Contents

Preliminar.

Alfabeto. Alfabeto ∑

Un alfabeto sigma es un *Conjunto finito NO Vacio* y sus elementos serán llamados **letras**.

Ejemplo: $\sum_1$ = {Luis, Maria, Jaime} //hay 3 letras

$\sum_2$ = {a, b} //hay 2 letras

$\sum_3$ = {+, -, *} //hay 3 letras

Palabra.

Sea ∑ un alfabeto. Una palabra sobre ∑ es una sucesión finita de símbolos de ∑.

Es decir w = $S_1, S_2, \ldots, S_n$; $S_i \in \sum$ // w = palabra

Ejemplo: ∑ = {0, 1}

Solucion: w_1 = 01 //longitud = 2 w_4 = 111101 //longitud = 6

W_2 = 10 //longitud = 2 w_5 = 0 //longitud = 1

W_3 = 00000 //longitud = 5 w_6 = 1 //longitud = 1

Ejemplo: ∑ = {0, 10}

Solucion: w_1 = 0 10 //longitud = 2 w_2 = 10 10 0 //longitud = 3

Palabra Vacia.

Sea ∑ un alfabeto. La palabra vacia es la sucesión vacia de símbolos de ∑ y se denota por: λ

Longitud de la Palabra.

Sea ∑ un alfabeto y sea w ∈ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$; $\sigma_i \in \sum$, se dice es la longitud de la palabra w y se denota por: |w| = n

Ejemplo: ∑ = {a, b} w = bbbba

Solución: |w| = 5 | λ | = 0

Ejemplo: ∑ = {Joquin, Saturnino, Fabiola} w = Joquin Saturnino Fabiola

Solución: |w| = 3

NOTACIONES.

Vamos a denotar como ∑ *. Es el conjunto de todas las palabras sobre ∑, excepto la palabra vacia.

∑* El conjunto de todas las palabras sobre ∑ de longitud K.

$\sum^*$	$\sum^* = \sum^+ \cup \{\lambda\}$
$\sum^+$	$\sum^+ = \sum^* - \{\lambda\}$
$\sum^K$	$\sum^K = \{w \in \sum^* / \|w\| = K\}$

$\sum^2 = \{w \in \sum^* / |w| = 2\}$

$\sum^2 = \{w \in \sum^* / |w| = 1\}$

$\sum^0 = \{w \in \sum^* / |w| = 0\}$

$\sum^0 = \{\lambda\}$

$\sum^3 = \{w \in \sum^* / |w| = 3\}$

Ejemplo: ∑ = {a, b}

Solucion: $\sum^*$ = {λ, a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, bbb, …}

$\sum^2$ = {aa, bb, ab, ba} //$2^2 = 4$

$\sum^1$ = {a, b} //$2^1 = 2$

$\sum^3$ = {aaa, bbb, abb, aab, aba, baa, bab, bba} //$2^3 = 8$

Concatenacion.

Sea ∑ un alfabeto y sea u = $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ y v = $\zeta_1, \zeta_2, .., \zeta_n$; $\sigma_i, \zeta_i \in \sum$

Se define la concatenación de u y v por: uv = $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ $\zeta_1, \zeta_2, .., \zeta_n$; σ_i, ζ_i

Ejemplo: ∑ = {a, b} u = bba v = ab

Solución: uv = bba ab son distiintos uv <> vu |u| = 3 |v|=2

vu = ab bba |uv| = 5

- uv ≠ vu
- (uv)w = u(vw)
- uλ = u = λu
- |uv| = |u|+|v|

Denotamos por: Al numero de ocurrencias de a el w.

$|w|_\sigma$ = al numero de ocurrencias de σ en la palabra w

Ejemplo: ∑ = {a, b} u = bba

Solucion: $|u|_a$ = 1 $|u|_b$ = 2

Ejercicio: $\sum = \{a, b\}$

1) $A_3 = \{w \in \sum^* \ / \ |w|=3 \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$
2) $A_4 = \{w \in \sum^* \ / \ |w|=4 \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$
3) $A_5 = \{w \in \sum^* \ / \ |w|=5 \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$
4) $A_n = \{w \in \sum^* \ / \ |w|=n \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$

Se pide:

a) Escribir a cada conjunto A3, A4, A5, An por extensión
b) $|A_i| = ?$ para i=3,4,5,n

Solucion:

a)

1) A_3 = {aaa, bbb, **aab, aba**, abb, **baa**, bba, bab, }.
   A_3 = { aab, aba, baa} //3 palabras
2) A_4 = {aaaa, bbbb, aaab, abba, abbb, abab, baaa, bbaa, baba, … }.
   A_4 = {aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa}. //6 palabras
3) A_5 = {aaaaa, bbbbb, …}
   A_5 = {aabbb, ababb, abbab, abbba, baabb, babab, babba, bbaab, bbaba, bbbaa}. //10 palabras
4) $A_n = \{b^i a b^{j-i-1} a b^{n-j} : 1 \leq i < j \leq n\}$

b)

$$|Ai| = \binom{i}{2} \ (i \geq 2)$$

$|A_3|=3$, $|A_4|=6$, $|A_5|=10$, $|A_n|=\binom{n}{2}$

Principio de Induccion para $\sum^*$

Sea L un conjunto de palabras sobre $\sum$ con las propiedades:

I. $\lambda \in L$
II. $\lambda \in L \quad \wedge \quad a \in \sum \Rightarrow wa \in L$

Entonces $L = \sum^*$ (es decir todas las palabras de $\sum^*$ están en L).

