RÉPUBLIQUE
FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

ONERA

THE FRENCH AEROSPACE LAB

www.onera.fr

RÉPUBLIQUE FRANÇAISE
Liberté
Égalité
Fraternité

ONERA
THE FRENCH AEROSPACE LAB

Electif Intégration Avion - Structure

Mécanique des Milieux Continus

Résistance Des Matériaux

MMC / RdM | Plan

- MMC : Ce que vous avez déjà (un peu) vu
  - Contraintes et déformations
  - Théorie d’élasticité linéaire

- RdM : Ce qui est utile pour moi
  - Théorie des poutres
  - Théorie des plaques
  - Rupture et endommagement (flambage, plasticité)

Mécanique des Milieux Continus

MMC / RdM | Définitions

- MMC :
  - étude de la déformation des solides.
  - échelle d’étude où les propriétés du solides sont continues/homogènes.

- RdM :
  - Branche de la MMC
  - Calcul de structure (déformations, déplacements et contrainte)
  - Lien entre le comportement globale d’une structure et son comportement local

MMC / RdM | MMC - Contrainte

- Notion de **contrainte** (**stress**) **– σ**

- Qu’est-ce que ça représente? **L’effort interne** à de la matière lorsque des forces externes lui sont appliquées.

- Notation : autour d’un point matériel M, σ(M) est représentée par une **matrice 3x3** (ou tenseur d’ordre 2)

- Une contrainte s’exprime en **Pa** : il s’agit d’une pression (force agissant sur une surface).

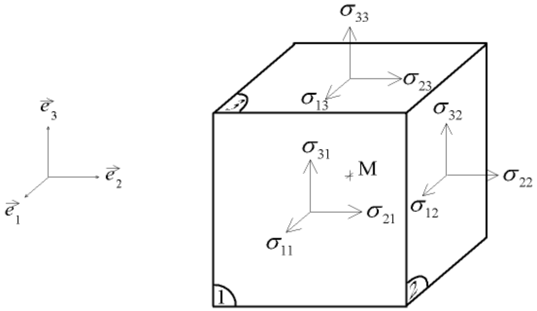
MMC / RdM | MMC - Contrainte

- σ_{ij} : contrainte dans la direction i pour une face de normale j

- Propriété : le tenseur des contraintes est **symétrique $\boldsymbol{\sigma_{ij} = \sigma_{ji}}$**

- Il n’y a donc que <u>6 composants </u>dans la matrice.

- Notation de Voigt :
  - ➢ $\sigma_1 = \sigma_{11}$, $\sigma_2 = \sigma_{22}$, $\sigma_3 = \sigma_{33}$
  - ➢ $\sigma_4 = \sigma_{23}$, $\sigma_5 = \sigma_{13}$, $\sigma_6 = \sigma_{12}$



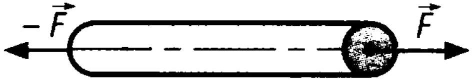
$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix}$$

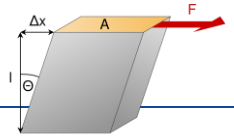
- **Contraintes principales :**
  - Comme le tenseur des contraintes est une matrice symétrique et réelle, il existe une base où il est diagonale
  - On parle alors de directions principales et de contraintes principales (σ_I, σ_{II}, σ_{III})

$$\begin{pmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix}$$

- Etats particuliers de contraintes :
  - Traction/Compression simple : 2 contraintes principales nulles
  - Cisaillement simple : 1 contrainte principale nulle et 2 opposées



$$\boldsymbol{\sigma = \frac{F}{S}}$$



MMC / RdM | MMC - Déformation

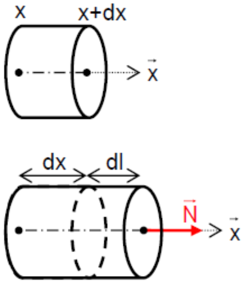
- Notion de **déformation** (**strain**) **– ε**

- Qu'est-ce que ça représente? **La variation de déplacement** entre 2 points de matière proches.

- Notation : autour d'un point matériel M, ε(M) est représentée par une **matrice 3x3** (ou tenseur d'ordre 2)

- Une déformation n'a **pas d'unité.**

- *Exemple:* 2 points espacés de dx deviennent espacés de dx+dl :



$$\boxed{\epsilon_x(x) = \frac{dl}{dx}}$$

MMC / RdM | MMC - Déformation

- Hypothèse des Petites Perturbations (HPP)
  - Les déplacements et leur gradient entre la configuration initiale et finale sont très petits

- Dans ces conditions, les déformations peuvent être écrites en fonctions des gradients des déplacements

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

- $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ avec $u_{i,j}$ la dérivé de la composante i selon la direction j

- **Déformations principales :**
  - Dans la même base principale que pour les contraintes, on a les déformations principales (ε_I, ε_{II}, ε_{III})

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{I} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{III} \end{pmatrix}$$

MMC / RdM | MMC - Lois de comportement

- Loi de comportement : permet de relier σ et ε
- Dans le cas d'un **comportement linéaire,** nous avons la **loi de Hooke généralisée** $\boldsymbol{\sigma = C\varepsilon}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix}$$

- C : matrice de rigidité
  - matrice symétrique, donc **21** coefficients indépendants appelées constantes de rigidité

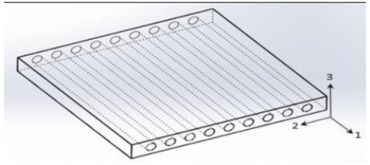
- $\varepsilon = S\sigma$ avec $S=C^{-1}$ la matrice de souplesse.

MMC / RdM | MMC - Lois de comportement

- Dans le cas général, il faut donc 21 coefficients pour relier le champ de déplacement de la matière aux forces internes qu'elle subit.

