

Variable Aleatoria Continua

Función de densidad

Ejercicio 1)

Sea X una v.a. continua cuya función de densidad es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0.1x & , 0 < x < \sqrt{20} \\ 0 & , \text{en el resto} \end{cases}$$

Se pide:

- Obtener la probabilidad de que X tome valores entre 1 y 3.
- Obtener la función de distribución $F(x)$

Ejercicio 2)

Un gran almacén guarda cajas que contienen piezas de distinto tipo. La proporción X de piezas de tipo A en una caja se puede considerar una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = kx(1 - x) \quad \text{con } 0 \leq x \leq 1$$

- Calcular el valor de k .
- Calcular la media y varianza de X .

Ejercicio 3)

La función de densidad asociada a la producción de una máquina, en miles de unidades, es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - 2x & ; 0 < x < 1 \\ 0 & ; \text{en el resto} \end{cases}$$

- Calcula la media y varianza de la producción.
- ¿Cuál es la probabilidad de que la producción sea inferior a 500 unidades? ¿Y la de que sea superior a 250 unidades?
- Si el beneficio (en miles de euros) de la máquina viene dado, en función de la producción, por $B = 9X - 2$, calcule el valor esperado del beneficio.

Ejercicio 4)

La siguiente función de densidad, representa la atención a sus clientes de una tienda en línea que opera con 2 líneas telefónicas:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2), & 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \text{ en cualquier otro caso} \end{cases}$$

- X representa la proporción del día que la primera línea está en uso
- Y representa la proporción del día que la segunda línea esté en uso.

¿Cuál es la proporción que se **espera** esté en uso la primera línea telefónica?

Ejercicio 5)

Suponga que el porcentaje **X** de alumnos y **Y** de alumnas que han concluido un examen de MAT302 se puede describir mediante la función densidad de probabilidad conjunta (20):

$$f(x,y) = \begin{cases} 8xy & \text{para } 0 < x < 1, 0 < y < x \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Encuentre el porcentaje de alumnos que se espera concluyan el examen.
- Calcule la varianza de X

RESUMEN TEÓRICO Y FÓRMULAS:

Una variable aleatoria X es una función real, que asocia un valor numérico a cada evento del espacio muestral asociado a un cierto experimento aleatorio.

Variables Aleatorias Discretas:

Si X es una v.a. discreta con recorrido $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, su distribución de probabilidad puede escribirse como:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = p_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, k$$

La función de probabilidad (o función de cuantía o de masa de probabilidad) proporciona la cantidad de probabilidad que corresponde a cada valor de la v.a. discreta X . Las dos propiedades que debe cumplir una función real de variable real para ser función de probabilidad son:

$$(1) f(x_i) \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \dots, k$$

$$(2) \sum_{i=1}^k f(x_i) = 1$$

La primera condición establece simplemente que las probabilidades no pueden ser negativas. La segunda condición nos dice que la suma de toda la masa de probabilidad debe ser igual a la unidad.

Una función de probabilidad puede expresarse de tres maneras distintas: una tabla en la que se recoja valor vs probabilidad, una expresión matemática de la función $f(x)$, o una gráfica llamada Diagrama de Barras.

Variables Aleatorias Continuas:

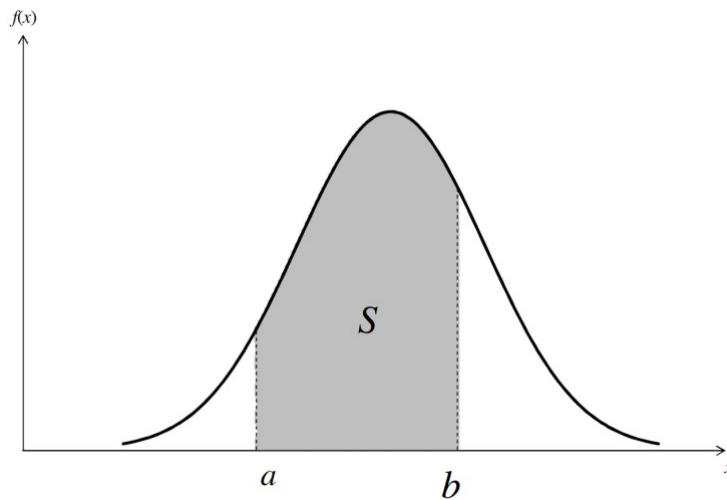
En el caso de una v.a. continua, la distribución de probabilidad no puede darse para valores puntuales ya que ésta toma un número infinito no numerable de valores para un subconjunto de la recta real.

