Eötvös Loránd Tudományegyetem

Informatikai Kar

Média- és Oktatásinfromatika

Tanszék

Útvonaltervezés vizualizálása a BKK hálózatán

Témavezető:
Erdősné Németh Ágnes
Egyetemi adjunktus

Szerző:
Szabó-Galiba Máté
Programtervező informatikus BSc

Budapest, 2024

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

Az informatika - különösen egyetemi környezetben való - oktatásában az elméleti háttér kiemelkedő szerepet kap. Ez természetes, hiszen megfelelő elméleti alapok nélkül a gyakorlatban is csak korlátozottan lehet eredményeket elérni. Azonban sok tanuló számára a száraz elméleti anyag nehezen érthető, és gyakorlati alkalmazás hiányában gyakran érdektelennek tűnik. Az elvont elméletet nehéz lehet a gyakorlattal összekapcsolni, és sokaknak ez okozza a legnagyobb nehézséget az informatika tanulásában. Ez a probléma különösen szembetűnő az algoritmusok tanulásakor, hiszen ezek eredendően gyakorlatiasak; céljuk a program gyorsabb, vagy más szempontból eredményesebb működése. Ám ez a gyakorlatiasság sokszor elveszik az elméleti leírásokban, és a hallgatók számára nehezen érthetővé válik.

Ennek a programnak a célja, hogy segítséget nyújtson az útkereső algoritmusok megértésében az elmélet és a gyakorlat összekapcsolásával. Az alkalmazás egy webes felületen keresztül teszi lehetővé a felhasználók számára, hogy különböző algoritmusok működését vizsgálhassák lépésről lépésre. Erre célra mi sem jobb adatforrás, mint a Budapesti tömegközlededés, amivel a magyar diákok jelentős része nap mint nap találkozik. Az alkalmazásban a felhasználók négy alapvető útkereső- és gráfbejáró-algoritmus működését hasonlíthatják össze: a szélességi keresést, a mélységi keresést, a Dijkstra-algoritmust és az A*-algoritmust.

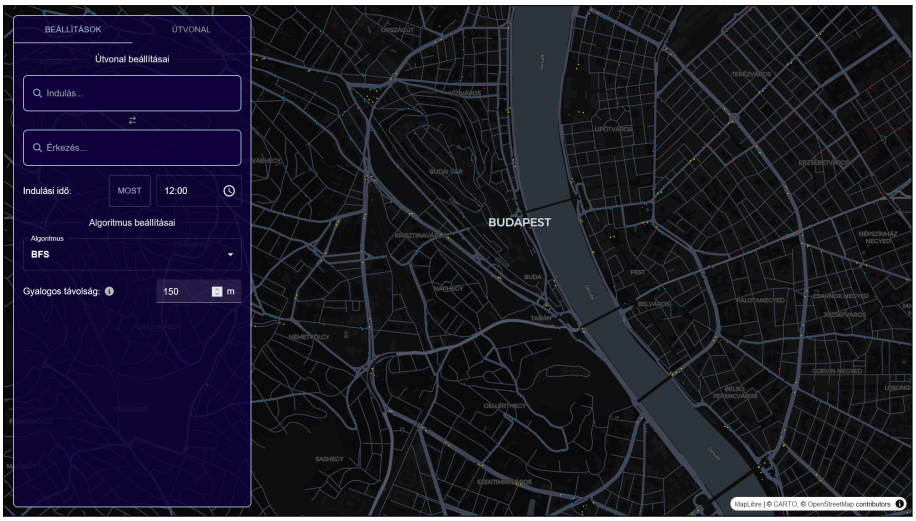
Az alkalmazás használata során a felhasználók kiválaszthatnak egy kiinduló és egy célállomást, majd az alkalmazás lépésről lépésre bemutatja az adott algoritmus működését a két állomás közötti útvonal megtalálásához. A grafikus felület segít az egyes algoritmusok előnyeinek és hátrányainak a megértésében, és akár az algoritmusok ismeretében kevésbé jártas felhasználók számára is egy képet ad azok működési elvéről.

2. fejezet

Felhasználói dokumentáció

2.1. Áttekintés

Az alkalmazás böngészőben fut. Egy oldalból áll, mely nagy részét egy interaktív térkép foglalja el (2.1). A képernyő bal oldalán egy vezérlőpanel található, melyen keresztül az alkalmazás irányítható. Az alkalmazás használatához nincs szükség regisztrációra vagy bejelentkezésre.



2.1. ábra. Az alkalmazás felülete térképpel és vezérlőpanellel

A térkép navigációja egérrel történik; a térkép nagyítása és kicsinyítése a görgetőkerékkel, a térkép mozgatása pedig az egér bal gombjának lenyomásával és húzásával. A térképen a BKK és a MÁV-HÉV járatainak a megállói láthatók, amik egy-egy színes körrel van jelölve, melyeknek a színét a megállóhoz tartozó járatok

színe[1] határozza meg.

2.2. Definíciók

- **Gráf:** Formálisan csúcsok és élek halmaza, ahol minden él két csúcsot köt össze. Az alkalmazás által használt modellben a közlekedési hálózatot egy irányított, súlyozott gráffal modellezzük, így "gráf" alatt a továbbiakban ezt értjük, amennyiben mást nem jelzünk.

- **Csúcs:** A gráf eleme, mely egy megállót jelképez. A továbbiakban a "csúcs" és a "megálló" kifejezések egymás szinonimájaként értendőek, kontextustól függően használjuk őket. A csúcsokhoz egyedi azonosítók tartoznak, melyek a forrásadatokból származnak, és az azonos nevű megállókat megkülönböztetését segíthetik elő.