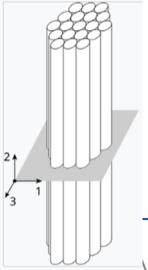
- Matériaux orthotropes: possèdent 3 plans de symétrie perpendiculaires 2 à 2
  - **9** coefficients indépendants

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\sigma_4\\\sigma_5\\\sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0&0&0\\C_{12}&C_{22}&C_{23}&0&0&0\\C_{13}&C_{23}&C_{33}&0&0&0\\0&0&0&C_{44}&0&0\\0&0&0&0&C_{55}&0\\0&0&0&0&0&C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\\\varepsilon_6\end{bmatrix}$$



- Matériaux isotropes transverses : orthotrope + axe de révolution
  - **5** coefficients indépendants

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\sigma_4\\\sigma_5\\\sigma_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&0&0&0\\C_{12}&C_{11}&C_{13}&0&0&0\\C_{13}&C_{13}&C_{33}&0&0&0\\0&0&0&C_{44}&0&0\\0&0&0&0&C_{44}&0\\0&0&0&0&0&\frac{C_{11}-C_{12}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\varepsilon_4\\\varepsilon_5\\\varepsilon_6\end{bmatrix}$$



- Matériau isotrope : possède des propriétés similaires dans toutes les directions
  - Les métaux sont considérés comme isotropes (à l'échelle macroscopique)

- Son comportement élastique est déterminé par **2 coefficients**
  - (λ,μ) : coefficients de Lamé
  - **(E,ν)** : les plus utilisés car facilement identifiables à partir d'un essai de traction.

    E : module d'Young (Pa)

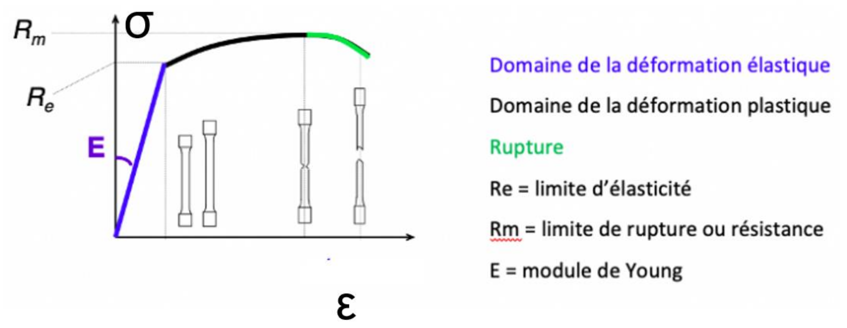
    ν : coefficient de Poisson (entre -1 et ½)
  - G : module de cisaillement

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

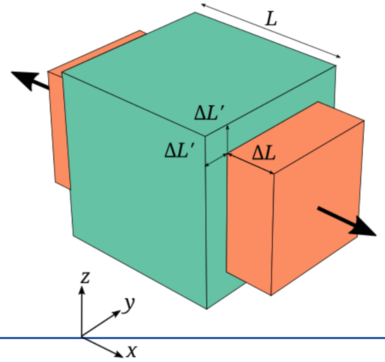
$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}$$

MMC / RdM | MMC - Lois de comportement

- Que représentent E et ν ?
- E (module d'élasticité)
  - rigidité du matériau
  - Dans le domaine élastique : $\sigma = E\varepsilon$
  - Exemple de valeur : aluminium 70 Gpa

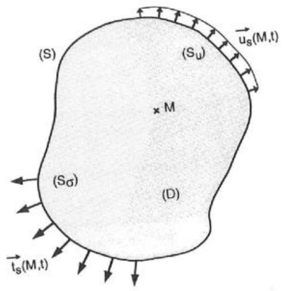


- ν
  - Déformation transverse à la direction de chargement
  - Pour une traction selon x : $\nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}}$
  - Exemple de valeur : 0,3 pour les métaux



MMC / RdM | MMC - Résolution

- Soit V un volume déformable de matière de frontière S. Il est soumis à :
  - Des forces volumiques f
  - Des conditions aux limites
    - En déplacements sur S_u
    - En contraintes sur S_t
    - $S_u \cup S_t = S$ et $S_u \cap S_t = \emptyset$



- **Problème de la mécanique des solides déformables :** trouver le champ de déplacements u et le champs des contraintes σ en tout point de D tel que soient respectées :
  - Équations cinématiques
  - Equations d'équilibre
  - Equations de comportement

MMC / RdM | MMC - Résolution

- **Équations cinématiques**
  - Relation déformation-déplacements (en HPP : $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$)
  - Conditions limites sur S_u

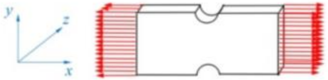
- **Equations d'équilibre**
  - $\overrightarrow{div}\bar{\bar{\sigma}} + \vec{f} = \vec{0}$
  - Symétrie du tenseur des contraintes
  - Conditions limites sur S_t

- **Equations de comportement**
  - Relation déformation – contraintes (matériau isotrope : $\bar{\bar{\sigma}} = \lambda tr(\bar{\bar{\varepsilon}})\bar{\bar{I}} + 2\mu\bar{\bar{\varepsilon}}$)

MMC / RdM | MMC - Elasticité Plane

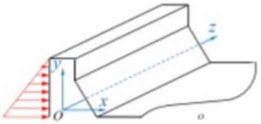
- Un problème 3D peut être ramené à un problème 2D dans certaines conditions :

- **Contraintes planes**
  - Structure mince sollicitée dans son plan
  - Comme l'épaisseur est faible, les contraintes hors-plan σ_{i3} sont négligeables
  - $\sigma_{i3} = 0$ et $\varepsilon_{33} = \frac{\nu}{\nu-1}(\varepsilon_{11}+ \varepsilon_{22})$



(a) Plane stress problem

- **Déformations planes**
  - Structure élancées sollicitée par des forces perpendiculaires (e.g. barrage)
  - $\varepsilon_{i3} = 0$ et $\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11}+ \sigma_{22})$



(b) Plane strain problem

Loi de Hooke : $\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \frac{E(1-a\nu)}{(1+\nu)(1-\nu-a\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-a\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-a\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu-a\nu}{2(1-a\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix}$

a=0 (contraintes planes)
a=1 (déformations planes)

