlichkeit bei nichtkohärener Demodulation auf. Wir erinnern uns daran, daß die Entscheidungsschwelle V bei der ASK von der Signalstärke abhängt. Dies bedeutet ein stetiges Vergleichen der Werte am Ausgang des Tiefpasses. Liegt ein Signalfeld mit Rauschen oder nur Rauschen vor? Dieses Problem existiert nicht bei der FSK, da hierbei stets $V = 0$ gilt. Somit bietet es sich an, die FSK der ASK vorzuziehen. Der Nachteil ist jedoch ein höherer Bandbreitebedarf im Vergleich zur ASK.

In Abbildung 3.21 sind die Fehlerfunktionen der einzelnen Modulationsarten gegenübergestellt. Es ist direkt zu erkennen, daß die Verfahren, bei denen die volle Informationsbandbreite ausgenutzt werden, eine bessere Fehlerrate aufweisen. Aufwand und Nutzen stehen sich wieder einmal gegenüber. Wenig Schaltungsaufwand erkauft man sich mit höheren Bitfehlerraten.

Beispiele:

- Bestimme die durchschnittliche Zeit zwischen Fehlern für eine kohärenten Optimalfilterempfang für PSK. Die Übertragungsrate sei 5 ksps. Die empfangenen Signale sind $\pm A \cos(2\pi F t)$ für $0 \leq t < T$ und $A = 1 \text{ mV}$. Das AWGN ist durch $\frac{N_0}{2} = \frac{1}{2} \times 10^{-11} \text{ W/Hz}$ gegeben.

Die Energie pro empfangenem Bit ist $E_b = \frac{A^2}{2}T$, mit $T = \frac{1}{r_s} = \frac{1}{5000} \text{ s}$ erhalten wir $E_b = 10^{-10} \text{ Ws}$. Für die Bitfehlerrate ergibt sich damit $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{20}) \approx 4 \times 10^{-6}$. Da im Durchschnitt etwa 4 Bits von 10^6 fehlerhaft sind, ist die Zeit zwischen zwei Fehlern etwa $\frac{1}{P_b r_s} = 50 \text{ s}$.

- Wiederholen Sie das obige Problem für einen korärenen ASK Empfänger. Das Signale seien nun $A \cos(2\pi F t)$ und 0 mit gleichen Auftrittswahrscheinlichkeiten.

Die Energie pro Bit ist in diesem Fall $E_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{A^2}{2}T + \frac{1}{2} \cdot 0 = 5 \times 10^{-11} \text{ Ws}$, womit sich für die Fehlerrate $P_b = Q\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(\sqrt{5}) \approx 10^{-2}$ ergibt. Der durchschnittliche zeitliche Abstand zwischen zwei Fehlern ist damit $\frac{1}{10^{-2} \cdot 5000} \text{ s} = 20 \text{ ms}$.

- Bei einem kontinuierlich arbeitenden PSK System treten im Durchschnitt 100 Fehler pro Tag auf. Die Datenrate sei 1 ksps, das LDS des AWGN sei $\frac{1}{2} \times 10^{-10} \text{ W/Hz}$. Was

Technical training on WHAT you need, WHEN you need it

At IDC Technologies we can tailor our technical and engineering training workshops to suit your needs. We have extensive experience in training technical and engineering staff and have trained people in organisations such as General Motors, Shell, Siemens, BHP and Honeywell to name a few.

Our onsite training is cost effective, convenient and completely customisable to the technical and engineering areas you want covered. Our workshops are all comprehensive hands-on learning experiences with ample time given to practical sessions and demonstrations. We communicate well to ensure that workshop content and timing match the knowledge, skills, and abilities of the participants.

We run onsite training all year round and hold the workshops on your premises or a venue of your choice for your convenience.

**For a no obligation proposal, contact us today
at training@idc-online.com or visit our website
for more information: www.idc-online.com/onsite/**

Phone: **+61 8 9321 1702**
 Email: **training@idc-online.com**
 Website: **www.idc-online.com**

**OIL & GAS
ENGINEERING**

ELECTRONICS

**AUTOMATION &
PROCESS CONTROL**

**MECHANICAL
ENGINEERING**

**INDUSTRIAL
DATA COMMS**

**ELECTRICAL
POWER**

ist der Wert der Fehlerwahrscheinlichkeit? Wenn die Leistung des Empfangssignals auf $1 \mu\text{W}$ festgelegt wird, kann die Fehlerrate eingehalten werden?

Die Zeit zwischen zwei Fehlern ist $T_e = \frac{1}{P_e r_S}$, womit wir $P_e = \frac{1}{T_e r_S}$ erhalten. Mit $T_e = \frac{24 \cdot 3600}{100} = 864 \text{ s}$ resultiert das zu $P_e = \frac{1}{864 \cdot 1000} \approx 1.16 \times 10^{-6}$. Nehmen wir wieder einen kohärenten Optimalfilterempfang an, ist die Fehlerrate $P_e = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right) \approx 1.16 \times 10^{-6}$ und das Argument der Q-Funktion etwa 4.7. Somit sollte die Energie pro Bit $E_b = \frac{N_0}{2} 4.7^2 \approx 1.1 \text{ nWs}$ nicht unterschreiten, um die Fehlerrate erinhzuhalten. Die minimale Signalleistung ist damit $E_{brS} = 1.1 \mu\text{W}$, sodaß die gewählte energie von $1 \mu\text{W}$ nicht ausreichend sind.

3.3 Mehrstufenübertragung

Bei binären Modulationssystemen der digitalen Nachrichtenübertragung haben wir bislang den Fall betrachtet, daß nur zwei Signale übertragen werden während jedes Signalintervalls T . Bei ASK war es ein Bandpaßpuls oder keiner, bei der PSK war es ein positiver Puls oder ein negativer. Solche Modulationssysteme haben eine maximale "Packungsdichte", die als das Verhältnis von Bitrate pro belegter Bandbreite bekannt ist, von $1 \frac{\text{bps}}{\text{Hz}}$. (Eine Frage am Rande: Wie lautet der verwendete Puls für diesen Maximalfall?) Für bandbegrenzte Systeme ist sicher ein effizienterer Gebrauch der Übertragungsbandbreite wünschenswert. Diese Systeme werden umso effektiver, je mehr Bits pro Sekunde pro Bandbreite übertragen werden.¹

Weiter oben im Text haben wir erkannt, daß eine Mehrstufigkeit von Pulsen zu einer besseren Ausnutzung der Bandbreite führt (siehe PAM). Hierbei weist ein Puls nun M Stufen auf. Gilt $M = 2^n$, ist n die Anzahl von Binärstellen, die ein Puls dann tragen kann. Ein Puls mit $M = 16$ Stufen trägt dann $n = 4$ Bits. Wir müssen also zwischen der Symbolrate und der Bitrate unterscheiden. Ist r_S die Symbolrate, folgt daraus die Bitrate $r_b = n r_S$. Dies wird deutlich, wenn wir eine Symbolrate von $r_S = 1000$ Symbolen pro Sekunde vorliegen haben, wobei jedes Symbol eben $n = 4$ Bits trägt. Mit 1000 Symbolen pro Sekunde werden 4000 Bits pro Sekunde übertragen. Die spektrale Effizienz ist nun entsprechend höher. Für den binären Fall mit $n = 1$ ist die Dichte $\frac{r_b}{B} = \frac{r_S}{B}$, ist n

¹Die Antwort auf die obige Frage: Es handelt sich dabei um den Puls $\sin(\pi \frac{t}{T})$, der eine Bandbreite von $B = \frac{1}{T}$ hat. Hierfür ist die "Packungsdichte" in der Tat gleich $1 \frac{\text{bps}}{\text{Hz}}$.

größer als eins erhalten wir $\frac{r_b}{B} = n \frac{r_s}{B}$. Liegen bandbegrenzte Kanäle vor, wie etwa bei einer Übertragung über einen Telephonkanal, sind mehrstufige digitale Modulationssysteme besonders geeignet, bei denen jeweils eine Stufe von M möglichen, seien es Phasenstufen, Amplitudenstufen oder Kombinationen hiervon, in einem Symbolintervall übertragen werden.

Die Idee lässt sich kurz und bündig erklären. Bits eines Datenstroms werden in Gruppen von n Bits zusammengefaßt und dann entsprechend einer Abbildungsvorschrift auf die M Stufen aufgeteilt, wobei hierzu Amplitudenwerte und oder Phasenwerte des Bandpaßpulses zur Verfügung stehen. Am Empfangsort angekommen wird das M -stufige Signal demoduliert, die Stufe detektiert und dieser wieder das entsprechende Wort bestehend aus n Bits zugeordnet.

3.3.1 M-PSK

Wir betrachten etwas genauer den Fall mit vier Phasenstufen, auch Quadraturphasenumtastung oder kurz QPSK (engl.: quadrature phase-shift keying) genannt. Der verwendete Puls ist

$$\tilde{g}_k(t) = \cos(2\pi F t + \phi_k), \quad 0 \leq t - kT_s < T_s.$$

Gemeinsam bewegen wir die Welt

Zukunft gestalten bei Schaeffler



Schaeffler – das ist die Faszination eines internationalen Technologie-Konzerns mit über 76.000 Mitarbeitern, verbunden mit der Kultur eines Familienunternehmens. Als Partner aller bedeutenden Automobilhersteller sowie zahlreicher Kunden im Industriebereich bieten wir Ihnen viel Raum für Ihre persönliche Entfaltung. Die Basis dafür bildet eine kollegiale Arbeitsatmosphäre – ganz nach unserem Motto: Gemeinsam bewegen wir die Welt.

Gestalten Sie mit uns die Zukunft. Spannende Aufgaben und hervorragende Entwicklungsperspektiven warten auf Sie.

Sie wollen mit uns die Welt bewegen? Dann informieren Sie sich über die vielseitigen Karrierechancen bei Schaeffler unter www.schaeffler.de/career

SCHAEFFLER

Jetzt kennenlernen unter:
facebook.com/schaefflerkarriere



Die gewählte Phase ist somit direkt in der Trägerphase zu erkennen. Diesen Ausdruck schreiben wir kurz um und bringen ihn in die Form

$$\tilde{g}_k(t) = \Re\{e^{j2\pi F t} e^{j\phi_k}\} = \cos \phi_k \cos(2\pi F t) - \sin \phi_k \sin(2\pi F t),$$

die sich einfacher darstellen lässt. Folgende Tabelle zeigt den Zusammenhang der Größen.

Dibit	ϕ_k	a_k	b_k
00	+45°	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$
01	-45°	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
11	-135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$
10	+135°	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$+\frac{\sqrt{2}}{2}$

Tabelle 3.1: Abbildungstabelle für QPSK

Die zweite Darstellung des QPSK–Pulses lässt folgende Interpretation zu. Es liegt ein Cosinusträger und ein Sinusträger vor, beide werden unabhängig voneinander moduliert, sie sind entweder positiv oder negativ, wie es bei der BPSK der Fall ist. Eine BPSK wird also über einen Cosinus–, die andere über einen Sinusträger übertragen, beide gleichzeitig über den selben Kanal. Ob diese sich gegenseitig beeinträchtigen? Abbildung 3.22 zeigt den QPSK–Modulator. Der Seriell–Parallel–Umsetzer leitet etwa jedes Bit mit ungerader

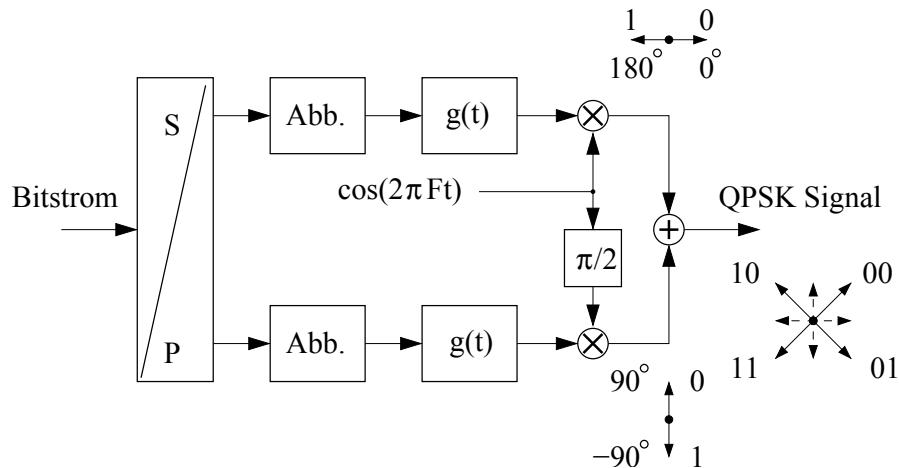
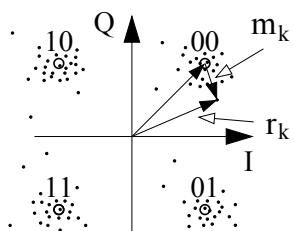
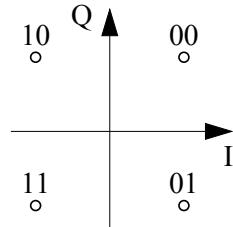


Abbildung 3.22: QPSK–Modulator

Ordinalzahl in den oberen Zweig, die mit gerader in den unteren. Diese Bits müssen nun

auf Zahlen a_k und b_k abgebildet werden, wie sie in der Tabelle aufgeführt sind. Dadurch halbiert sich die Bitrate in dem Cosinus– oder I–Kanal, bzw. dem Sinus– bzw. Q–Kanal bezüglich der Bitrate des Stroms am Eingang. Das Tiefpaßfilter dient zur Formung des Pulses im Basisbandbereich, hier ist $g(t) = \Pi\left(\frac{t-T_s/2}{T_s}\right)$.

Es ist nützlich, die Signalkomponenten a_k und b_k von $\tilde{g}_k(t)$ in einem Diagramm darzustellen. Hierbei ist die horizontale Achse die I–Achse, die inphasig mit dem Cosinusträger ist, die vertikale Achse ist die Q–Achse, da diese quadraturphasig dazu ist. In der Tabelle ist zu erkennen, wie die Vorzeichen der I–Komponente, a_k , und die der Q–Komponente, b_k , von dem Dabit abhängen. Das erste Bit (ungerade Ordinalzahl) gibt das Vorzeichen von a_k wieder, das zweite (gerade Ordinalzahl) das von b_k . Beide repräsentieren somit auch die Koordinaten der Punkte in dem sogenannten Signalraum, wie er rechts abgebildet ist. Die einzelnen Komponenten sind auch in dem Blockschaltbild des QPSK–Modulators vermerkt.



Am Empfangsort erscheint das Signal durch AWGN gestört. Aus dem wohlgeformten Signal, das den Sender verließ und dessen Signalraum nur vier Punkte enthält, wurde durch das Rauschen ein Signal, dessen Signalraum links dargestellt ist. Wird etwa der Punkt 00 ausgesendet, der im ersten Quadranten liegt, sollte der empfangene Punkt ebenfalls in diesem Quadranten bleiben. Durch Rauschen können jedoch Fehler auftreten, wenn die Auslenkung vom korrekten Punkt zu groß ist. Glücklicherweise sind kleine Rauschwerte wahrscheinlicher als größere, sodaß sich das Bündel von Punkten relativ dicht um den Punkt drängt. Wenn die Rauschleistung aber größer wird, können detektierte Punkte den richtigen Quadranten leicht verlassen.

