

Gibt es eine Solitonen-Lösung der 2D Gross-Pitaevskii-Gleichung?

Eine Simulation in der QuantumOptics.jl Toolbox

Bernhard Ertel

Universität Innsbruck

Bose-Einstein-Kondensat

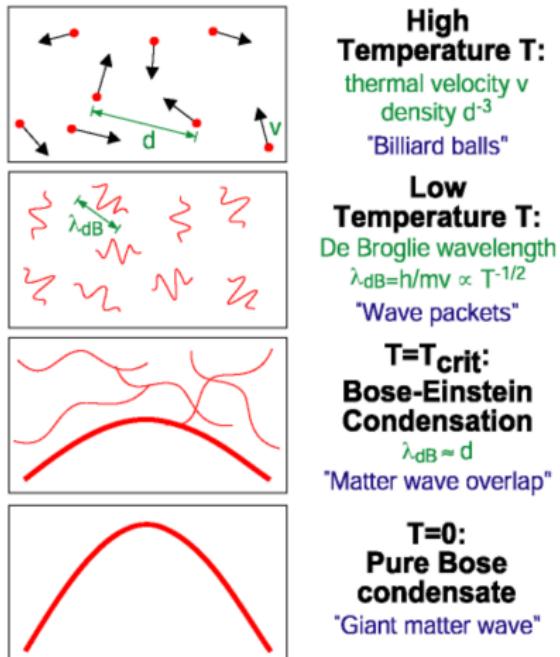


Abbildung 1: Von Gas zum Bose-Einstein-Kondensat.¹

¹https://www.theorie.physik.uni-muenchen.de/lsfrey/teaching/archiv/sose_05/aktiv/vorlesung/BoseEinsteinKondensation.pdf

Bose-Einstein-Kondensat

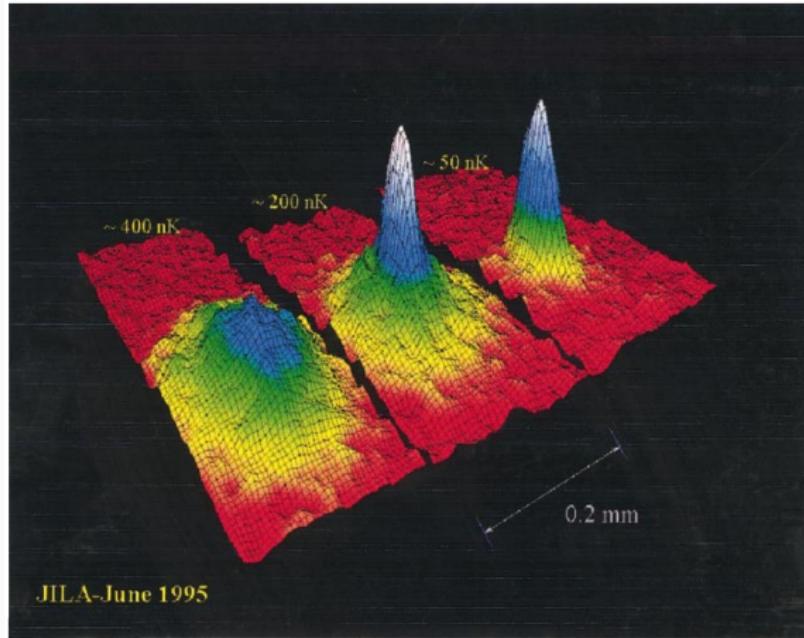


Abbildung 2: Erster experimenteller Nachweis von BEK.²

²E. A. Cornell and C. E. Wieman. Nobel lecture: Bose-Einstein condensation in a dilute gas, the first 70 years and some recent experiments. *Reviews of Modern Physics*, 74(3):875893, 2002

zeitabhängige Gross-Pitaevskii-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(r, t) + g|\Psi(r, t)|^2 \right) \Psi(r, t)$$