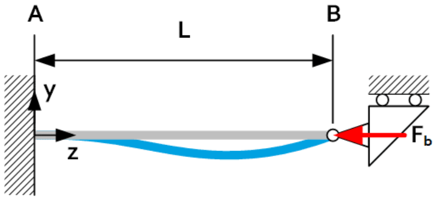
Résistance des Matériaux

MMC / RdM | RdM – Idées globales

- Permet de calculer les contraintes dans la matière constituant une structure

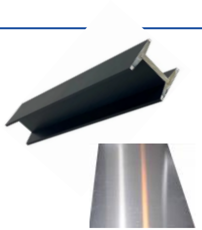
- Contrainte = cohésion de la matière
  → Limite à ne pas dépasser pour garantir la tenue mécanique

- Différents types de rupture d'une structure:
  - Fatigue : petit effort répété
  - Plasticité : déformations irréversibles
  - Flambage : instabilité

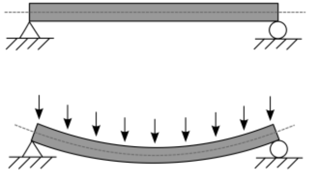


MMC / RdM | RdM - Théorie des poutres

- Poutre ou plaque?
  - 1 dimension >> 2 dimensions
  - 2 dimensions >> 1 dimension

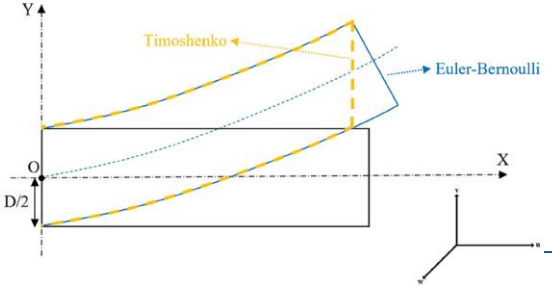


- A quoi sert une poutre? Supporte des chargements perpendiculaires à sa direction principale
  - Subit principalement de la **flexion**



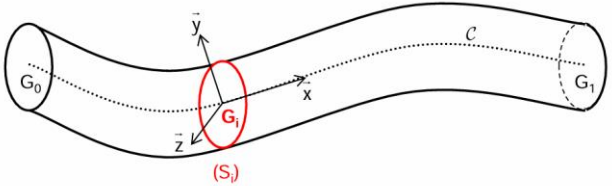
- Etude des poutres – **2 modèles**
  - Euler-Bernouilli: la section droite à la fibre neutre reste plane et perpendiculaire.

    →<u>on néglige le cisaillement</u>
  - Timoshenko: prise en compte du cisaillement



MMC / RdM | RdM - Théorie des poutres

- <u>Caractéristiques d'une poutre:</u>
  - Longueur
  - Section
  - Matériau
  - Support



$\mathcal{C}$ = **ligne moyenne** = courbe des centres de gravité des sections S.

(S_i) = **sections droites**, perpendiculaires localement à $\mathcal{C}$ en G_i.

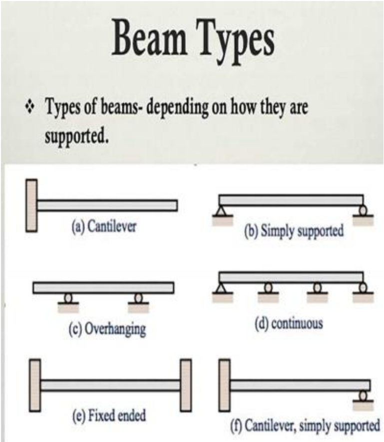
<u>Définition générale d'une poutre</u>

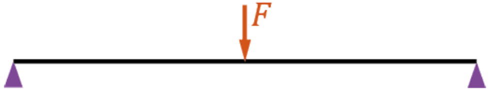
- Que veut-on calculer?
  - Son déplacement vertical (flèche), son effort tranchant interne et son moment de flexion.
  - Plus ces valeurs seront importantes, plus la poutre va subir des contraintes élevées.

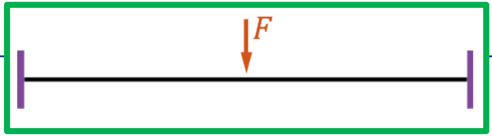
  → **Comment les minimiser?**

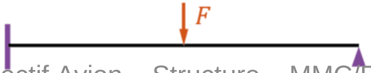
MMC / RdM | RdM - Théorie des poutres

- Longueur ?
  - La flèche augmente quand la longueur augmente
- Matériau (module d'Young)?
  - La flèche augmente quand le module d'Young diminue
- Support?
  - La flèche diminue quand on bloque plus de degrés de liberté (ddl)
    - Appui glissant : une direction de déplacement seulement bloquée
    - Appui simple : les déplacements sont bloqués, par la rotation
    - Encastrement : les déplacements et la rotation sont bloqués.

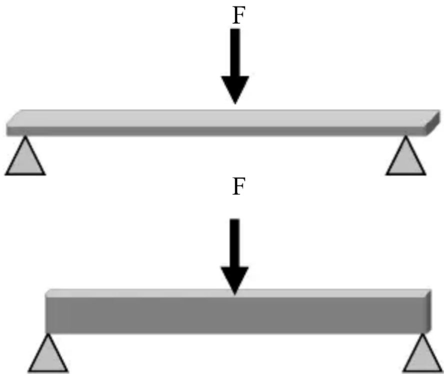




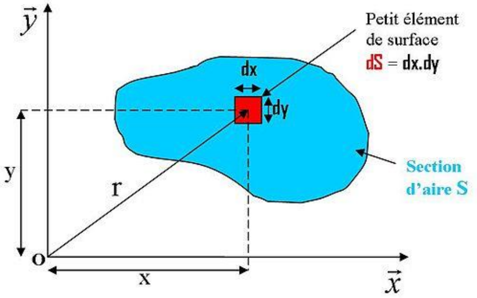




- Section?
  - Surface : on veut le plus de matière possible!
  - Mais sa **répartition** est importante!
    - Se calcule grâce au **moment quadratique**

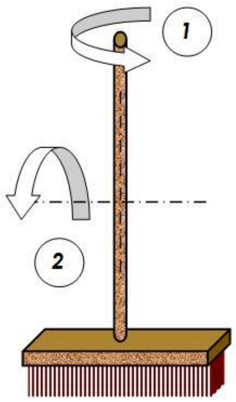


- Moment quadratique :
  - Caractérise la **répartition de la matière** d'une section par rapport à un axe ou à un point
  - Souvent noté **I** (pour un axe dans le plan -> flexion) ou J (axe perpendiculaire au plan -> torsion)
  - $\boldsymbol{I_x = \iint_S \ y^2 dxdy}$ et $I_y = \iint_S \ x^2 dxdy$: plus la matière est éloignée de l'axe, plus le moment quadratique est grand.
  - Unité : **m⁴**



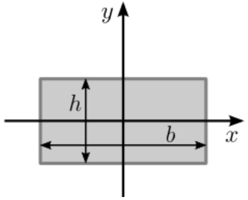
MMC / RdM | RdM - Théorie des poutres

- Attention :
  - La masse n'est pas importante! (ne pas confondre avec le moment d'inertie, $I = \sum_i m_i r_i^2$, en kg.m²)
  - Moment d'inertie : comment l'objet tourne autour d'un axe
  - Moment quadratique : comment l'objet se tord autour d'un axe.

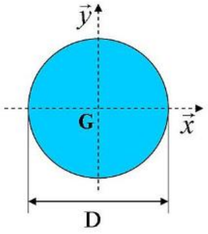


- Attention 2:
  - In English: "second moment of area" , "quadratic moment of area" or "area moment of inertia"

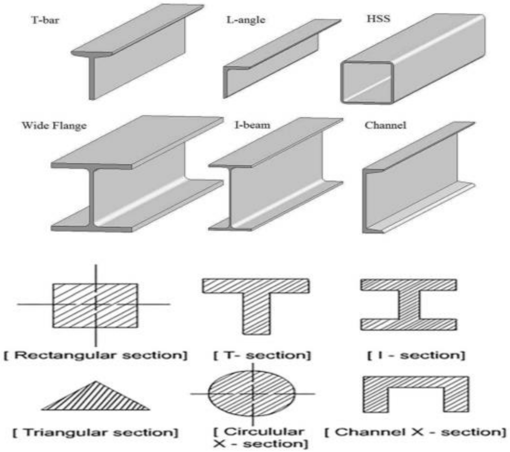
- <u>Quelques formules à connaître:</u>



$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$ (attention, l'axe x passe par le centre)



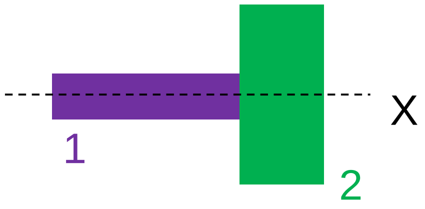
$$I_x = \frac{\pi D^4}{64}$$



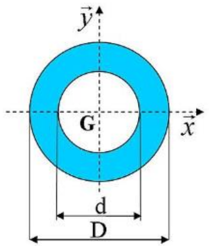
MMC / RdM | RdM - Théorie des poutres

- <u>Quelques principes à connaître:</u>

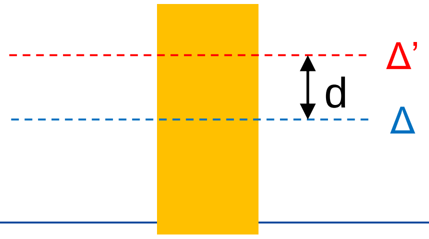
  - **Principe de superposition :** on peut calculer le moment quadratique d'une section en la divisant en sous-domaines et sommant les moments quadratiques <u>par rapport au même axe</u> ($I_{total} = I_1 + I_2$)

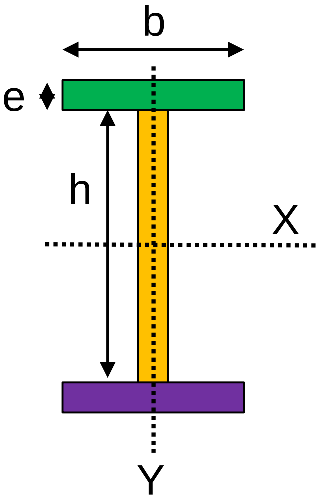


  - **Principe d'exclusion :** s'il y a un trou, on peut « l'enlever » du calcul du moment quadratique : $I_x = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64}$



  - **Théorème de transport (formule de Huygens):**
    - « Le moment quadratique d'une section S dont le barycentre passe par un axe Δ parallèle à un axe Δ' à une distance d vaut $I_{\Delta'} = I_\Delta + Sd^2$ »

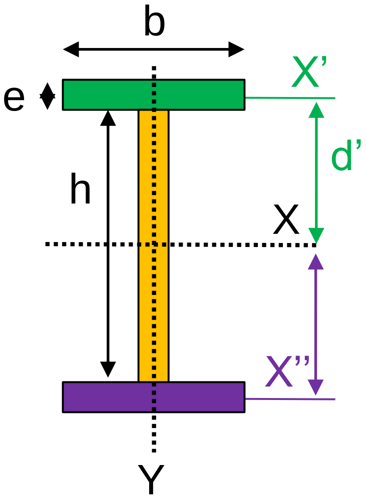




Exercice 1 (énoncé)

- Trouver la formule donnant le moment quadratique de cette section en I par rapport à l'axe horizontal X (passant par le milieu de la hauteur).
- Application pour h = 7cm, b = 3cm et e = 4mm.

