

Contents

Preliminar. .... 2

    Alfabeto ..... 2

    Palabra..... 2

    Palabra Vacía. .... 2

    Longitud de la Palabra ..... 2

    Concatenación..... 2

    Principio de Inducción para  $\Sigma^*$  ..... 3

        Definición de Recurrencia ..... 3

    INVERSA..... 4

        Definición de recurrencia..... 4

    Potencia de una palabra..... 5

        Por recurrencia ..... 5

Propiedades..... 5

PREFIJOS SUFIJOS Y SUBPALABRAS ..... 5

LENGUAJES ..... 5

OPERACIONES ENTRE LENGUAJES..... 6

Preliminar.

Alfabeto. Alfabeto  $\Sigma$

Un alfabeto sigma es un *Conjunto finito NO Vacio* y sus elementos serán llamados **letras**.

Ejemplo:  $\Sigma_1 = \{\text{Luis, Maria, Jaime}\}$  //hay 3 letras

$\Sigma_2 = \{a, b\}$  //hay 2 letras

$\Sigma_3 = \{+, -, *\}$  //hay 3 letras

Palabra.

Sea  $\Sigma$  un alfabeto. Una palabra sobre  $\Sigma$  es una sucesión finita de símbolos de  $\Sigma$ .

Es decir  $w = S_1, S_2, ..., S_n ; S_i \in \Sigma$  // w = palabra

Ejemplo:  $\Sigma = \{0, 1\}$

Solucion:  $w_1 = 01$  //longitud = 2  $w_4 = 111101$  //longitud = 6

$w_2 = 10$  //longitud = 2  $w_5 = 0$  //longitud = 1

$w_3 = 00000$  //longitud = 5  $w_6 = 1$  //longitud = 1

Ejemplo:  $\Sigma = \{0, 10\}$

Solucion:  $w_1 = 0\ 10$  //longitud = 2  $w_2 = 10\ 10\ 0$  //longitud = 3

Palabra Vacía.

Sea  $\Sigma$  un alfabeto. La palabra vacía es la sucesión vacía de símbolos de  $\Sigma$  y se denota por:  $\lambda$

Longitud de la Palabra.

Sea  $\Sigma$  un alfabeto y sea  $w \in \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n; \sigma_i \in \Sigma$ , se dice es la longitud de la palabra w y se denota por:  $|w| = n$

Ejemplo:  $\Sigma = \{a, b\}$   $w = bbbba$

Solución:  $|w| = 5$   $|\lambda| = 0$

Ejemplo:  $\Sigma = \{\text{Joquin, Saturnino, Fabiola}\}$   $w = \text{Joquin Saturnino Fabiola}$

Solución:  $|w| = 3$

NOTACIONES.

Vamos a denotar como  $\Sigma^*$ . Es el conjunto de todas las palabras sobre  $\Sigma$ , excepto la palabra vacía.

$\Sigma^*$  El conjunto de todas las palabras sobre  $\Sigma$  de longitud K.

$\Sigma^*$	$\Sigma^* = \Sigma^+ \cup \{\lambda\}$
$\Sigma^+$	$\Sigma^+ = \Sigma^* - \{\lambda\}$
$\Sigma^K$	$\Sigma^K = \{w \in \Sigma^* /  w  = K\}$

$\Sigma^2 = \{w \in \Sigma^* / |w| = 2\}$

$\Sigma^2 = \{w \in \Sigma^* / |w| = 1\}$

$\Sigma^0 = \{w \in \Sigma^* / |w| = 0\}$

$\Sigma^0 = \{\lambda\}$

$\Sigma^3 = \{w \in \Sigma^* / |w| = 3\}$

Ejemplo:  $\Sigma = \{a, b\}$

Solucion:  $\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, bb, ab, ba, aaa, bbb, ...\}$

$\Sigma^2 = \{aa, bb, ab, ba\}$  //2<sup>2</sup> = 4

$\Sigma^1 = \{a, b\}$  //2<sup>1</sup> = 2

$\Sigma^3 = \{aaa, bbb, abb, aab, aba, baa, bab, bba\}$  //2<sup>3</sup> = 8

Concatenacion.

