Contents

Preliminar.

Alfabeto. Alfabeto ∑

Un alfabeto sigma es un *Conjunto finito NO Vacio* y sus elementos serán llamados **letras**.

Ejemplo: $\sum_1$ = {Luis, Maria, Jaime} //hay 3 letras

$\sum_2$ = {a, b} //hay 2 letras

$\sum_3$ = {+, -, *} //hay 3 letras

Palabra.

Sea ∑ un alfabeto. Una palabra sobre ∑ es una sucesión finita de símbolos de ∑.
Es decir w = $S_1, S_2, \ldots, S_n$; $S_i \in \sum$ // w = palabra

Ejemplo: ∑ = {0, 1}

Solucion: w_1 = 01 //longitud = 2 w_4 = 111101 //longitud = 6

W_2 = 10 //longitud = 2 w_5 = 0 //longitud = 1

W_3 = 00000 //longitud = 5 w_6 = 1 //longitud = 1

Ejemplo: ∑ = {0, 10}

Solucion: w_1 = 0 10 //longitud = 2 w_2 = 10 10 0 //longitud = 3

Palabra Vacia.

Sea ∑ un alfabeto. La palabra vacia es la sucesión vacia de símbolos de ∑ y se denota por: λ

Longitud de la Palabra.

Sea ∑ un alfabeto y sea w ∈ $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$; $\sigma_i \in \sum$, se dice es la longitud de la palabra w y se denota por: |w| = n

Ejemplo: ∑ = {a, b} w = bbbba
Solución: |w| = 5 | λ | = 0

Ejemplo: ∑ = {Joquin, Saturnino, Fabiola} w = Joquin Saturnino Fabiola
Solución: |w| = 3

NOTACIONES.

Vamos a denotar como ∑ *. Es el conjunto de todas las palabras sobre ∑, excepto la palabra vacia.
∑* El conjunto de todas las palabras sobre ∑ de longitud K.

$\sum^*$	$\sum^* = \sum^+ \cup \{\lambda\}$
$\sum^+$	$\sum^+ = \sum^* - \{\lambda\}$
$\sum^K$	$\sum^K = \{w \in \sum^* / \lvert w \rvert = K\}$

$\sum^2 = \{w \in \sum^* / |w| = 2\}$
$\sum^2 = \{w \in \sum^* / |w| = 1\}$
$\sum^0 = \{w \in \sum^* / |w| = 0\}$
$\sum^0 = \{\lambda\}$
$\sum^3 = \{w \in \sum^* / |w| = 3\}$

Ejemplo: ∑ = {a, b}
Solucion: ∑* = {λ, a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, bbb, …}
$\sum^2$ = {aa, bb, ab, ba} $//2^2 = 4$
$\sum^1$ = {a, b} $//2^1 = 2$
$\sum^3$ = {aaa, bbb, abb, aab, aba, baa, bab, bba} $//2^3 = 8$

Concatenacion.

Sea ∑ un alfabeto y sea u = $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ y v = $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$; $\sigma_i, \zeta_i \in \sum$
Se define la concatenación de u y v por: uv = $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$; σ_i, ζ_i

Ejemplo: ∑ = {a, b} u = bba v = ab
Solución: uv = bba ab } son distiintos uv <> vu |u| = 3 |v|=2
vu = ab bba |uv| = 5

- uv ≠ vu
- (uv)w = u(vw)
- uλ = u = λu
- |uv| = |u|+|v|

Denotamos por: Al numero de ocurrencias de a el w.
$|w|_\sigma$ = al numero de ocurrencias de σ en la palabra w

Ejemplo: ∑ = {a, b} u = bba

Solucion: $|u|_a$ = 1 $|u|_b$ = 2

Ejercicio: $\sum = \{a, b\}$

1) $A_3 = \{w \in \sum^* \, / \, |w|=3 \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$
2) $A_4 = \{w \in \sum^* \, / \, |w|=4 \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$
3) $A_5 = \{w \in \sum^* \, / \, |w|=5 \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$
4) $A_n = \{w \in \sum^* \, / \, |w|=n \quad \wedge \quad |w|_a = 2\}$

Se pide:

a) Escribir a cada conjunto A3, A4, A5, An por extensión
b) $|A_i| = ?$ para i=3,4,5,n

Solucion:

a)