Wir wollen den in Abbildung 3.23 gezeigten Demodulator analysieren. Um den trigonometrischen Identitäten zu entgehen, wenden wir die komplexe Darstellung an. Den Realteil finden wir dann im oberen Zweig, den Imaginärteil im unteren. Im Zeitintervall $0 \leq t < T_S$ liege das Signal

$$\tilde{g}_k(t) = g(t) \cos(2\pi F t + \phi_k) = \frac{1}{2}g(t) e^{j(2\pi F t + \phi_k)} + \frac{1}{2}g(t) e^{-j(2\pi F t + \phi_k)}$$

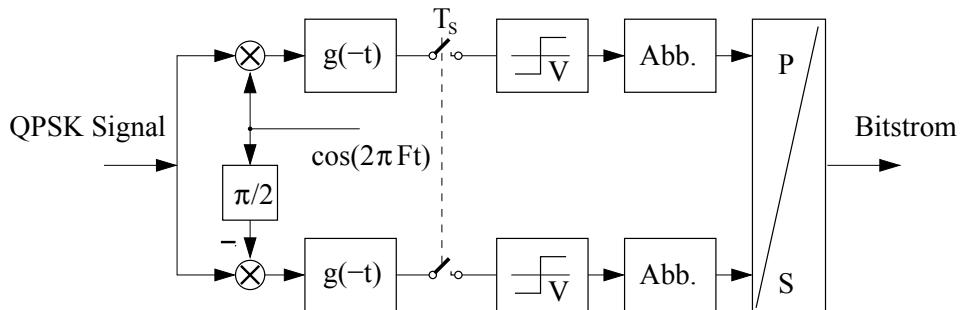


Abbildung 3.23: QPSK-Demodulator

an. Zuerst erfolgt im Empfänger eine I/Q-Aufspaltung durch

$$\tilde{g}_k(t) \cdot e^{-j2\pi F t} = \frac{1}{2} g(t) e^{j\phi_k} + \frac{1}{2} g(t) e^{-j(2\pi 2F t + \phi_k)},$$

dieses Produkt gelangt danach durch die Optimalfilter zum Austaster,

$$\tilde{g}_k(t) \cdot e^{-j2\pi F t} * g(-t) = \frac{1}{2} e^{j\phi_k} g(t) * g(-t) + \underbrace{\frac{1}{2} e^{-j\phi_k} g(t) e^{-j(2\pi 2F t + \phi_k)}}_{\text{BP } @ -2F} * \underbrace{g(-t)}_{\text{TP}}.$$

An den Entscheidern liegt dann zur Zeit T_S der Signalanteil $\frac{1}{2} e^{j\phi_k} T_S$ an, da der Puls $g(t)$ eine AKF aufweist, die bei $t = T_S$ ihr Maximum $E_g = T_S$ hat.

CHALLENGING PERSPECTIVES

Opportunities for Internships

EADS unites a leading aircraft manufacturer, the world's largest helicopter supplier, a global leader in space programmes and a worldwide leader in global security solutions and systems to form Europe's largest defence and aerospace group. More than 140,000 people work at Airbus, Astrium, Cassidian and Eurocopter, in 90 locations globally, to deliver some of the industry's most exciting projects.

An **EADS internship** offers the chance to use your theoretical knowledge and apply it first-hand to real situations and assignments during your studies. Given a high level of responsibility, plenty of learning and development opportunities, and all the support you need, you will tackle interesting challenges on state-of-the-art products.

We welcome more than 5,000 interns every year across disciplines ranging from engineering, IT, procurement and finance, to strategy, customer support, marketing and sales. Positions are available in France, Germany, Spain and the UK.

To find out more and apply, visit www.jobs.eads.com. You can also find out more on our **EADS Careers Facebook page**.

AIRBUS **ASTRIUM** **CASSIDIAN** **EUROCOPTER**

EADS

Für den Rauschanteil ergibt sich folgendes. AWGN sei konstant im interessierenden Frequenzbereich um $\pm F$ und durch

$$n(t) = i(t) \cos(2\pi F t) + q(t) \sin(2\pi F t)$$

beschrieben. Auch dieses Signal wird im I-Zweig mit $\cos(2\pi F t)$ und im Q-Zweig mit $-\sin(2\pi F t)$ multipliziert. Vor den Optimalfiltern liegen dann unabhängige Rauschkomponenten mit den AKFn $\frac{1}{2} \frac{N_0}{2} \delta(\tau)$ an. An den Ausgängen der Filter erhalten wir jeweils $\frac{1}{2} \frac{N_0}{2} R_g(\tau)$ und an den Eingängen der Entscheider Rauschkomponenten der Rauschleistung $\frac{1}{2} \frac{N_0}{2} T_S$. Hiermit läßt sich die Fehlerrate bestimmen. In den Zweigen liegt

$$I = \frac{1}{2} T_S \cos \phi_k + m_I = \frac{1}{2} T_S a_k + m_I$$

und

$$Q = \frac{1}{2} T_S \sin \phi_k + m_Q = \frac{1}{2} T_S b_k + m_Q$$

vor, wobei diese Rauschkomponenten $m_{I,Q}$ die Rauschleistung $\frac{1}{2} \frac{N_0}{2} T_S$ aufweisen. Nun wird sicher auch das oben gezeigte Bild klarer, worin die verrauschten Aufpunkte skizziert sind. Diese sind damit

$$I + jQ = r_k = \underbrace{\frac{1}{2} E_g (a_k + j b_k)}_{= \text{Signalpunkt}} + \underbrace{(m_I + j m_Q)}_{= m_k}.$$

Der Rest ist wie bekannt, die verrauschten Werte gelangen zu den Entscheidern, in denen einzig und allein der Quadrant ausgewertet wird, in dem der Aufpunkt $I + jQ$ liegt. Damit erhält man nach obiger Abbildungstabelle für QPSK die entsprechenden detektierten Dibits und somit auch den Bitstrom.

Eine Frage bleibt noch zu klären: Wie verhält es sich mit der Fehlerrate? Abbildung 3.24 zeigt die Situation im Signalraum. Wir erkennen, daß direkt benachbarte Punkte, also die mit der kürzesten Entfernung, sich nur in einer Binärstelle unterscheiden. Die Entfernung zwischen den Diagonalkräften sind um etwa 41 % größer, diese unterscheiden sich in zwei Binärstellen. Die Punkte sind nach dem Verfahren von Frank Gray codiert, der allgemeinere Zusammenhang wird im nächsten Abschnitt allgemeiner behandelt.

Um die Fehlerwahrscheinlichkeit zu ermitteln, stellen wir zunächst fest, daß die vier Punkte die gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit besitzen. Zudem ist das allseits vorkommende Rauschen wie üblich gaußverteilt mit der Rauschleistung $\sigma^2 = \frac{1}{2} \frac{N_0}{2} E_g$. Wegen der Gleichverteilung können wir uns einen beliebigen Punkt auswählen, es sei der Punkt 00

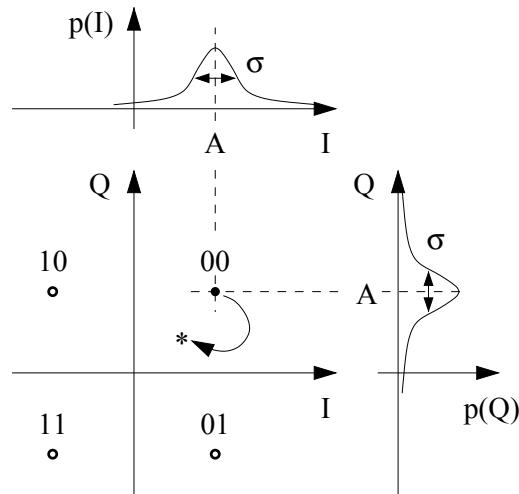


Abbildung 3.24: Signalraum für QPSK und Fehlerbetrachtung

das Objekt der Fehleranalyse, dessen Koordinaten (A, A) sind, mit $A = \frac{1}{2}E_g \cos \frac{\pi}{4}$. Der richtige Punkt sei durch "•", der durch Rauschen verschobene durch "*" markiert. Um die Symbolfehlerrate zu ermitteln, ist es oft besser, zunächst das Gegenteil zu betrachten, d.h. die Situation, bei der kein Fehler auftritt, also $P_e = P\{(I > 0) \cap (Q > 0)\}$. Damit erhalten wir leicht die Fehlerrate

$$\begin{aligned} P_e &= 1 - P_{\bar{e}} \\ &= 1 - Q^2\left(\frac{0-A}{\sigma}\right) \\ &= 1 - \left(1 - Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)\right)^2 \\ &= 2Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) - Q^2\left(\frac{A}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Für das Argument der Q-Funktion finden wir

$$\frac{A}{\sigma} = \sqrt{\frac{E_g}{2N_0}} = \sqrt{2\frac{E_b}{N_0}},$$

da der Punkt die Energie $\frac{E_g}{2} = 2E_b$ aufweist.

Wie aber verhält es sich mit der Bitfehlerrate? Ist sie der Symbolfehlerrate gleichzusetzen? Wir betrachten zur Klärung dieser Frage den oben gezeigten Signalraum und definieren erst einmal die Fehlerereignisse. Wieder soll das Dibit (!) im Nordosten vorliegen. Der richtige Punkt sei wieder durch "•", der durch Rauschen verschobene durch "*" markiert.

markiert. Liegt ”*” nun entweder im Nordwesten oder im Südosten, liegt ein fehlerhaftes Bit in dem Dibit vor. Die Wahrscheinlichkeit, daß dies zutrifft, gibt

$$P_{b1} = P_{\overline{I}Q} + P_{I\overline{Q}} = 2P_{\overline{I}\overline{Q}} = 2Q(1 - Q)$$

an, mit $Q = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$. Hierbei beschreibt \overline{I} keinen Fehler in der I-Komponente, gleiches gilt für die Q-Komponente. Liegt ”*” aber im Südwesten, sind zwei Bits fehlerhaft. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist

$$P_{b2} = P_{IQ} = Q^2.$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß in einem Punkt mit zwei Bits, also dem Dibit, etwas falsch ist,

$$0 \cdot P_{b0} + 1 \cdot P_{b1} + 2 \cdot P_{b2} = 1 \cdot 2Q(1 - Q) + 2 \cdot Q^2 = 2Q,$$

wobei der Term $2 \cdot P_{b2}$ einfach zwei Fehler mit dem Gewichtsfaktor P_{b2} angibt. Der Gesamtausdruck beschreibt also die mittlere Bitfehlerzahl pro Dibit. Bezogen auf ein Bit ist folglich die Fehlerwahrscheinlichkeit

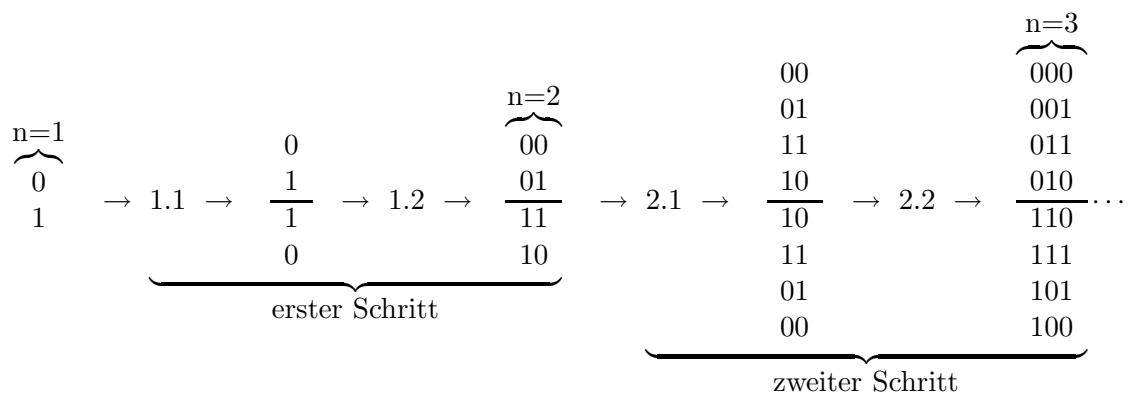
$$P_b = \frac{1}{2} \cdot 2Q = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right).$$

Eine Plausibilitätskontrolle soll die Betrachtung abrunden. Die QPSK sind zwei BPSK, die parallel mit einem Cosinus- und einem Sinusträger arbeiten. Nehmen wir an, die Bitfehlerrate im I-Zweig sei 0.02, also 2 fehlerhafte Bits in 100 übertragenen. Für den Q-Zweig gelte ähnliches, auch hier liegen 2 fehlerhafte Bits in 100 übertragenen vor. Da beide Bitströme ineinander verschachtelt werden, finden wir 4 fehlerhafte Bits in 200 Bits, was wieder die Fehlerrate von 0.02 ergibt. Eine QPSK ist folglich genauso robust gegen Rauscheinflüsse wie die BPSK. Doch warum soll die QPSK verwendet werden, wenn die Fehlerperformance die einer BPSK ist? Der Grund hierfür liegt in der doppelten Übertragungsrate begründet, und dies bei gleicher Bandbreite wie eine BPSK.

3.3.2 Gray-Codierung

Bei der Fehlerbetrachtung stellten wir fest, daß die Bits nicht beliebig sondern wohlgeordnet unter den Punkten des Signalraums aufgeteilt werden müssen, um einen geringen Wert für die Fehlerwahrscheinlichkeit zu erzielen. Der Physiker Frank Gray forschte in den nachrichtentechnischen Bell Laboratorien und ersann ein Verfahren, bei dem sich direkt benachbarte Punkte mit dem kürzesten Abstand zueinander nur in einem Bit ändern sollten, je größer der Abstand wird, umso mehr Abweichungen sind dann möglich. Dies

beruht darauf, daß kleine Rauschablenkungen wahrscheinlicher sind als größere und folglich direkte Nachbarn sich eher "in das Gehege kommen" als weitere Nachbarn. Wird dann ein Punkt fälschlicherweise für seinen direkten Nachbarn gehalten, ist nur ein Bit von mehreren falsch. Wie eine solche Aufteilung geschieht, läßt sich leicht an folgendem Schema erkennen.



