5

Modelagem Matemática de Sistemas Mecânicos Translacionais pela Mecânica Newtoniana

1 INTRODUÇÃO

Nesta apostila aprenderemos como obter o modelo matemático de sistemas mecânicos translacionais, a partir da aplicação da 2ª Lei de Newton. Inicialmente, apresentaremos as equações constitutivas de cada um dos elementos que compõem o sistema mecânico e, após, mostraremos como tais equações são inseridas na EDOL que descreve o modelo matemático do sistema.

2 RELAÇÕES ENTRE EXCITAÇÃO E RESPOSTA PARA OS ELEMENTOS DO SISTEMA MECÂNICO. EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS

Conforme já vimos, as equações constitutivas entre excitação e resposta para os vários elementos (considerados lineares) de um sistema mecânico são dadas por

(1) $$f_m = m\ddot{x}$$ (massa m)

(2) $$f_c = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$ (amortecedor c)

(3) $$f_k = k(x_2 - x_1)$$ (mola k)

A eq. (1) nada mais é do que a 2ª Lei de Newton, onde f_m, que é a resultante de todas as forças externas aplicadas à massa m, é proporcional à aceleração **absoluta** da massa m. A constante de proporcionalidade é a massa m.

A eq. (2) diz respeito à força que atua sobre um amortecedor viscoso, a qual é proporcional à velocidade **relativa** entre as extremidades do amortecedor. A constante de proporcionalidade é o coeficiente de amortecimento viscoso c.

Já a eq. (3) mostra a proporcionalidade entre a força da mola e o deslocamento **relativo** das extremidades da mola. A constante de proporcionalidade é a rigidez k.

Observemos que a aceleração é absoluta, ao passo que o deslocamento e a velocidade são relativos.

3 MODELAGEM MATEMÁTICA DE SISTEMAS MECÂNICOS TRANSLACIONAIS

Vamos ilustrar a técnica da modelagem através de exemplos.

Exemplo 1: sistema mola-amortecedor em paralelo (fig. 1)

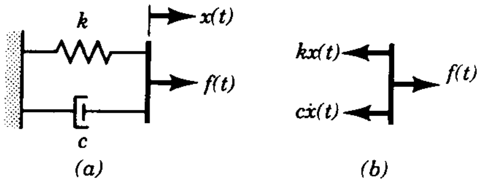


Fig. 1

A fig. 1(b) mostra o diagrama de corpo livre do sistema, onde é considerada sem massa a barra sobre a qual atuam as forças externas aplicadas, ou seja, a excitação f(t), a força da mola kx(t) e a força do amortecedor viscoso $c\dot{x}(t)$. Trata-se de um sistema com apenas um grau de liberdade (GDL), pois a coordenada x(t) é suficiente para descrever o movimento do sistema. Aplicando a 2ª Lei de Newton, eq. (1), obtemos

$$\sum F_x = m\ddot{x} = 0$$

$$f(t) - c\dot{x}(t) - kx(t) = 0$$

de onde chegamos na EDOL de 1ª ordem (daí o nome de **sistema de 1ª ordem**):

$$c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \qquad (4)$$

a qual constitui o modelo matemático para o sistema mecânico da fig. 1(a).

Exemplo 2: sistema mola-amortecedor em série (fig. 2)

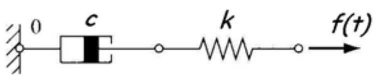


Fig. 2

Temos, agora, um sistema com dois GDL, pois são necessárias duas coordenadas para descrever o movimento do sistema: x_1 para o ponto situado entre o amortecedor e a mola e x_2 para o ponto de aplicação da força f(t). A fig. 3 ilustra os diagramas de corpo livre das forças que atuam nesses pontos, onde foi considerado que $x_2 > x_1$:

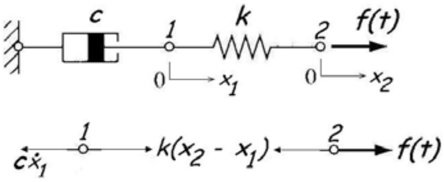


Fig. 3

Aplicando a 2ª Lei de Newton ao ponto 1: $\sum F_{x1} = m_1 \ddot{x}_1 = 0$ pois $m_1 = 0$.

$$k(x_2 - x_1) - c\dot{x}_1 = 0$$

Aplicando a 2ª Lei de Newton ao ponto 2: $\sum F_{x2} = m_2 \ddot{x}_2 = 0$ pois $m_2 = 0$.