- **Él:** A gráf eleme, mely két csúcsot köt össze. Az élek irányítottak, azaz csak egy irányba utazhatóak; illetve súlyozottak, azaz minden élhez egy súlyt rendelünk, mely az élen való áthaladás költségét jelképezi. Az alkalmazásban két féle él található:

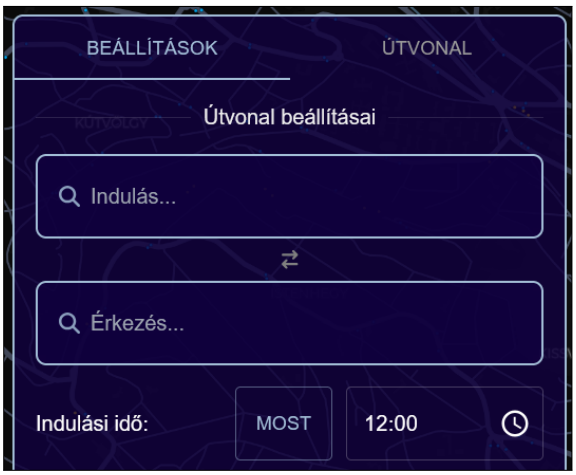
  1. **Utazási él:** Két megálló közötti közvetlen járatot jelképez, melynek a súlya az utazás időtartamának és a járatra való várakozás idejének az összege. Ez utóbbi alól az első utazási él mentesül, hiszen az csak későbbi indulást jelent, nem várakozást.
     Megjegyzés: A program csak olyan járatokat vesz figyelembe, melyekre a várakozási idő nem haladja meg a 60 percet.
  2. **Átszállási él:** Két megálló közötti gyaloglást jelképez, melynek a súlya a $1\text{perc} + 1\frac{\text{másodperc}}{\text{méter}}$ képlet alapján számolódik, vagyis minden átszállás alapsúlya 1 perc, ehhez adódik annyi másodperc, amennyi méter az utak közötti távolság légvonalban.
     Megjegyzés: Amennyiben az útvonal első éle átszállási él, annak 0 a súlya — ez azért van, mert könnyű az azonos nevű és egy helyen lévő megállókat összekeverni választáskor, és ezzel a módszerrel akadályozza meg a

[1] A színek a közlekedési társaságok által használt, közismert színek (pl. a villamosok sárgák, a trolik pirosak).

program azt, hogy egy ilyen hiba miatt hosszabbnak tűnjön az út, mint amilyen valójában.

2.3. Útvonal beállításai

Útvonal tervezéséhez szükség van egy indulási időpont[2], illetve egy kiinduló- és egy úticél megadására. Célpontoknak a térképen szereplő megállók közül kell választani, egyéb koordináta/cím megadása nem lehetséges. Ezeknek a megadására a vezérlőpanel "BEÁLLÍTÁSOK" fülén van lehetőség (2.2).

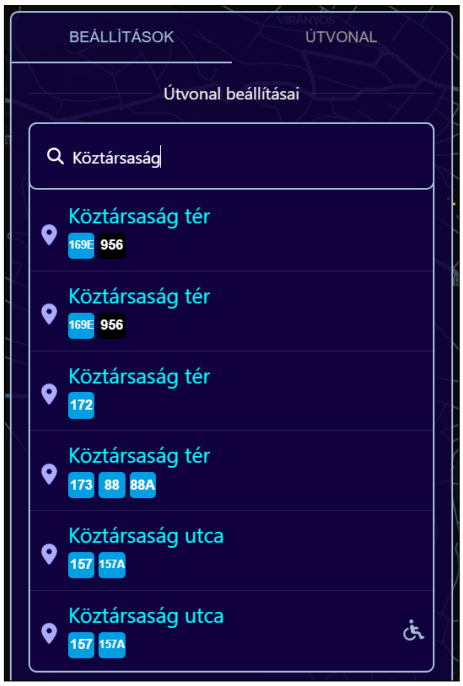


2.2. ábra. Az indulási idő, illetve a kiinduló- és célállomás beállítása

Állomások választásához a megfelelő mezőbe kell írni, majd kattintással kiválasztani a megfelelő megállót — nem elég a nevét beírni, hiszen több, egymástól távoli megálló is rendelkezhet ugyanazzal a névvel (2.3). Megfelelő megálló választásához segítségképpen a listában a megállókból induló járatok is megjelennek az adott megálló neve alatt.

A kiinduló- és célállomás felcserélése a két beviteli mező közti dupla nyílra kattintva lehetséges (2.2).

[2]Az indulási idő budapesti időzóna szerint értendő, az alapértelmezett értéke az aktuális helyi idő.



2.3. ábra. Az egyik *Köztársaság tér* nevű megálló Törökbálinton, a másik Pécelen található

A térképen az egeret egy megálló fölé helyezve megjelenik annak a neve (2.4); ez segítséget nyújthat, ha nem ismerjük a célpontunk közelében lévő megállók nevét.

2.4. ábra. A kurzor alatt lévő megálló neve egy információs buborékban jelenik meg

2.4. Algoritmus kiválasztása

2.4.1. Választható algoritmusok

Az útvonalkereséshez négy különböző algoritmus használható, ezekről részletesebben a **??**. fejezetben olvashatunk.

Áttekintés az algoritmusokról	
Suspendisse potenti	*Lorem ipsum dolor sit amet*
BFS	A "Breadth-First Search", azaz szélességi gráfbejárás egy soralapú algoritmus, ahol az újonnan felfedezett megállók egy sor (FIFO adatszerkezet) végére kerülnek be, így először az 1 megálló távolságra lévő megállók kerülnek felfedezésre, majd a 2, stb. . Az algoritmus alapvetően súlyozatlan gráfokon operál, súlyozott gráfokra való alkalmazásakor is figyelmen kívül hagyja az élek súlyát. Ennek következtében az útkeresés eredményeként garantáltan a legkevesebb megállóból álló utat kapjuk meg, attól függetlenül, hogy az adott út mennyi időbe telik. Ennek az algoritmusnak a futásideje egy hagyományos gráfon a legrosszabb esetben $O(\|V\|+\|E\|)$, ahol V a csúcsok, E az élek száma a gráfban.