Fängt man mit nur einem Bit und damit zwei Möglichkeiten an, wie bei der BPSK, findet man das Ergebnis unter $n = 1$. Bei der QPSK sind aber vier Signalpunkte vorhanden, jeder dieser Punkte trägt ein Dabit. Um den Gray-Code hierfür zu erhalten, spiegeln wir im ersten Schritt (1.1) die beiden Zustände des ersten Bits an der horizontalen Linie und

**Verbinde Deine Ziele mit
faszinierenden Perspektiven.**
Your career connection.

top ARBEITGEBER DEUTSCHLAND
CERTIFIED BY THE CRP INSTITUTE

LEONI ist führender, international präsenter Hersteller von Drähten, optischen Fasern, Kabeln und Kabelsystemen. Mit mehr als 60.000 Mitarbeitern in 32 Ländern bieten wir überall auf der Welt Chancen, damit Menschen optimale Bedingungen vorfinden, um ihre Begabungen zu entfalten. Unsere Unternehmenskultur, die individuelle Förderung von Talenten und unser Teamgeist machen LEONI zu einem Top-Arbeitgeber für anspruchsvolle Persönlichkeiten, die offen für neue Herausforderungen sind. Gehören Sie dazu? Dann freuen wir uns auf Ihre Bewerbung.
www.leoni.com

LEONI

fügen im zweiten Schritt (1.2) den oberen beiden jeweils eine Null hinzu und den beiden unteren eine Eins. Dies hat zwangsläufig zur Folge, daß sich direkt benachbarte Dibits nur in einer Binärstelle unterscheiden, wie unter $n = 2$ zu sehen ist. Gehen wir noch einen Schritt weiter, erhalten wir die Gray-Codierung für Tribits. Zuerst nehmen wir das Ergebnis für $n = 2$, spiegeln es an der horizontalen Linie und fügen den vier oberen Dibits eine Null hinzu und den unteren wieder eine Eins. Das Ergebnis finden wir unter $n = 3$. Diese Vorgehensweise läßt sich nach Belieben fortsetzen, stets unterscheiden sich nicht nur direkt benachbarte Worte in nur einem Bit, sondern auch das erste und das letzte. Bild 3.25 zeigt das Ergebnis für eine achtpunkige PSK. Nachtrag: Der praktizierende Ingenieur

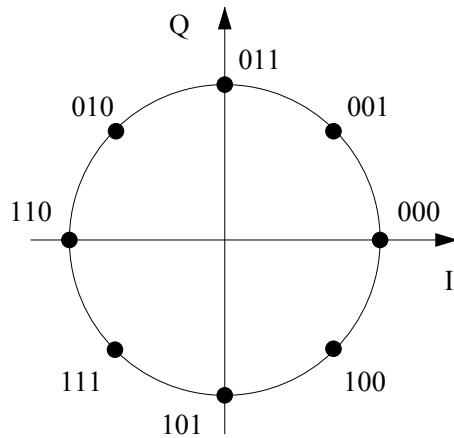


Abbildung 3.25: Signalraum für 8-PSK mit Gray-Codierung

möchte sicher auch wissen, wie es sich bei der Fehlerrate von M-PSK mit $M > 4$ verhält. In [Lahti 1983] findet dieser die Lösung, die da lautet für die Symbolfehlerrate:

$$P_e \approx 2Q\left(\sqrt{\frac{1}{2} \frac{E_g}{N_0}} \sin\left(\frac{\pi}{M}\right)\right) \quad \text{für } \frac{E_g}{N_0} \gg 1.$$

Mit $M = 2^n$ unterschiedlichen Punkten trägt jeder davon n Bits, sodaß wir für die Bitfehlerrate mit guter Näherung $P_b \approx P_e/n$ erhalten.

Beispiele: _____

1. Wir betrachten ein QPSK-System mit einer Bitrate von 10 Mbps. Es liege eine Gray-Codierung vor. Der Signal-Rauschabstand am Empfänger betrage 9 dB. Wie lautet die Bitrate, wenn eine äquivalente Rauschbandbreite von 15 MHz vorliegt?

Zuerst bestimmen wir den Zusammenhang zwischen dem S/R -Verhältnis und dem

E_b/N_0 -Verhältnis. Die Signalleistung ist die empfangene Signalenergie pro Zeit-einheit, also $S = E_{Srs} = E_b r_b$. Für die empfangene Rauschleistung wenden wir $N = N_0 B_N$ an und erhalten

$$\frac{S}{N} \Big|_R = \frac{E_S}{N_0} \frac{r_S}{B_N} = \frac{E_S/n}{N_0} \frac{n r_S}{B_N} = \frac{E_b}{N_0} \frac{r_b}{B_N} = 10^{0.9} \approx 7.94.$$

Damit erhalten wir $\frac{E_b}{N_0} \approx 7.94 \cdot \frac{15 \text{ MHz}}{10 \text{ Mbps}} \approx 11.9$. Die Bitfehlerrate ist damit

$$P_b = Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right) \approx Q(4.9) \approx 6 \times 10^{-7}.$$

2. Ein QPSK und ein 8-PSK System sollen verglichen werden. Beide sollen die Bitfehlerrate 10^{-6} nicht überschreiten. Wie lauten die Verhältnisse $\frac{E_b}{N_0}$?

Für die QPSK gilt $Q\left(\sqrt{2 \frac{E_b}{N_0}}\right) = Q(4.8) \approx 10^{-6}$, womit wir $\frac{E_b}{N_0} \approx \frac{1}{2} 4.8^2 \approx 11.5$ erhalten. Nehmen wir die 8-PSK und werten die obige Formel für die Bitfehlerrate aus, haben wir für $n = 3$ und $M = 8$ sowie $Q(4.7) \approx \frac{3}{2} \times 10^{-6}$ den gesuchten Wert

$$\frac{E_b}{N_0} \approx \left(\frac{4.7}{\sin \pi/8}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} \approx 25.1.$$

Die 8-PAM erfordert also ein mehr als doppelt so großes $\frac{E_b}{N_0}$ als die QPSK. Der Grund hierfür ist einfach, die Punkte müssen auf einem Kreis mit größerem Radius liegen, um einen größeren Abstand untereinander zu haben.

3.3.3 M-QAM

Bei einer M -stufigen Quadraturamplitudenmodulation (M-QAM) werden n Bits auf einen Puls abgebildet, es ergeben sich dadurch $M = 2^n$ Punkte im Signalraum. Im Gegensatz zur M -PSK, bei der die Punkte auf einem Kreis liegen, sind bei der M -QAM keine Bedingungen vorhanden, sie können wie bei der PAM einem beliebigen Alphabet entnommen werden. Lassen Sie uns zur Veranschaulichung das Beispiel einer 16-QAM betrachten. Das verwendete Alphabet ist dabei $\{-3, -1, +1, +3\}$ und gilt für den I- und den Q-Zweig. Den Modulator zeigt Abbildung 3.22, der Demodulator ist in Abbildung 3.23 dargestellt. Der gesendete Puls, einer aus einer langen Folge von Pulsen, sei

$$\begin{aligned} \tilde{g}_k(t) &= a_k g(t - kT) \cos(2\pi F t) - b_k g(t - kT) \sin(2\pi F t) \\ &= \Re(a_k + jb_k) \cdot g(t - kT) e^{j2\pi F t} \\ &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cdot g(t - kT) \cos(2\pi F t + \arctan \frac{b_k}{a_k}), \end{aligned} \quad (3.6)$$

wobei $g(t)$ der nachrichtentragende Tiefpaßpuls ist. Üblicherweise ist dieser bandbegrenzt, oft handelt es sich hierbei um \sqrt{RC} -Pulse mit Energie eins.

Mit dem verwendeten Alphabet ergeben sich damit sechzehn Punkte im Signalraum auf der Empfängerseite, wie es auch bei der QPSK

$$I + jQ = \frac{1}{2}E_g(a_k + jb_k) + (m_I + jm_Q)$$

beschreibt. Den Signalraum zeigt Abbildung 3.26. Der eifrige Student möge selbst den Gray-Code nach dem oben angegebenen Muster für $n = 4$ aufstellen. Die Aufteilung ist ebenfalls sehr einfach, man folge lediglich dem gestrichelten Pfeil, der durch den Signalraum geht. Gleichung 3.6 zeigt zudem, daß es sich bei der QAM um eine Kombination aus

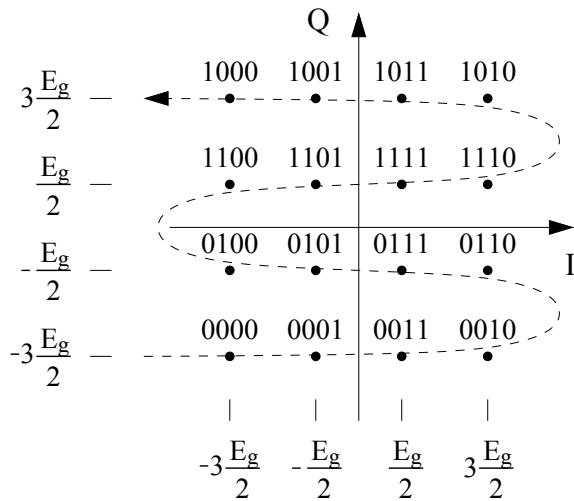


Abbildung 3.26: Signalraum für die 16-QAM

Amplitudenmodulation und Phasenmodulation handelt. So beeinflußt $\sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ direkt die Amplitude und $\arctan \frac{b_k}{a_k}$ die Phase des Trägers.

Anders als bei der PSK, bei der der nachrichtentragende Tiefpaßpuls rein rechteckförmig ist, wird bei der QAM ein bandbegrenzter Nyquist-Puls verwendet. Oft handelt es sich dabei um einen \sqrt{RC} -Puls, dessen Bandbreite insgesamt $r_S(1 + \alpha)$ beträgt. Es liegen zwei Kanäle vor, nämlich der I- und der Q-Kanal. Über den ersten gelangen die Symbole a_k zum Empfänger, über den letzteren die Symbole b_k . Ohne großartige Herleitung läßt sich in gewohnter Art & Weise die Autokorrelationsfunktion des Sendesignals als

$$R_{\tilde{x}}(\tau) = \frac{1}{2} \frac{1}{T} (\alpha_0 + \beta_0) R_g(\tau) \cdot \cos(2\pi F \tau)$$

finden, mit $\alpha_0 = E\{a_k^2\}$ und $\beta_0 = E\{b_k^2\}$. Für die 16-QAM sind dies die Werte $\alpha_0 = \beta_0 = \frac{1}{4}((-3)^2 + (-1)^2 + (+1)^2 + (+3)^2) = 5$, wobei von gleichverteilten und unabhängigen Punkten im Signalraum ausgegangen wird. Die Leistung des Sendesignals ist somit $R_{\tilde{x}}(0) = \frac{1}{T}(\alpha_0 + \beta_0) \frac{1}{2}E_g$, wieder mit E_g als der Energie des verwendeten TP-Pulses. Die Energie des empfangenen Pulses ist dann ohne Dämpfung durch den idealen Kanal $TR_{\tilde{x}}(0) = (\alpha_0 + \beta_0) \frac{1}{2}E_g$ und für die 16-QAM $TR_{\tilde{x}}(0) = (5 + 5) \frac{1}{2}E_g = 5E_g$. Das Leistungsdichtespektrum erhalten wir sofort als

$$S_{\tilde{x}}(f) = \frac{1}{2} \frac{1}{T} (\alpha_0 + \beta_0) \frac{1}{2} |G(f + F)|^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{T} (\alpha_0 + \beta_0) \frac{1}{2} |G(f - F)|^2.$$

Abbildung 3.27 zeigt das LDS einer M-QAM mit \sqrt{RC} -Puls für positive Frequenzen. Mit den Kenntnissen über Nyquist-Pulse im allgemeinen und \sqrt{RC} -Pulse im besonderen erhalten wir die Bandbreite des Sendesignals als $B = 2 \frac{r_S}{2}(1 + \alpha)$ und dem Zusammenhang zwischen Symbolrate und Bitrate $r_b = nr_S$. Die Effizienz, d.h. Bitrate pro belegter Bandbreite, ist dann

$$\frac{r_b}{B} = \frac{nr_S}{r_S(1 + \alpha)} \leq n.$$

Das Maximum stellt sich für den "schnellsten" Nyquist-Puls mit $\alpha = 0$ ein, schnell im Sinne von maximaler Übertragungsrate für die zur Verfügung stehende Bandbreite.

**Ich startete den Elektromotor
und es blieb still. Da wusste ich:
Wir erfinden Mobilität neu.**

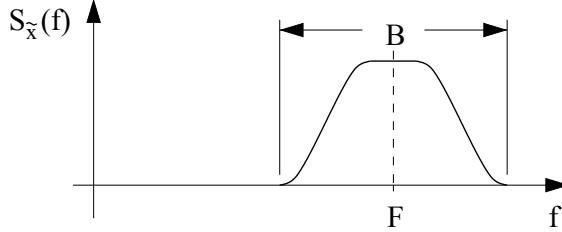
Meine Doktorarbeit stand unter dem Motto: Jede Zukunft beginnt mit einer Vision. Sechs Monate später steht die Zukunft vor mir: der erste Audi A6 für China, der rein elektrisch fährt. Unterstützt haben mich 30 Kollegen aus Deutschland und China. Aber der Audi A6 bleibt immer ein Teil von mir.

Zhi Till
Doktorand
Studium: Maschinenbau/Fahrzeugtechnik

f **Twitter** **YouTube**

Mehr erfahren und selbst magische Momente erleben: www.audi.de/karriere oder www.facebook.com/audikarriere

Audi Vorsprung durch Technik

Abbildung 3.27: LDS einer M-QAM mit \sqrt{RC} -Puls

Zur Fehlerrate: Wir wollen die Fehlerrate und Bitfehlerrate für die 16-QAM bestimmen. Wenn wir uns den Signalraum ansehen, stellen wir fest, daß es vier Elemente gibt, die nach allen vier Seiten hin nahe Nachbarn haben. Weiterhin gibt es vier Eckelemente mit nur zwei solcher Nachbarn. Und dann gibt es acht Randelemente, deren Nachbarn einer der vier inneren Elemente, ein Randelement und eines der äußeren Eckelemente sind. Die sechzehn Punkte kommen mit der gleichen Auftrittswahrscheinlichkeit von $\frac{1}{16}$ daher. Leichte Flächenbetrachtungen führen zum Ergebnis.