$$f(t) - k(x_2 - x_1) = 0$$

Logo, o modelo matemático fica composto pelo conjunto de EDOL's

(5) $$c\dot{x}_1 + kx_1 - kx_2 = 0$$

(6) $$-kx_1 + kx_2 = f(t)$$

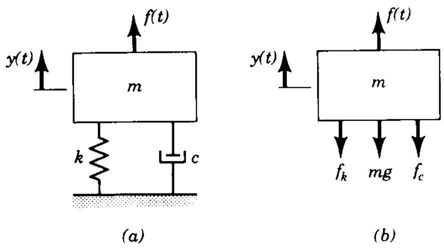
Matricialmente:

(7) $$\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

Exemplo 3: sistema massa-mola-amortecedor com um grau de liberdade

Vamos considerar, agora, o sistema mecânico massa-mola-amortecedor (ou sistema m-k-c) da fig. 4(a), o qual constitui o sistema com um grau de liberdade mais simples:

Fig. 4



O diagrama de corpo livre correspondente está mostrado na fig. 4(b). Chamando y(t) o **deslocamento vertical da massa m a partir da posição em que a mola não está deformada**, ou seja, antes da montagem da massa m no sistema, temos, a partir da aplicação da 2ª Lei de Newton:

$$\sum F_y = f(t) - f_c(t) - f_k(t) - mg = m\ddot{y}(t)$$

Levando em conta as eqs. (1), (2) e (3), chegamos a

(8) $$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) + mg = f(t)$$

Essa equação pode ser simplificada eliminando o efeito do peso mg. Para isso, vamos medir o **deslocamento a partir da posição de equilíbrio estático**, x(t), obtida a partir da posição anterior, y(t), porém deixando que a mola sofra uma **deflexão estática** δ_{est}, conforme mostra a fig. 5:

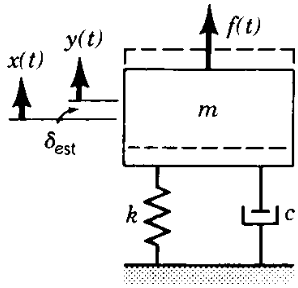


Fig. 5

Tendo em vista que a deflexão da mola equilibra o peso:

(9) $$mg = k\delta_{est}$$

Por outro lado, conforme mostra a fig. 5, podemos fazer a transformação de coordenadas

(10) $$y)t) = x(t) - \delta_{est}$$

Levando as eqs. (9) e (10) na eq. (8), chegamos à EDOL de 2ª ordem (daí o nome **sistema mecânico de 2ª ordem**) que constitui o modelo matemático do sistema da fig. 4(a):

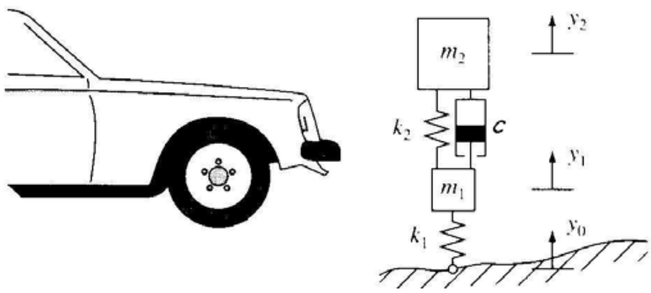
(11) $$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$$

Assim, se adotarmos a coordenada x(t) a partir da posição de equilíbrio estático, podemos omitir o peso mg, o que é vantajoso, pois podemos usar a eq. (11) como modelo matemático para sistemas mecânicos de 2ª ordem que transladem tanto na vertical como na horizontal.

Exemplo 4: suspensão de um veículo

Podemos construir o modelo translacional bastante simplificado da suspensão independente de um carro considerando apenas o movimento de uma roda do veículo, conforme ilustra a fig. 6:

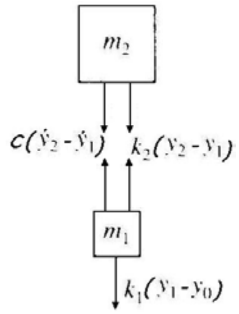
Fig. 6



A rigidez do pneu é modelada pela mola k_1. As massas do pneu, roda, eixo e demais peças não suspensas, são modeladas pela massa m_1. O coeficiente de amortecimento do amortecedor viscoso e a rigidez da mola da suspensão são modelados, respectivamente, por c e k_2. Já a massa suspensa distribuída àquele $\frac{1}{4}$ de suspensão é modelada pela massa m_2. Foram adotadas as coordenadas y_1 e y_2, medidas a partir da posição de equilíbrio estático do sistema, para descreverem os movimentos das massas m_1 e m_2, respectivamente. A coordenada y_0 servirá para descrever o movimento do solo, devido às irregularidades do terreno.

