Contents

Preliminar.

Alfabeto. Alfabeto ∑

Un alfabeto sigma es un *Conjunto finito NO Vacio* y sus elementos serán llamados **letras**.

Ejemplo: $\sum_1$ = {Luis, Maria, Jaime} //hay 3 letras

$\sum_2$ = {a, b} //hay 2 letras

$\sum_3$ = {+, -, *} //hay 3 letras

Palabra.

Sea ∑ un alfabeto. Una palabra sobre ∑ es una sucesión finita de símbolos de ∑.
Es decir w = $S_1, S_2, \ldots, S_n$; $S_i \in \sum$ // w = palabra

Ejemplo: ∑ = {0, 1}

Solucion: w_1 = 01 //longitud = 2 w_4 = 111101 //longitud = 6

W_2 = 10 //longitud = 2 w_5 = 0 //longitud = 1

W_3 = 00000 //longitud = 5 w_6 = 1 //longitud = 1

Ejemplo: ∑ = {0, 10}

Solucion: w_1 = 0 10 //longitud = 2 w_2 = 10 10 0 //longitud = 3

Palabra Vacia.

Sea ∑ un alfabeto. La palabra vacia es la sucesión vacia de símbolos de ∑ y se denota por: λ

Longitud de la Palabra.

Sea ∑ un alfabeto y sea w ∈ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$; $\sigma_i \in \sum$, se dice es la longitud de la palabra w y se denota por: |w| = n

Ejemplo: ∑ = {a, b} w = bbbba
Solución: |w| = 5 | λ | = 0

Ejemplo: ∑ = {Joquin, Saturnino, Fabiola} w = Joquin Saturnino Fabiola
Solución: |w| = 3

NOTACIONES.

Vamos a denotar como ∑ *. Es el conjunto de todas las palabras sobre ∑, excepto la palabra vacia.
∑* El conjunto de todas las palabras sobre ∑ de longitud K.

$\sum^*$	$\sum^* = \sum^+ U \{\lambda\}$
$\sum^+$	$\sum^+ = \sum^* - \{\lambda\}$
$\sum^K$	$\sum^K = \{w \in \sum^* / \|w\| = K\}$

$\sum^2 = \{w \in \sum^* / |w| = 2\}$
$\sum^2 = \{w \in \sum^* / |w| = 1\}$
$\sum^0 = \{w \in \sum^* / |w| = 0\}$
$\sum^0 = \{\lambda\}$
$\sum^3 = \{w \in \sum^* / |w| = 3\}$

Ejemplo: ∑ = {a, b}
Solucion: $\sum^*$ = {λ, a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, bbb, …}
$\sum^2$ = {aa, bb, ab, ba} $//2^2 = 4$
$\sum^1$ = {a, b} $//2^1 = 2$
$\sum^3$ = {aaa, bbb, abb, aab, aba, baa, bab, bba} $//2^3 = 8$

Concatenacion.

Sea ∑ un alfabeto y sea u = $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ y v = $\zeta_1, \zeta_2, .., \zeta_n$; $\sigma_i, \zeta_i \in \sum$
Se define la concatenación de u y v por: uv = $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ $\zeta_1, \zeta_2, .., \zeta_n$; σ_i, ζ_i

Ejemplo: ∑ = {a, b} u = bba v = ab

Solución: uv = bba ab son distiintos uv <> vu |u| = 3 |v|=2
vu = ab bba |uv| = 5

- uv ≠ vu
- (uv)w = u(vw)
- uλ = u = λu
- |uv| = |u|+|v|

Denotamos por: Al numero de ocurrencias de a el w.
$|w|_\sigma$ = al numero de ocurrencias de σ en la palabra w

Ejemplo: ∑ = {a, b} u = bba

Solucion: $|u|_a$ = 1 $|u|_b$ = 2

Ejercicio: $\sum = \{a, b\}$

1) $A_3 = \{w \in \sum^* \,/\, |w|=3 \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$
2) $A_4 = \{w \in \sum^* \,/\, |w|=4 \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$
3) $A_5 = \{w \in \sum^* \,/\, |w|=5 \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$
4) $A_n = \{w \in \sum^* \,/\, |w|=n \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$

Se pide:

a) Escribir a cada conjunto A3, A4, A5, An por extensión
b) $|A_i| = ?$ para i=3,4,5,n

Solucion:

a)