Wie zuvor bei der QPSK betrachten wir die Wahrscheinlichkeit, daß kein Fehler auftritt,

$$\begin{aligned} P_{\bar{e}} &= \frac{1}{16} \left(4 \left(1 - 2Q\left(\frac{E_g - E_g/2}{\sigma}\right) \right)^2 + 8Q\left(\frac{E_g - 3E_g/2}{\sigma}\right) \left(1 - 2Q\left(\frac{E_g - E_g/2}{\sigma}\right) \right) + 4Q^2\left(\frac{E_g - 3E_g/2}{\sigma}\right) \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(4 \left(1 - 2Q\left(\frac{E_g/2}{\sigma}\right) \right)^2 + 8Q\left(\frac{-E_g/2}{\sigma}\right) \left(1 - 2Q\left(\frac{E_g/2}{\sigma}\right) \right) + 4Q^2\left(\frac{-E_g/2}{\sigma}\right) \right) \\ &= \frac{1}{16} \left(4 \left(1 - 2Q\left(\frac{E_g/2}{\sigma}\right) \right)^2 + 8 \left(1 - Q\left(\frac{E_g/2}{\sigma}\right) \right) \left(1 - 2Q\left(\frac{E_g/2}{\sigma}\right) \right) + 4 \left(1 - Q\left(\frac{E_g/2}{\sigma}\right) \right)^2 \right) \\ &= 1 - 3Q + \frac{9}{4}Q^2, \quad \text{mit } Q = Q\left(\frac{E_g/2}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Für den Fehlerfall erhalten wir damit

$$P_e = 1 - P_{\bar{e}} = 3Q - \frac{9}{4}Q^2 \approx 3Q\left(\frac{E_g/2}{\sigma}\right).$$

Die Gesamtleistung des empfangenen Signals haben wir bereits mit Hilfe der AKF erhalten, das Ergebnis ist $10 \frac{E_g}{2} = 4E_b$, womit sich für die Fehlerrate

$$P_e = 3Q\left(\sqrt{\frac{4}{5} \frac{E_b}{N_0}}\right)$$

ergibt. Es handelt sich hierbei um eine Näherung, die nur für großes $\frac{E_b}{N_0}$ zutrifft. Hierfür sind aber größere Abstände sehr viel unwahrscheinlicher als kleinere, sodaß nur die direkten

Nachbarn hiervon betroffen sind. Da sich direkte Nachbarn nur in einem Bit unterscheiden, ist die Bitfehlerrate für diese Näherung

$$P_b \approx \frac{P_e}{n} = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4 E_b}{5 N_0}}\right).$$

Die Begründung für diesen Schritt wird klarer, wenn der interessierte Leser die Bitfehlerrate der QPSK genauer studiert. In einigen Literaturstellen findet man auch einen allgemeineren Ausdruck. Mit $M = 2^n = L^2$ ist der Näherungswert für die Symbolfehlerrate nach [Lahti 1983] durch

$$P_e \approx \frac{2(L-1)}{L \ln L} Q\left(\sqrt{\frac{3 \ln L}{L^2 - 1} \frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

gegeben. Hiermit ist für eine 64-QAM mit $L = 8$ die Symbolfehlerrate $P_e \approx \frac{7}{12} Q\left(\sqrt{\frac{2 E_b}{7 N_0}}\right)$.

Wenn man M-PSK mit M-QAM vergleicht, stellt man folgendes fest. Die Bandbreite für die M-PSK ist erheblich größer als die der M-QAM. Dies bedeutet, daß die Bandbreiteneffizienz, gemessen in Bit-pro-Sekunde bezogen auf ein Hertz Bandbreite, für die M-PSK recht dürfzig ist im Vergleich zur M-QAM. Dies erkauft man sich allerdings durch mehr Sendeleistung oder einem höheren $\frac{E_b}{N_0}$.

Beispiele:

1. Ein Datenstrom der Bitrate 100 Mbps sei per Funk zu übertragen. Wir nehmen hierzu einen idealen Nyquist-Puls an, der die zur Verfügung stehende Bandbreite von 25 MHz bestmöglich ausnutzt. Welche Modulationstechnik würden Sie wählen? Wie verhält es sich mit der Bitfehlerrate für $\frac{E_b}{N_0} = 20$?

Mit $\alpha = 0$ erhalten wir einen Puls, dessen Spektrum rechteckförmig ist und damit die Bandbreite effektiv ausnutzt. Hierfür ist $r_S = B = 25 \text{ Msps}$, die Symbolrate ist folglich 25 Millionen Symbole oder Punkte des Signalraums pro Sekunde. Verwenden wir ein M -stufiges Schema, sind $4 = \frac{100 \text{ Mbps}}{25 \text{ Msps}}$ Bits pro Punkt oder Symbol erforderlich, und damit sind $M = 2^4 = 16$ Punkte im Signalraum erforderlich. Eine 16-QAM mit quadratischer 8×8 Aufteilung liefert für $\frac{E_b}{N_0} = 20$ die Bitfehlerrate

$$P_b \approx \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{12}{15} 20}\right) \approx 2.5 \times 10^{-5}$$

für $L = 4$. Eine 16-PSK kann nicht zur Anwendung kommen, da diese eine Bandbreite aufweist, die erheblich über 25 MHz ist.

2. Wir betrachten ein 4800 bps Modem. Der Nyquist-Puls habe einen Flankenfaktor von $\alpha = 0.5$. Bestimmen Sie die Bandbreite des HF-Signals für binäre ASK, binäre FSK mit $\Delta f = 3600 \text{ Hz}$ und 16-QAM.

Für die binäre ASK ist die Signalrate gleich der Bitrate und damit 4800 Signale pro Sekunde. Somit ist die Bandbreite $B = 2\frac{r_S}{2}(1 + 0.5) = 7200 \text{ Hz}$. Für die binäre FSK ist die Signalrate 4800 Signale pro Sekunde, womit die Bandbreite $W = \frac{r_S}{2}(1 + 0.5) = 3600 \text{ Hz}$ beträgt. Somit ist die resultierende Bandbreite des FSK-Signals $B \approx 2(W + \Delta f) = 14.4 \text{ kHz}$. Für eine 16-QAM ist die Symbolrate $r_S = \frac{4800}{\ln 16} = 1200$ Symbole pro Sekunde, was eine Bandbreite von $2\frac{r_S}{2}(1 + 0.5) = 1800 \text{ Hz}$ ergibt.

3. Eine 16-QAM mit quadratischem Signalraum wird in einem 9600 bps Modem benutzt. Der verwendete $\sqrt{\text{RC}}$ -Puls hat einen Flankenfaktor von 10%, die Trägerfrequenz ist 1650 Hz. Bestimmen Sie die Bandbreite und das minimale $\frac{E_b}{N_0}$ für $P_e < 10^{-5}$.

Die Signalrate ist $r_S = \frac{9600}{\ln 16} = 2400 \text{ sps}$, mit der Bandbreite $B = 2400(1 + 0.1) = 2640 \text{ Hz}$ zentriert um 1650 Hz. Damit ist die untere Grenzfrequenz $1650 - \frac{2640}{2} = 330 \text{ Hz}$ und die obere $1650 + \frac{2640}{2} = 2970 \text{ Hz}$. Das erforderliche Verhältnis $\frac{E_b}{N_0}$ ist nach

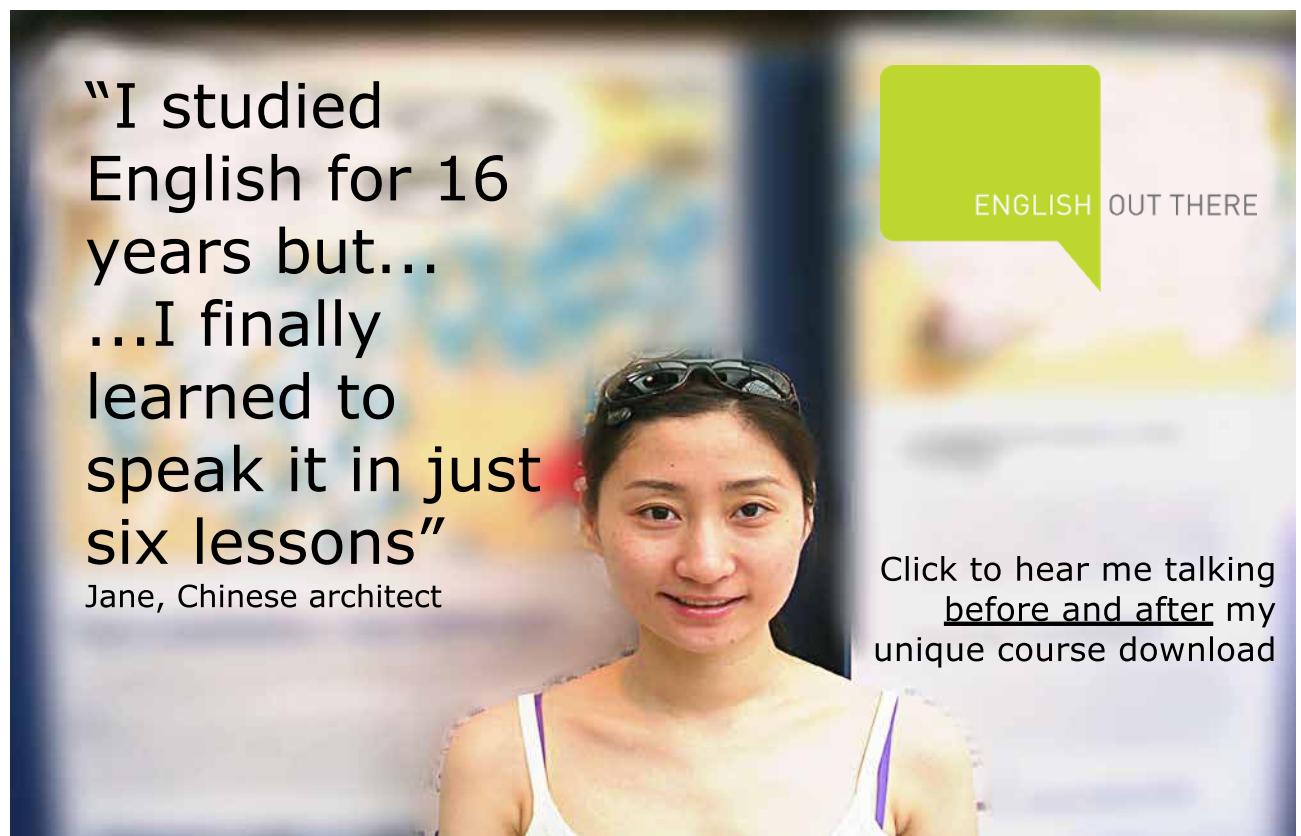
$$P_b \approx \frac{3}{4}Q\left(\sqrt{\frac{4}{5}\frac{E_b}{N_0}}\right) \leq 10^{-5}$$

$$\frac{E_b}{N_0} \approx 4.2^2 \frac{5}{4} = 22 \hat{=} 13.4 \text{ dB.}$$

Dieses Kapitel hat die gängigen digitalen Übertragungsverfahren zum Inhalt. Der Weg ging vom Nachrichtensignal im TP-Bereich hin zur Modulation eines Trägersignals, d.h. in den BP-Bereich. Die Verfahren wurden miteinander verglichen und Vor- & Nachteile hervorgehoben. Der Leser ist mit diesen Grundlagen nun in der Lage, das weite Gebiet der digitalen Nachrichtenübertragung selbst zu erkunden.

3.4 Aufgaben

1. Bestimmen Sie das S/R–Verhältnis für ein binäres ASK–Signal. Der Nachrichtenpuls ist ein Nyquist–Puls mit dem Flankenfaktor $\alpha = 1$. Das Rauschen ist als weiß zu betrachten mit $N_0/2$, die Trägerfrequenz ist größer als die Signalrate $r = 1/T$. Ermitteln Sie zudem das E_b/N_0 –Verhältnis.
2. Ein farbiges Rauschen mit einer Gauß–Verteilung liegt vor. Das LDS beträgt $N_0/2$ für die Bereiche $-B/2 \leq f \pm F \leq B/2$. Ermitteln Sie die Varianzen der Rauschkomponenten $i(t)$ und $q(t)$. Skizzieren Sie die AKF des äquivalenten Rauschprozesses im TP–Bereich. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der Wert von $n_{\text{eff}}(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt oberhalb von σ ?
3. Ein binäres ASK–Signal wird übertragen. Es liegt ein nachrichtentragender Nyquist–Puls mit $\alpha = 1/2$ vor. Das TP–Signal sei eine unipolare Sequenz. Die Signalrate betrage 2.4 ksps, die Trägerfrequenz sei 50 kHz.
 - (a) Berechnen Sie das Nachrichtensignal im TP–Bereich und skizzieren Sie das LDS.
 - (b) Ermitteln Sie das LDS des ASK–Signals und skizzieren Sie es.
 - (c) Geben Sie die Bandbreite des ASK–Signals an.



4. Wiederholen Sie die obige Aufgabe für ein BPSK–Signal. Vergleichen Sie die Bandbreiten.
5. Das BPSK–Signal

$$s_{\text{BPSK}}(t) = \cos \left(2\pi F t + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \Pi \left(\frac{t-kT}{T} \right) \right)$$

mit $a_k \in \{0, \pi\}$ wird durch ein nichtlineares System mit der Kennlinie $y = 1 + 1/2 x$ übertragen, wobei x das Eingangssignal und y das Ausgangssignal darstellt. Zeigen Sie, daß ein Begrenzerverstärker mit nachgeschaltetem Bandpaßfilter dieses BPSK–Signal rekonstruiert.

6. Wiederholen Sie diese Aufgabe für ein QPSK–Signal. Ist wegen der I/Q–Darstellung eine fehlerfreie Rekonstruktion möglich?
7. Nehmen wir eine Nachrichtensequenz mit 4.8 kbps an. Es soll über ein BPSK–System übertragen werden. Ermitteln Sie die belegte Bandbreite, die durch die obere Grenze von -35 dB gegenüber dem Maximalwert des Leistungsdichtespektrums gegeben ist.
8. Nehmen Sie einen Kanal an, der das Frequenzfenster von 400 Hz bis 3100 Hz aufweist. Die Mittenfrequenz ist 1750 Hz. Entwerfen Sie ein 16–QAM Format, das die Übertragungsrate 9.6 kbps gewährleistet. Als Nachrichtenpuls kommt ein Nyquist–Puls zur Anwendung. Bestimmen Sie den Flankenfaktor α .
9. Berechnen Sie die Bandbreite eines BPSK, QPSK und 64–QAM Signals für die Rate 9.6 kbps. Als Bandbreite gilt die Nyquist–Bandbreite.
10. Wie lautet die Bandbreite eines FSK–Signals für $FT = 0.5$ und 1 ? Vergleichen Sie diesen Wert mit der Bandbreite für ein MSK–Signal.
11. Ein kontinuierlich arbeitendes BPSK–System weist eine Fehlerrate von 100 Fehlern pro Tag auf, die gleichförmig verteilt sind. Die Datenrate ist 1.2 ksps. Das LDS des AWGN beträgt $N_0/2 = 1/2 \cdot 10^{-10}$ W/Hz. Wie lautet die Bitfehlerwahrscheinlichkeit? Ermitteln Sie das E_b/N_0 – und das S/R –Verhältnis.
12. Wenn die Güte eines Übertragungssystems die Bitfehlerrate ist, welches der Systeme ist für $E_b/N_0 = 6$ dB zu wählen, BPSK, MSK oder FSK?
13. Wie lautet die Bitfehlerwahrscheinlichkeit eines 8–PSK–Systems für $E_b/N_0 = 6$ dB?