O diagrama de corpo livre do sistema é mostrado na fig. 7, onde foi considerado que $y_2 > y_1 > y_0$.

Fig. 7



Aplicando a 2ª Lei de Newton à massa 1:

$$\sum F_{y1} = m_1 \ddot{y}_1$$

$$-k_1(y_1 - y_0) + k_2(y_2 - y_1) + c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = m_1 \ddot{y}_1$$

Aplicando a 2ª Lei de Newton à massa 2:

$$\sum F_{y2} = m_2 \ddot{y}_2$$

$$-k_2(y_2 - y_1) - c(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = m_2 \ddot{y}_2$$

Logo, o modelo matemático fica composto pelo conjunto de EDOL's

(12) $$m_1 \ddot{y}_1 + c\dot{y}_1 - c\dot{y}_2 + (k_1 + k_2)y_1 - k_2 y_2 = k_1 y_0$$

(13) $$m_2 \ddot{y}_2 - c\dot{y}_1 + c\dot{y}_2 - k_2 y_1 + k_2 y_2 = 0$$

Matricialmente:

(14) $$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na eq. (14) podemos identificar os seguintes vetores e matrizes:

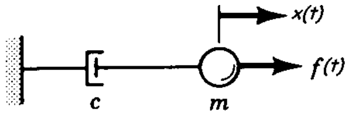
$$\underbrace{\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz massa (ou inércia)}}\underbrace{\begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}}_{\text{Vetor aceleração}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}}_{\text{Matriz amortecimento}}\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix}}_{\text{Vetor velocidade}} + \underbrace{\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz rigidez}}\underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}}_{\text{Vetor deslocamento (saída)}} = k_1 \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{Vetor excitação (entrada)}}$$

As matrizes são todas 2 x 2 (nº de graus de liberdade = 2) e os vetores são todos 2 x 1.

EXERCÍCIOS

---

1 Deduzir o modelo matemático para o sistema massa-amortecedor da figura.



Resp.: $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) = f(t)$

---

2 Representar o modelo matemático do sistema do exercício anterior no Espaço de Estados.

---

3 Representar o modelo matemático do sistema do exercício anterior na forma de Função de Transferência.

Resp.: $G(s) = \dfrac{1}{ms^2 + cs}$

---

4 Considere o exemplo 4 do texto. Considerando $y_0(t)$ como entrada e $y_2(t)$ como saída, representar o modelo matemático do sistema no Espaço de Estados.

Resp.: Equação de Estado: $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-k_1 - k_2}{m_1} & \dfrac{-c}{m_1} & \dfrac{k_2}{m_1} & \dfrac{c}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \dfrac{k_2}{m_2} & \dfrac{c}{m_2} & \dfrac{-k_2}{m_2} & \dfrac{-c}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_1}{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} y_0(t)$$

onde as variáveis de estado foram definidas como

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= \dot{y}_1 \\ x_3 &= y_2 \\ x_4 &= \dot{y}_2 \end{aligned}$$

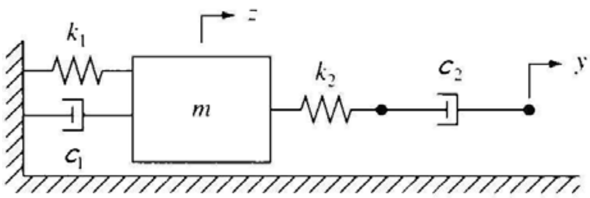
---

5 Considere o exemplo 4 do texto. Considerando $y_0(t)$ como entrada e $y_2(t)$ como saída, representar o modelo matemático por Função de Transferência.

---

6 Representar o modelo matemático do sistema da figura pela função de transferência $G(s) = \dfrac{Z(s)}{Y(s)}$.

Dados numéricos: $m = 2$ kg $k_1 = K_2 = 8$ N/m $c_1 = c_2 = 16$ N.s/m



Resp.: $G(s) = \dfrac{Z(s)}{Y(s)} = \dfrac{4s}{s^3 + 8{,}5s^2 + 12s + 2}$