Suspendisse potenti	*Lorem ipsum dolor sit amet*
Dijkstra-algoritmus	Az algoritmus a feltalálójáról, Edsger W. Dijkstra informatikusról kapta a nevét, és egy súlyozott gráfban keresi meg a legkisebb súlyú utat egy kiindulópontból az összes többi csúcsba. Az algoritmus a BFS-sel szemben egy prioritási sort használ, ahol a sor elemei a gráf csúcsai, és súly szerinti sorrendben kerülnek feldolgozásra. (Egy-egy csúcs súlya jelen esetben a kezdőállomásból való utazási távolságnak felel meg.) Az alkalmazásban elérhető algoritmusok közül ez az egyetlen, amely garantálja a legrövidebb utazási időt, viszont futásidőben a prioritási sor manipulálásának a komplexitásának[3] következtében az algoritmus komplexitása is magasabb a BFS-hez képest. Az algoritmus futásideje egy hagyományos gráfon a legrosszabb esetben $O((\|V\| + \|E\|) \log \|V\|)$.
Mohó algoritmus	A mohó algoritmus a Dijkstra-algoritmushoz hasonlóan egy prioritásos soron alapul, azonban bevezeti a heurisztika fogalmát. A heurisztika egy olyan függvény, amely egy "megérzést" ad egy adott csúcsról, azaz megbecsüli, hogy az adott csúcs mennyire jó választás lehet a következő lépésben. Ebben az alkalmazásban ennek az implementációja a csúcs távolsága a célállomástól, a Föld felszínén egyenes vonalban utazott méterekben mérve[4]. Az algoritmus a prioritási sorban a heurisztika értéke szerinti sorrendben dolgozza fel a csúcsokat, így általában sokkal gyorsabban eljut a célállomásba, viszont a BFS-hez hasonlóan ez sem veszi figyelembe az utazási időt, így praktikus használatra általában nem alkalmas. Az algoritmus futásideje egy hagyományos gráfon a legrosszabb esetben $O((\|V\|+\|E\|) \log \|V\|)$.

[3]Az alkalmazás egy kupaccal implementálja a prioritási sort, így egy elem beillesztésének és eltávolításának a komplexitása legrosszabb esetben egyaránt $O(\log n)$.

[4]A képlet nem ugyan nem veszi figyelembe a tengerszint feletti magasságot, de ez Budapesten és környékén nem tesz drasztikus különbséget, így elfogadjuk közelítésnek.

Suspendisse potenti	*Lorem ipsum dolor sit amet*
A algoritmus*	Az A* algoritmus egy továbbfejlesztett mohó algoritmus, amely a Dijkstra-algoritmus és a mohó algoritmus előnyeit igyekszik ötvözni. Az algoritmus a csúcsok súlyát (azaz a kezdőállomástól való utazási időt) és a heurisztikát (a csúcs távolságát a célállomástól) együtt veszi figyelembe a prioritási sorban, így a legjobb választásnak tűnő csúcsokat feldolgozva igyekszik a lehető leggyorsabban eljutni a célállomásba. A* algoritmus választásakor módunk van megadni egy súlyozó faktort, amellyel a heurisztika értékét szorozzuk, így az algoritmus viselkedését befolyásolhatjuk. Alacsonyabb szorzó esetén a Dijkstra-algoritmusra hasonlító viselkedést kapunk (lassabb futásidő, de rövidebb út), magasabb szorzó esetén a mohó algoritmushoz hasnlót (gyorsabb futásidő, de könnyebben eltér a legrövidebb úttól). Az alapértelmezett szorzó 1, de saját tapasztalataim szerint a $0.3 - 0.5$ körüli súly jó egyensúlyt biztosít a futásidő és a "használható" eredmény között. Az algoritmus futásideje egy hagyományos gráfon a legrosszabb esetben $O((\|V\| + \|E\|) \log \|V\|)$.

2.1. táblázat. Praesent ullamcorper consequat tellus ut eleifend

Áttekintés az algoritmusokról:

1. **BFS**: A "Breadth-First Search", azaz szélességi gráfbejárás egy soralapú algoritmus, ahol az újonnan felfedezett megállók egy sor (FIFO adatszerkezet) végére kerülnek be, így először az 1 megálló távolságra lévő megállók kerülnek felfedezésre, majd a 2, stb. . Az algoritmus alapvetően súlyozatlan gráfokon operál, súlyozott gráfokra való alkalmazásakor is figyelmen kívül hagyja az élek súlyát. Ennek következtében az útkeresés eredményeként garantáltan a legkevesebb megállóból álló utat kapjuk meg, attól függetlenül, hogy az adott út mennyi időbe telik. Ennek az algoritmusnak a futásideje egy hagyományos

gráfon a legrosszabb esetben $O(|V| + |E|)$, ahol V a csúcsok, E az élek száma a gráfban.

2. **Dijkstra-algoritmus**: Az algoritmus a feltalálójáról, Edsger W. Dijkstra informatikusról kapta a nevét, és egy súlyozott gráfban keresi meg a legkisebb súlyú utat egy kiindulópontból az összes többi csúcsba. Az algoritmus a BFS-sel szemben egy prioritási sort használ, ahol a sor elemei a gráf csúcsai, és súly szerinti sorrendben kerülnek feldolgozásra. (Egy-egy csúcs súlya jelen esetben a kezdőállomásból való utazási távolságnak felel meg.) Az alkalmazásban elérhető algoritmusok közül ez az egyetlen, amely garantálja a legrövidebb utazási időt, viszont futásidőben a prioritási sor manipulálásának a komplexitásának[5] következtében az algoritmus komplexitása is magasabb a BFS-hez képest. Az algoritmus futásideje egy hagyományos gráfon a legrosszabb esetben $O((|V| + |E|) \log |V|)$.

3. **Mohó algoritmus**: A mohó algoritmus a Dijkstra-algoritmushoz hasonlóan egy prioritásos soron alapul, azonban bevezeti a heurisztika fogalmát. A heurisztika egy olyan függvény, amely egy "megérzést" ad egy adott csúcsról, azaz megbecsüli, hogy az adott csúcs mennyire jó választás lehet a következő lépésben. Ebben az alkalmazásban ennek az implementációja a csúcs távolsága a célállomástól, a Föld felszínén egyenes vonalban utazott méterekben mérve[6]. Az algoritmus a prioritási sorban a heurisztika értéke szerinti sorrendben dolgozza fel a csúcsokat, így általában sokkal gyorsabban eljut a célállomásba, viszont a BFS-hez hasonlóan ez sem veszi figyelembe az utazási időt, így praktikus használatra általában nem alkalmas. Az algoritmus futásideje egy hagyományos gráfon a legrosszabb esetben $O((|V| + |E|) \log |V|)$.

4. **A* algoritmus**: Az A* algoritmus egy továbbfejlesztett mohó algoritmus, amely a Dijkstra-algoritmus és a mohó algoritmus előnyeit igyekszik ötvözni. Az algoritmus a csúcsok súlyát (azaz a kezdőállomástól való utazási időt) és a heurisztikát (a csúcs távolságát a célállomástól) együtt veszi figyelembe a prioritási sorban, így a legjobb választásnak tűnő csúcsokat feldolgozva igyekszik a lehető leggyorsabban eljutni a célállomásba. A* algoritmus választásakor mó-

[5]Az alkalmazás egy kupaccal implementálja a prioritási sort, így egy elem beillesztésének és eltávolításának a komplexitása legrosszabb esetben egyaránt $O(\log n)$.