1) A_3 = {aaa, bbb, **aab, aba**, abb, **baa**, bba, bab, }.
   A_3 = { aab, aba, baa} //3 palabras
2) A_4 = {aaaa, bbbb, aaab, abba, abbb, abab, baaa, bbaa, baba, … }.
   A_4 = {aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa}. //6 palabras
3) A_5 = {aaaaa, bbbbb, …}
   A_5 = {aabbb, ababb, abbab, abbba, baabb, babab, babba, bbaab, bbaba, bbbaa}. //10 palabras
4) $A_n = \{b^{i}ab^{j-i-1}ab^{n-j} : 1 \le i < j \le n\}$

b)

$$|Ai| = \binom{i}{2} \; (i \geq 2)$$

$|A_3|=3$, $|A_4|=6$, $|A_5|=10$, $|A_n|=\binom{n}{2}$

Principio de Induccion para $\sum^*$

Sea L un conjunto de palabras sobre $\sum$ con las propiedades:

I. $\lambda \in L$
II. $\lambda \in L \quad \wedge \quad a \in \sum \Rightarrow wa \in L$

Entonces $L = \sum^*$ (es decir todas las palabras de $\sum^*$ están en L).

I. $1 \in P$
II. $K \in P \Rightarrow k+1 \in P$

La definición de longitud no nos sirve para la demostración.

Definicion de Recurrencia

$|\ | : \sum^* \rightarrow N$ // los naturales comienzan desde el 0, ya que $|\lambda|=0$

a) $|\lambda|=0$
b) $|wa|=|w|+1$
c) $|uwa| = |u|+|wa|$

Ejemplo: $\sum = \{a, b\}$ w = bbabb

<u>Solución</u>: |w| = 5

Demostrando:	|w| = |bbabb|	def. de recurrencia
	= |bbab|+1	def. de recurrencia
	= |bba|+1+1	def. de recurrencia
	= |bb|+1+1+1	def. de recurrencia
	= |b|+1+1+1+1	operando
	= |b|+4	def. de concatenacion
	= | λb |+4	def. de recurrencia
	= | λ |+1+4	def. de |λ|=0
	= 0+1+4	operando
	= 5	

Demostrar: $|uv|=|u|+|v|$; $\forall u,v \in \sum^*$

$\sum = \{a, b\}$; u = abba; v = baab

<u>Solucion</u>:

|uv| =	|uv| =
= |abba baab|	= | abba |+| baab |
= 8	= 4 + 4
	= 8

iguales

Por tanto, para demostrar correctamente usamos el principio de inducción

PRUEBA: $|uv| = |u|+|v|$; $\forall u,v \in \Sigma^*$

- Primero definimos L:
- Tomamos la variable v para mas facilidad:

  $L = \{v \in \Sigma^* \ / \ |uv|=|u|+|v|\}$

  /*   comentario

  Sea $V = \{x \ / \ x \text{ es vocal}\}$

  x es vocal $\Rightarrow x \in V$

  si $z \in V \Rightarrow$ z es vocal

  */

(i) ¿ $\lambda \in L$?

$|u\lambda| = |u| = |u|+0 = |u|+|\lambda|$

$|u\lambda| = |u|+|\lambda|$

$\therefore \lambda \in L$

Por demostrar: $w \in L \ \wedge \ a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$

Sea $w \in L \ \wedge \ a \in \Sigma$

$|uw| = |u|+|w| \wedge a \in \Sigma$ (H.I) Hipotesis Inductiva

Por demostrar: $wa \in L$

Por demostrar: $|u(wa)|=|u|+|wa|$

$\|u(wa)\|$	Asociativa
$= \|(uw)a\|$	HI
$= \|(uw)\|+1$	Def de concatenacion
$= (\|u\|+\|w\|) +1$	Asociativa, ya que u,w son números
$= \|u\|+(\|w\|+1)$	Def de recurrencia
$= \|u(wa)\|$	Def de concatenacion
$= \|u\|+\|wa\|$	

$\therefore wa \in L$

Por demostración Condicional: $w \in L \ \wedge \ a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$

ENTONCES: $L = \Sigma^*$

INVERSA

Sea $u = a_1, a_2, \ldots, a_n \in \Sigma^*$ a la palabra u prima (u')

$u' = a_n, a_{n-1}, .., a_2, a_1$ se llama inversa o transpuesta de u, (es decir a la escrita de orden inverso).

Ejemplo: $\Sigma = \{a, b\}$ u=bba

<u>Solución</u>:   u' = abb

Definion de recurrencia. $': \Sigma^* \to \Sigma^*$

a) $\lambda' = \lambda$
b) $(wa)' = aw'$

Ejemplo: u =bba   u'=?

<u>Solucion</u>:

$u' = (bba)'$	Def de inversa
$= abb'$	Def de concatenacion
$= ab(\lambda b)'$	Def de inversa
$= abb\lambda'$	Def de recurrencia $\lambda' = \lambda$
$= abb$	

Ejercicio: Demostrar $|w'| = |w|$; $\forall w \in \Sigma^*$

<u>Solucion</u>: