Tema 1: Variables Aleatorias y Función de Distribución

1. Introducción

En este tema se tratará de formalizar numéricamente los resultados de un fenómeno aleatorio. Por tanto, una variable aleatoria es un valor numérico que corresponde a un resultado de un experimento aleatorio. Algunos ejemplos son: número de caras obtenidas al lanzar seis veces una moneda, número de llamadas que recibe un teléfono durante una hora, tiempo de fallo de una componente eléctrica, etc.

El estudio que se hará en este tema será análogo al que se hace con las variables estadísticas en descriptiva. Así retomaremos el concepto de distribución y las características numéricas, como la media y varianza. El papel que allí jugaba la frecuencia relativa lo juega ahora la probabilidad. Esto va a proporcionar aspectos y propiedades referentes a fenómenos aleatorios que permitirán modelos muy estudiados en la actualidad.

2. Variable Aleatoria Unidimensional

Dado un experimento aleatorio y asociado al mismo, un espacio probabilístico (E, Ą ,P), una variable aleatoria es una aplicación X : E → R , a cada valor de X, del espacio muestral le hace corresponder un número real. Se dice que X es una variable aleatoria si para cualquier x perteneciente a R, el conjunto de los sucesos elementales le hace corresponder un valor que verifica:

∀X ∈ ≤ XSXR

<u>Ejemplo:</u> Consideramos un experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire tres veces y anotamos el resultado. Se define la variable aleatoria X como número de caras aparecidas en los tres lanzamientos.

a) Calcular el espacio muestral y comprobar que es una variable aleatoria.

b) Calcular los subespacios: {X ≤ 75,2 } { ≤ X ≤ 75,15,0 }

a) La solución es la siguiente,

E= (C,X,X),(X,C,X),(X,X,C),(C,C,X),(C,X,C),(X,C,C),(C,C,C),(X,X,X)

	$\emptyset$	$X \leq 0$
	(X,X,X)	$0 \leq X \leq 1$
$X(S) \leq X$	(C,C,C)(X,C,X)(X,X,C)	$1 \leq X \leq 2$
	(C,C,X)(C,X,C)(X,C,C)	$2 \leq X \leq 3$
	(C,C,C)	$X \geq 3$

b) $\{X \leq 2{,}75\}$ X<0, $0 \leq X < 1$, $1 \leq X < 2$

$\{0{,}5 \leq X \leq 1{,}75\}$ es lo mismos que decir x=1, $1 \leq X \leq 2$.

3. **Tipos de Variables Aleatorias**

Las variables aleatorias se clasifican en discretas y continuas:

- DISCRETA: La variable aleatoria X se dice que es discreta si los números asignados a los sucesos elementales de E son puntos aislados. Sus posibles valores constituyen un conjunto finito o infinito numerable. Por ejemplo, supongamos el experimento consistente en lanzar tres veces una moneda no trucada; si consideramos la variable aleatoria X=”número de caras obtenidas en los tres lanzamientos”, los valores que puede tomar esta variable aleatoria son finitos (0,1,2,3).
-
- CONTINUA: La variable aleatoria X será continua si los valores asignados pueden ser cualesquiera, dentro de ciertos intervalos, es decir, puede tomar cualquier valor de R. Por ejemplo, si consideramos el experimento aleatoria consistente en medir el nivel de agua en un embalse y tomamos la variable aleatoria X=”nivel de agua”, esta puede tomar valores entre 0 y más infinito.

4. **Distribución de Probabilidad**

Es un modelo teórico que describe la forma en que varían los resultados de un experimento aleatorio, es decir, nos da todas las probabilidades de todos los posibles resultados que podrían obtenerse cuando se realiza un experimento aleatorio. Se clasifican como discretas o continuas. En la distribución de probabilidad discreta está permitido tomar sólo un número limitado de valores. En la continua, llamada función de densidad, la variable que se está considerando puede tomar cualquier valor dentro de un intervalo dado.