[6]A képlet nem ugyan nem veszi figyelembe a tengerszint feletti magasságot, de ez Budapesten és környékén nem tesz drasztikus különbséget, így elfogadjuk közelítésnek.

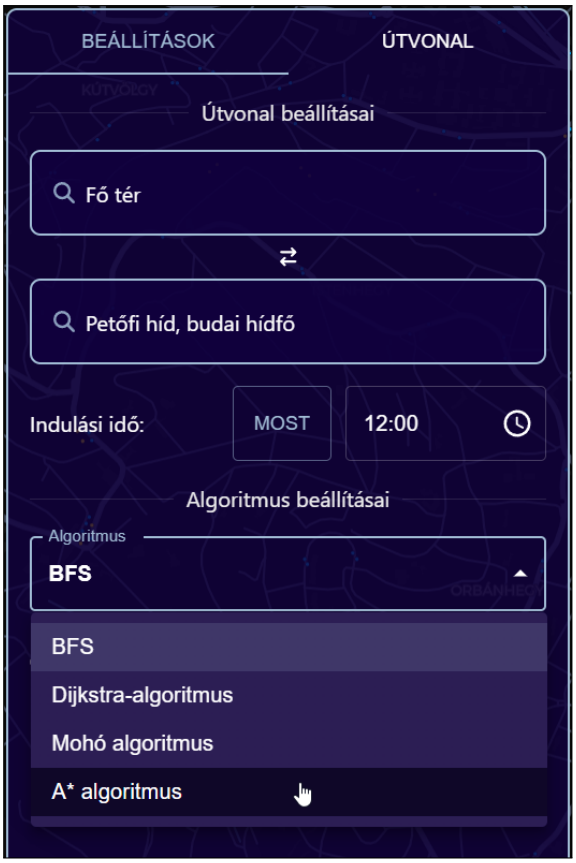
dunk van megadni egy súlyozó faktort, amellyel a heurisztika értékét szorozzuk, így az algoritmus viselkedését befolyásolhatjuk. Alacsonyabb szorzó esetén a Dijkstra-algoritmusra hasonlító viselkedést kapunk (lassabb futásidő, de rövidebb út), magasabb szorzó esetén a mohó algoritmushoz hasnlót (gyorsabb futásidő, de könnyebben eltér a legrövidebb úttól). Az alapértelmezett szorzó 1, de saját tapasztalataim szerint a $0.3 - 0.5$ körüli súly jó egyensúlyt biztosít a futásidő és a "használható" eredmény között. Az algoritmus futásideje egy hagyományos gráfon a legrosszabb esetben $O((|V| + |E|) \log |V|)$.

Röviden összefoglalva:

- **BFS:** Legkevesebb megállóból álló útvonalat ad, de nem veszi figyelembe az utazási időt.
- **Dijkstra:** Garantáltan a legrövidebb utazási időt adja, de magasabb futásidővel jár.
- **Mohó:** Általában jelentősen gyorsabb a futásideje, de sem az utazási időt, sem az utazott megállók számát nem veszi figyelembe.
- **A*:** Kompromisszum a Dijkstra és a mohó algoritmus között, súlyozó faktorral befolyásolhatjuk a viselkedését.

2.4.2. Algoritmusok beállításai

Az alapértelmezett algoritmus a BFS. Ezt az útvonal beállításai alatt, úgyszintén a vezérlőpanel "BEÁLLÍTÁSOK" fülén lehet megváltoztatni (2.5).



2.5. ábra. Az elérhető algoritmusok listája

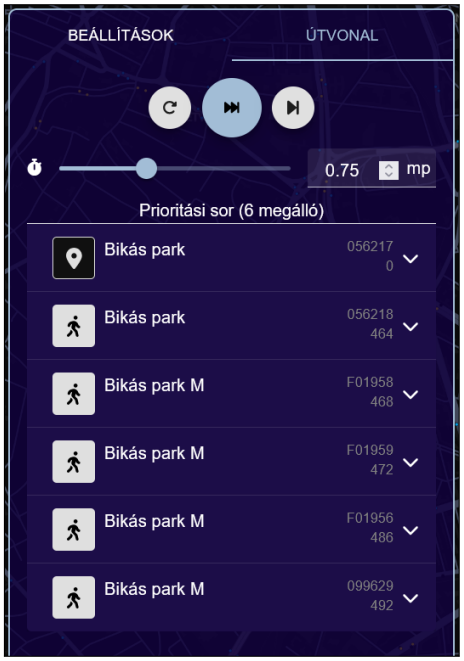
Választott algoritmustól függetlenül beállítható az is, hogy mi a maximális sétáló távolság, amin belül az alkalmazás felajánl átszállásokat. Ennek az alapértelmezett értéke 150 méter, ami tapasztalataim szerint általában elég azonos nevű, egy csoportban lévő megállók közti átszálláshoz.

Amennyiben a választott algoritmus az A*, akkor a heurisztika súlyozó faktora is beállítható, mely alapértelmezetten 1 (2.6).

2.6. ábra. A beállításokat információs buborékok magyarázzák

2.5. Útvonal tervezése

Amennyiben megtörtént a kezdő- és célállomás megadása, illetve az algoritmust és annak paraméter(ei)t is beállítottuk, megkezdődhet az útvonal tervezése. Ez a vezérlőpanel "ÚTVONAL" fülén történik, mely érvényes beállítások megadása után válik kattinthatóvá (2.7).



2.7. ábra. Az algoritmus alapállapota az "ÚTVONAL" fülön

2.5.1. Az algoritmus futtatása

A fül tetején az algoritmus léptetésére szolgáló gombok találhatók, melyek a következők:

- **Újraindítás**: Az algoritmus visszaállítása a kezdőállapotba.
- **Futtatás**: Az algoritmus addig fut, amíg el nem éri a célállomást. Amíg az algoritmus fut, a többi gomb nem érhető el, ez pedig átváltozik **Szüneteltetés** gombbá, ami leállítja az algoritmust.
- **Léptetés**: Az algoritmus egy lépéssel halad előre, majd megáll.