1) A_3 = {aaa, bbb, **aab, aba**, abb, **baa**, bba, bab, }.
   A_3 = { aab, aba, baa} //3 palabras
2) A_4 = {aaaa, bbbb, aaab, abba, abbb, abab, baaa, bbaa, baba, … }.
   A_4 = {aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa}. //6 palabras
3) A_5 = {aaaaa, bbbbb, …}
   A_5 = {aabbb, ababb, abbab, abbba, baabb, babab, babba, bbaab, bbaba, bbbaa}. //10 palabras
4) $A_n = \{b^i a b^{j-i-1} a b^{n-j} : 1 \le i < j \le n\}$

b)

$$|Ai| = \binom{i}{2} \ (i \geq 2)$$

$|A_3|=3$, $|A_4|=6$, $|A_5|=10$, $|A_n|=\binom{n}{2}$

Principio de Induccion para $\sum^*$

Sea L un conjunto de palabras sobre $\sum$ con las propiedades:

I. $\lambda \in L$
II. $\lambda \in L \quad \wedge \quad a \in \sum \Rightarrow wa \in L$

Entonces $L = \sum^*$ (es decir todas las palabras de $\sum^*$ están en L).

I. $1 \in P$
II. $K \in P \Rightarrow k+1 \in P$

La definición de longitud no nos sirve para la demostración.

Definicion de Recurrencia

$| \ | : \sum^* \to N$ // los naturales comienzan desde el 0, ya que $|\lambda|=0$

a) $|\lambda|=0$
b) $|wa|=|w|+1$
c) $|uwa| = |u|+|wa|$

Ejemplo: $\sum = \{a, b\}$ w = bbabb

<u>Solución</u>: |w| = 5

Demostrando: |w| = |bbabb| def. de recurrencia
= |bbab|+1 def. de recurrencia
= |bba|+1+1 def. de recurrencia
= |bb|+1+1+1 def. de recurrencia
= |b|+1+1+1+1 operando
= |b|+4 def. de concatenacion
= | λb |+4 def. de recurrencia
= | λ |+1+4 def. de |λ|=0
= 0+1+4 operando
= 5

Demostrar: $|uv|=|u|+|v|$; $\forall u,v \in \sum^*$
$\sum = \{a, b\}$; u = abba; v = baab

<u>Solucion</u>: |uv| = |uv| =
= |abba baab| = | abba |+| baab |
= 8 = 4 + 4
= 8

iguales

Por tanto, para demostrar correctamente usamos el principio de inducción

PRUEBA: $|uv| = |u|+|v|; \quad \forall u,v \in \Sigma^*$

- Primero definimos L:
- Tomamos la variable v para mas facilidad:

  $L = \{v \in \Sigma^* \ / \ |uv|=|u|+|v|\}$

  /* comentario

  Sea $V = \{x \ / \ x \text{ es vocal}\}$

  x es vocal $\Rightarrow x \in V$

  si $z \in V \Rightarrow$ z es vocal

  */

(i) ¿ $\lambda \in L$?

$\underbrace{|u\lambda|}_{} = |u| = |u|+0 = \underbrace{|u|+|\lambda|}_{}$

$|u\lambda| = |u|+|\lambda|$

$\therefore \lambda \in L$

Por demostrar: $w \in L \ \wedge \ a \in \Sigma \ \Rightarrow \ wa \in L$

Sea $w \in L \ \wedge \ a \in \Sigma$

$|uw| = |u|+|w| \wedge a \in \Sigma$ (H.I) Hipotesis Inductiva

Por demostrar: $wa \in L$

Por demostrar: $|u(wa)|=|u|+|wa|$

$\|u(wa)\|$	Asociativa
$= \|(uw)a\|$	HI
$= \|(uw)\|+1$	Def de concatenacion
$= (\|u\|+\|w\|) +1$	Asociativa, ya que u,w son números
$= \|u\|+(\|w\|+1)$	Def de recurrencia
$= \|u(wa)\|$	Def de concatenacion
$= \|u\|+\|wa\|$	

$\therefore wa \in L$

Por demostración Condicional: $w \in L \ \wedge \ a \in \Sigma \ \Rightarrow \ wa \in L$

ENTONCES: $L = \Sigma^*$

INVERSA

Sea $u = a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma^*$ a la palabra u prima (u')

$u' = a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1$ se llama inversa o transpuesta de u, (es decir a la escrita de orden inverso).