Sea  $\Sigma$  un alfabeto y sea  $u = \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$  y  $v = \zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n; \sigma_i, \zeta_i \in \Sigma$

Se define la concatenación de u y v por:  $uv = \sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n \zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n; \sigma_i, \zeta_i$

Ejemplo:  $\Sigma = \{a, b\}$   $u = bba$   $v = ab$

Solución:  $uv = bba\ ab$   $vu = ab\ bba$  } son distintos  $uv \neq vu$   $|u| = 3$   $|v| = 2$   
 $|uv| = 5$

- $uv \neq vu$
- $(uv)w = u(vw)$
- $u\lambda = u = \lambda u$
- $|uv| = |u| + |v|$

Denotamos por:  $|w|_\sigma$  al numero de ocurrencias de  $\sigma$  en la palabra w

Ejemplo:  $\Sigma = \{a, b\}$   $u = bba$

Solucion:  $|u|_a = 1$   $|u|_b = 2$

Ejercicio:  $\Sigma = \{a, b\}$

- 1)  $A_3 = \{w \in \Sigma^* / |w|=3 \wedge |w|_a = 2\}$
- 2)  $A_4 = \{w \in \Sigma^* / |w|=4 \wedge |w|_a = 2\}$
- 3)  $A_5 = \{w \in \Sigma^* / |w|=5 \wedge |w|_a = 2\}$
- 4)  $A_n = \{w \in \Sigma^* / |w|=n \wedge |w|_a = 2\}$

Se pide:

- a) Escribir a cada conjunto  $A_3, A_4, A_5, A_n$  por extensión
- b)  $|A_i| = ?$  para  $i=3,4,5,n$

Solucion:

- a)
- 1)  $A_3 = \{aaa, bbb, \textcolor{blue}{aab}, \textcolor{blue}{aba}, abb, \textcolor{blue}{baa}, bba, bab, \}$ .  
 $A_3 = \{ aab, aba, baa\}$  //3 palabras
  - 2)  $A_4 = \{aaaa, bbbb, aaab, abba, abbb, abab, baaa, bbaa, baba, \dots \}$ .  
 $A_4 = \{aabb, abab, abba, baab, baba, bbaa\}$ . //6 palabras
  - 3)  $A_5 = \{aaaaa, bbbbb, \dots\}$   
 $A_5 = \{aabbb, ababb, abbab, abbbba, baabb, babab, babba, bbaab, bbaba, bbbba\}$ . //10 palabras
  - 4)  $A_n = \{b^i ab^{j-i-1} ab^{n-j} : 1 \leq i < j \leq n\}$

b)

$$|A_i| = \binom{i}{2} \quad (i \geq 2)$$

$$|A_3|=3, \qquad |A_4|=6, \qquad |A_5|=10, \qquad |A_n|=\binom{n}{2}$$

Principio de Induccion para  $\Sigma^*$

Sea L un conjunto de palabras sobre  $\Sigma$  con las propiedades:

- I.  $\lambda \in L$
- II.  $\lambda \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow \lambda a \in L$

Entonces  $L = \Sigma^*$  (es decir todas las palabras de  $\Sigma^*$  están en L).

- I.  $1 \in P$
- II.  $k \in P \Rightarrow k + 1 \in P$

La definición de longitud no nos sirve para la demostración.

Definicion de Recurrencia

$| \cdot | : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$  // los naturales comienzan desde el 0, ya que  $|\lambda|=0$

- a)  $|\lambda|=0$
- b)  $|\lambda a|=| \lambda | + 1$
- c)  $|u \lambda a| = |u| + | \lambda a |$

Ejemplo:  $\Sigma = \{a, b\}$      $w = bbabb$

Solución:  $|w| = 5$

Demostrando: $ w  =  bbabb $	def. de recurrencia
$=  bbab  + 1$	def. de recurrencia
$=  bba  + 1 + 1$	def. de recurrencia
$=  bb  + 1 + 1 + 1$	def. de recurrencia
$=  b  + 1 + 1 + 1 + 1$	operando
$=  b  + 4$	def. de concatenacion
$=   \lambda b   + 4$	def. de recurrencia
$=   \lambda   + 1 + 4$	def. de $ \lambda =0$
$= 0 + 1 + 4$	operando
$= 5$	

Demostrar:  $|uv|=|u|+|v|;$      $\forall u,v \in \Sigma^*$   
 $\Sigma = \{a, b\};$      $u = abba;$      $v = baab$

Solucion: $ uv  =$	$ uv  =$
$=  abba baab $	$=   abba   +   baab  $
$= 8$	$= 4 + 4$
	$= 8$



Por tanto, para demostrar correctamente usamos el principio de inducción

**PRUEBA:**  $|uv| = |u| + |v|; \quad \forall u,v \in \Sigma^*$

- Primero definimos L:
- Tomamos la variable v para mas facilidad:  
 $L = \{v \in \Sigma^* / |uv|=|u|+|v|\}$

/\* comentario  
 Sea  $V = \{x / x \text{ es vocal}\}$   
 $x \text{ es vocal} \Rightarrow x \in V$   
 si  $z \in V \Rightarrow z \text{ es vocal}$

\*/

(i) ¿  $\lambda \in L$ ?

