Variable Aleatoria Connua
Función de densidad

Ejercicio 1)

Sea X una v.a. continua cuya función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0.1x & ,0 < x < \sqrt{20} \\ 0 & ,en\ \mathrm{el\ resto} \end{cases}$$

Se pide:

a) Obtener la probabilidad de que X tome valores entre 1 y 3.

Solución:

a) $P(1 \leq x \leq 3) = \int_1^3 0.1x\,dx$ ------ $\int ax\,dx = a\int x\,dx$

$= 0.1\int_1^3 x\,dx$ ----- $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$= 0.1\left[\frac{x^2}{2}\Big|_1^3\right]$ ---- $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$= 0.1\left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) = 0.1\left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)$

$= 0.1\left(\frac{9-1}{2}\right) = 0.1\left(\frac{8}{\cancel{2}}\right) = 0.1(4)$

$$\boxed{P(1 \leq X \leq 3) = 0.4}$$

b) Obtener la función de distribución $F(x)$

b) $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ - - - - - - - $f(t) = f(x) = 0.1x$

$= \int_{0}^{x} 0.1t\,dt$ - - - - - - - - $\int_{a}^{b} ax\,dx = a\int_{a}^{b} x\,dx$

$= 0.1\int_{0}^{x} t\,dt$ - - - - - - $\int x^{n}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$= 0.1 \left[\frac{t^2}{2} \right|_{0}^{x}$ - - - - - reomplazando $x, 0$

$= 0.1 \left(\frac{x^2}{2} - \cancel{\frac{0^2}{2}} \right)$

$$\boxed{F(x) = 0.5x^2}$$

Ejercicio 2)

Un gran almacén guarda cajas que contienen piezas de distinto tipo. La proporción X de piezas de tipo A en una caja se puede considerar una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = kx(1-x) \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1$$

a) Calcular el valor de k.

Solución:

a) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} kx(1-x) = 1$ — — — - - - $0 \leq x \leq 1$

$= \cancel{\int_{-\infty}^{0} kx(1-x)dx}^{\,\emptyset} + \int_{0}^{1} kx(1-x)\,dx + \cancel{\int_{1}^{0} kx(1-x)\,dx}^{\,0} = 1$

$= \int_{0}^{1} kx(1-x)\,dx = 1 \Rightarrow \int_{0}^{1} (kx - kx^2)\,dx = 1$

$= \int_{0}^{1} kx\,dx - \int_{0}^{1} kx^2\,dx = 1 \Rightarrow k\int_{0}^{1} x\,dx - k\int_{0}^{1} x^2\,dx = 1$

$= k\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right] - k\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right] = 1 \Rightarrow k\left(\frac{1^2}{2} - \cancel{\frac{0^2}{2}}\right) - k\left(\frac{1^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}}\right) = 1$

$= k\left(\frac{1}{2}\right) - k\left(\frac{1}{3}\right) = 1 \Rightarrow \frac{3k - 2k}{6} = 1 \Rightarrow \frac{1k}{6} = 1$

$\boxed{k = 6}$ //

b) Calcular la media y varianza de X.

b) $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx$

$= \int_{0}^{1} x\left[kx(1-x)\right]dx = \int_{0}^{1} x\left[6x(1-x)\right]dx = \int_{0}^{1} x\left[6x - 6x^2\right]dx$

$= \int_{0}^{1} 6x^2 - 6x^3 = \int_{0}^{1} 6x^2\,dx - \int_{0}^{1} 6x^3\,dy = 6\int_{0}^{1} x^2\,dx - 6\int x^3\,dx$

$= 6\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right] - 6\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right] = \overset{2}{\cancel{6}}\left(\frac{1^3}{\underset{1}{\cancel{3}}} - \cancel{\frac{0^3}{3}}\right) - \overset{3}{\cancel{6}}\left(\frac{1^4}{\underset{2}{\cancel{4}}} - \cancel{\frac{0^4}{4}}\right)$

$= 2 - \frac{3}{2} = \frac{4-3}{2} = \frac{1}{2} = 0.5$

$\boxed{E(x) = 0.5}$ //

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 [kx(1-x)]\,dx = \int_0^1 x^2 [6x(1-x)]$$

$$= \int_0^1 x^2 [6x - 6x^2]\,dx = \int_0^1 (6x^3 - 6x^4)\,dx$$

$$= \int_0^1 6x^3 dx - \int_0^1 6x^4 dx = 6\int_0^1 x^3 dx - 6\int_0^1 x^4 dx$$

$$= 6\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right] - 6\left[\frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right] = \overset{3}{\cancel{6}}\left[\frac{1^4}{\underset{2}{\cancel{4}}} - \cancel{\frac{0^4}{4}}\right] - 6\left[\frac{1^5}{5} - \cancel{\frac{0^5}{5}}\right]$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{6}{5} = \frac{15-12}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$$

$$\boxed{E(x^2) = 0.3} \; //$$

$$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$$

$$= 0.3 - (0.5)^2 = 0.3 - 0.25$$

$$\boxed{Var(x) = 0.05} \; //$$

Ejercicio 3)

La función de densidad asociada a la producción de una máquina, en miles de unidades, es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2-2x & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; en\ el\ resto \end{cases}$$

a) Calcula la media y varianza de la producción.

Solución:

a) $E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx$

$= \int_0^1 x\,(2-2x)\, dx = \int_0^1 (2x - 2x^2)\, dx = \int_0^1 2x\, dx - \int_0^1 2x^2\, dx$

$= 2\int_0^1 x\, dx - 2\int_0^1 x^2\, dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right] - 2\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right]$

$= \cancel{2}\left[\frac{1^2}{\cancel{2}} - \cancel{\frac{0^2}{2}}\right] - 2\left[\frac{1^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}}\right] = 1 - \frac{2}{3} = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3}$

$\boxed{E(x) = 0.33}$ //

$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2$

$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) = \int_0^1 x^2 (2-2x)\, dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x^3)\, dx$

$= \int_0^1 2x^2\, dx - \int_0^1 2x^3\, dx = 2\int_0^1 x^2\, dx - 2\int_0^1 x^3\, dx$

$= 2\left[\frac{x^3}{3}\Big|_0^1\right] - 2\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right] = 2\left[\frac{1^3}{3} - \cancel{\frac{0^3}{3}}\right] - \cancel{2}^{1}\left[\frac{1^4}{\cancel{4}_{2}} - \cancel{\frac{0^4}{4}}\right]$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6}$

$\boxed{E(x^2) = 0.17}$

$Var(x) = E(x^2) - [E(x)]^2 = 0.17 - (0.33)^2 = 0.17 - 0.11$

$\boxed{Var(x) = 0.06}$

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la producción sea inferior a 500 unidades? ¿Y la de que sea superior a 250 unidades?

Solución:

b) $100 = 100\%$, entonces $500 = 50\% = 0.50$

$$P(X < 0.5) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (2-2x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} (2-2x)\,dx} + \int_{0}^{0.5} (2-2x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{0.5} (2-2x)\,dx = \int_{0}^{0.5} 2\,dx - \int_{0}^{0.5} 2x\,dx = 2\int_{0}^{0.5} dx - 2\int_{0}^{0.5} x\,dx$$

$$= 2\left[x \Big|_{0}^{0.5} \right] - 2\left[\frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{0.5} \right] = 2(0.5 - \cancel{0}) - \cancel{2}\left(\frac{(0.5)^2}{\cancel{2}} - \cancel{\frac{0^2}{2}} \right)$$

$$= 1 - 0.25$$

$$\boxed{P(x < 0.5) = 0.75}$$

Como $\frac{250}{1000} = 0.25$, entonces

$$P(x > 250) = 1 - P(X \leq 0.25)$$

$$P(X \leq 0.25) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (2-2x)\,dx = \cancel{\int_{-\infty}^{0} (2-2x)\,dx} + \int_{0}^{0.25} (2-2x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{0.25} (2-2x)\,dx = \int_{0}^{0.25} 2\,dx - \int_{0}^{0.25} 2x\,dx = 2\int_{0}^{0.25} dx - 2\int_{0}^{0.25} x\,dx$$

$$= 2\left[x \Big|_{0}^{0.25} \right] - 2\left[\frac{x^2}{2} \Big|_{0}^{0.25} \right] = 2(0.25 - \cancel{0}) - \cancel{2}\left(\frac{(0.25)^2}{\cancel{2}} - \cancel{\frac{0^2}{2}} \right)$$

$$= 0.50 - 0.0625$$

$$P(x \leq 0.25) = 0.4375$$

$$P(x > 0.25) = 1 - P(x \leq 0.25) = 1 - 0.4375$$

$$\boxed{P(x > 0.25) = 0.5625}$$

c) Si el beneficio (en miles de euros) de la máquina viene dado, en función de la producción, por $B = 9X - 2$, calcule el valor esperado del beneficio.

Solución:

$E(B) = E(9x - 2)$ - - - - $E(x + a) = Ex + a$

$= E(9x) - 2$ - - - - - - $E(ax) = a\,E(x)$

$= 9E(x) - 2$ - - - - - Operando

$= 9(0.33) - 2$

$= 2.97 - 2$

$\boxed{E(B) = 0.97}$

Ejercicio 4)

La siguiente función de densidad, representa la atención a sus clientes de una tienda en línea que opera con 2 líneas telefónicas:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}(x^2 + y^2), & 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1 \\ \\ 0 & , en\ \ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

- X representa la proporción del día que la primera línea está en uso - Y representa la proporción del día que la segunda línea esté en uso.

¿Cuál es la proporción que se **espera** esté en uso la primera línea telefónica?

Solución:

Tomo x como variable constante

$$f(x) = \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2)\,dy = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}y^2\right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{3}{2}x^2\,dy + \int_0^1 \frac{3}{2}y^2\,dy = \frac{3}{2}x^2\int_0^1 dy + \frac{3}{2}\int_0^1 y^2\,dy$$

$$= \frac{3}{2}x^2\left[y\Big|_0^1\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{y^3}{3}\Big|_0^1\right] = \frac{3}{2}x^2\left(1-\cancel{0}\right) + \cancel{\frac{3}{2}}\left(\frac{1^3}{\cancel{3}} - \cancel{\frac{0^3}{3}}\right)$$

$$\boxed{f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}}\ //$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x\right) dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^3\,dx + \int \frac{1}{2}x\,dx$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^1 x^3\,dx + \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{3}{2}\left[\frac{x^4}{4}\Big|_0^1\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\Big|_0^1\right]$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{1^4}{4} - \cancel{\frac{0^3}{3}}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{2} - \cancel{\frac{0^2}{2}}\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3+2}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\boxed{E(x) = 0.625}\ //$$

Ejercicio 5)

Suponga que el porcentaje **X** de alumnos y **Y** de alumnas que han concluido un examen de MAT302 se puede describir mediante la función densidad de probabilidad conjunta

(20):

$$f(x, y) = \begin{cases} 8xy & \text{para } 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

a) Encuentre el porcentaje de alumnos que se espera concluyan el examen.

Solución

a) Asumiremos $8x$ como constante, tomando el intervalo $0<y<x$.

$$f(x) = \int_0^x 8xy\,dy = 8x\int_0^x y\,dy = 8x\left[\frac{y^2}{2}\Big|_0^x\right] = \overset{4}{\cancel{8}}x\left(\frac{x^2}{\cancel{2}} - \cancel{\frac{0^2}{2}}\right)$$

$$\boxed{f(x) = 4x^3}$$

b) Calcule la varianza de X

b) Tomo el intervalo $0<x<1$

$$E(x) = \int_0^1 x(4x^3)\,dx = \int_0^1 4x^4\,dx = 4\int_0^1 x^4\,dx = 4\left[\frac{x^5}{5}\Big|_0^1\right]$$

$$= 4\left(\frac{1^5}{5} - \cancel{\frac{0^5}{5}}\right) = \frac{4}{5}$$

$$\boxed{E(x) = 0.8}$$

$$Var(x) = E(x^2) - \left[E(x)\right]^2$$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2(4x^3)\,dx = \int_0^1 4x^5\,dx = 4\int_0^1 x^5\,dx = 4\left[\frac{x^6}{6}\Big|_0^1\right]$$

$$= \overset{2}{\cancel{4}}\left(\frac{1^6}{\underset{3}{\cancel{6}}} - \cancel{\frac{0^6}{6}}\right) = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{E(x^2) = 0.67}$$

$$Var(x) = 0.67 - (0.8)^2 = 0.67 - 0.64$$

$$\boxed{Var(x) = 0.03}$$

RESUMEN TEÓRICO Y FÓRMULAS:

Una variable aleatoria X es una función real, que asocia un valor numérico a cada evento del espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio.