Ejemplo: $\Sigma = \{a, b\}$ u=bba

Solución: u' = abb

Definion de recurrencia. $': \Sigma^* \to \Sigma^*$

a) **$\lambda' = \lambda$**
b) **(wa)'=aw'**

Ejemplo: u =bba u'=?

Solucion:	u' = (bba)'	Def de inversa
	= abb'	Def de concatenacion
	= ab(λb)'	Def de inversa
	= abbλ'	Def de recurrencia **λ' =λ**
	= abb	

Ejercicio: Demostrar $|w'| = |w|; \quad \forall w \in \Sigma^*$

Solucion:

Llamamos $L = \{w \in \Sigma^* \ / \ |w'|=w\}$

(i) Por definición $(\lambda)' = \lambda$ luego $|\lambda'|=|\lambda| \Rightarrow \lambda \in L$

(ii) Sea $u \in L \ \wedge a \in \Sigma$

Por definición (ua)' = au' , luego

$\|(ua)'\|$	def de inversa
$=\|au'\|$	def de concatenacion
$=\|a\|+\|u'\|$	

Aplicamos hipótesis de inducción, $w \in L$, tenemos $|u'| = |u|$

Entonces: $|(ua)'|$ def de inversa

$= \|au'\|$	def de concatenación
$= \|a\|+\|u'\|$	H.I. u'=u
$= \|a\|+\|u\|$	conmutativa
$= \|u\|+\|a\|$	

Sucesivamente por propiedad de longitud $|ua|=|u|+|a|$

Luego $|(ua)'|$

$= |u|+|a|$

$= |ua|$ osea $ua \in L$

$\therefore L \in \Sigma^*$

<u>**Si queremos verificar:**</u>

$|w'| = |w|; \quad \forall w \in \Sigma^*$

w=hola

$\|w'\|= \|hola\|$	
$=\|hol\|+1$	def recureencia
$=\|ho\|+1+1$	def recurencia
$=\|h\|+1+1+1$	def recurencia
$=\|\lambda h\|+4$	def h= λh
$=\|\lambda\|+1+4$	def recurencia
$=0+5$	def $\|\lambda\|=0$
$=5$	

Ejercicio: Demostrar: $|uv| = |u'|+|v'|$; $\forall w \in \sum^*$
$L=\{v \in \sum^* / |uv| = |u'|+|v'|\}$

Crecimiento por izquierda
$(u)' \in L$ ^ $a \in \sum \Rightarrow aw \in \sum$

Potencia de una palabra

$w^n = w^*w^*w\ldots w$
$w^1 = w$
$w^0 = \lambda$

Por recurrencia

$w^0 = \lambda$
$w^{n+1} = w^*w^n$

Ejemplo: $\sum=\{a, b\}$ w=ba
Solucion:
w^4 = ba ba ba ba
$w^4 = w\, w^3$
 $=$ ba w w^2
 $=$ ba ba w^2
 $=$ ba ba w w
 $=$ ba ba ba ba

Propiedades

a) $|w^n| = n|w|$
b) $w^n w^m = {}^{wn+m}$
c) $(w^n)^m = w^{n+m}$
d) $\lambda^n=\lambda$

Ejercicios: Demostraciones
Demostrar las propiedades desde a) hasta d) y buscar palabras u,v sobre $\sum=\{a, b\}$ tales que $u^2v^2 \neq (uv)^2$

PREFIJOS SUFIJOS Y SUBPALABRAS

Sean $v,z \in \sum^*$
1) Se dice que v es prefijo de z si y solo si existe $w \in \sum^*$ tal que z=vw y se escribe v pref z
2) Se dice que v es sufijo de z si y solo si existe $u \in \sum^*$ tal que z=uv y se escribe v suf z
3) Se dice que v es subpalabra de z si y solo si existe $u_1u_2 \in \sum^*$ tal que $z=u_1vu_2$ y se escribe v subp z

Ejemplo: $\sum = \{a, b\}$
Solucion:
z = babbab

v = bab	w = bab
v = b	w = abbab
v = λ	w = babbab
v = babbab	w= λ

Ejercicio
1) Cuantos prefijo, sufijo, subpalabras, tiene la palabra $z=a_1,a_2,\ldots,a_n \in \sum$
2) Demostrar:
 X pref y ^ y pref x $\Rightarrow$ x = y
 X pref y ^ y pref z $\Rightarrow$ x pref z