Los valores hay que agruparlos en intervalos *exhaustivos y mutuamente excluyentes*. A cada intervalo se le asignará una probabilidad y su representación gráfica será un **Histograma**. El área de cada rectángulo que tiene por base un intervalo concreto será la probabilidad de que la variable tome valores en ese intervalo. Si hacemos una línea continua sobre el perfil de ese histograma, a esa línea (bajo la cual se encierra toda la masa de probabilidad), se le llama **función de densidad** de una v.a. continua. La función de densidad no proporciona directamente probabilidades, sino densidades de probabilidad, y el área bajo esa función es igual a la unidad. Propiedades:

- (1) $f(x) \geq 0, -\infty < x < +\infty$ (implica que la densidad de probabilidad es positiva)
- (2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ (implica que el área bajo la curva y por encima del eje de abscisas es igual a la unidad)

Obtención a partir de la $f(x)$ de la probabilidad de que X tome valores dentro de un determinado intervalo $[a, b]$:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = S$$



IMPORTANTE: La probabilidad de que una v.a. continua tome un valor concreto es siempre cero:

$$P(X = x_i) = \int_{x_i}^{x_i} f(x)dx = 0$$

Por tanto, para este tipo de variables, se cumplen las siguientes igualdades:

$$P(X < a) = P(X \leq a)$$

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Función de Distribución:

Para una v.a. X (discreta o continua) la función de distribución, $F(X)$ es la función que da la probabilidad acumulada hasta el punto x :

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Propiedades:

- a) $F(-\infty) = 0$
- b) $F(+\infty) = 1$
- c) Es una función monótona no decreciente.
- d) $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

- **Si X es una v.a. discreta:**

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

- **Si X es una v.a. continua:**

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

[En el integrando se utiliza t en lugar de x para que no haya confusión con el límite superior de integración.]

Cuando lo que se quiere es calcular la probabilidad de que una variable tome valores dentro de un intervalo, entonces haremos uso de integrales definidas ya que:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

La función de densidad de una v.a. continua se puede hallar derivando la función de distribución:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

Propiedades y características de Variables Aleatorias:

1. Cualquier función de una v.a. es otra v.a. que “hereda” las propiedades probabilísticas de la variable original.
2. Esperanza Matemática o Valor Esperado:

- Discreta:

$$E(X) = \sum_x xf(x) = \mu$$

- Continua:

$$E(X) = \int_x xf(x)dx = \mu$$

- Propiedades del Valor Esperado:

- Si a es una constante: $E(a) = a$ ○ $E(a + X) = a + E(X)$ ○ $E(bX) = bE(X)$ ○ $E(a + bX) = a + bE(X)$ ○ Si $a \leq X \leq b$, entonces $a \leq E(X) \leq b$ ○ Si X e Y son dos v.a.: $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

3. Varianza, desviación típica y coeficiente de variación:

- Fórmula en base al valor esperado:

$$Var(X) = E[(X - \mu)^2] = \sigma^2, \text{ donde } \mu = E(X).$$

- Propiedades de la varianza:

$$\begin{aligned} \circ \text{ Si } a \text{ es una constante: } Var(a) &= 0 \circ Var(a + X) = \\ &Var(X) \circ Var(bX) = b^2 Var(X) \circ Var(a + bX) \\ &= b^2 Var(X) \circ Var(-X) = Var(X) \end{aligned}$$

- Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{Var(X)}$

- Coeficiente de variación:

$$\circ CV = \frac{\sigma}{|\mu|}$$

4. Tipificación de una variable aleatoria:

Sea X una v.a. cualquiera con esperanza igual a μ_X y varianza igual a σ_X^2 , diremos que Z es la variable tipificada de X si es igual a:

$$Z = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

Propiedades de Z :

- a) $E(Z) = 0$
- b) $Var(X) = 1$