I. $1 \in P$
II. $K \in P \Rightarrow k+1 \in P$

La definición de longitud no nos sirve para la demostración.

Definicion de Recurrencia

$|\ | : \sum^* \rightarrow N$ // los naturales comienzan desde el 0, ya que $|\lambda|=0$

a) $|\lambda|=0$
b) $|wa|=|w|+1$
c) $|uwa| = |u|+|wa|$

Ejemplo: $\sum = \{a, b\}$ w = bbabb

<u>Solución</u>: |w| = 5

Demostrando:

|w| = |bbabb|	def. de recurrencia
= |bbab|+1	def. de recurrencia
= |bba|+1+1	def. de recurrencia
= |bb|+1+1+1	def. de recurrencia
= |b|+1+1+1+1	operando
= |b|+4	def. de concatenacion
= | λb |+4	def. de recurrencia
= | λ |+1+4	def. de |λ|=0
= 0+1+4	operando
= 5	

Demostrar: $|uv|=|u|+|v|$; $\forall u,v \in \sum^*$
$\sum = \{a, b\}$; u = abba; v = baab

<u>Solucion</u>:

|uv| =	|uv| =
= |abba baab|	= | abba |+| baab |
= 8	= 4 + 4
	= 8

iguales

Por tanto, para demostrar correctamente usamos el principio de inducción

PRUEBA: $|uv| = |u|+|v|$; $\forall u,v \in \sum^*$

- Primero definimos L:
- Tomamos la variable v para mas facilidad:

  $L = \{v \in \sum^* \ / \ |uv|=|u|+|v|\}$

  /* comentario
  Sea $V = \{x \ / \ x \text{ es vocal}\}$
  x es vocal $\Rightarrow x \in V$
  si $z \in V \Rightarrow z$ es vocal
  */

(i) ¿ $\lambda \in L$?

$|u\lambda| = |u| = |u|+0 = |u|+|\lambda|$

$|u\lambda| = |u|+|\lambda|$

$\therefore \lambda \in L$

Por demostrar: $w \in L \ \wedge \ a \in \sum \ \Rightarrow \ wa \in L$

Sea $w \in L \ \wedge \ a \in \sum$

$|uw| = |u|+|w| \wedge a \in \sum$ (H.I) Hipotesis Inductiva

Por demostrar: $wa \in L$

Por demostrar: $|u(wa)|=|u|+|wa|$

$\lvert u(wa)\rvert$	Asociativa
$= \lvert (uw)a\rvert$	HI
$= \lvert (uw)\rvert+1$	Def de concatenacion
$= (\lvert u\rvert+\lvert w\rvert) +1$	Asociativa, ya que u,w son números
$= \lvert u\rvert+(\lvert w\rvert+1)$	Def de recurrencia
$= \lvert u(wa)\rvert$	Def de concatenacion
$= \lvert u\rvert+\lvert wa\rvert$	

$\therefore wa \in L$

Por demostración Condicional: $w \in L \ \wedge \ a \in \sum \ \Rightarrow \ wa \in L$

ENTONCES: $L = \sum^*$

INVERSA

Sea $u = a_1, a_2, \ldots, a_n \in \sum^*$ a la palabra u prima (u')

$u' = a_n, a_{n-1}, .., a_2, a_1$ se llama inversa o transpuesta de u, (es decir a la escrita de orden inverso).

Ejemplo: $\sum = \{a, b\}$ u=bba

Solución: u' = abb

Definion de recurrencia. ': $\sum^* \rightarrow \sum^*$

a) **$\lambda' = \lambda$**
b) **(wa)'=aw'**

Ejemplo: u =bba u'=?

Solucion:	u' = (bba)'	Def de inversa
	= abb'	Def de concatenacion
	= ab(λb)'	Def de inversa
	= abbλ'	Def de recurrencia **λ' =λ**
	= abb	

Ejercicio: Demostrar $|w'| = |w|$; $\forall w \in \sum^*$

Solucion:

Llamamos $L = \{w \in \sum^* \ / \ |w'|=w\}$

(i) Por definición $(\lambda)' = \lambda$ luego $|\lambda'|=|\lambda| \Rightarrow \lambda \in L$

(ii) Sea $u \in L \ \wedge a \in \sum$

Por definición $(ua)' = au'$, luego

$\lvert (ua)'\rvert$	def de inversa
$=\lvert au'\rvert$	def de concatenacion
$=\lvert a\rvert+\lvert u'\rvert$	

Aplicamos hipótesis de inducción, $w \in L$, tenemos $|u'| = |u|$

Entonces: $\lvert (ua)'\rvert$	def de inversa
$= \lvert au'\rvert$	def de concatenación
$= \lvert a\rvert+\lvert u'\rvert$	H.I. u'=u
$= \lvert a\rvert+\lvert u\rvert$	conmutativa
$= \lvert u\rvert+\lvert a\rvert$	

Sucesivamente por propiedad de longitud $|ua|=|u|+|a|$

Luego $|(ua)'|$

$= |u|+|a|$

$= |ua|$ osea $ua \in L$

$\therefore L \in \sum^*$