4.1. Distribución de Probabilidad Discreta

Sea un espacio probabilístico y sea X una variable aleatoria discreta que toma como posibles valores x1,x2,.....xn, se define la distribución de probabilidad de X como el conjunto de pares **(xi, pi)** que a cada valor de la variable le asocia una probabilidad, donde **pi= P(X=xi)**, tal que la suma de todas las probabilidades es igual a la unidad.

Del ejemplo realizado anteriormente se desprende que la distribución de probabilidad viene dada por:

(0,1/8); (1,3/8); (2,3/8); (3,1/8).

4.2. **Distribución de Probabilidad Continua**

Si la variable aleatoria es continua, hay infinitos valores posibles de la variable y entra cada dos de ellos se podrían definir infinitos valores. En estas condiciones no es posible deducir la probabilidad de un valor puntual de la variable como se puede hacer en el caso de las variables discretas. Pero sí es posible calcular la probabilidad acumulada hasta un cierto valor (función de distribución) y cómo cambia esa probabilidad acumulada en cada punto (densidad de probabilidad). Por tanto, cuando la variable aleatoria sea continua hablaremos de función de densidad.

Sea X una variable aleatoria continua, se llama función de densidad y se representa como f(x) a una función no negativa definida sobre la recta real, tal que para cualquier intervalo que estudiemos se verifica:

$$\forall A \qquad P(X \in A) = \int f(x)dx.$$

5. Función de Distribución

La función de distribución describe el comportamiento probabilístico de una variable aleatoria X asociada a un experimento aleatorio y se representa como:

F(x) ó Fx

Para estudiar la función de distribución distinguiremos entre el caso discreto y el caso continuo.

5.1. Caso Discreto

Sea X una variable aleatoria discreta asociada a un espacio probabilístico, se define la función de distribución:

$$F(x): R \rightarrow [0,1] \quad \text{que verifica} \quad F(x) = \mathrm{P}[X \leq X] = \sum\nolimits_{xi<x} \mathrm{P}_i$$

Ejemplo: Continuando con el ejemplo anterior, cuya distribución de probabilidad era: (0 caras, 1/8); (1 cara, 3/8); (2 caras, 3/8); (3caras, 1/8), Calcula la probabilidad de obtener menos dos caras?.

Para resolver el problema lo que debemos de calcular es la probabilidad de que la variable aleatoria tome valores inferiores a dos. Esto viene dado por la expresión

$$F\,(1) = Prob\,[\,X \leq 1] = \sum_{x_i<x} P_i\,1 = Prob\,[\,X = 0] + Prob\,[\,X = 1] = 1/8 + 3/8 = 4/8$$

La función de distribución para una variable discreta siempre verifica las siguientes propiedades:

$$\mathbf{A)}\quad F(-\infty) = 0; \qquad F(+\infty) = 1$$

$$\mathbf{B)}\quad \mathrm{P}[(a,b)] = F(b) - F(a)$$

C) Es una función no decreciente:

$$x_1, x_2 \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2).$$

5.2. Caso Continuo

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f(x), se define la función de distribución, F(x), como:

$$F(x) = P[x \leq X] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx\,.$$

La función de distribución para una variable continua siempre verifica las siguientes propiedades:

A) $F(x) \geq 0;$

B) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

C) $P[a \leq x \leq b] = \int_{a}^{b} f(x)dx = F(b) - F(a)$

D) $f(x) = F'(x) \Rightarrow$ la función de densidad es la derivada de la función de distribución.

Ejemplo: Sea X una variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por f (X), calcula su función de distribución:

$$f(x) = \begin{cases} X/2 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Calculamos la función de distribución, obteniendo

$$F(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} x/_2\, dx = \frac{x^2}{4},$$

por tanto, la función de distribución será:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0 \\ \dfrac{x^2}{4} & 0 < X < 2 \\ 1 & X > 2 \end{cases}$$

6. **Parámetros de una Variable Aleatoria**

En esta sección estudiaremos, de manera análoga a las variables estadísticas, algunos parámetros de que van a resumir numéricamente las distribuciones de las variables aleatorias, distinguiendo como siempre, para el caso discreto y continuo.