Ezek alatt egy csúszka található, amelyen azt állíthatjuk be, hogy az algoritmus léptetéskor mennyit várakozik két lépés között. Az alapértelmezett értéke 0.75 másodperc. *Megjegyzés: Természetesen lehetséges, hogy egy csúcs feldolgozása tovább tart a várakozási időnél, különösen alacsony értékek esetén.*

2.5.2. Az algoritmus állapota

Amíg az algoritmus nem talált utat a célállomásba, addig a fent említett irányítógombok alatt láthatóak azok a megállók (és olyan sorrendben), amiket az algoritmus következőként fog feldolgozni. A megállók melletti ikon(ok) jelzik, hogy az adott megállóhoz milyen úton érkeztünk. Indulóállomás ez az ikon egy sötét háttéren lévő helyjelző pont, átszállási él esetén egy gyalogló ember, utazási él esetén pedig a járat ikonja és száma látható (2.8).

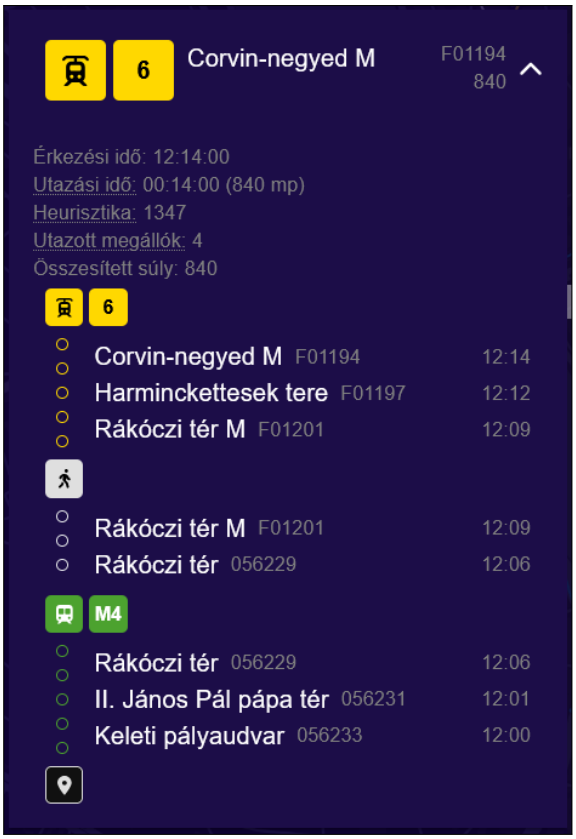
(a) Indulóállomás ikonja (b) Átszállási él ikonja (c) Utazási él ikonjai

2.8. ábra. A megállók ikonjai azt jelzik, hogy milyen úton érkeztünk az adott csúcsba

Egy-egy megállóra kattintva lenyílik egy további részleteket tartalmazó információs doboz, melyben az adott megállóhoz való érkezés ideje, az odáig megtett út ideje, a csúcs heurisztikája (távolsága a célállomástól méterben), az útban lévő

utazási élek száma, illetve a csúcs súlya látható (2.9). Ez utóbbi az algoritmustól függően van a fentiek alapján kiszámítva.

Ezeken az információkon kívül a dobozban a megállóig tartó út is látható, mely a megállók neveit, azonoítóját, és az utazás módját jelölő ikonokat tartalmazza.



2.9. ábra. A megálló részletes információi

Lorem ipsum dolor sit amet $\mathbb{N}$, consectetur adipiscing elit. Duis nibh leo, dapibus in elementum nec, aliquet id sem. Suspendisse potenti. Nullam sit amet consectetur nibh. Donec scelerisque varius turpis at tincidunt. Cras a diam in mauris viverra vehicula. Vivamus mi odio, fermentum vel arcu efficitur, lacinia viverra nibh. Aliquam aliquam ante mi, vel pretium arcu dapibus eu. Nulla finibus ante vel arcu tincidunt, ut consectetur ligula finibus. Mauris mollis lectus sed ipsum bibendum, ac ultrices erat dictum. Suspendisse faucibus euismod lacinia $\mathbb{Z}$.

2.6. Felsorolások

Etiam vel odio ante. Etiam pulvinar nibh quis massa auctor congue. Pellentesque quis odio vitae sapien molestie vestibulum sit amet et quam. Pellentesque vel dui

eget enim hendrerit finibus at sit amet libero. Quisque sollicitudin ultrices enim, nec porta magna imperdiet vitae. Cras condimentum nunc dui, eget molestie nunc accumsan vel.

- Fusce in aliquet neque, in pretium sem.
- Donec tincidunt tellus id lectus pretium fringilla.
- Nunc faucibus, erat pretium tempus tempor, tortor mi fringilla neque, ac congue ex dui vitae mauris.

Donec dapibus sodales ante, at scelerisque nunc laoreet sit amet. Mauris porttitor tincidunt neque, vel ullamcorper neque pulvinar et. Integer eu lorem euismod, faucibus lectus sed, accumsan felis. Nunc ornare mi at augue vulputate, eu venenatis magna mollis. Nunc sed posuere dui, et varius nulla. Sed mollis nibh augue, eget scelerisque eros ornare nec.

1. Donec pretium et quam a cursus. Ut sollicitudin tempus urna et mollis.
2. Aliquam et aliquam turpis, sed fermentum mauris. Nulla eget ex diam.
3. Donec eget tellus pharetra, semper neque eget, rutrum diam 1. lépés.

Praesent porta, metus eget eleifend consequat, eros ligula eleifend ex, a pellentesque mi est vitae urna. Vivamus turpis nunc, iaculis non leo eget, mattis vulputate tellus. Maecenas rutrum eros sem, pharetra interdum nulla porttitor sit amet. In vitae viverra ante. Maecenas sit amet placerat orci, sed tincidunt velit. Vivamus mattis, enim vel suscipit elementum, quam odio venenatis elit[7], et mollis nulla nunc a risus. Praesent purus magna, tristique sed lacus sit amet, convallis malesuada magna.

Vestibulum venenatis malesuada enim, ac auctor erat vestibulum et. Phasellus id purus a leo suscipit accumsan.

Orci varius natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Nullam interdum rhoncus nisl, vel pharetra arcu euismod sagittis. Vestibulum ac turpis auctor, viverra turpis at, tempus tellus.

Morbi dignissim erat ut rutrum aliquet. Nulla eu rutrum urna. Integer non urna at mauris scelerisque rutrum sed non turpis.

[7] Phasellus faucibus varius purus, nec tristique enim porta vitae.

2.6.1. Szoros térközű felsorolások

Phasellus ultricies, sapien sit amet ultricies placerat, velit purus viverra ligula, id consequat ipsum odio imperdiet enim:

1. Maecenas eget lobortis leo.
2. Donec eget libero enim.
3. In eu eros a eros lacinia maximus ullamcorper eget augue.

In quis turpis metus. Proin maximus nibh et massa eleifend, a feugiat augue porta. Sed eget est purus. Duis in placerat leo. Donec pharetra eros nec enim convallis:

- Pellentesque odio lacus.
- Maximus ut nisl auctor.
- Sagittis vulputate lorem.

Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Sed lorem libero, dignissim vitae gravida a, ornare vitae est.

Cras maximus massa commodo pellentesque viverra.

Morbi sit amet ante risus. Aliquam nec sollicitudin mauris

Ut aliquam rhoncus sapien luctus viverra arcu iaculis posuere

2.7. Képek, ábrák

Aliquam vehicula luctus mi a pretium. Nulla quam neque, maximus nec velit in, aliquam mollis tortor. Aliquam erat volutpat. Curabitur vitae laoreet turpis. Integer id diam ligula. Nulla sodales purus id mi consequat, eu venenatis odio pharetra. Cras a arcu quam. Suspendisse augue risus, pulvinar a turpis et, commodo aliquet turpis. Nulla aliquam scelerisque mi eget pharetra. Mauris sed posuere elit, ac lobortis metus. Proin lacinia sit amet diam sed auctor. Nam viverra orci id sapien sollicitudin, a aliquam lacus suscipit, 2.10. ábra:

2.10. ábra. Quisque ac tincidunt leo

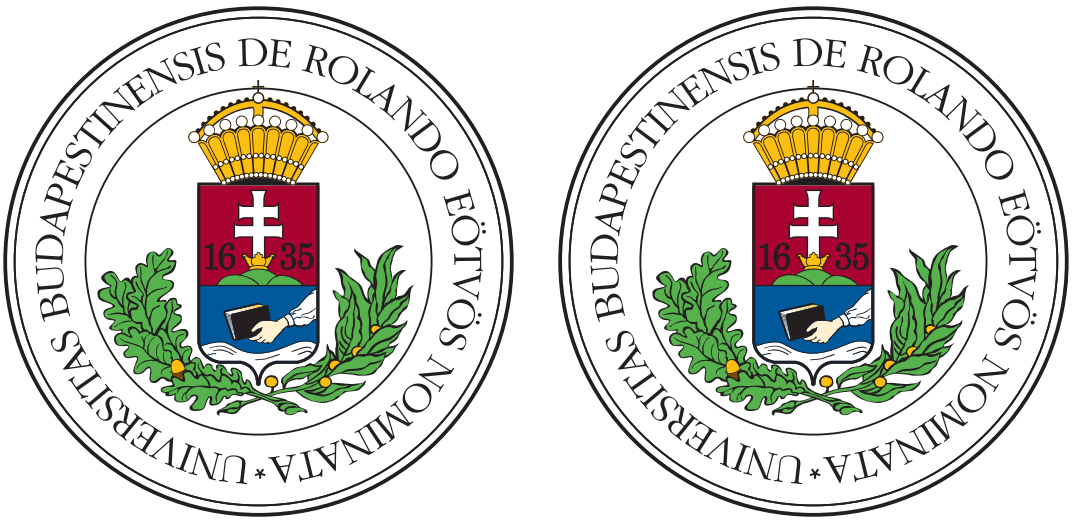
2.7.1. Képek szegélyezése

Ut aliquet nec neque eget fermentum. Cras volutpat tellus sed placerat elementum. Quisque neque dui, consectetur nec finibus eget, blandit id purus. Nam eget ipsum non nunc placerat interdum.

2.11. ábra. Quisque ac tincidunt leo

2.7.2. Képek csoportosítása

In non ipsum fermentum urna feugiat rutrum a at odio. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Nulla tincidunt mattis nisl id suscipit. Sed bibendum ac felis sed volutpat. Nam pharetra nisi nec facilisis faucibus. Aenean tristique nec libero non commodo. Nulla egestas laoreet tempus. Nunc eu aliquet nulla, quis vehicula dui. Proin ac risus sodales, gravida nisi vitae, efficitur neque, 2.12. ábra:



(a) Vestibulum quis mattis urna

(b) Donec hendrerit quis dui sit amet venenatis

2.12. ábra. Aenean porttitor mi volutpat massa gravida

Nam et nunc eget elit tincidunt sollicitudin. Quisque ligula ipsum, tempor vitae tortor ut, commodo rhoncus diam. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Phasellus vehicula quam dui, eu convallis metus porta ac.

2.8. Táblázatok

Nam magna ex, euismod nec interdum sed, sagittis nec leo. Nam blandit massa bibendum mattis tristique. Phasellus tortor ligula, sodales a consectetur vitae, placerat vitae dolor. Aenean consequat in quam ac mollis.

Phasellus tortor	**Aenean consequat**
Sed malesuada	Aliquam aliquam velit in convallis ultrices.
Purus sagittis	Quisque lobortis eros vitae urna lacinia euismod.
Pellentesque	Curabitur ac lacus pellentesque, eleifend sem ut, placerat enim. Ut auctor tempor odio ut dapibus.

2.2. táblázat. Maecenas tincidunt non justo quis accumsan

2.8.1. Sorok és oszlopok egyesítése

Mauris a dapibus lectus. Vestibulum commodo nibh ante, ut maximus magna eleifend vel. Integer vehicula elit non lacus lacinia, vitae porttitor dolor ultrices. Vivamus gravida faucibus efficitur. Ut non erat quis arcu vehicula lacinia. Nulla felis mauris, laoreet sed malesuada in, euismod et lacus. Aenean at finibus ipsum. Pellentesque dignissim elit sit amet lacus congue vulputate.

Quisque	**Suspendisse**		**Aliquam**		**Vivamus**	
	Proin	Nunc	Proin	Nunc	Proin	Nunc
Leo	2,80 MB	100%	232 KB	8,09%	248 KB	8,64%
Vel	9,60 MB	100%	564 KB	5,74%	292 KB	2,97%
Auge	78,2 MB	100%	52,3 MB	66,88%	3,22 MB	4,12%

2.3. táblázat. Vivamus ac arcu fringilla, fermentum neque sed, interdum erat. Mauris bibendum mauris vitae enim mollis, et eleifend turpis aliquet.

2.8.2. Több oldalra átnyúló táblázatok

Nunc porta placerat leo, sit amet porttitor dui porta molestie. Aliquam at fermentum mi. Maecenas vitae lorem at leo tincidunt volutpat at nec tortor. Vivamus

semper lacus eu diam laoreet congue. Vivamus in ipsum risus. Nulla ullamcorper finibus mauris non aliquet. Vivamus elementum rhoncus ex ut porttitor.

3. fejezet

Fejlesztői dokumentáció

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Duis nibh leo, dapibus in elementum nec, aliquet id sem. Suspendisse potenti. Nullam sit amet consectetur nibh. Donec scelerisque varius turpis at tincidunt.

3.1. Tételek, definíciók, megjegyzések

1. Definíció. Mauris tristique sollicitudin ultrices. Etiam tristique quam sit amet metus dictum imperdiet. Nunc id lorem sed nisl pulvinar aliquet vitae quis arcu. Morbi iaculis eleifend porttitor.

Maecenas rutrum eros sem, pharetra interdum nulla porttitor sit amet. In vitae viverra ante. Maecenas sit amet placerat orci, sed tincidunt velit. Vivamus mattis, enim vel suscipit elementum, quam odio venenatis elit, et mollis nulla nunc a risus. Praesent purus magna, tristique sed lacus sit amet, convallis malesuada magna. Phasellus faucibus varius purus, nec tristique enim porta vitae.

1. Tétel. *Nulla finibus ante vel arcu tincidunt, ut consectetur ligula finibus. Mauris mollis lectus sed ipsum bibendum, ac ultrices erat dictum. Suspendisse faucibus euismod lacinia. Etiam vel odio ante.*

Bizonyítás. Etiam pulvinar nibh quis massa auctor congue. Pellentesque quis odio vitae sapien molestie vestibulum sit amet et quam. Pellentesque vel dui eget enim hendrerit finibus at sit amet libero. Quisque sollicitudin ultrices enim, nec porta magna imperdiet vitae. Cras condimentum nunc dui. □

Donec dapibus sodales ante, at scelerisque nunc laoreet sit amet. Mauris porttitor tincidunt neque, vel ullamcorper neque pulvinar et. Integer eu lorem euismod, faucibus lectus sed, accumsan felis.

Emlékeztető. Nunc ornare mi at augue vulputate, eu venenatis magna mollis. Nunc sed posuere dui, et varius nulla. Sed mollis nibh augue, eget scelerisque eros ornare nec. Praesent porta, metus eget eleifend consequat, eros ligula eleifend ex, a pellentesque mi est vitae urna. Vivamus turpis nunc, iaculis non leo eget, mattis vulputate tellus.

Fusce in aliquet neque, in pretium sem. Donec tincidunt tellus id lectus pretium fringilla. Nunc faucibus, erat pretium tempus tempor, tortor mi fringilla neque, ac congue ex dui vitae mauris. Donec pretium et quam a cursus.

Megjegyzés. Aliquam vehicula luctus mi a pretium. Nulla quam neque, maximus nec velit in, aliquam mollis tortor. Aliquam erat volutpat. Curabitur vitae laoreet turpis. Integer id diam ligula.

Ut sollicitudin tempus urna et mollis. Aliquam et aliquam turpis, sed fermentum mauris. Nulla eget ex diam. Donec eget tellus pharetra, semper neque eget, rutrum diam.

3.1.1. Egyenletek, matematika

Duis suscipit ipsum nec urna blandit, $2 + 2 = 4$ pellentesque vehicula quam fringilla. Vivamus euismod, lectus sit amet euismod viverra, dolor metus consequat sapien, ut hendrerit nisl nulla id nisi. Nam in leo eu quam sollicitudin semper a quis velit.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Phasellus mollis, elit sed convallis feugiat, dolor quam dapibus nibh, suscipit consectetur lacus risus quis sem. Vivamus scelerisque porta odio, vitae euismod dolor accumsan ut.

In mathematica, identitatem Euleri (equation est scriptor vti etiam notum) sit aequalitatem 3.1. egyenlet:

$$e^{i \times \pi} + 1 = 0 \tag{3.1}$$

Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia curae; Nullam pulvinar purus at pharetra elementum. Aequationes adsignans

aequationis signum:

$$A = \frac{\pi r^2}{2} \tag{3.2}$$

$$= \frac{1}{2}\pi r^2 \tag{3.3}$$

Proin tempor risus a efficitur condimentum. Cras lobortis ligula non sollicitudin euismod. Fusce non pellentesque nibh, non elementum tellus. Omissa numeratione aliquarum aequationum:

$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_{j=1}^{n} x_j f(u_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j v_i \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.2. Forráskódok

Nulla sodales purus id mi consequat, eu venenatis odio pharetra. Cras a arcu quam. Suspendisse augue risus, pulvinar a turpis et, commodo aliquet turpis. Nulla aliquam scelerisque mi eget pharetra. Mauris sed posuere elit, ac lobortis metus. Proin lacinia sit amet diam sed auctor. Nam viverra orci id sapien sollicitudin, a aliquam lacus suscipit. Quisque ac tincidunt leo 3.1. és 3.2. forráskód:

```
#include <stdio>

int main()
{
  int c;
  std::cout << "Hello World!" << std::endl;

  std::cout << "Press any key to exit." << std::endl;
  std::cin >> c;

  return 0;
}
```

3.1. forráskód. Hello World in C++

```
using System;
namespace HelloWorld
{
  class Hello
  {
    static void Main()
    {
      Console.WriteLine("Hello World!");

      Console.WriteLine("Press any key to exit.");
      Console.ReadKey();
    }
  }
}
```

3.2. forráskód. Hello World in C#

3.2.1. Algoritmusok

Az 1. algoritmus egy általános elágazás és korlátozás algoritmust (*Branch and Bound algorithm*) mutat be. A 3. lépésben egy megfelelő kiválasztási szabályt kell alkalmazni. Példa forrása: Acta Cybernetica (ez egy hiperlink).

1. algoritmus A general interval B&B algorithm

Funct IBB(S, f)

1: Set the working list $\mathcal{L}_W := \{S\}$ and the final list $\mathcal{L}_Q := \{\}$
2: **while** ($\mathcal{L}_W \neq \emptyset$) **do**
3: Select an interval X from $\mathcal{L}_W$ ▷ Selection rule
4: Compute $lbf(X)$ ▷ Bounding rule
5: **if** X cannot be eliminated **then** ▷ Elimination rule
6: Divide X into X^j, $j = 1, \ldots, p$, subintervals ▷ Division rule
7: **for** $j = 1, \ldots, p$ **do**
8: **if** X^j satisfies the termination criterion **then** ▷ Termination rule
9: Store X^j in $\mathcal{L}_W$
10: **else**
11: Store X^j in $\mathcal{L}_W$
12: **end if**
13: **end for**
14: **end if**
15: **end while**
16: **return** $\mathcal{L}_Q$

4. fejezet

Összegzés

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. In eu egestas mauris. Quisque nisl elit, varius in erat eu, dictum commodo lorem. Sed commodo libero et sem laoreet consectetur. Fusce ligula arcu, vestibulum et sodales vel, venenatis at velit. Aliquam erat volutpat. Proin condimentum accumsan velit id hendrerit. Cras egestas arcu quis felis placerat, ut sodales velit malesuada. Maecenas et turpis eu turpis placerat euismod. Maecenas a urna viverra, scelerisque nibh ut, malesuada ex.

Aliquam suscipit dignissim tempor. Praesent tortor libero, feugiat et tellus porttitor, malesuada eleifend felis. Orci varius natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Nullam eleifend imperdiet lorem, sit amet imperdiet metus pellentesque vitae. Donec nec ligula urna. Aliquam bibendum tempor diam, sed lacinia eros dapibus id. Donec sed vehicula turpis. Aliquam hendrerit sed nulla vitae convallis. Etiam libero quam, pharetra ac est nec, sodales placerat augue. Praesent eu consequat purus.

Köszönetnyilvánítás

Amennyiben a szakdolgozati / diplomamunka projekted pénzügyi támogatást kapott egy projektből vagy az egyetemtől, jellemzően kötelező feltüntetni a dolgozatban is. A dolgozat elkészítéséhez segítséget nyújtó oktatók, hallgatótársak, kollégák felé is nyilvánítható külön köszönet.

A. függelék

Szimulációs eredmények

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Pellentesque facilisis in nibh auctor molestie. Donec porta tortor mauris. Cras in lacus in purus ultricies blandit. Proin dolor erat, pulvinar posuere orci ac, eleifend ultrices libero. Donec elementum et elit a ullamcorper. Nunc tincidunt, lorem et consectetur tincidunt, ante sapien scelerisque neque, eu bibendum felis augue non est. Maecenas nibh arcu, ultrices et libero id, egestas tempus mauris. Etiam iaculis dui nec augue venenatis, fermentum posuere justo congue. Nullam sit amet porttitor sem, at porttitor augue. Proin bibendum justo at ornare efficitur. Donec tempor turpis ligula, vitae viverra felis finibus eu. Curabitur sed libero ac urna condimentum gravida. Donec tincidunt neque sit amet neque luctus auctor vel eget tortor. Integer dignissim, urna ut lobortis volutpat, justo nunc convallis diam, sit amet vulputate erat eros eu velit. Mauris porttitor dictum ante, commodo facilisis ex suscipit sed.

Sed egestas dapibus nisl, vitae fringilla justo. Donec eget condimentum lectus, molestie mattis nunc. Nulla ac faucibus dui. Nullam a congue erat. Ut accumsan sed sapien quis porttitor. Ut pellentesque, est ac posuere pulvinar, tortor mauris fermentum nulla, sit amet fringilla sapien sapien quis velit. Integer accumsan placerat lorem, eu aliquam urna consectetur eget. In ligula orci, dignissim sed consequat ac, porta at metus. Phasellus ipsum tellus, molestie ut lacus tempus, rutrum convallis elit. Suspendisse arcu orci, luctus vitae ultricies quis, bibendum sed elit. Vivamus at sem maximus leo placerat gravida semper vel mi. Etiam hendrerit sed massa ut lacinia. Morbi varius libero odio, sit amet auctor nunc interdum sit amet.

Aenean non mauris accumsan, rutrum nisi non, porttitor enim. Maecenas vel tortor ex. Proin vulputate tellus luctus egestas fermentum. In nec lobortis risus,

sit amet tincidunt purus. Nam id turpis venenatis, vehicula nisl sed, ultricies nibh. Suspendisse in libero nec nisi tempor vestibulum. Integer eu dui congue enim venenatis lobortis. Donec sed elementum nunc. Nulla facilisi. Maecenas cursus id lorem et finibus. Sed fermentum molestie erat, nec tempor lorem facilisis cursus. In vel nulla id orci fringilla facilisis. Cras non bibendum odio, ac vestibulum ex. Donec turpis urna, tincidunt ut mi eu, finibus facilisis lorem. Praesent posuere nisl nec dui accumsan, sed interdum odio malesuada.

Irodalomjegyzék

[1] O. J. Dahl, E. W. Dijkstra és C. A. R. Hoare, szerk. *Structured Programming*. London, UK, UK: Academic Press Ltd., 1972. ISBN: 0-12-200550-3.

[2] Thomas H. Cormen és tsai. *Introduction to Algorithms, Third Edition*. 3rd. The MIT Press, 2009. ISBN: 978-0-262-53305-8.

[3] Glenn E. Krasner és Stephen T. Pope. „A Cookbook for Using the Model-View-Controller User Interface Paradigm in Smalltalk-80". *J. Object Oriented Program.* 1.3 (1988. aug.), 26–49. old. ISSN: 0896-8438. URL: `http://dl.acm.org/citation.cfm?id=50757.50759`.

[4] E. Dijkstra. „Classics in Software Engineering". Szerk. Edward Nash Yourdon. Upper Saddle River, NJ, USA: Yourdon Press, 1979. Go to Statement Considered Harmful fej., 27–33. old. ISBN: 0-917072-14-6. URL: `http://dl.acm.org/citation.cfm?id=1241515.1241518`.

Ábrák jegyzéke

Táblázatok jegyzéke

Algoritmusjegyzék

Forráskódjegyzék