14. Von einem OOK–System wird eine Bitfehlerwahrscheinlichkeit von 10^{-6} erwartet. Die Bitrate ist 2.4 kbps. Der Kanal verfälscht das Nachrichtensignal mit additivem weißen gaußschen Rauschen.
 - (a) Ermitteln Sie die erforderliche minimale Bandbreite.
 - (b) Wie ist das E_b/N_0 zu wählen, wenn ein kohärenter Empfänger vorliegt?
 - (c) Wiederholen Sie diesen Punkt für einen nichtkohärenten Empfänger.
15. Wiederholen Sie die obige Aufgabe für ein FSK–System. Hierbei ist der Frequenzhub $F = 1/T$, wobei T das Bitintervall darstellt.
16. In vielen Übertragungssystemen wird eine Bitfehlerrate von 10^{-6} erwartet. Ermitteln Sie die erforderlichen E_b/N_0 –Verhältnisse für OOK–, BPSK–, FSK–Systeme.
17. Ein ASK–Signal mit 1 kbps wird über einen AWGN–Kanal übertragen. Das LDS ist $N_0/2 = 10^{-8}$ W/Hz. Wie lautet die Bitfehlerrate für ein nichtkohärentes System? Wiederholen Sie die Betrachtung für ein MSK–System mit nichtkohärenter Demodulation.



Anhang A

Grundsätzliches zur Fourier–Transformation

A.1 Grundsätzliches

Die Fourier–Transformation stellt für unsere Belange ein sehr gutes Hilfsmittel dar, um die Signale im Zeit– und Frequenzbereich zu beschreiben. Auch die Meßtechnik unterstützt uns dabei, so verwenden wir Oszilloskope zur Darstellung von Signalen im Zeitbereich, Spektralanalysatoren nutzen wir, wenn Signale im Frequenzbereich untersucht werden sollen. Dieser Anhang dient nur dazu, einige Eigenschaften der Fourier–Transformation näher zu beschreiben, die im vorliegenden Text zur Anwendung kommen. Wir gehen in diesem Abschnitt von den Signalen aus, die in der Natur vorkommen, denn hierfür ist der Zusammenhang ohne weiteres zutreffend. So werden Signale irgendwann eingeschaltet und zu einem späteren Zeitpunkt wieder ausgeschaltet, sodaß immer eine endliche Energie vorliegt. Signale, für die dies nicht zutrifft, sollen nicht näher betrachtet werden. Eine Ausnahme sind jedoch die periodischen Signale.

Aperiodische Signale

Die Analysegleichung der Fourier–Transformation ist

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt,$$

wobei $x(t)$ das Signal im Zeitbereich und $X(f)$ das Signal im Frequenzbereich darstellt.

Die Synthesegleichung lautet

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft} df.$$

1. Ein bekanntes Beispiel ist die Fourier–Transformierte eines Rechtecksignals der Länge oder Dauer T und Auslenkung 1 oder kurz $x(t) = \Pi(\frac{t}{T})$. Das Spektrum erhalten wir wie folgt:

$$X(f) = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-j2\pi ft} dt = \dots = T \frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT} = T \text{si}(\pi fT),$$

es handelt sich hierbei um die si–Funktion. Diese weist äquidistante Nullstellen im Abstand T auf, der Maximalwert liegt vor, wenn das Argument null ist (siehe etwa l'Hospitalsche Regel), es ist im betrachteten Fall T .

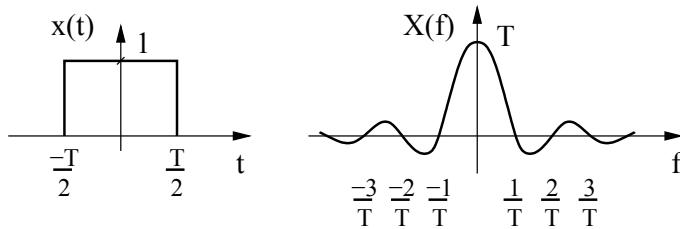


Abbildung A.1: Rechteck– und si–Funktion

2. Manchmal ist der Weg über den Frequenzbereich einfacher als über den Zeitbereich, z.B. kann so die Faltung umgangen werden. Ob dies aber immer der einfachere Weg ist, hängt von den Signalen ab. Nehmen wir die Faltung zweier Rechteckpulse $\Pi(\frac{t}{T}) * \Pi(\frac{t}{T})$, deren Ergebnis bekannt ist. Es handelt sich dabei um ein Dreiecksignal, das sich von $-T$ bis T erstreckt, die Auslenkung ist T . Um das Spektrum hiervon zu ermitteln, wird das Faltungsprodukt im Zeitbereich durch ein multiplikatives Produkt im Frequenzbereich ersetzt,

$$\begin{aligned} x(t) &= T \Lambda(\frac{t}{T}) = \Pi(\frac{t}{T}) * \Pi(\frac{t}{T}) \\ &\Downarrow \\ X(f) &= T \text{si}(\pi fT) \cdot T \text{si}(\pi fT) = T^2 \text{si}^2(\pi fT), \end{aligned}$$

was zu dem Paar $\Lambda(\frac{t}{T}) \longleftrightarrow T \text{si}^2(\pi fT)$ führt. Dieser Weg ist der einfachere als die direkte Faltung. Dieses und auch das oben stehende sind in der Tabelle "Paare der Fourier–Transformation" aufgeführt.

Periodische Signale

Signale, die im Zeitbereich periodisch sind, weisen eine besondere Art von Spektren auf. Nehmen wir Abbildung A.2, hier liegt die Periode T vor, eine Periode ist durch den ape-

riodischen Anteil $x(t)$ gegeben. Das periodische Signal kann damit als eine Überlagerung jeweils um T verschobener Anteile von $x(t)$,

$$x_p(t) = x_p(t - T) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t - nT),$$

beschrieben werden. Um das Spektrum von diesem periodischen Signal zu finden, wenden wir die Beschreibung als Fourier-Reihe an, die durch

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j2\pi \frac{k}{T} t} \\ c_k &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_p(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt, \quad t_0 \text{ beliebig} \end{aligned}$$

angegeben ist. Die Fourier-Koeffizienten sind c_k , sie lassen sich durch die Periode und dem Spektrum der Grundfunktion $x(t)$ leicht berechnen:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_p(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt, \quad t_0 = -\frac{T}{2} \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi \frac{k}{T} t} dt, \quad \text{umgeschaltet auf } x(t) \\ &= \frac{1}{T} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt}_{=X(f)} \Big|_{f=\frac{k}{T}} \\ &= \frac{1}{T} X\left(\frac{k}{T}\right). \end{aligned}$$

Ein periodisches Zeitsignal hat somit ein Linienspektrum, das Gewicht der k -ten Linie ist $c_k = \frac{1}{T} X\left(\frac{k}{T}\right)$ oder anders ausgedrückt liegt bei der Frequenz k/T die Linie $c_k \delta(f - \frac{k}{T})$ vor. Das Spektrum der Grundfunktion $x(t)$ stellt somit die "Einhüllende" der Linien dar.

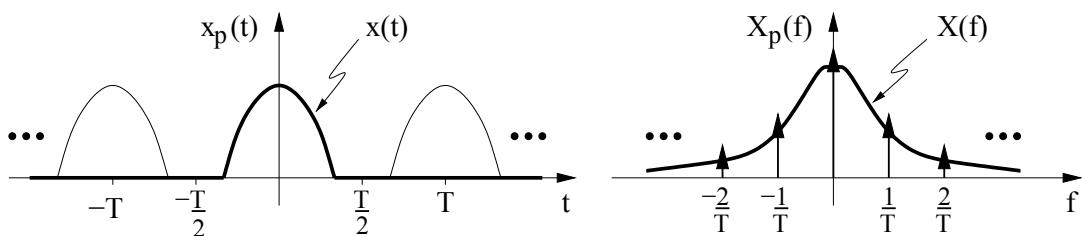


Abbildung A.2: Periodisches Zeitsignal und Linienspektrum

Periodische Spektren & Abtasttheorem

Signale, die im Frequenzbereich periodisch sind, weisen eine besondere Art von Signalen im Zeitbereich auf. Nehmen wir Abbildung A.3, hier liegt die Periode F vor, eine Periode ist durch den aperiodischen Anteil $X(f)$ gegeben. Das periodische Spektrum kann damit als eine Überlagerung jeweils um F verschobener Anteile von $X(f)$,

$$X_p(f) = X_p(f - F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nF),$$

beschrieben werden. Nachdem dies festgestellt worden ist, wenden wir die Beschreibung als Fourier-Reihe an wie oben bei periodischen Zeitsignalen und erhalten ein ähnliches Ergebnis, das lautet

$$c_k = \frac{1}{F} x\left(\frac{-k}{F}\right).$$

Wenden wir die Fourier-Koeffizienten zur Beschreibung des periodischen Spektrums an,

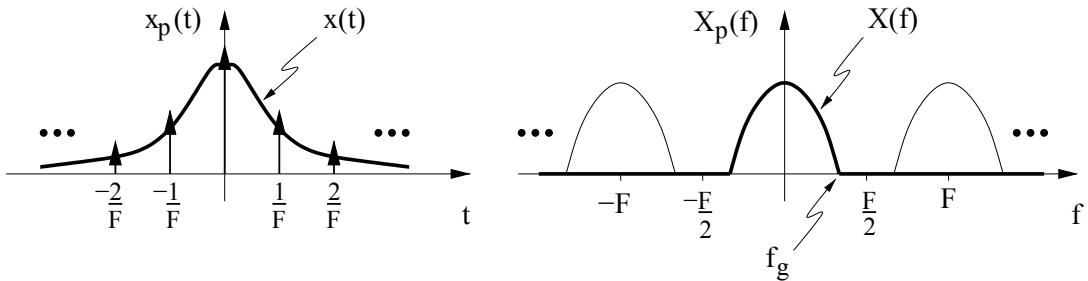


Abbildung A.3: Linienförmiges Zeitsignal und periodisches Spektrum

erhalten wir

$$X_p(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{F} x\left(\frac{-k}{F}\right) e^{j2\pi k \frac{f}{F}},$$

was mit $F = \frac{1}{T_A}$ sowie $k = -\ell$ zu

$$X_p(f) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} T_A x(\ell T_A) e^{j2\pi f \ell T_A}$$

führt. Wir erkennen, daß tatsächlich ein abgetastetes Zeitsignal $x(\ell T_A)$ ein periodisches Spektrum aufweist. Die Abtastperiode ist T_A , die Abtastrate folglich der Kehrwert hiervon, also $f_A = \frac{1}{T_A}$, was aber wiederum der Periode F entspricht. Dieses Ergebnis ist nicht verwunderlich, haben wir oben doch festgestellt, daß eine periodische Funktion im Zeitbereich ein linienförmiges Spektrum hat. Und umgekehrt liegt der gleiche Zusammenhang

vor, d.h. ein periodisches Spektrum mit Periode F hat ein linienförmiges Zeitsignal, also ein zeitdiskretes, mit Linienabstand $\frac{1}{F}$.

Welches Ergebnis können wir weiter hieraus ableiten? Zwischen benachbarten Anteilen, wie etwa $X(f)$ und $X(f - F)$ liegt eine Lücke vor. Diese ist erforderlich, um den Grundbaustein des Spektrums durch Tiefpaßfilterung von den anderen Anteilen zu trennen. Das filtrierte Signal ist dann im Zeitbereich $x(t)$, also das zeitkontinuierliche Signal vor der Abtastung. Zur Rückgewinnung dieses Signals muß diese Lücke vorliegen, was zu der Bedingung

$$f_g \leq \frac{F}{2}$$

führt. Oder anders ausgedrückt: Soll ein reelles zeitkontinuierliches Signal, $x(t)$, mit oberer Grenzfrequenz f_g abgetastet werden, muß die Abtastrate mindestens doppelt so groß sein wie die obere Grenzfrequenz, also $f_A \geq 2f_g$. Nur dann ist eine fehlerfreie Rückgewinnung von $x(t)$ aus den Abtastwerten $x(\ell T_A)$ möglich. Dies ist unter dem Begriff Abtasttheorem bekannt.

**STUDY FOR YOUR MASTER'S DEGREE
IN THE CRADLE OF SWEDISH ENGINEERING**

Chalmers University of Technology conducts research and education in engineering and natural sciences, architecture, technology-related mathematical sciences and nautical sciences. Behind all that Chalmers accomplishes, the aim persists for contributing to a sustainable future – both nationally and globally.

Visit us on **Chalmers.se** or **Next Stop Chalmers** on facebook.

CHALMERS
UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

A.2 Theoreme der Fourier–Transformation

Operation	Funktion	Fourier–Transformierte
Linearität	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(f) + a_2X_2(f)$
Verzögerung	$x(t - t_0)$	$X(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$
Skalierung	$x(at)$	$\frac{1}{ a }X\left(\frac{f}{a}\right)$
Dualität	$X(t)$	$x(-f)$
Modulation	$x(t) \cdot \cos(2\pi f_T t + \theta)$	$\frac{1}{2}e^{-j\theta}X(f + f_T) + \frac{1}{2}e^{j\theta}X(f - f_T)$
komplexe Modulation	$x(t) \cdot e^{j2\pi f_T t}$	$X(f - f_T)$
Bandpaßsignal	$\operatorname{Re}\{x(t) \cdot e^{j2\pi f_T t}\}$	$\frac{1}{2}X(f - f_T) + \frac{1}{2}X^*(-f - f_T)$
Differentiation	$\frac{d^n}{dt^n}x(t)$	$(j2\pi f)^n X(f)$
Integration	$\int_{-\infty}^t x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j2\pi f}X(f) + \frac{1}{2}X(0)\delta(f)$
Multiplikation mit t^n	$t^n x(t)$	$\frac{1}{(-j2\pi)^n} \frac{d^n}{df^n}X(f)$
Faltung	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(f) \cdot X_2(f)$
Multiplikation	$x_1(t) \cdot x_2(t)$	$X_1(f) * X_2(f)$

A.3 Paare der Fourier–Transformation

Funktion	Zeitbereich	Frequenzbereich
Rechteck	$\Pi\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \text{si}(\pi f T)$
Dreieck	$\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$	$T \text{si}^2(\pi f T)$
Einheitssprung	$u(t) = \begin{cases} 1 & : t > 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{j2\pi f} + \frac{1}{2}\delta(f)$
Signum	$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & : t > 0 \\ -1 & : t < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{j\pi f} & : f \neq 0 \\ 0 & : f = 0 \end{cases}$
Konstante	1	$\delta(f)$
Impuls	$\delta(t)$	1
si	$\text{si}(\pi F t) = \frac{\sin(\pi F t)}{\pi F t}$	$\frac{1}{F} \Pi\left(\frac{f}{F}\right)$
Euler–Form	$e^{j(2\pi F t + \theta)}$	$e^{j\theta} \delta(f - F)$
Einton	$\cos(2\pi F t + \theta)$	$\frac{1}{2} e^{-j\theta} \delta(f + F) + \frac{1}{2} e^{j\theta} \delta(f - F)$
Exponential, einseitig	$e^{-at} u(t), \quad a > 0$	$\frac{1}{a + j2\pi f}$
Exponential, zweiseitig	$e^{-a t }, \quad a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + (2\pi f)^2}$
Gauß	$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi f^2}$
Scha	$\text{III}\left(\frac{t}{T}\right) = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	$T \text{III}\left(\frac{f}{1/T}\right) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{l}{T}\right)$

Anhang B

Herleitungen und andere Nebensächlichkeiten

B1 AKF des Datensignals

Die Zufälligkeit des Datensignals wird durch die Autokorrelationsfunktion beschrieben. Um der weiteren Herleitung folgen zu können, sollte der Leser wissen, wie es sich mit Mittelwerten verhält, die zeitlich abhängig sind. Dies soll anhand des folgenden Beispiels verdeutlicht werden.