\hbar = reduziertes Planck'sches Wirkungsquantum

$\Psi(r, t)$ = klassische Wellenfunktion

∇ = Nabla-Operator

m = Teilchenmasse

$V_{\text{ext}}(r, t)$ = externes Potential

g = Kopplungsfaktor

Gross-Pitaevskii-Gleichung

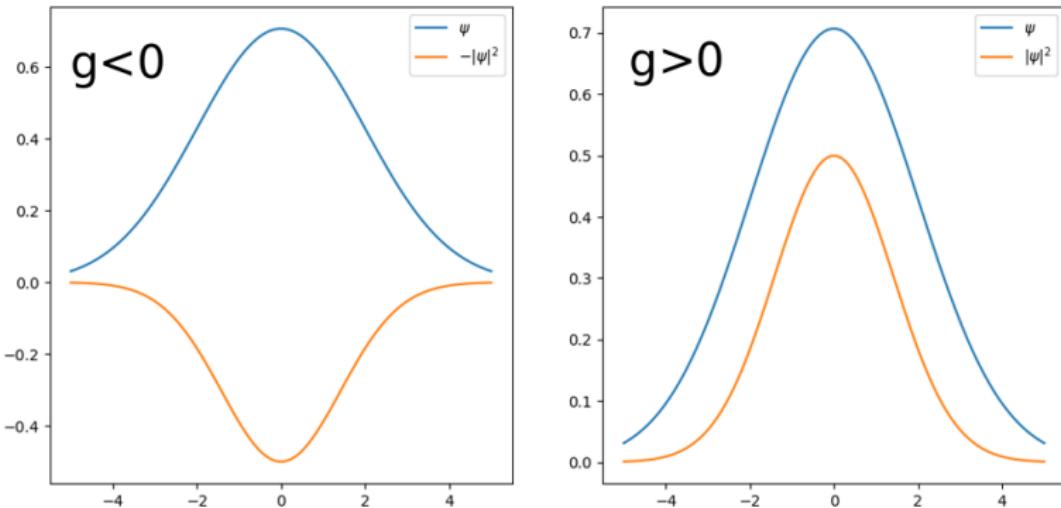


Abbildung 3: $V_{\text{eff}} = \pm |\Psi(x)|^2$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{\sigma}} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

σ = Halbwertsbreite



Abbildung 4: Kanal in Schottland³

³<https://the-gist.org/2012/07/how-a-scottish-naval-engineer-and-his-horse-discovered-solitons/>

Gibt es eine Solitonen-Lösung der
2D Gross-Pitaevskii-Gleichung?



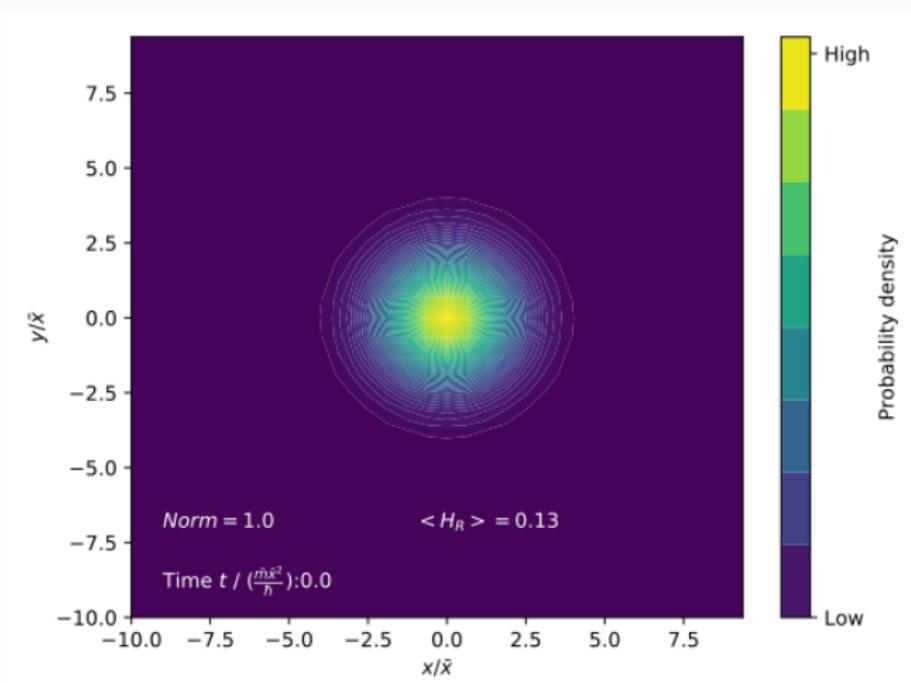
A Julia Framework for Open Quantum Dynamics⁴

⁴<https://qojulia.org/>

Simulation in QuantumOptics.jl

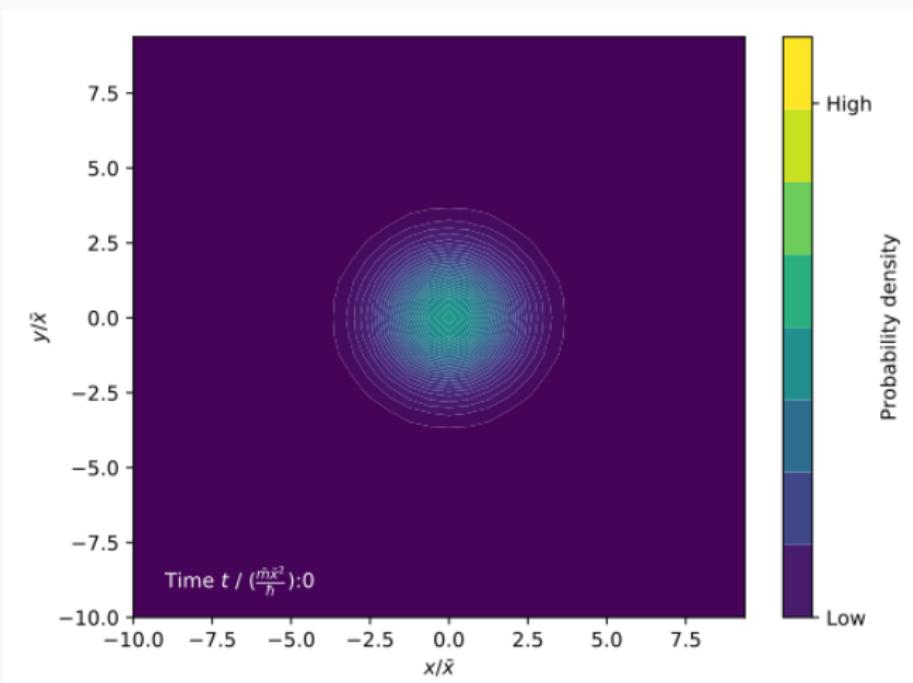
```
...
H0 = LazySum(Hkinx_FFT, Hkiny_FFT, HΨ)
...
function H(t, Ψ)
    HΨ.data.nzval .=g/dx*abs2.(Ψ.data)
    return H0
end
...
Ψ =normalize(Ψx ⊗ Ψy)
...
T = [0:1:100;]
tout, Ψt =timeevolution.schroedinger_dynamic(T, Ψ, H)
density = [reshape(abs2.(Ψ.data), (x_steps, y_steps))' for Ψ=Ψt]
...
```

Ergebnisse - klassische Schrödingergleichung



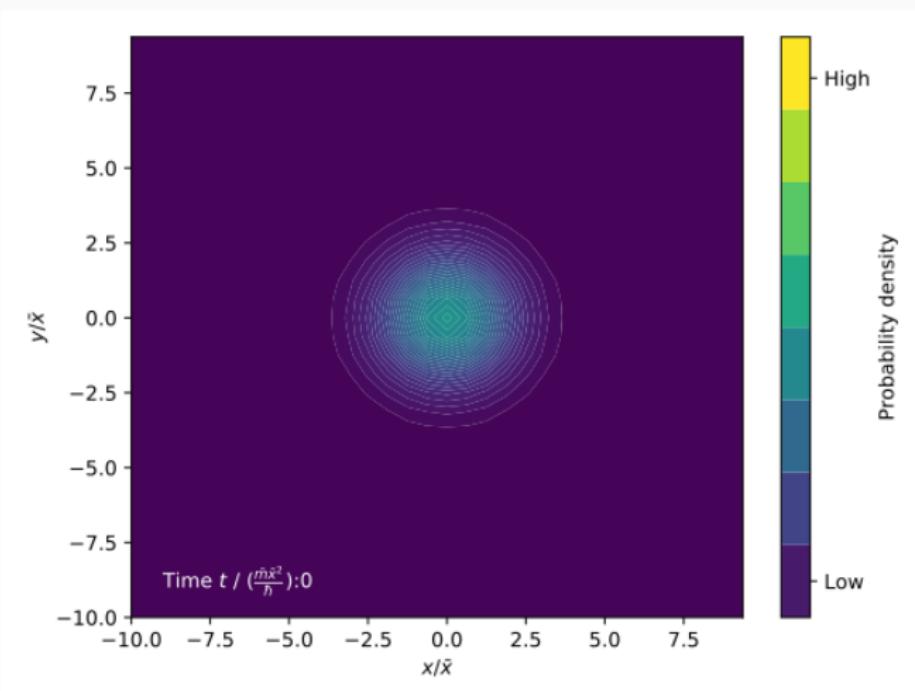
$$g = 0 ; \sigma = 2$$

Ergebnisse - 1 Soliton läuft auseinander



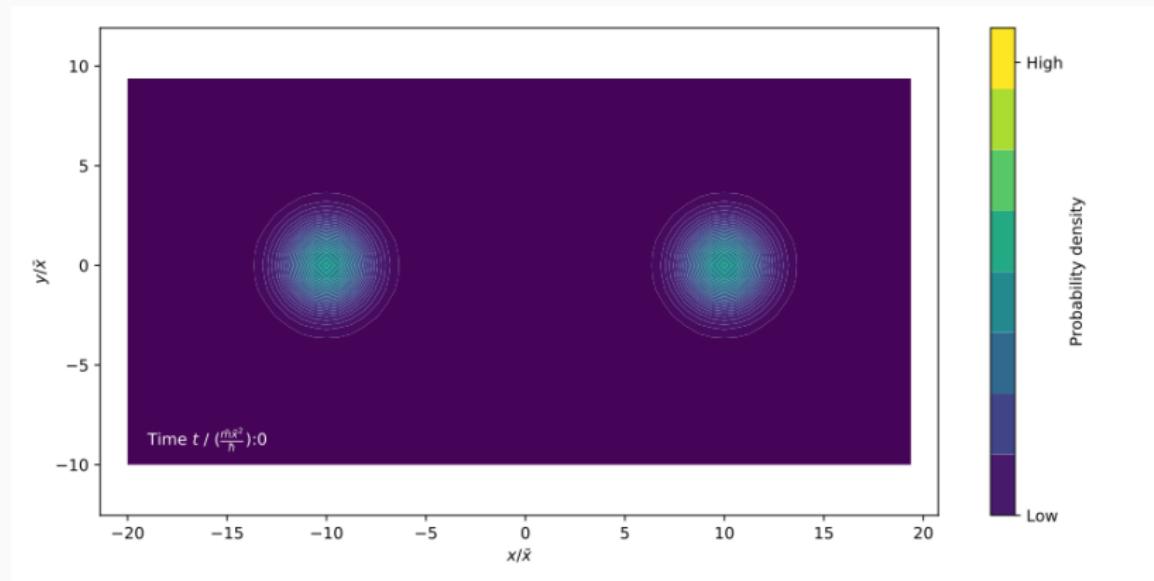
$$g = -9, 45 ; \sigma = 2$$

Ergebnisse - 1 Soliton kollabiert



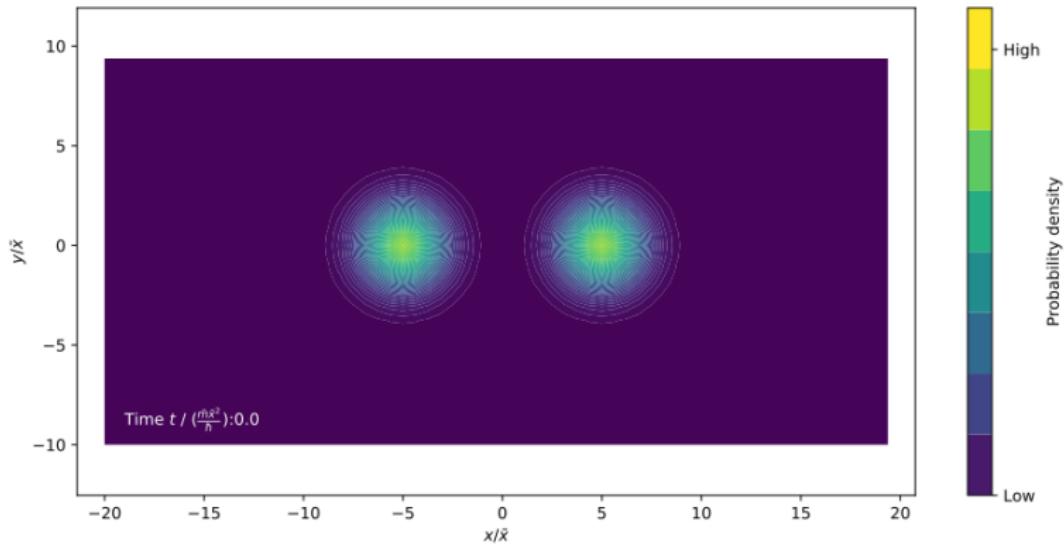
$$g = -9, 5 ; \sigma = 2$$

Ergebnisse - 2 Solitonen quasistabil



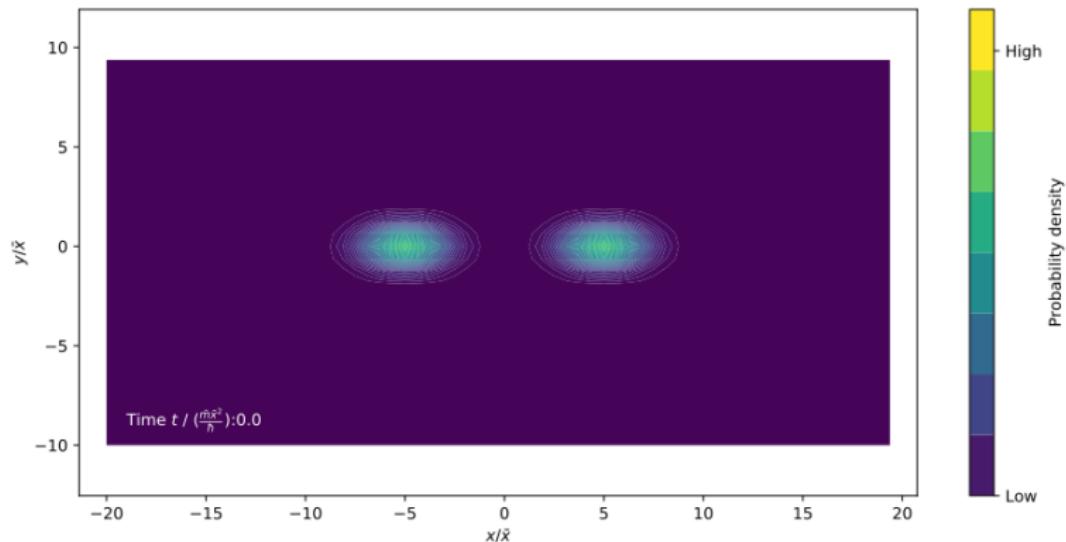
$$g = -19 ; \sigma = 2$$

Ergebnisse - 2 Solitonen-Stoss



$$g = -22; \sigma = 2$$

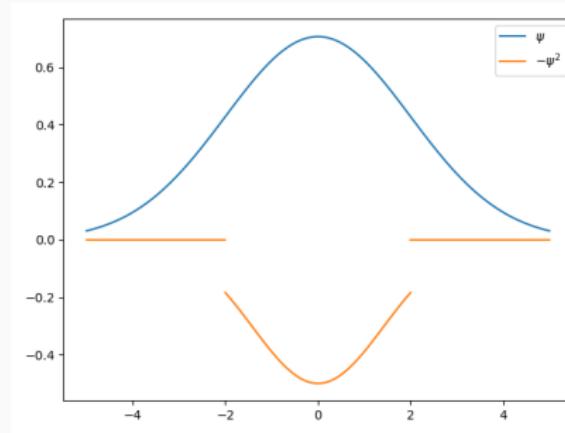
Ergebnisse - 2 Solitonen-Stoss Sigma unterschiedlich



$$g = -26 ; \sigma_x = 2 ; \sigma_y = 1$$

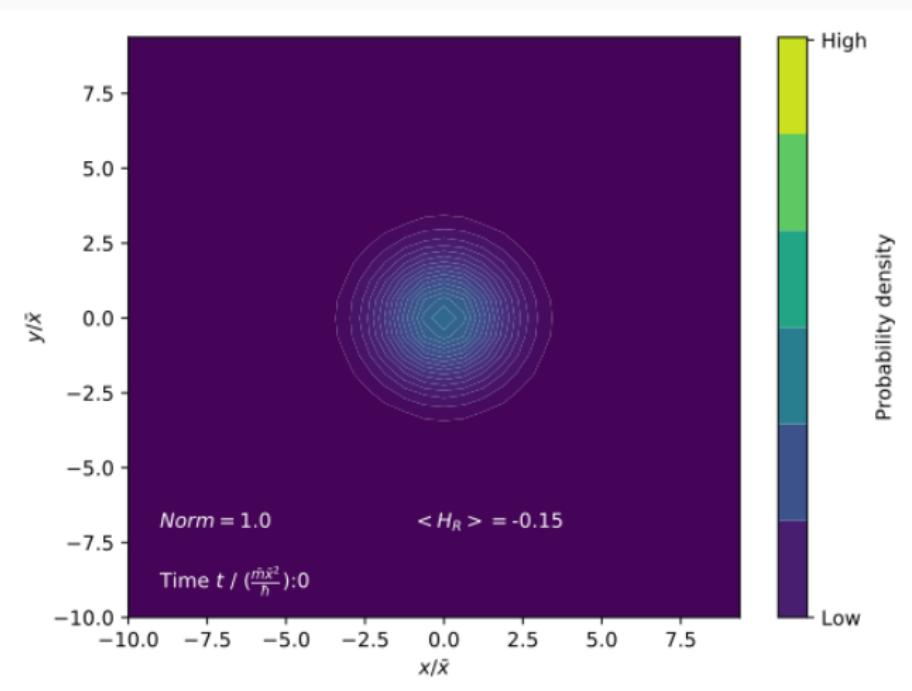
Lösung

Kopplungsfaktor g abhängig vom Radius⁵



⁵Two-dimensional solitons in the Gross-Pitaevskii equation with spatially modulated nonlinearity (Sakaguchi, Malomed in PHYSICAL REVIEW E 73, 026601 (2006))

Ergebnisse - 1 Soliton stabil



$$g = \begin{cases} -9, 4 & |r| < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und } \sigma = 2$$

Zusammenfassung

- Gross Pitaevskii Gleichung(GPG): beschreibt BEK mit atomarer Wechselwirkung
- QuantumOptics.jl: Simulation von diversen Quantensystemen
- Solitonen in der 2D-GPG: stabil für endliche Zeit bzw. mit $g(r)$ stabilisierbar

Ausblick

- Vergleich von Solitonen bei unterschiedlicher Auflösung
- Stoss von Solitonen mit $g(r, t)$

Einheit von g

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(r, t) + g|\Psi(r, t)|^2 \right) \Psi(r, t) \quad (1)$$

$$|\Psi(r, t)|^2 = \frac{1}{\bar{x}^2}. \quad (2)$$

$$g|\Psi(r, t)|^2 = \frac{\bar{m}\bar{x}^2}{t^2}. \quad (3)$$

$$g = \frac{\bar{m}\bar{x}^4}{t^2}. \quad (4)$$

Bedeutung von g

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(r, t) + g|\Psi(r, t)|^2 \right) \Psi(r, t) \quad (5)$$

$$g = \int V_{\text{eff}}(r, t) dr = \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} \quad (6)$$

mit der Streulänge a.

Einheit der Zeit

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(r, t) = \left(-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} + V_{\text{ext}}(r, t) + g|\Psi(r, t)|^2 \right) \Psi(r, t) \quad (7)$$

$$\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} = \frac{\bar{m}\bar{x}^2}{t^2}. \quad (8)$$

Wir substituieren ∇^2 mit \bar{x}^{-2} und erhalten

$$t = \frac{\bar{m}\bar{x}^2}{\hbar}. \quad (9)$$

Bose-Einstein-Kondensat

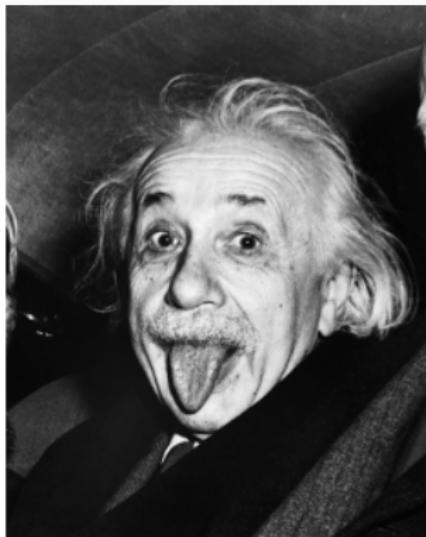


Abbildung 5: Satyendranath Bose und Albert Einstein