- Même question par rapport à l'axe vertical Y



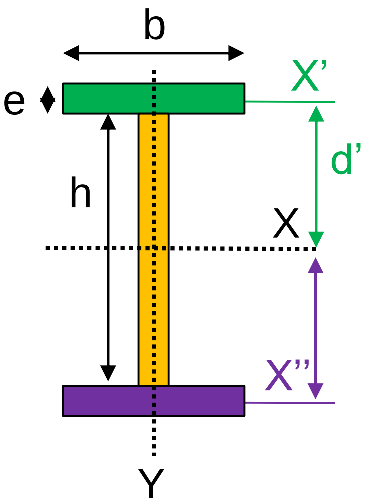
Exercice 1 (correction)

$$I_X = I_X + I_X + I_X = \frac{eh^3}{12} + I_{X'} + Sd'^2 + I_{X''} + Sd''^2$$

$$= \frac{eh^3}{12} + \frac{be^3}{12} + be * \left(\frac{h+e}{2}\right)^2 + \frac{be^3}{12} + be * \left(\frac{h+e}{2}\right)^2$$

$$= e\left[\frac{h^3}{12} + \frac{be^2}{6} + \frac{b(h+e)^2}{2}\right]$$

h=7cm, b=3cm, e=4mm → $I_X = 4,43.10^{-7} m^4$



Exercice 1 (correction)

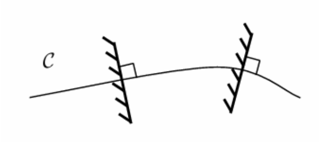
$$I_Y = I_Y + I_Y + I_Y = \frac{he^3}{12} + \frac{eb^3}{12} + \frac{eb^3}{12}$$

$$= \frac{e}{6}\left[\frac{he^2}{2} + b^3\right]$$

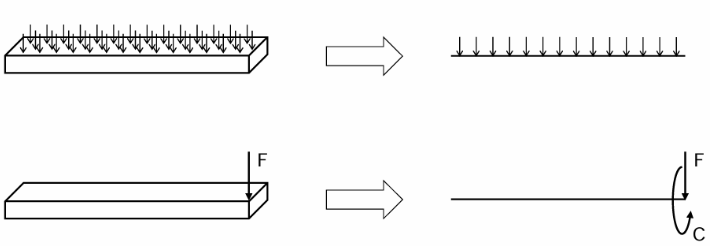
h=7cm, b=3cm, e=4mm → $\boldsymbol{I_Y = 1{,}84.10^{-8} m^4}$

Calcul des efforts dans la section d'une poutre.

- On se place dans des conditions gentilles
  - Poutre droite
  - Élancée (section petite devant la longueur)
  - Section droite constante
  - HPP

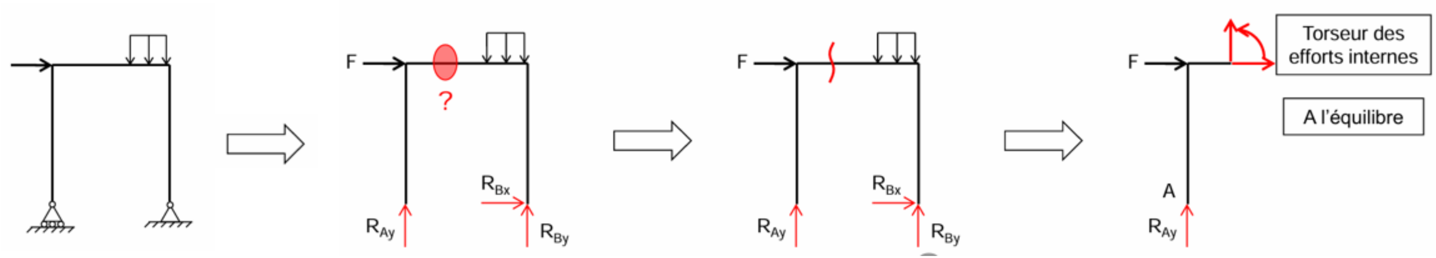


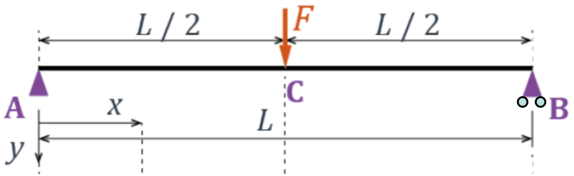
- Représentation des efforts ramenés sur la ligne moyenne



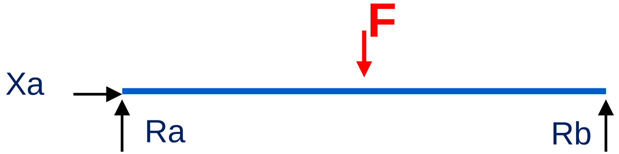
- Comment on fait ?
  - Principe fondamental de la statique (PFS) : si la structure est à l'équilibre, en chacun de ses points :

$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}\ \text{ et } \sum \overrightarrow{M}(P) = \vec{0}\ \text{(équilibre des forces et des moments).}}$

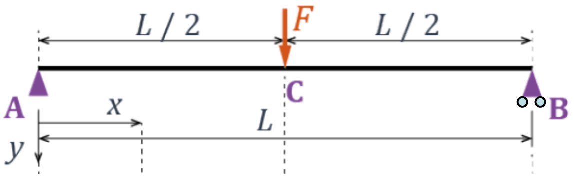




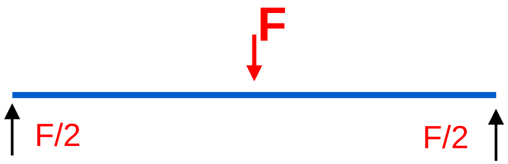
1. Calcul de la **réaction** au niveau des supports

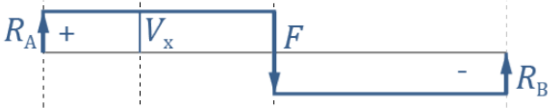


$$Xa = 0 \text{ et } Ra = Rb = \frac{F}{2}$$

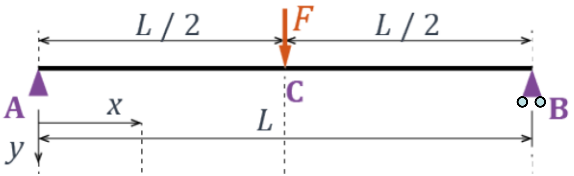


2. Calcul de **l'effort tranchant V** : équilibre des efforts sur un tronçon



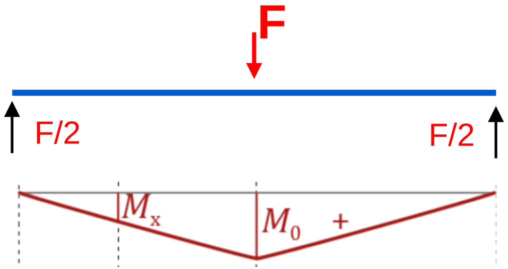


$$V_{AC}(x) = \frac{F}{2} \text{ et } V_{CB}(x) = -\frac{F}{2}$$

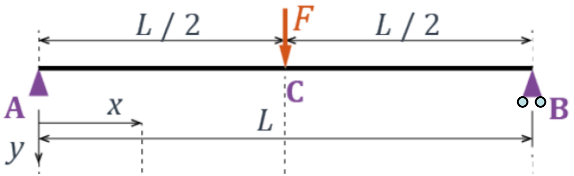


3. Calcul du **moment de flexion M** (2 méthodes)

- Equilibre des moments sur un tronçon
- $\boldsymbol{\frac{dM}{dx} = V}$ **:** intégration avec conditions limites

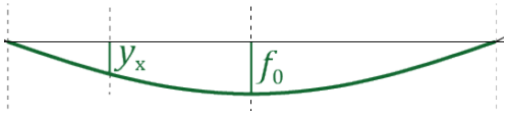


$$M_{AC}(x) = \frac{F}{2}x \text{ et } M_{CB}(x) = \frac{F}{2}(L-x)$$



3. Calcul de la **déformée y**

- $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}}$ **:** double intégration avec conditions limites



$$y_{AC}(x) = \frac{F\,x}{48\,EI}(3\,L^2 - 4\,x^2)$$

$$y_{CB}(x) = \frac{F}{48\,EI}(L - x)(-L^2 - 4\,x^2 + 8\,L\,x)$$

- Flèche : déplacement maximal
  - (ne pas confondre avec la flèche de l'aile)

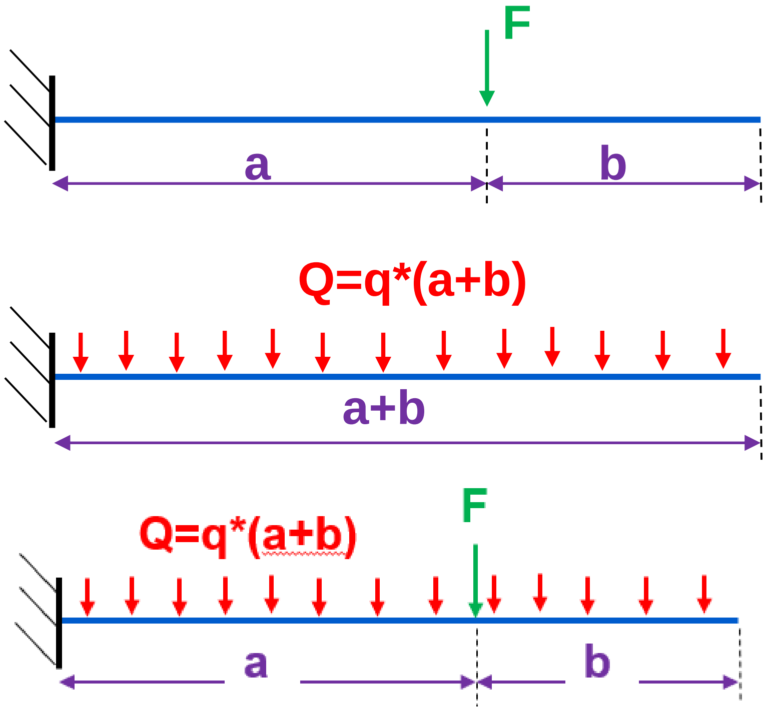
<u>Exercice 2 (énoncé)</u>

- Pour chacun des 3 cas suivants, trouver la formule analytique donnant le **déplacement vertical** de la poutre console (i.e. encastrée à une extrémité et libre à l'autre) et le **moment de flexion** qu'elle subit.

    – Cas a/ force ponctuelle F

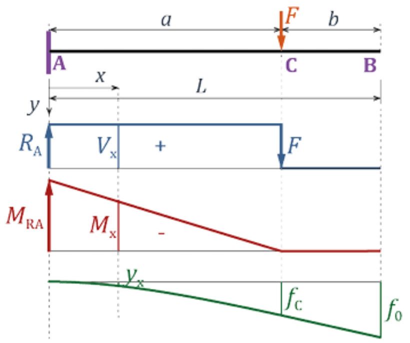
    – Cas b/ force linéique q (force totale Q=q*(a+b))

    – Cas c/ = a/ + b/



Exercice 2 (correction)

C02



$$R_A = F \qquad M_{RA} = F\,a$$

$$V_{AC}(x) = F \qquad V_{CB}(x) = 0$$

$$M_{AC}(x) = -F\,(a-x) \qquad M_{CB}(x) = 0$$

$$M_A = -F\,a$$

$$W_d = \frac{F^2\,a^3}{6\,EI} = \frac{1}{2}\,f_C\,F$$

$$y_{AC}(x) = \frac{F}{6\,EI}x^2\,(3\,a - x)$$

$$y_{CB}(x) = \frac{F}{6\,EI}a^2\,(3\,x - a)$$

$$f_0 = f_B = \frac{F\,a^2}{6\,EI}(3\,L - a)\ \text{ pour }\ x_0 = L$$

$$f_C = \frac{F\,a^3}{3\,EI}$$

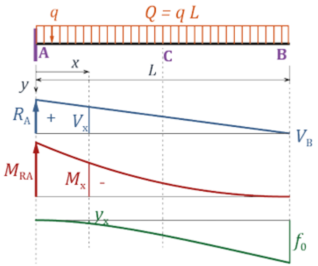
$$\tan\beta = \frac{F\,a^2}{2\,EI}$$

Exercice 2 (correction)

POUTRES CONSOLES

$\xi = x/L$	Position relative	$y(x)$	Déformée élastique en flexion
R_A, R_B	Réactions (efforts verticaux) aux appuis	f	Flèche
M_{RA}, M_{RB}	Réactions (moments) aux appuis	f_0	Flèche maximale
V	Effort tranchant	α, β	Déformations angulaires
M	Moment fléchissant	W_d	Energie de déformation élastique en flexion
M_0	Moment fléchissant maximal		

C01



$$Q = q\,L$$

$$R_A = Q \qquad M_{RA} = \frac{Q\,L}{2}$$

$$V(x) = Q\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$W_d = \frac{Q^2\,L^3}{40\,EI} = \frac{1}{5}\,f_B\,Q$$

$$M(x) = -\frac{Q}{2\,L}(L-x)^2$$

$$M_A = -\frac{Q\,L}{2}$$

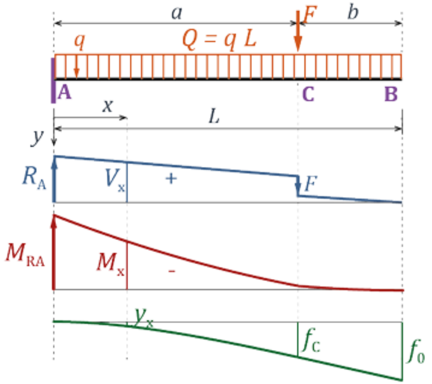
$$y(x) = \frac{Q}{24\,EI}\,\frac{x^2}{L}\,(x^2 - 4\,L\,x + 6\,L^2)$$

$$f_0 = f_B = \frac{Q\,L^3}{8\,EI} \quad \text{pour} \quad x_0 = L$$

$$\tan\beta = \frac{Q\,L^2}{6\,EI}$$

Exercice 2 (correction)

C04



$$R_A = F + Q \qquad M_{RA} = Fa + \frac{Q}{2} L$$

$$V_{AC}(x) = F + Q\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$V_{CB}(x) = Q\left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$M_{AC}(x) = -F\,(a - x) - \frac{Q}{2\,L}(L - x)^2$$

$$M_{CB}(x) = -\frac{Q}{2\,L}(L - x)^2$$

$$M_A = -F\,a - Q\,L/2$$

$$W_d = \frac{Q^2\,L^3}{40\,EI} + \frac{F^2\,a^3}{6\,EI} + \frac{QF\,a^2}{24\,EI\,L}\,(6\,L^2 + a^2 - 4La)$$

$$Q = q\,L$$

$$y(x) = y_{\mathrm{CAS\,C01}}(x) + y_{\mathrm{CAS\,C02}}(x)$$

$$f_0 = f_B = \frac{F\,a^2}{6\,EI}(3\,L - a) + \frac{Q\,L^3}{8\,EI}$$

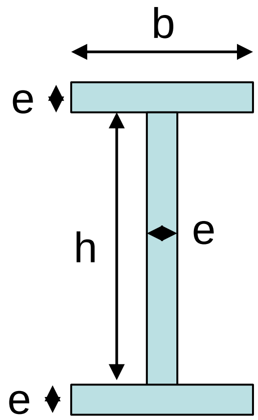
$$f_C = \frac{F\,a^3}{3\,EI} + \frac{Q\,a^2}{24\,EI\,L}\,(a^2 + 6\,L^2 - 4\,L\,a)$$

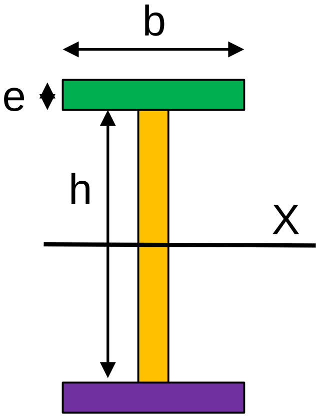
$$\tan\beta = \frac{3\,F\,a^2 + Q\,L^2}{6\,EI}$$

Exercice 3 (énoncé)