Solucion:
Demostracion Condicional: Sobre el antecendente, mostra el concecuente

LENGUAJES

Definicion matematica. Sea $\sum$ un alfabeto. Un lenguaje sobre $\sum$ es un subconjunto de $\sum^*$
Ejemplo:
$\emptyset$ //El vacio es subconjunto de $\sum^*$
$\sum^*$ //El $\sum^*$ es subconjunto de $\sum^*$

Ejemplo: $\sum = \{a, b\}$ $\sum^* = \{\lambda, a, b, aa, ba, ab, bb, \ldots\}$
Solucion:
$L_1 = \{ab\}$ $L_4 = \sum^+$

$L_2 = \{\lambda\}$ $L_5 = \{\lambda, a, aa, aaa, \ldots\}$

$L_3 = \{\lambda, a, aa, b\}$ $L_5 = \{w \in \sum^* / w = a^n, n \in N\}$

Ejemplo: $\sum = \{a, b\}$ $L = \{ w \in \sum^* / |w| = 5,\ |w|_a = 2\}$
Solucion:

OPERACIONES ENTRE LENGUAJES. Sean A,B, ∈ $\sum^*$

Union. $A \cup B = \{w \in \sum^* / w \in A \vee w \in B\}$
Interseccion. $A \cap B = \{w \in \sum^* / w \in A \wedge w \in B\}$
Diferencia. $A - B = \{w \in \sum^* / w \in A \wedge w \notin B\}$
Complemento. $A^C = \{w \in \sum^* / w \notin A\}$

Concatenacion. $AB = \{w \in \sum^* / w = xy,\ x \in A \wedge y \in B\}$
Transposicion. $A' = \{w' \in \sum^* / w \in A\}$
Estrella de kleene. $A^* = \{w \in \sum^* / w = w_1, w_2, \dots, w_k$, para algunas $w_{11}, w_{21}, \dots, w_k \in A$ para algún $k \in N\}$

Ejemplo:

1) Sea $\sum=\{a, b\}$ y sea **P={a, ab}; P={ λ, a, ba}**

a) PUQ	e) P'	i) P^C
b) P∩Q	f) Q'	j) Q^C
c) P-Q	g) PQ	
d) Q-P	h) P^2=PP	

Solucion:

a) {λ, a, ab, ba}	e) {a, ba}	h) {aa, aab, aba, abab}
b) {a}	f) {λ, a, ab}	i) $P^C = \sum^* - P = \sum^* - \{a, ab\}$
c) {ab}	g) {aλ, aa, ba, abλ, aba, abba} =	j) $Q^C = \sum^* - Q = \sum^* - \{λ, a, ba\}$
d) {λ, ba}	{a, aa, ba, ab, aba, abba}	

2) Sea L1, L2, L3 ⊆ $\sum^*$. Demostrar:
   a) $L_1 \Phi = \Phi L_1 = A$
   b) $L_1 \{\lambda\} = \{\lambda\} L_1 = L_1$
   c) $L_1 (L_2L_3) = (L_1L_2) L_3$
   d) $(L_1 U L_2) L_3 = L_1L_3 U L_2L_3$
   e) $L_1 (L_2 U L_3) = L_1L_2 U L_1L_3$

3) Sean P,Q,R ⊆ $\sum^*$. Demostrar
   a) (PUQ)' = P'UQ'
   b) (PQ)' = Q'P'
   c) $(PUQ)^2 = P^2UPQUQPUQ^2$

4) Dar ejemplo de lenguaje P,Q,R sobre $\sum = \{a,b\}$ tales que
   (P∩Q)R ≠ (PR) ∩ (QR)
   ¿Cuál de las inclusiones es valida?

Ejemplo: Sean A, B ⊆ $\sum^*$. Demostrar
A ⊆ AUB

Solucion:
PRUEBA.

- Por demostrar: w∈A ⇒ w∈(AUB)

Sea w∈A	Regla Premisa
= w∈A v w∈B	Adicion
= w∈AUB	Union
= w∈A ⇒ w∈(AUB)	Demostracion Condicional
= A⊆B	Inclusion

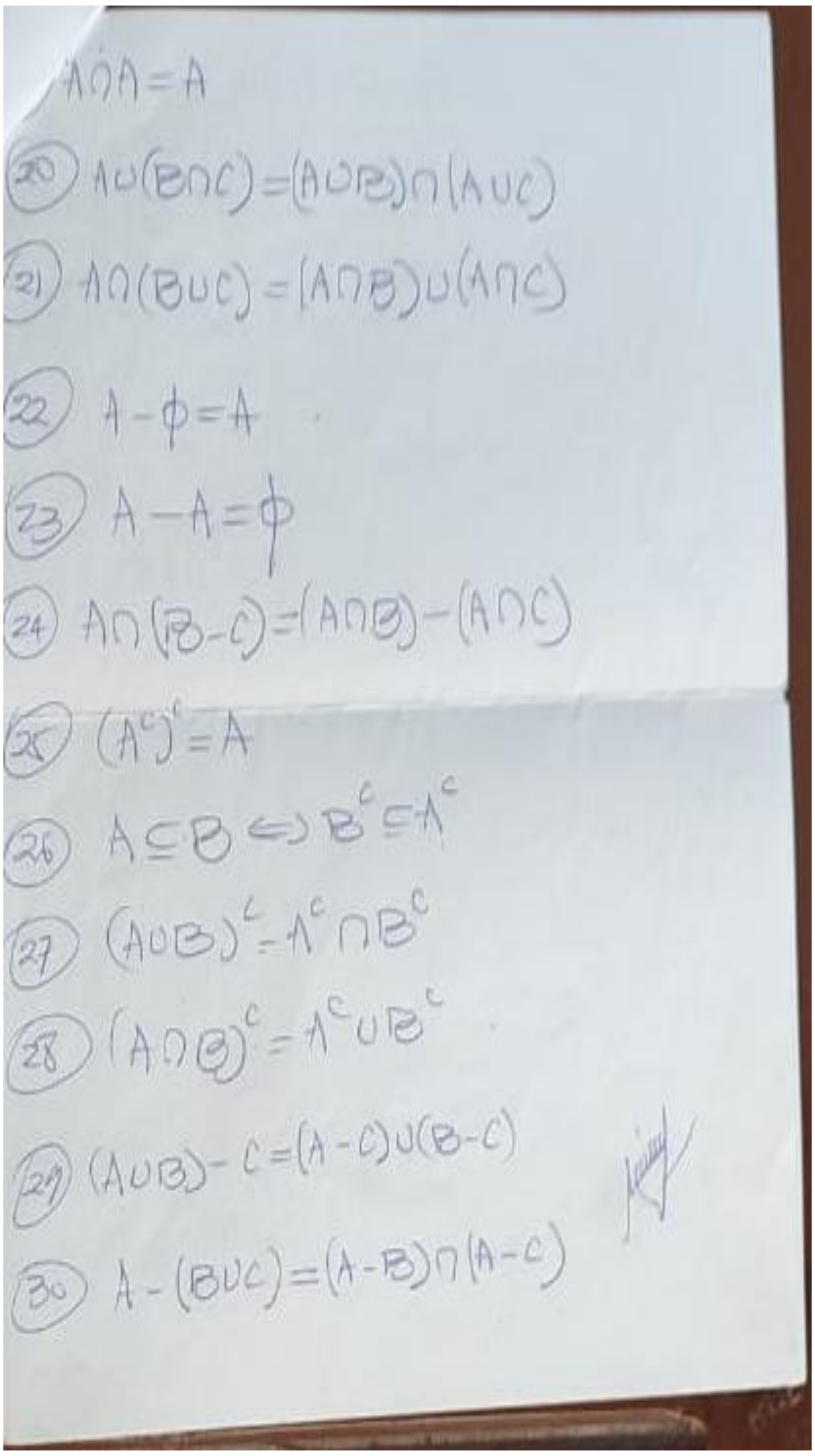
Ejemplo: Sean A, B ⊆ $\sum^*$. Demostrar
$(A-B)^C = A^CUB$
Solucion:
PRUEBA

- Por demostrar: $(A-B)^C = A^CUB$
- Por demostrar: $\underbrace{(A-B)^C \subseteq A^CUB}_{I)}$ ^ $\underbrace{A^CUB \subseteq (A-B)^C}_{II)}$
- Por demostrar: **I)** $w \in (A-B)^C \Rightarrow w \in A^CUB$