6.1. Esperanza Matemática para una Variable Aleatoria Discreta

Dada una variable aleatoria X que toma valores x1,x2,x3....xn con distribución de probabilidad P(x=xi) = Pi , se define la esperanza matemática de una variable aleatoria como:

$$\mathrm{E}[x] = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{P}(X = x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathrm{P}_i .$$

Ejemplo: Continuando con el ejemplo anterior, cuya distribución de probabilidad era: (0 caras, 1/8); (1 cara, 3/8); (2 caras, 3/8); (3caras, 1/8), calcula la esperanza matemática.

El resultado será: $E[X] = \sum_{i=0}^{3} x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}.$

6.2. Esperanza Matemática para una Variable Aleatoria Continua

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad f(x), se define la esperanza matemática de esa variable aleatoria como:

$$\mathrm{E}[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \mu.$$

Tanto para el caso discreto como para el caso continuo, la esperanza matemática presenta las siguientes propiedades:

- Si C es una constante, E(C) = C.
- $\forall$ a, b $\in$ R, E(aX + b) = aE(X) + b
- Si g(X) es una función de X, entonces:
  - Si X es discreta, $E[g(X)] = \sum_{i=1}^{\infty} g(x_i) p_i .$
  - Si X es continua, $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx.$
- Si $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias, entonces $E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i].$

6.3. Varianza de una Variable Aleatoria

A continuación vamos a definir la varianza de una variable aleatoria diferenciando para el caso discreto y continuo. Dada una variable aleatoria X que toma valores x1,x2,x3....xn con distribución de probabilidad, se define la varianza de X:

- **Discreta:** $V[x] = (x - E(x))^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P_i - \mu^2$
- **Continua:** $V[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)dx$

Ejemplo: Continuando con el ejemplo anterior, cuya distribución de probabilidad era: (0 caras, 1/8); (1 cara, 3/8); (2 caras, 3/8); (3caras, 1/8), calcula la varianza.

El resultado será:

$$V[X] = \sigma^2 = \sum_{i=0}^{3} x_i^2 p_i - \mu^2 = \left[0^2 \cdot \frac{1}{8} + 1^2 \cdot \frac{3}{8} + 2^2 \cdot \frac{3}{8} + 3^2 \cdot \frac{1}{8}\right] - \left[\frac{3}{2}\right]^2 = 0{,}75.$$

Propiedades de la Varianza y la Esperanza matemática:

Sea X una variable aleatoria e Y otra variable aleatoria tal que Y = a X + b, entonces siempre se verifica:

- $E[Y] = aE[X] + b$
- $V[Y] = a^2 V[Xx]$
- Si X e Y son independientes, entonces $E[XY] = E[X]E[Y]$.

6.4. Covarianza

Sean X e Y dos variables aleatorias, se define la covarianza entre estas dos variables como,

$$Cov = E[XY] - E[X]E[Y],$$

donde el cálculo de las esperanzas dependerá de si las variables son discretas o continuas. De esta definición surge el siguiente resultado. Cuando X, Y son independientes la covarianza es igual a 0.

$$E[X \cdot Y] = E[X]E[Y], \text{ entonces}$$
$$Cov = E[XY] - E[X]E[Y] = E[X] \cdot E[Y] - E[X] \cdot E[Y] = 0.$$

6.5. Momentos de una Variable Aleatoria

Dada una v.a X, se define su momento de orden k (k = 0, 1, 2,...) respecto a la media o momento central de orden k como la esperanza de $(X - \mu)^k$:

$$\mu_k = E[(X - \mu)^k]$$

Del mismo modo se define su momento de orden k (k = 0, 1, 2, ...) respecto al origen o momento no central de orden k como la esperanza de X^k:

$$\alpha_k = E[X^K]$$

De las definiciones se deduce que:

- $\alpha_o = 1$
- $\alpha_1 = \mu$
- $\mu_o = 1$
- $\mu_1 = 0$
- El segundo momento central se llama también varianza, y se denota por V(X) o σ^2.