$|u\lambda| = |u| = |u|+0 = |u|+|\lambda|$

$|u\lambda| = |u|+|\lambda|$

$\therefore \lambda \in L$

Por demostrar:  $w \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$

Sea  $w \in L \wedge a \in \Sigma$

$|uw| = |u|+|w| \wedge a \in \Sigma$  (H.I) Hipotesis Inductiva

Por demostrar:  $wa \in L$

Por demostrar:  $|u(wa)|=|u|+|wa|$

$ u(wa) $	Asociativa
$=  (uw)a $	HI
$=  (uw) +1$	Def de concatenacion
$= ( u + w ) +1$	Asociativa, ya que u,w son números
$=  u +( w +1)$	Def de recurrencia
$=  u(wa) $	Def de concatenacion
$=  u + wa $	

$\therefore wa \in L$

Por demostración Condicional:  $w \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow wa \in L$

ENTONCES:  $L = \Sigma^*$

### INVERSA

Sea  $u = a_1, a_2, ..., a_n \in \Sigma^*$  a la palabra u prima ( $u'$ )

$u' = a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1$  se llama inversa o transpuesta de u, (es decir a la escrita de orden inverso).

Ejemplo:  $\Sigma = \{a, b\}$       $u=bba$

Solución:  $u' = abb$

Definicion de recurrencia. ‘:  $\Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$

a)  $\lambda' = \lambda$

b)  $(wa)' = aw'$

Ejemplo:  $u = bba$       $u' = ?$

Solucion:

$u' = (bba)'$	Def de inversa
$= abb'$	Def de concatenacion
$= ab(\lambda b)'$	Def de inversa
$= abb\lambda'$	Def de recurrencia $\lambda' = \lambda$
$= abb$	

Ejercicio: Demostrar  $|w'| = |w|; \quad \forall w \in \Sigma^*$

Solucion:

Llamamos  $L = \{w \in \Sigma^* / |w'|=w\}$

(i) Por definición  $(\lambda)' = \lambda$  luego  $|\lambda'|=|\lambda| \Rightarrow \lambda \in L$

(ii) Sea  $u \in L \wedge a \in \Sigma$

Por definición  $(ua)' = au'$ , luego

$ (ua)' $	def de inversa
$= au' $	def de concatenacion
$= a + u' $	

Aplicamos hipótesis de inducción,  $w \in L$ , tenemos  $|u'| = |u|$

Entonces:  $|(ua)'|$  def de inversa

$=  au' $	def de concatenación
$=  a + u' $	H.I. $u'=u$
$=  a + u $	conmutativa
$=  u + a $	

Sucesivamente por propiedad de longitud  $|ua|=|u|+|a|$

Luego  $|(ua)'|$

$=  u + a $	
$=  ua $	osea $ua \in L$

$\therefore L \in \Sigma^*$

**Si queremos verificar:**

$|w'| = |w|; \quad \forall w \in \Sigma^*$

**w=hola**

$ w'  =  hola $	
$=  hol +1$	def recureencia
$=  ho +1+1$	def recurencia
$=  h +1+1+1$	def recurencia
$=  \lambda h +4$	def $h = \lambda h$
$=  \lambda +1+4$	def recurencia
$= 0+5$	def $ \lambda =0$
$= 5$	

Ejercicio: Demostrar:  $|uv| = |u'| + |v'|$ ;  $\forall w \in \Sigma^*$   
 $L = \{v \in \Sigma^* / |uv| = |u'| + |v'|\}$

Crecimiento por izquierda

$(u)' \in L \wedge a \in \Sigma \Rightarrow aw \in \Sigma$

Potencia de una palabra

$w^n = w^*w^*w...w$   
 $w^1 = w$   
 $w^0 = \lambda$

Por recurrencia

$w^0 = \lambda$   
 $w^{n+1} = w^*w^n$

Ejemplo:  $\Sigma = \{a, b\}$        $w = ba$

**Solucion:**  
 $w^4 = ba\ ba\ ba\ ba$   
 $w^4 = w\ w^3$   
     $= ba\ w\ w^2$   
     $= ba\ ba\ w^2$   
     $= ba\ ba\ w\ w$   
     $= ba\ ba\ ba\ ba$