1) $w \in (A-B)^C$	Regla premisa	
2) $w \notin (A-B)^C$	Complemento	
3) ~[w∈ (A-B)]	Notacion	
4) ~[w∈A ^ w∉B]	Diferencia	
5) w∉A v w∈B	Morgan	
6) $w \in A^C$ v w∈B	Complemento	
7) $w \in A^CUB$	Union	
8) $w \in (A-B)^C \Leftrightarrow$	$w \in A^CUB$	Demostracion Condicional **1al 7**
9) $(A-B)^C \subseteq A^CUB$	Incucion	

- Por demostrar: **II)** $w \in A^C \cup B \Rightarrow w \in (A-B)^C$

1) $w \in A^C \cup B$ — Regla Premisa
2) $w \in A^C \vee w \in B$ — Union
3) $w \notin A \vee w \in B$ — Complemento
4) $\sim (w \in A \wedge w \notin B)$ — Morgan
5) $\sim [w \in (A-B)]$ — Diferencia
6) $w \in (A-B)^C$ — Complemento
7) $w \in A^C \cup B \Leftrightarrow w \in (A-B)^C$ — Demostracion Condicional **1 al 6**
8) $A^C \cup B \subseteq (A-B)^C$


$A \cap A = A$

(20) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(21) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(22) $A - \phi = A$

(23) $A - A = \phi$

(24) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

(25) $(A^c)^c = A$

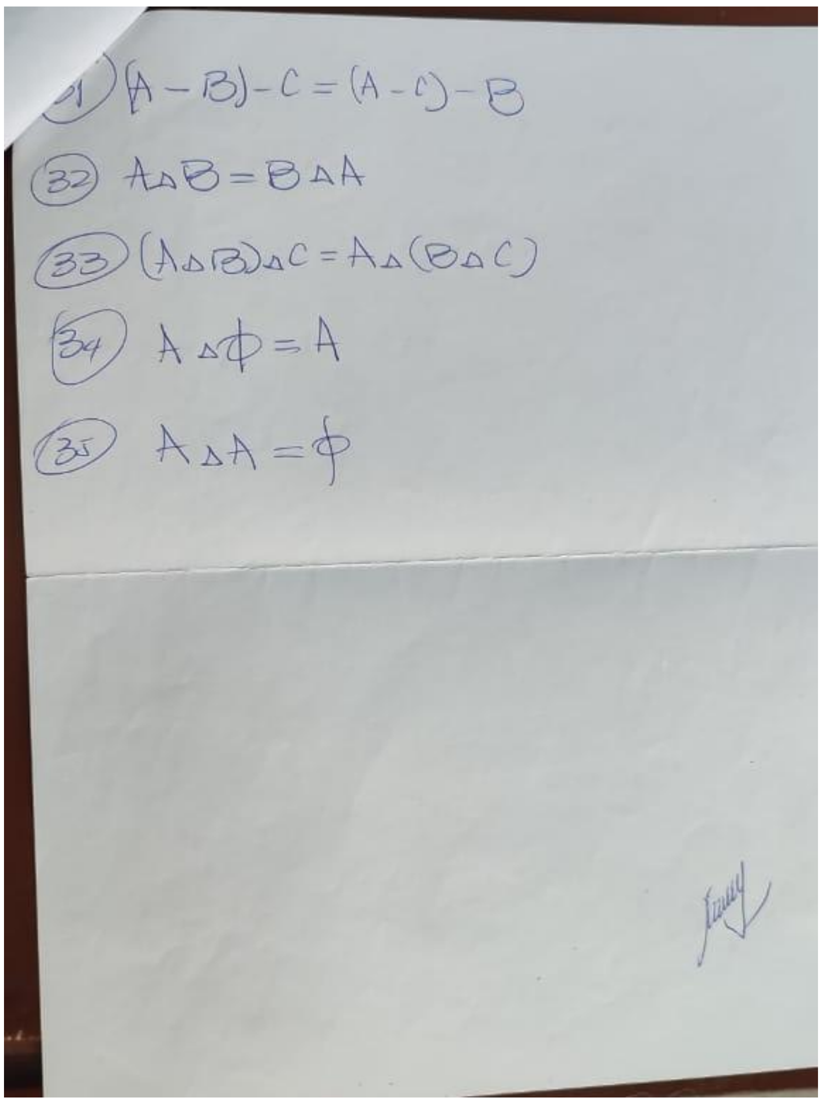
(26) $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

(27) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(28) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(29) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$

(30) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$


(31) $(A - B) - C = (A - C) - B$

(32) $A \Delta B = B \Delta A$

(33) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

(34) $A \Delta \phi = A$

(35) $A \Delta A = \phi$