Variables Aleatorias Discretas:
Si XX es una v.a. discreta con recorrido $\{xx_1, xx_2, \ldots, xx_{kk}\}$, su distribución de probabilidad puede escribirse como:

$ff(xx_{ii}) = PP(XX = xx_{ii}) = pp_{ii}$ para $ii = 1, 2, \ldots, kk$

La función de probabilidad (o función de cuana o de masa de probabilidad) proporciona la candad de probabilidad que corresponde a cada valor de la v.a. discreta XX. Las dos propiedades que debe cumplir una función real de variable real para ser función de probabilidad son:

(1) $f(x_i) \geq 0$ para $ii = 1,2, \ldots, kk$
(2) $\sum^{k}{}_{i=1} f(x_i) = 1$

La primera condición establece simplemente que las probabilidades no pueden ser negavas. La segunda condición nos dice que la suma de toda la masa de probabilidad debe ser igual a la unidad.

Una función de probabilidad puede expresarse de tres maneras disntas: una tabla en la que se recoja valor vs probabilidad, una expresión matemáca de la función $ff(xx)$, o una gráfica llamada Diagrama de Barras.

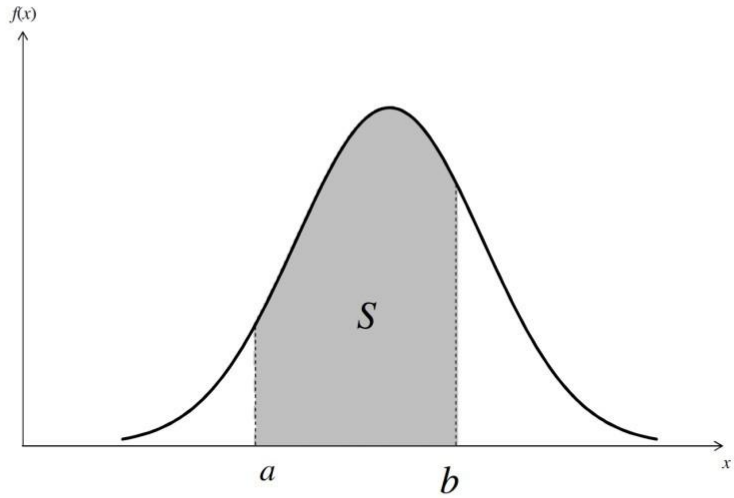
Variables Aleatorias Connuas:
En el caso de una v.a. connua, la distribución de probabilidad no puede darse para valores puntuales ya que ésta toma un número infinito no numerable de valores para un subconjunto de la recta real.

Los valores hay que agruparlos en intervalos *exhaustivos y mutuamente excluyentes*. A cada intervalo se le asignará una probabilidad y su representación gráfica será un **Histograma**. El área de cada rectángulo que ene por base un intervalo concreto será la probabilidad de que la variable tome valores en ese intervalo. Si hacemos una línea connua sobre el perfil de ese histograma, a esa línea (bajo la cual se encierra toda la masa de probabilidad), se le llama **función de densidad** de una v.a. connua. La función de densidad no proporciona directamente probabilidades, sino densidades de probabilidad, y el área bajo esa función es igual a la unidad. Propiedades:

(1) $f(x) \geq 0$ $, -\infty < xx < +\infty$ *(implica que la densidad de probabilidad es positiva)*
(2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ *(implica que el área bajo la curva y por encima del eje de abscisas es igual a la unidad)*

Obtención a parr de la $ff(xx)$ de la probabilidad de que XX tome valores dentro de un determinado intervalo $[aa, bb]$:

$$PP(a \leq X \leq b) = \int_{aa}^{bb} f(x) ddxx = SS$$



<u>IMPORTANTE:</u> La probabilidad de que una v.a. connua tome un valor concreto es siempre cero:

$$PP(XX = xx_i) = \int_{xx_{ii}}^{xx_{ii}} f(x) ddxx = 0$$

Por tanto, para este po de variables, se cumplen las siguientes igualdades:

$$PP(XX < aa) = P(X \leq a)$$

$$PP(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(aa < XX \leq b) = P(aa < XX < b) = \int_{aa}^{bb} f(x) ddxx$$

Función de Distribución:

Para una v.a. XX (discreta o connua) la función de distribución, $FF(XX)$ es la función que da la probabilidad acumulada hasta el punto xx:

$$FF(x) = P(X \leq x)$$

<u>Propiedades:</u>

a) $F(-\infty) = 0$
b) $F(+\infty) = 1$
c) Es una función monótona no decreciente.
d) $PP(aa < XX \leq b) = F(bb) - FF(aa)$

- **Si XX es una v.a. discreta:**

$$FF(x) = P(X \leq x) = \sum_{xx_{ii} \leq x} f(x_i)$$

- **Si XX es una v.a. connua:**

$$(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{xx} FFf(t)ddrr$$

[En el integrando se utiliza t en lugar de x para que no haya confusión con el límite superior de integración.]

Cuando lo que se quiere es calcular la probabilidad de que una variable tome valores dentro de un intervalo, entonces haremos uso de integrales definidas ya que:

$$PP(a \leq X \leq b) = \int_{aa}^{bb} f(x)ddxx = FF(bb) - FF(aa)$$

La función de densidad de una v.a. connua se puede hallar derivando la función de distribución:

$$ff(xx) = \frac{ddFF(xx)}{ddxx}$$

Propiedades y caracteríscas de Variables Aleatorias:

1. Cualquier función de una v.a. es otra v.a. que “hereda” las propiedades probabilíscas de la variable original.
2. Esperanza Matemáca o Valor Esperado:
   - Discreta:

   $$EE(X) = \sum_{xx} xf(x) = \mu\mu$$

   - Connua:

   $$EE(X) = \int_{xx} xf(x)ddxx = \mu\mu$$

   - Propiedades del Valor Esperado:
     - Si aa es una constante: $EE(a) = aa$ ○ $EE(aa + XX) = aa + EE(XX)$ ○ $EE(bX) = bbEE(X)$ ○ $EE(aa + bbXX) = aa + bbEE(XX)$ ○ Si $aa \leq X \leq b$, entonces $aa \leq E(X) \leq b$ ○ Si XX e YY son dos v.a.: $EE(XX + YY) = E(X) + E(Y)$
3. Varianza, desviación pica y coeficiente de variación:
   - Fórmula en base al valor esperado:
     $VVaarr(XX) = EE[(XX - \mu\mu)^2] = \sigma\sigma^2$, donde $\mu\mu = EE(XX)$.

- Propiedades de la varianza:
  - Si aa es una constante: $VVaarr(aa) = 0$ ○ $VVaarr(aa + XX) =$ $VVaarr(XX)$ ○ $VVaarr(bbXX) = bb^2VVaarr(XX)$ ○ $VVaarr(aa + bbXX)$ $= bb^2VVaarr(XX)$ ○ $VVaarr(-XX) = VVaarr(XX)$

- Desviación pica: ○ $\sigma\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$

- Coeficiente de variación:
  - $CCVV = \frac{\sigma\sigma}{|\mu\mu|}$

4. Tipificación de una variable aleatoria:

   Sea XX una v.a. cualquiera con esperanza igual a $\mu\mu_{XX}$ y varianza igual a $\sigma\sigma_{XX}{}^2$, diremos que ZZ es la variable pificada de XX si es igual a:

$$ZZ = \frac{XX - \mu\mu_{XX}}{\sigma\sigma_{XX}}$$

   Propiedades de ZZ: a) $EE(ZZ) = 0$

   b) $VVaarr(XX) = 1$