Propiedades

- a)  $|w^n| = n|w|$
- b)  $w^n w^m = w^{n+m}$
- c)  $(w^n)^m = w^{n \cdot m}$
- d)  $\lambda^n = \lambda$

Ejercicios: Demostraciones  
Demostrar las propiedades desde a) hasta d) y buscar palabras u,v sobre  $\Sigma = \{a, b\}$  tales que  $u^2v^2 \neq (uv)^2$

PREFIJOS SUFIJOS Y SUBPALABRAS

Sean  $v, z \in \Sigma^*$   
1) Se dice que v es prefijo de z si y solo si existe  $w \in \Sigma^*$  tal que  $z = vw$  y se escribe v pref z  
2) Se dice que v es sufijo de z si y solo si existe  $u \in \Sigma^*$  tal que  $z = uv$  y se escribe v suf z  
3) Se dice que v es subpalabra de z si y solo si existe  $u_1u_2 \in \Sigma^*$  tal que  $z = u_1vu_2$  y se escribe v subp z

Ejemplo:  $\Sigma = \{a, b\}$

**Solucion:**  
 $z = \text{babbab}$   
 $v = \text{bab}$                $w = \text{bab}$   
 $v = \text{b}$                  $w = \text{abbab}$   
 $v = \lambda$                 $w = \text{babbab}$   
 $v = \text{babbab}$         $w = \lambda$

Ejercicio  
1) Cuantos prefijo, sufijo, subpalabras, tiene la palabra  $z = a_1a_2...a_n \in \Sigma$   
2) Demostrar:  
 $X \text{ pref } y \wedge y \text{ pref } x \Rightarrow x = y$   
 $X \text{ pref } y \wedge y \text{ pref } z \Rightarrow x \text{ pref } z$

**Solucion:**  
Demostracion Condicional: Sobre el antecedente, mostra el conecuyente

LENGUAJES

**Definicion matematica.** Sea  $\Sigma$  un alfabeto. Un lenguaje sobre  $\Sigma$  es un subconjunto de  $\Sigma^*$

Ejemplo:  
 $\emptyset$  //El vacio es subconjunto de  $\Sigma^*$   
 $\Sigma^*$  //El  $\Sigma^*$  es subconjunto de  $\Sigma^*$

Ejemplo:  $\Sigma = \{a, b\}$        $\Sigma^* = \{\lambda, a, b, aa, ba, ab, bb, ...\}$   
Solucion:  
 $L_1 = \{ab\}$                        $L_4 = \Sigma^+$   
 $L_2 = \{\lambda\}$                        $L_5 = \{\lambda, a, aa, aaa, ...\}$   
 $L_3 = \{\lambda, a, aa, b\}$          $L_5 = \{w \in \Sigma^* / w = a^n, n \in \mathbb{N}\}$

Ejemplo:  $\Sigma = \{a, b\}$        $L = \{ w \in \Sigma^* / |w| = 5, |w|_a = 2 \}$   
Solucion:

OPERACIONES ENTRE LENGUAJES. Sean  $A, B, \in \Sigma^*$

**Union.**  $A \cup B = \{w \in \Sigma^* / w \in A \vee w \in B\}$

**Interseccion.**  $A \cap B = \{w \in \Sigma^* / w \in A \wedge w \in B\}$

**Diferencia.**  $A - B = \{w \in \Sigma^* / w \in A \wedge w \notin B\}$

**Complemento.**  $A^c = \{w \in \Sigma^* / w \notin A\}$

**Concatenacion.**  $AB = \{w \in \Sigma^* / w = xy, x \in A \wedge y \in B\}$

**Transposicion.**  $A' = \{w' \in \Sigma^* / w \in A\}$

**Estrella de kleene.**  $A^* = \{w \in \Sigma^* / w = w_1, w_2, \dots, w_k, \text{ para algunas } w_{11}, w_{21}, \dots, w_k \in A \text{ para alg\'un } k \in \mathbb{N}\}$

Ejemplo:

- 1) Sea  $\Sigma = \{a, b\}$  y sea  $P = \{a, ab\}$ ;  $P = \{ \lambda, a, ba \}$
- a)  $P \cup Q$

e)  $P'$

i)  $P^c$

b)  $P \cap Q$

f)  $Q'$

j)  $Q^c$

c)  $P - Q$

g)  $PQ$

d)  $Q - P$

h)  $P^2 = PP$

Solucion:

- a)  $\{ \lambda, a, ab, ba \}$

e)  $\{a, ba\}$

h)  $\{aa, aab, aba, abab\}$

b)  $\{a\}$

f)  $\{ \lambda, a, ab \}$

i)  $P^c = \Sigma^* - P = \Sigma^* - \{a, ab\}$

c)  $\{ab\}$

g)  $\{a \lambda, aa, ba, ab \lambda, aba, abba\} =$

j)  $Q^c = \Sigma^* - Q = \Sigma^* - \{ \lambda, a, ba \}$

d)  $\{ \lambda, ba \}$

$\{a, aa, ba, ab, aba, abba\}$

- 2) Sea  $L_1, L_2, L_3 \subseteq \Sigma^*$ . Demostrar:

- a)  $L_1 \Phi = \Phi L_1 = A$
- b)  $L_1 \{ \lambda \} = \{ \lambda \} L_1 = L_1$
- c)  $L_1 (L_2 L_3) = (L_1 L_2) L_3$
- d)  $(L_1 \cup L_2) L_3 = L_1 L_3 \cup L_2 L_3$
- e)  $L_1 (L_2 \cup L_3) = L_1 L_2 \cup L_1 L_3$

- 3) Sean  $P, Q, R \subseteq \Sigma^*$ . Demostrar

- a)  $(P \cup Q)' = P' \cup Q'$
- b)  $(PQ)' = Q' P'$
- c)  $(P \cup Q)^2 = P^2 \cup PQ \cup QP \cup Q^2$

- 4) Dar ejemplo de lenguaje  $P, Q, R$  sobre  $\Sigma = \{a, b\}$  tales que  
 $(P \cap Q)R \neq (PR) \cap (QR)$   
¿Cu\'al de las inclusiones es valida?

Ejemplo: Sean  $A, B \subseteq \Sigma^*$ . Demostrar  
 $A \subseteq A \cup B$

Solucion:

PRUEBA.

- Por demostrar:  $w \in A \Rightarrow w \in (A \cup B)$

Sea  $w \in A$       Regla Premisa

$= w \in A \vee w \in B$       Adicion

$= w \in A \cup B$       Union

$= w \in A \Rightarrow w \in (A \cup B)$       Demostracion Condicional

$= A \subseteq B$       Inclusion

Ejemplo: Sean  $A, B \subseteq \Sigma^*$ . Demostrar  
 $(A - B)^c = A^c \cup B$

Solucion:

PRUEBA

- Por demostrar:  $(A - B)^c = A^c \cup B$

• Por demostrar:  $\underbrace{(A - B)^c \subseteq A^c \cup B}_\text{I)} \wedge \underbrace{A^c \cup B \subseteq (A - B)^c}_\text{II)}$

• Por demostrar: **I)**  $w \in (A - B)^c \Rightarrow w \in A^c \cup B$

1)  $w \in (A - B)^c$       Regla premisa

2)  $w \notin (A - B)^c$       Complemento

3)  $\sim [w \in (A - B)]$       Notacion

4)  $\sim [w \in A \wedge w \notin B]$       Diferencia

5)  $w \notin A \vee w \in B$       Morgan

6)  $w \in A^c \vee w \in B$       Complemento

7)  $w \in A^c \cup B$       Union

8)  $w \in (A - B)^c \Leftrightarrow w \in A^c \cup B$       Demostracion Condicional **1al 7**

9)  $(A - B)^c \subseteq A^c \cup B$       Incucion

- Por demostrar: II)  $w \in A^c \cup B \Rightarrow w \in (A-B)^c$
- 1)  $w \in A^c \cup B$  Regla Premisa
- 2)  $w \in A^c \vee w \in B$  Union
- 3)  $w \notin A \vee w \in B$  Complemento
- 4)  $\sim (w \in A \wedge w \notin B)$  Morgan
- 5)  $\sim [w \in (A-B)]$  Diferencia
- 6)  $w \in (A-B)^c$  Complemento
- 7)  $w \in A^c \cup B \Leftrightarrow w \in (A-B)^c$  Demostracion Condicional **1 al 6**
- 8)  $A^c \cup B \subseteq (A-B)^c$