Beispiel:

Die Zufallsvariable sei nun die Amplitude eines Eintonsignals, die sich zwischen 0 und 1 gleichverteilt bewegt, und der Frequenz F , also $A \cos(2\pi F t)$. Der Mittelwert der Amplitude ist $E\{A\} = \int_0^1 A dA = \frac{1}{2}$. Für den linearen Mittelwert ergibt sich

$$E\{A \cos(2\pi F t)\} = E\{A\} \cos(2\pi F t) = \frac{1}{2} \cos(2\pi F t) = f(t),$$

der Cosinusterm kann als Faktor herausgezogen werden, da er nicht zufällig ist. Wir stellen aber nun fest, daß dieser Ausdruck zeitabhängig ist. Der Ingenieur erwartet jedoch einen konstanten Mittelwert, sodaß die Zeitabhängigkeit wenn möglich herausgemittelt werden muß. In diesem Fall trifft dies zu, da es sich bei $f(t) = f(t - T)$ um eine periodische Funktion mit $T = 1/F$ handelt. Der integrale Mittelwert führt dann zum Ziel, das Ergebnis ist nun

$$\mu = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \cos(2\pi F t) dt = 0.$$

Ähnlich verhält es sich mit dem quadratischen Mittelwert. Wie zuvor ist der Erwartungs-

wert

$$\begin{aligned}
 E\{A^2 \cos^2(2\pi F t)\} &= E\left\{\frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} A^2 \cos(2\pi 2Ft)\right\} \\
 &= \frac{1}{2} E\{A^2\} + \frac{1}{2} E\{A^2\} \cos(2\pi 2Ft) \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cos(2\pi 2Ft) = g(t),
 \end{aligned}$$

wobei wir auf $E\{A^2\} = \int_0^1 A^2 dA = \frac{1}{3}$ zurückgegriffen haben. Um die Zeitabhängigkeit herauszurechnen, bestimmen wir wieder den integralen Mittelwert und erhalten

$$Q = \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cos(2\pi 2Ft) \right) dt = \frac{1}{6}.$$

Man beachte die doppelte Frequenz, die Periode von $\cos(2\pi 2Ft)$ ist dann $\frac{T}{2}$.

Nebenbei bemerkt führt diese Betrachtung auch zu einem altbekannten Ergebnis aus der Wechselstromlehre. Der Ansatz für die Leistung des deterministischen Eintonsignals $A \cos(2\pi F t)$ ist wie oben aufgeführt $E\{A^2 \cos^2(2\pi F t)\} = A^2 \cos^2(2\pi F t)$. Die Zeitmittelung ergibt $Q = 1/T \int_T A^2 \cos^2(2\pi F t) dt = A^2/2$, was für $A = 1$ in der Leistung $Q = 1/2$ resultiert. Fragen dieser Art sind bestens in [Ash 1993], [Papoulis 1985], [Lahti 1983] und anderen beschrieben.



Wir suchen die Besten

Das Wachstum der voestalpine-Gruppe und der weltweite Erfolg kommen nicht allein von guten Produkten. Dahinter steckt eine attraktive Arbeitswelt, die Menschen fordert und fördert. Die voestalpine sieht die Kompetenz, das Engagement und die Identifikation ihrer Mitarbeiter mit dem Unternehmen als zentralen Erfolgsfaktor.

Gestalten Sie Ihre Zukunft mit uns

Lernen Sie unsere interessanten Tätigkeitsfelder und Aufstiegsmöglichkeiten kennen – besuchen Sie unsere Homepage unter www.voestalpine.com

Hier können Sie sich auch gleich online bewerben.

voestalpine Stahl GmbH
www.voestalpine.com

voestalpine
EINEN SCHRITT VORAUS.

Mit diesen Ergebnissen lassen sich die Autokorrelationsfunktionen für das Nachrichtensignal ermitteln. Beginnen wir mit der Impulsfolge, die die Nachrichtenelemente trägt,

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT). \quad (\text{B.1})$$

Hieraus bilden wir zunächst das zufällige Argument des Erwartungswertoperators,

$$d(t)d(t + \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_n a_m \delta(t - nT) \delta(t - mT + \tau)$$

und bilden damit die AKF

$$\begin{aligned} E\{d(t)d(t + \tau)\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} E\{a_n a_m\} \delta(t - nT) \delta(t - mT + \tau) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} E\{a_n a_{n+\ell}\} \delta(t - nT) \delta(t - nT - \ell T + \tau). \end{aligned}$$

Mit $m = n + \ell$ lässt sich der letzte Schritt nachvollziehen. Da die Impulse nicht zufälliger Natur sind, können diese aus der Erwartungswertbildung herausgenommen werden. Nun ist wieder einmal der Erwartungswert periodisch, es lässt sich leicht zeigen, daß $E\{d(t)d(t + \tau)\} = E\{d(t + T)d(t + T + \tau)\}$ und dieser Ausdruck auch noch periodisch in τ ist mit der Periode T . Herausmitteln der Zeitabhängigkeit ergibt dann mit $\alpha_\ell = E\{a_n a_{n+\ell}\}$ die Autokorrelationsfunktion

$$R_d(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \delta(t - nT - \ell T + \tau) dt,$$

wobei die Terme bereits so umsortiert sind, daß sich hieraus der Ergebnis sofort ablesen lässt. Mit $\vartheta = t - nT$ bringen wir das Integral in eine einfachere Form,

$$\begin{aligned} R_d(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-T/2-nT}^{T/2-nT} \delta(\vartheta) \delta(\vartheta - \ell T + \tau) d\vartheta}_{= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta) \delta(\vartheta + \tau - \ell T) d\vartheta} , \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta) \delta(\vartheta + \tau - \ell T) d\vartheta = \delta(\tau - \ell T) \end{aligned}$$

und stellen fest, daß das Integral "scheibchenweise" gelöst wird. Und wenn wir uns zudem daran erinnern, daß dies die Faltung zweier Impulse darstellt, ist das Ergebnis der AKF

$$R_d(\tau) = \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell \delta(\tau - \ell T), \quad \text{mit } \alpha_\ell = E\{a_n a_{n+\ell}\}. \quad (\text{B.2})$$

Im Grunde genommen haben wir mit einem solchen Ergebnis gerechnet, nur der Vorfaktor $1/T$ wäre rein physikalisch gesehen nicht gut zu erklären gewesen. Aber wir haben nun Einblick in die Hintergründe erhalten.

Ein ähnliches Ergebnis ergibt sich für das Nachrichtensignal,

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n g(t - nT).$$

Verglichen mit Gleichung B.1 unterscheidet es sich formal nur durch die Pulse. Ersetzen wir δ durch g , erhalten wir sofort unter Verwendung von Gleichung B.2

$$\begin{aligned} R_x(\tau) &= \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell \int_{-\infty}^{\infty} g(\vartheta) g(\vartheta + \tau - \ell T) d\vartheta \\ &= \frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell g(\tau) * g(-\tau) * \delta(\tau - \ell T) \\ &= g(\tau) * g(-\tau) * \underbrace{\frac{1}{T} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \alpha_\ell \delta(\tau - \ell T)}_{= R_d(\tau)} \end{aligned}$$

oder kurz

$$R_x(\tau) = g(\tau) * g(-\tau) * R_d(\tau). \quad (\text{B.3})$$

Liegt die AKF des Datensignals, $R_d(\tau)$, vor, so ist die AKF des Nachrichtensignals durch die Faltung von $g(\tau) * g(-\tau) = R_g(\tau)$ mit $R_d(\tau)$ gegeben.

B2 Leistungen von gaußschem Rauschen

Ausgehend von dem glockenförmigen Verlauf, der durch

$$p(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < n < \infty$$

angegeben ist, erhalten wir zunächst für die Gleichleistung

$$P_{\text{DC}} = \mu^2 = 0,$$

da der Verlauf nach Abbildung 2.17 mittelwertfrei ist. Man kann dies auch durch die Auswertung des Integrals

$$\mu = E\{n\} = \int_{-\infty}^{\infty} n p(n) dn$$

finden. Der Integrand weist einen ungeraden Verlauf auf, sodaß dieses Integral den Wert null hat. Der Leser möge den Verlauf des Integranden mit Bleistift auf Papier aufzeichnen, das Ergebnis ist sofort ersichtlich.

Anders verhält es sich mit der Gesamtleistung, die aber auch der Wechselleistung entspricht. Ausgehend von $E\{n^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} n^2 p(n) dn$ ergibt sich

$$\begin{aligned} E\{n^2\} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} n \cdot n e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \left(\underbrace{-n e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} \Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn}_{=\sigma^2 \sqrt{2\pi\sigma^2}} \right) = \sigma^2, \end{aligned}$$

wobei die Zusammenhänge

$$\frac{d}{dn} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} = -\frac{n}{\sigma^2} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{2\sigma^2}} dn = 1$$

zur Anwendung kamen. Das Ergebnis dieser Leistungsbetrachtung von mittelwertfreiem gaußschem Rauschen ist somit

$$R_{DC} = 0 \quad \text{und} \quad R_{ges} = R_{AC} \equiv R = \sigma^2.$$

Wie aus der Wechselstromlehre bekannt ist auch hierbei der quadratische Zusammenhang zwischen dem Effektivwert des Rauschens, σ , und der Rauschleistung, $R = \sigma^2$.

B3 Pulse mit Cosinusflanken

Wie im Text vermerkt, soll ein Filter entworfen werden, dessen Übertragungsfunktion Flanken mit vorgegebenen Symmetrieeigenschaften bezüglich eines Symmetriepunktes aufweisen soll. Der Grundpuls, der die Nyquist-Rate ermöglicht ("Bandbreite gleich Symbolrate") zeigt ein rechteckförmiges Spektrum der Bandbreite $1/T$. Zur Verminderung der Bandbreite müssen die Flanken geschliffen werden, ohne daß es zu einer Intersymbolinterferenz kommt. Cosinusflanken liefern das gewünschte Ergebnis, indem die Bandbreite erhöht wird. Wir wissen, daß eine Verbreiterung eintritt, wenn Faltung ins Spiel kommt. Nehmen wir zwei Rechteckpulse der Breite B und falten diese, ergibt sich ein Dreieck der Breite $2B$. Die Faltung liefert auch bei den Cosinusflanken eine gute Erklärung.

Das nebenstehende Bild zeigt die Form der angestrebten Flanke, sie ist cosinusförmig. Ein Filter soll diese Formgebung durchführen, wir benötigen hierzu dessen Impulsantwort. Wir erinnern uns daran, daß die Faltung der Funktion $A(f)$ mit der Sprungfunktion (im Frequenzbereich) zur Integration über $A(f)$ führt. Und das Ergebnis kennen wir, es ist $A(f)$. Der Ansatz läßt sich damitleicht formulieren. Mit

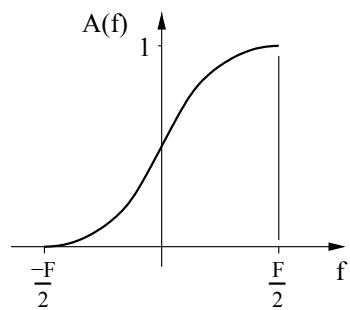
$$A(f) = \frac{1}{2} \left(1 + \sin \left(\pi \frac{f}{F} \right) \right)$$

ergibt dies für die Übertragungsfunktion des Flankenformungfilters

$$B(f) = \frac{d}{df} A(f) = \frac{1}{2} \frac{\pi}{F} \cos \left(\pi \frac{f}{F} \right) \cdot \Pi \left(\frac{f}{F} \right),$$

wobei die Rechteckfunktion den Zuständigkeitsbereich auf $-F/2 \leq f \leq F/2$ festlegt. Abbildung B.1 zeigt den Zusammenhang. Die Beschreibung im Zeitbereich ergibt sich sofort aus

$$G_{\text{RC}}(f) = B(f) * T \Pi \left(\frac{f}{1/T} \right) \quad \longleftrightarrow \quad g_{\text{RC}}(t) = b(t) \cdot \text{si} \left(\pi \frac{t}{T} \right),$$



ERFOLG IST EINE FRAGE DER TECHNIK!

**Du hast die Wahl: 18 technische Master-Studiengänge.
Österreichs einzige rein technische Fachhochschule.**





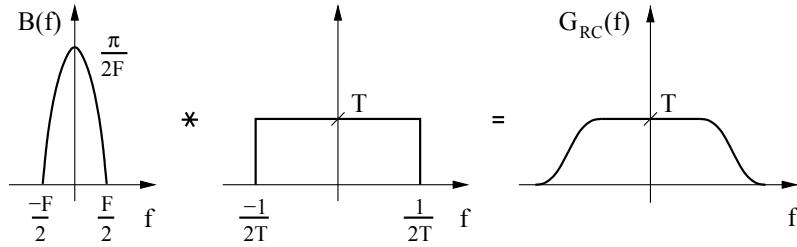


Abbildung B.1: Flankenformung durch Faltung

zuvor ist jedoch $b(t)$ zu ermitteln. Der interessierte Leser möge die Schritte, die zwischen dem Ansatz und dem Ergebnis liegen, selbst gehen. Start und Ziel sind

$$\begin{aligned} B(f) &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{F} \cos\left(\pi \frac{f}{F}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{F}\right) \\ &\uparrow \\ b(t) &= \frac{1}{2} \frac{\pi}{F} \frac{1}{2} \left(\delta\left(t - \frac{1}{2F}\right) + \delta\left(t + \frac{1}{2F}\right) \right) * F \sin(\pi F t) \\ &\vdots \\ &= \frac{\cos(\pi F t)}{1 - (2Ft)^2}. \end{aligned}$$

Und damit erhalten wir den Puls mit Cosinusflanke im Zeitbereich

$$g_{RC}(t) = \frac{\cos(\pi F t)}{1 - (2Ft)^2} \cdot \sin\left(\pi \frac{t}{T}\right),$$

mit $F = \alpha \frac{1}{T} = \alpha r_s$ und $0 \leq \alpha \leq 1$ als dem Flankenfaktor. Die Symmetrie von $B(f)$ führt dazu, daß die Flanke selbst einen Symmetriepunkt bei $A(0)$ aufweist, wie es die Darstellung zeigt. Anders verhält es sich bei Pulsen mit Wurzelcosinusflanken.

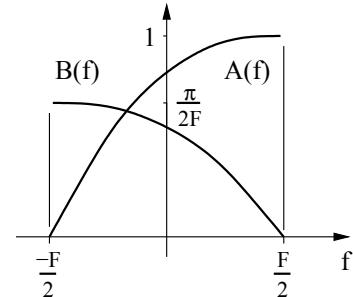
B4 Pulse mit Wurzelcosinusflanken

Der Unterschied zu den oben behandelten Pulsen liegt in der Flankenform, diese ist nun

$$A(f) = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \sin\left(\pi \frac{f}{F}\right) \right)} = \cos\left(\frac{\pi f}{2F} - \frac{\pi}{4}\right)$$

für $-\frac{F}{2} \leq f \leq \frac{F}{2}$ wie in der Abbildung rechts dargestellt. Die Flankenformung kann wieder ein Filter übernehmen, dessen Übertragungsfunktion sich durch die Ableitung von $A(f)$ ergibt und die durch

$$B(f) = \frac{d}{df} A(f) = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{F} \sin\left(\frac{\pi f}{2F} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \Pi\left(\frac{f}{F}\right)$$



gegeben ist. Die Faltung $B(f) * \sqrt{T} \Pi\left(\frac{f}{1/T}\right)$ ergibt dann die gewünschte Frequenzfunktion $G_{\sqrt{RC}}$.

Gesucht ist wieder $b(t)$, die Funktion, die sich aus $B(f)$ ergibt. Mit $\sin x = \frac{1}{2j}e^{jx} - \frac{1}{2j}e^{-jx}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} b(t) &= -\frac{\pi}{2} \frac{1}{F} \frac{1}{2j} \left(e^{-j\frac{\pi}{4}} \delta(t + \frac{1}{4F}) - e^{j\frac{\pi}{4}} \delta(t - \frac{1}{4F}) \right) * F \sin(\pi F t) \\ &\vdots \\ &= \frac{e^{j\pi F t} - j4Ft \cdot e^{-j\pi F t}}{1 - (4Ft)^2}. \end{aligned}$$

Da, anders als bei dem RC-Puls, $B(f)$ nun keine symmetrische Funktion ist, muß zwischen der linken und rechten Flanke unterschieden werden. Die linke Flanke lässt sich über die Faltung von $B(f)$ mit einem verschobenen Einheitssprung $\sqrt{T} u(f + \frac{1}{2T})$ beschreiben,

$$C(f) = B(f) * \sqrt{T} u(f) * \delta(f + \frac{1}{2T}).$$

Die Rücktransformierte des Einheitssprungs finden wir in den Tabellen der Fourier-Transformation,

$$u(f) = \begin{cases} 1 & : f > 0 \\ 0 & : f < 0 \end{cases} \longleftrightarrow \frac{-1}{j2\pi t} + \frac{1}{2} \delta(t),$$

womit sich

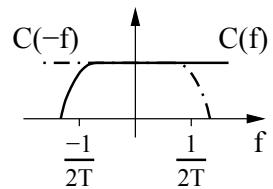
$$\begin{aligned} c(t) &= -\frac{\sqrt{T}}{j2\pi t} b(t) e^{-j\pi \frac{t}{T}} + \underbrace{\frac{\sqrt{T}}{2} b(t) e^{-j\pi \frac{t}{T}} \cdot \delta(t)}_{=\frac{\sqrt{T}}{2} \cdot b(0) \cdot 1 \cdot \delta(t)} \\ &= -\frac{\sqrt{T}}{j2\pi t} \cdot \frac{e^{j\pi F t} - j4Ft \cdot e^{j\pi F t}}{(1 - (4Ft)^2)} \cdot e^{-j\pi \frac{t}{T}} + \frac{\sqrt{T}}{2} \delta(t) \end{aligned}$$

ergibt.

Neben der linken Flanke wird auch die rechte benötigt. Diese erhalten wir aus $C(f)$ einfach durch Spiegelung an der Ordinate, $C(-f)$. Beide addiert resultiert in dem gesuchten Puls, der allerdings auf einem Podest der Höhe $\sqrt{T}/2$ steht. Der gesuchte Puls im Frequenzbereich ist damit $C(f) + C(-f) - \frac{\sqrt{T}}{2}$, der im Zeitbereich $c(t) + c^*(t) - \frac{\sqrt{T}}{2}$ ergibt. Das Ergebnis des Pulses ist damit

$$g_{\sqrt{RC}}(t) = \frac{\sqrt{T}}{\pi t} \cdot \frac{\sin\left(\pi(\frac{1}{T} - F)t\right) + 4Ft \cos\left(\pi(\frac{1}{T} + F)t\right)}{1 - (4Ft)^2},$$

womit diese Herleitung ein Ende gefunden hat.



B5 Bandpaßrauschen

Liegen Basisbandsysteme vor, die mit Rauschen erregt werden, haben wir das Modell des AWGN angewendet, um die Reaktion des Systems auf dieses Signal zu beschreiben. Bei Bandpaßsystemen ist dieser Schritt selbstverständlich ebenfalls möglich, man kann aber einen einfacheren Weg beschreiten.

Wir erinnern uns, daß Bandpaßsignale durch Modulation eines Basisbandsignals mit einem Eintonsignal der Frequenz F erzeugt werden, wodurch sich eine Verschiebung des Tiefpaßspektrums hin zu den Frequenzen $\pm F$ ergibt. Bei der kohärenten Demodulation fügen wir im Empfänger wiederum das eintönige Trägersignal hinzu und erhalten das Basisbandsignal zurück, nachdem unerwünschte Spektralanteile unterdrückt wurden. Der Nachrichtentechniker Rice sich den Demodulationsvorgang vorgenommen und hierauf das Rauschsignal angepaßt. Seine Idee ist, daß das Leistungsdichespektrum des Rauschsignals im interessierenden Bandbereich konstant sein soll. Was außerhalb dieses Bereichs vorliegt, ist im Grunde genommen egal. Wir sind auch so bei Basisbandsignalen vorgegangen. Die Ricesche Darstellung ist gut in einem grundlegenden Buch beschrieben [Papoulis 1985, p. 317], sie soll hier auf unsere Bedürfnisse angepaßt werden.

The advertisement features a top section showing a smartphone displaying the time as 9:56 and a water bottle with a cartoon character holding a sign that says "TRINK WASSER, DIES RA!". Below this, a large blue banner contains the text:

Was für dich dabei?
Kostenloses StudentenKonto eröffnen
und **40€ Gutschein** abstauben!

A red button at the bottom left says **Jetzt Konto eröffnen**. To the right, there is a logo for **Bank Austria**, which is a member of **UniCredit**.

Bis zur Beendigung des Studiums, längstens bis zum 30. Geburtstag. Aktion gültig bis 5.11.2017.
Informationen zum Einkaufsgutschein auf [studenten.bankaustralia.at](#).

Bei dem Bandpaßrauschen soll das LDS um $\pm F$ zentriert sein, die Bandbreite sei so groß, daß das Nutzsignal in seiner spektralen Ausmessung eine konstante Rauschleistungsdichte "sieht". Um den allgemeinen Fall zu beschreiben, wählen wir

$$n(t) = i(t) \cos(2\pi F t) + q(t) \sin(2\pi F t).$$

Zwei Rauschkomponenten liegen vor, nämlich die Inphasenkomponente, $i(t)$, und die Quadraturphasenkomponente, $q(t)$. Die erste moduliert den Cosinusträger, die zweite den Sinusträger, womit sämtliche Kombinationsmöglichkeiten gegeben sind. Warum soll etwa ein Eintonträger nur cosinusförmig sein? Mit beiden Komponenten lassen sich beliebige Amplituden und Phasen des Trägers modellieren.

Einsicht in das Bandpaßrauschen erhalten wir nur über die Autokorrelationsfunktion. Um die Terme zu sortieren, nehmen wir das Argument und formen es einfach um, wie es

$$\begin{aligned} n(t)n(t+\tau) &= \left(i(t) \cos(2\pi F t) + q(t) \sin(2\pi F t) \right) \\ &\quad \times \left(i(t+\tau) \cos(2\pi F(t+\tau)) + q(t+\tau) \sin(2\pi F(t+\tau)) \right) \\ &= i(t)i(t+\tau) \cos(2\pi F t) \cos(2\pi F t + 2\pi F \tau) \\ &\quad + q(t)q(t+\tau) \sin(2\pi F t) \sin(2\pi F t + 2\pi F \tau) \\ &\quad + i(t)q(t+\tau) \cos(2\pi F t) \sin(2\pi F t + 2\pi F \tau) \\ &\quad + q(t)i(t+\tau) \sin(2\pi F t) \cos(2\pi F t + 2\pi F \tau) \end{aligned}$$

zeigt. Wenden wir trigonometrische Identitäten an und formen die AKF, erhalten wir

$$\begin{aligned} R_n(\tau) &= \frac{1}{2}R_i(\tau) \left(\cos(2\pi F \tau) + \cos(2\pi 2Ft + 2\pi F \tau) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}R_q(\tau) \left(\cos(2\pi F \tau) - \cos(2\pi 2Ft + 2\pi F \tau) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}R_{iq}(\tau) \left(\sin(2\pi F \tau) + \sin(2\pi 2Ft + 2\pi F \tau) \right) \\ &\quad + \frac{1}{2}R_{qi}(\tau) \left(\sin(-2\pi F \tau) + \sin(2\pi 2Ft + 2\pi F \tau) \right), \end{aligned}$$

wobei $R_{iq}(\tau) = E\{i(t)q(t+\tau)\}$ die Abhängigkeiten der I- und Q-Komponente beschreibt. Etwas umarrangiert ergibt sich für die AKF dann

$$\begin{aligned} R_n(\tau) &= \underbrace{\frac{1}{2}(R_i(\tau) + R_q(\tau))}_{(1)} \cos(2\pi F \tau) \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2}(R_i(\tau) - R_q(\tau))}_{(2)} \cos(2\pi 2Ft + 2\pi F \tau) \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned}
 & + \underbrace{\frac{1}{2} (R_i(\tau) - R_q(\tau))}_{(3)} \sin(2\pi F\tau) \\
 & + \underbrace{\frac{1}{2} (R_{iq}(\tau) + R_{qi}(\tau))}_{(4)} \sin(2\pi 2Ft + 2\pi F\tau)
 \end{aligned}$$

Bei dem Rauschen ist davon auszugehen, daß sich die Mittelwerte nicht bezüglich der Zeit ändern, sodaß die Terme (2) und (4) gleich null sind oder dies sein müssen. Dies liefert $R_i(\tau) = R_q(\tau)$ und $R_{iq}(\tau) = -R_{qi}(\tau) = -R_{iq}(-\tau)$, da die Wahl des Beobachtungszeitpunkts beliebig ist und somit $R_{qi}(\tau) = E\{q(t)i(t+\tau)\} = E\{q(t-\tau)i(t)\} = R_{iq}(-\tau)$ gilt. Dies bedeutet, daß es sich bei $R_{iq}(\tau)$ um eine ungerade Funktion handelt, womit sich zusammengefaßt

$$R_n(\tau) = R_i(\tau) \cos(2\pi F\tau) + R_{iq}(\tau) \sin(2\pi F\tau)$$

ergibt. Eine kleine Kontrolle zeigt, daß $R_n(\tau)$ wie erwartet eine gerade Funktion ist. $R_i(\tau)$ ist gerade, diese Funktion mit der geraden Cosinusfunktion multipliziert ist ebenfalls gerade, wie auch das Produkt aus dem ungeraden $R_{iq}(\tau)$ und der ebenfalls ungeraden Sinusfunktion. Die Welt ist in Ordnung.

Eingangs wurde erwähnt, daß das LDS um F konstant sein soll. Dies bedeutet eine gerade Frequenzfunktion bezüglich der Trägerfrequenz. Nehmen wir die gerade Funktion $R_i(\tau)$, dessen Frequenzfunktion, also das zugehörige Leistungsdichtespektrum reell und ebenfalls gerade ist. Wegen $R_i(\tau) = R_i(-\tau)$ ergibt sich für das Spektrum $S_i(f) = S_i(-f) = S_i^*(f)$, sodaß die obige Aussage damit nachgewiesen ist. $R_{iq}(\tau)$ ist ungerade, was durch $R_{iq}(\tau) = -R_{iq}(-\tau)$ zum Ausdruck gebracht ist. Dies in den Frequenzbereich umgesetzt ergibt $S_{iq}(f) = -S_{iq}(-f) = -S_{iq}^*(f)$, was ein rein imaginäres und ungerades Spektrum besagt. Da diese Ungeradheit aber für das LDS $S_n(f)$ ausgeschlossen ist, muß die Funktion $R_{iq}(\tau)$ gleich null sein. Somit ist das Endergebnis für die AKF

$$R_n(\tau) = R_i(\tau) \cos(2\pi F\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \cos(2\pi F\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau) \cos(0) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau),$$

mit $R_i(\tau) = R_q(\tau) = R_n(\tau) = \frac{N_0}{2}$.

Dieses Ergebnis hätten wir (fast) auch erlangt, wenn wir die Zeitabhängigkeit in Gleichung B.4 herausgemittelt hätten. Nur wäre dann der verbleibende Sinusterm schwer zu erklären gewesen, wie auch der Zusammenhang der Cosinuskomponenten.

B6 Einhüllende & Wahrscheinlichkeit

Bei der Einhüllendendemodulation ist oft nur der Betrag des Nachrichtensignals von Belang. Aus diesem Grund betrachten wir in diesem Abschnitt die Verteilung der Beträge von Zufallsgrößen.

Wir haben bereits die gaußsche Glockenkurve kennengelernt, die angibt, wie die Wahrscheinlichkeit ist, daß der Wert der Zufallsgröße x in einem Intervall dX zu finden ist, wie es

$$P\{X < x < X + dX\} = p_x(X) dX$$

beschreibt. Der Verlauf ist uns bekannt. Bei genauerem Hinsehen erkennen wir eine etwas genauere Schreibweise, der Index beschreibt, daß sich diese Glockenkurve auf die Zufallsgröße x bezieht. Für eine zweite Zufallsgröße, y , erhalten wir dann $P(Y < y < Y + dY) = p_y(Y) dY$. Um die Funktionen "lesbar" zu gestalten, verzichten wir der Einfachheit halber auf die Großschreibung und verwenden $p_x(x)dx$ und $p_y(y)dy$. Der interessierte Leser weiß die Ausdrücke richtig zu interpretieren. Beide Größen sollen statistisch unabhängig sein, wie etwa zwei Rauschsignale, die von zwei unabhängigen und unterschiedlichen Quellen, wie etwa Widerständen, herrühren. Die Varianzen beider Größen sollen gleich sein, d.h. $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$. Unabhängigkeit führt bei der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu einer Produktbildung der Einzelwahrscheinlichkeiten Es soll nun interessieren, wie die Wahrscheinlichkeiten des Betrags zu berechnen sind.

3 GB gratis für alle bis 26!

Jetzt zusätzlich zu jedem A1 **Go!** Tarif:

Huawei P9 Lite
4G/LTE
um **€ 0,-**

Jetzt bestellen

Gerätepreis gültig bei Erstanmeldung zu ausgewählten A1 **Go!** Tarifen.

A1 logo

Die Betrachtung eines Dreiecks liefert hierfür den Ansatz. Die "alten" Variablen x und y sind durch die "neuen" Variablen gegeben, wie es $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi$ angibt. Damit erhalten wir $r^2 = x^2 + y^2$, mit $r \geq 0$, und $\tan \phi = \frac{y}{x}$. Es liegen nun zwei unabhängige Variablen vor, die Wahrscheinlichkeit, daß sich die eine Zufallsvariable in dem Scheibchen $(x, x+dx)$ und zugleich die andere in $(y, y+dy)$ befindet, ist durch

$$p_x(x)p_y(y)dxdy = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dxdy$$

beschrieben. Mit

$$\frac{dxdy}{drd\phi} = \begin{vmatrix} \frac{dx}{dr} & \frac{dx}{d\phi} \\ \frac{dy}{dr} & \frac{dy}{d\phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -r \sin \phi \\ \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} = r$$

erhalten wir daraus

$$p_x(x)p_y(y)dxdy = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr \frac{1}{2\pi} d\phi.$$

Dieser Ausdruck ist eine Funktion von r und ϕ , obwohl dieser Ausdruck hierin nicht in Erscheinung tritt, es handelt sich hierbei um die Konstante 1. Um an die Verteilung des Radius' zu gelangen, mitteln wir die Phase heraus, was zum gesuchten Ergebnis

$$p_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = \begin{cases} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} & : r \geq 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

führt. Benannt wurde diese Verteilung nach dem englischen Physiker John William Strutt, 3rd Baron Rayleigh, der sich mit Elektrizität, Thermodynamik, Wellentheorie und statistischer Physik beschäftigte.

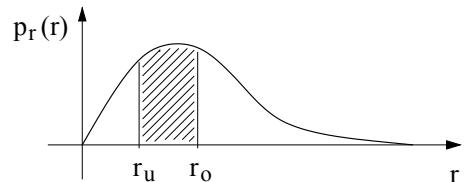
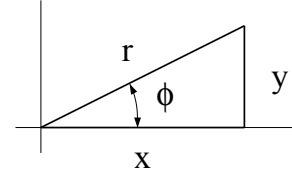
Anders als bei der Gauß-Verteilung lassen sich Wahrscheinlichkeiten sehr leicht berechnen, wenn man den folgenden Zusammenhang erkennt. Man nehme $e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$ und bestimme die Ableitung bezüglich r , das Ergebnis ist

$$\frac{d}{dr} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} = -\frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = -de^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

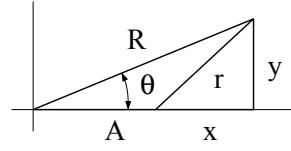
Damit ist die Lösung von der Wahrscheinlichkeit, daß der Betrag zwischen r_u und r_o liegt,

$$P\{r_u < r < r_o\} = \int_{r_u}^{r_o} \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} dr = - \int_{r_u}^{r_o} de^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} = -e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \Big|_{r_u}^{r_o} = e^{-\frac{r_u^2}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{r_o^2}{2\sigma^2}},$$

also die Fläche, die oben dargestellt ist.



Was passiert nun, wenn einer Komponente eine Konstante hinzugefügt wird? Aus x werde $A + x$, y bleibe so wie zuvor. Die Situation ist rechts dargestellt, für den (kleinen) Radius erhalten wir



$$r^2 = x^2 + y^2 = R^2 + A^2 - 2RA \cos \theta.$$

Wie gehabt resultiert dies über $A + x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$ und $\frac{dx dy}{dR d\theta} = R$ zu

$$p_x(x)p_y(y)dxdy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{R^2+A^2}{2\sigma^2}} e^{\frac{2RA \cos \theta}{2\sigma^2}} R dR d\theta.$$

Um zu der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $p_R(R)$ zu gelangen, muß der Winkel "herausgemittelt" werden, was durch das Integral in

$$\begin{aligned} p_R(R) &= \frac{R}{\sigma^2} e^{-\frac{R^2+A^2}{2\sigma^2}} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{\frac{2RA \cos \theta}{2\sigma^2}} d\theta}_{= I_0\left(\frac{RA \cos \theta}{\sigma^2}\right)} \\ &= I_0\left(\frac{RA \cos \theta}{\sigma^2}\right) \end{aligned}$$

erfolgt. Dieses Integral ist geschlossen nicht lösbar, es handelt sich hierbei um die modifizierte Bessel-Funktion erster Gattung nullter Ordnung, die in vielen Formelsammlungen, wie etwa [Abramowitz & Stegun 1972] zu finden ist.

Die Verteilung

$$p_R(R) = \begin{cases} \frac{R}{\sigma^2} e^{-\frac{R^2+A^2}{2\sigma^2}} I_0\left(\frac{RA}{\sigma^2}\right) & : R \geq 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Rice-Verteilung. Sie ist benannt nach dem Elektroingenieur Stephen Rice, der bei den Bell Telephone Laboratories durch seine Beiträge beachtliche Aufmerksamkeit und Anerkennung erhielt. Der Test für $A = 0$ zeigt, daß für diesen Fall die Rice-Verteilung in die Rayleigh-Verteilung übergeht. Abbildung B.2 zeigt den Verlauf.

Auffällig dabei ist, daß die Funktion sich mit wachsendem A einer Gauß-Verteilung annähert. Für $A = 4$ ist dies dargestellt, der durchgehende Verlauf ist die Rice-Verteilung, der gestrichelte die Gauß-Verteilung. Daß dies tatsächlich zutrifft, läßt sich leicht mit einer Näherungsbetrachtung zeigen. Mit der auch in [Bronstein & Semendjajew 1997, p. 496] zu findenden Näherung

$$I_0\left(\frac{RA}{\sigma^2}\right) \approx \frac{e^{\frac{RA}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi \frac{RA}{\sigma^2}}}$$

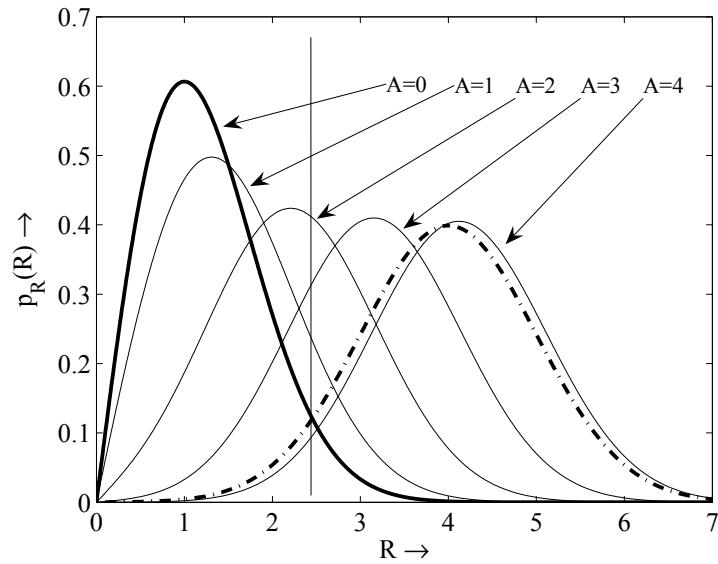


Abbildung B.2: Rayleigh-, Rice-Verteilung und Näherung

für $\frac{RA}{\sigma^2} > 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} p_R(R) &\approx \frac{R}{\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{RA}{\sigma^2}}} e^{-\frac{(R-A)^2}{2\sigma^2}} \\ &\approx \frac{R}{\sqrt{2\pi RA\sigma^2}} e^{-\frac{(R-A)^2}{2\sigma^2}} \end{aligned}$$

Wenn wir zudem ein Rauschen eher geringer Intensität betrachten, für das $R \approx A$ gilt, erhalten wir letztendlich

$$p_R(R) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(R-A)^2}{2\sigma^2}},$$

womit sich einige Dinge im praktischen Leben eines Nachrichtingenieurs leichter berechnen lassen.

Anhang C

Fehlerfunktion

 CAREER Venture

facebook.com/CAREERVenture
google.com/+CAREER-VentureDe
twitter.com/CAREERVenture



Interessiert an Beratung?

Hier bis
28.01.2019
bewerben!

business & consulting spring
25. Februar 2019 Frankfurt



Teilnehmende Unternehmen

Basycon d-fine     

www.career-venture.de

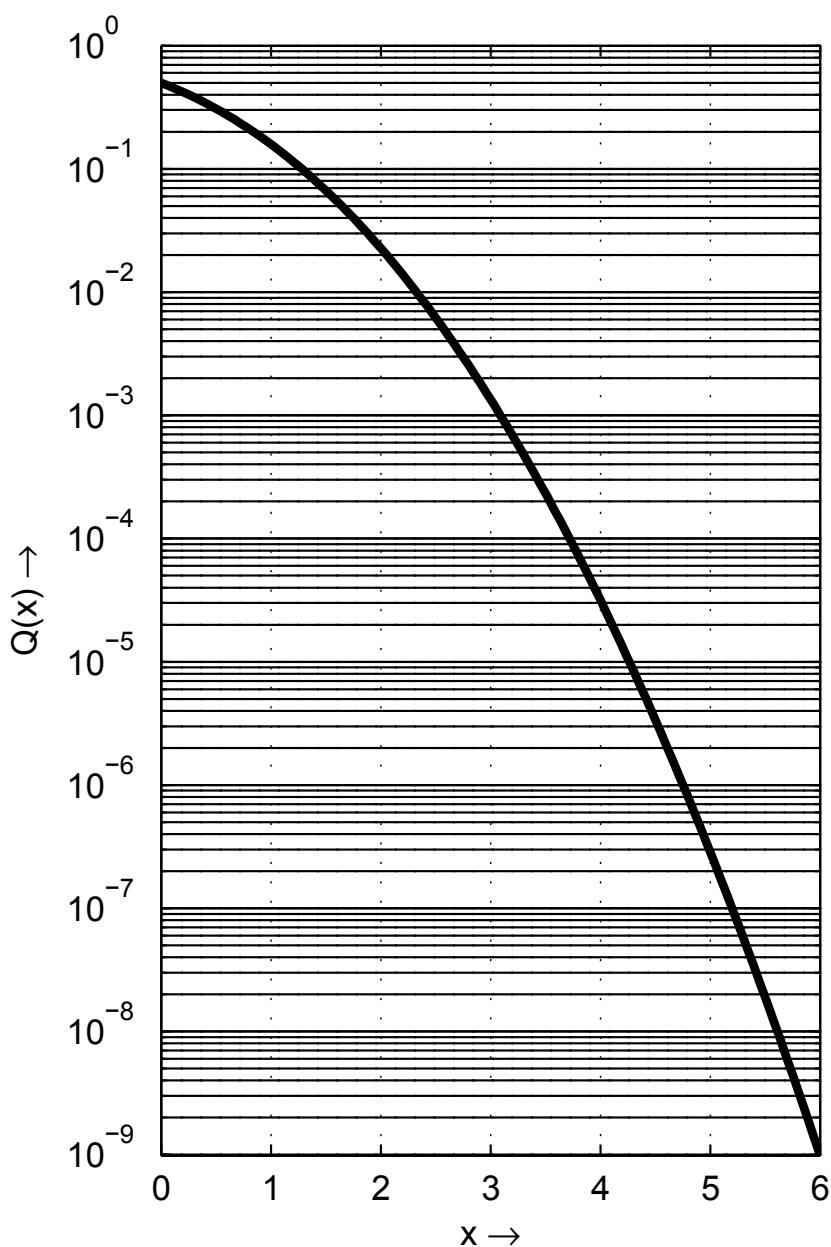


Abbildung C.1: Q-Funktion

Literaturverzeichnis

[Abramowitz & Stegun 1972] Abramowitz, M.; Stegun, I.A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 1972

[Ash 1993] Ash, C., *The Probability Tutoring Book*, IEEE Press, 1993

[Bronstein & Semendjajew 1997, p. 496] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A., *Taschenbuch der Mathematik*, B.G. Teubner Verlag, 1997

[Lahti 1983] Lahti, B.P., *Modern Digital and Analogue Communication Systems*, Holt, Rinehart and Winston, 1983

[Papoulis 1985] Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw–Hill, 1985

[Papoulis 1985, p. 317] Papoulis, A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*, McGraw–Hill, 1985

[Pasupathy 1979, pp. 14-22] Pasupathy S., *Minimum Shift Keying: A Spectrally Efficient Modulation*, IEEE Communication Society Magazine, vol. 17, no. 4, July 1979

[Peebles 1987, p. 302] Peebles, P.Z., *Digital Communications Systems*, Prentice–Hall, 1987

Index

- Leistungen 22
- Leistungsdichtespektrum 44
- Leistungssignal 37

- Amplitudensprungverfahren 105, 107
- ASK 107
- Augendiagramm 93
- Autokorrelationsfolge 34
- Autokorrelationsfunktion 27
- AWGN 62

- Bandpaßrauschen 122
- Bandbreite 23
- Basisband 20
- Bitfehlerrate 67
- CPFSK 135

- Effizienz 153
- Einhüllendendemodulation 120
- Entscheidungsschwelle 61

- Fading 125
- Faraday 8
- Fehlentscheidung 52
- Flankenfaktor 81
- Formatierung 20
- Frequenzsprungverfahren 105, 131
- FSK 131

- Gauß 53
- Hartley 11

- Intersymbolinterferenz 52, 77

- Kanaleinflüsse 52
- Kohärente Demodulation 111
- Kolmogorov 11
- Korrelationsfunktion 26
- Korrelator 73

- Mehrstufigkeit 90, 141
- Morse 8
- M-PSK 150
- M-QAM 151
- MSK 135
- Multiplexverfahren 95

- Nichtkohärente Demodulation 120
- Nichtlinearität 129
- Nyquist 9
- Nyquist-Bedingung 79
- Nyquist-Rate 79

- Optimalfilter 64

- Phasensprungverfahren 105, 126
- Polares Format 38
- PSK 126
- Pulsamplitudenmodulation 90

- Q-Funktion Quadraturphasenumtastung 142

- Rauschen 53
- Rauschimmunität 23
- Rauschleistungsdichte 62
- Rayleigh-Verteilung 124
- RC-Puls 80
- \sqrt{RC} -Puls 86

- Rice-Verteilung 124

- Shannon 10, 12
- Schwunderscheinung 125
- Spektrale Effizienz 141

- Unipolares Format 41
- Übertragungsrate 23

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion 34, 54

Weißes Rauschen 62

Wind & Wellen 32

Wiener 11

Zeitmultiplex 95

A job advertisement for Mahle's Electromobility team. The ad features a dark blue background with white and light blue text. It reads:

NOW HIRING
A TOP NOTCH LIGHTNING BLASTING
LITHIUM WIELDING
INNOVATOR
AND SHOCKINGLY
MIND BLOWING MASTER OF
**ELECTRO
MOBILITY**

ALSO KNOWN AS
ELECTRICAL ENGINEER
jobs.mahle.com/emobility

The Mahle logo is in the bottom right corner.