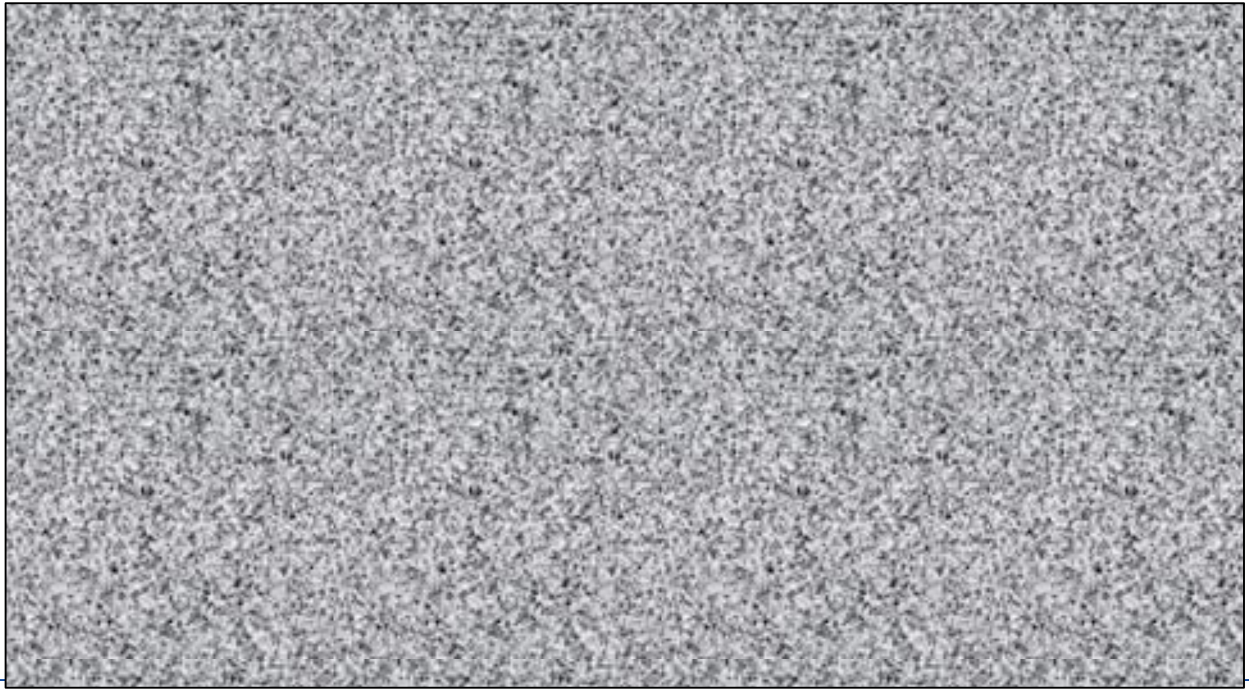
- Programme (sous Python ou Excel) pour traiter les 3 cas avec en sortie le déplacement et le moment de flexion maximum (valeur et position) le long de la poutre

- Donner les résultats pour les valeurs suivantes :
  - a=4m , b=16m , F=200 N(vers le bas) et q= -15N/m (vers le haut)
  - h=10cm, b=4cm, e=2mm
  - E=70 GPa





Exercice 3 (correction)

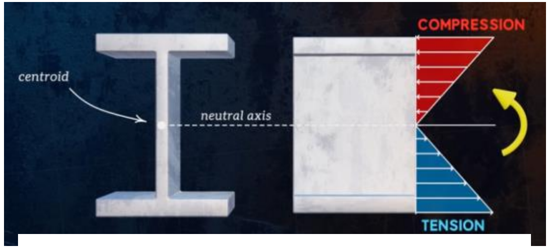


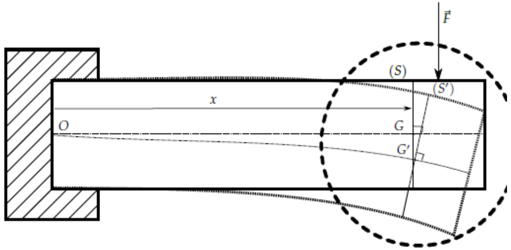
MMC / RdM | RdM - Théorie des poutres

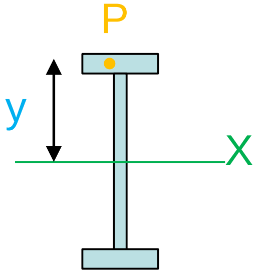
- A partir du moment de flexion, on peut calculer la contrainte dans la section
  - il y a toujours une partie de la section qui est en **traction**, et l'autre en **compression**.

- Si on note M le moment de flexion par rapport à X, I le moment quadratique, un point P de la section situé à une distance y de l'axe neutre X (dans notre cas l'axe horizontal de symétrie) de la section, on a :

$$\boxed{\sigma(P) = -\frac{My}{I}}$$

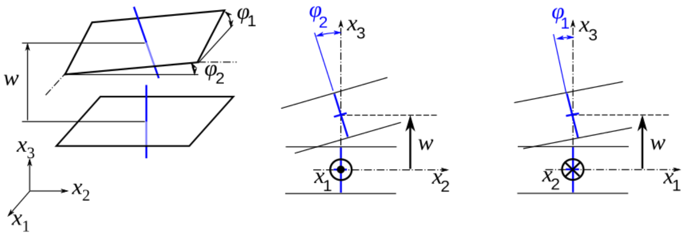






MMC / RdM | RdM - Théorie des plaques

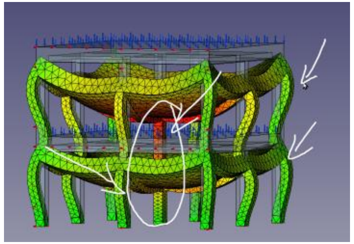
- Etude des plaques – **2 modèles**
  - Kirchhoff-Love
    - Le feuillet moyen n’a que des déplacements transverses
    - Les **sections perpendiculaires au feuillet moyen restent perpendiculaires** (cisaillement négligé)
    - Contrainte nulle dans l’épaisseur



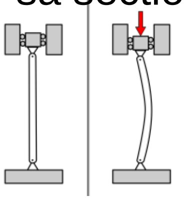
  - Mindlin-Messmer
    - La fibre normale reste rectiligne mais pas forcément perpendiculaire au feuillet moyen

MMC / RdM | RdM – Flambage d'une poutre

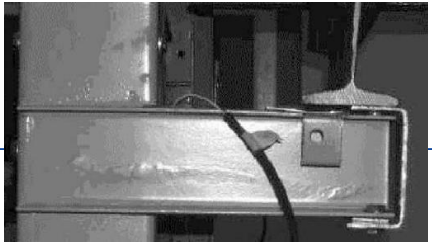
- Définition du Flambage (buckling):
  - Instabilité soudaine d'une structure élastique.



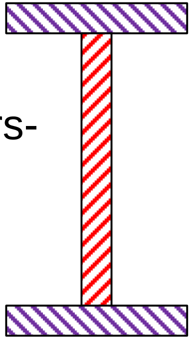
- <u>Sur une poutre :</u>
  - Flambage **global** : toute la poutre se déforme, sa section garde sa forme



  - Flambage **local** (voilement, crippling) : des déformations hors-plan apparaissent localement sur l'âme



<u>Vocabulaire</u>



Âme (web)

Semelle (flange)

MMC / RdM | RdM – Flambage d'une poutre

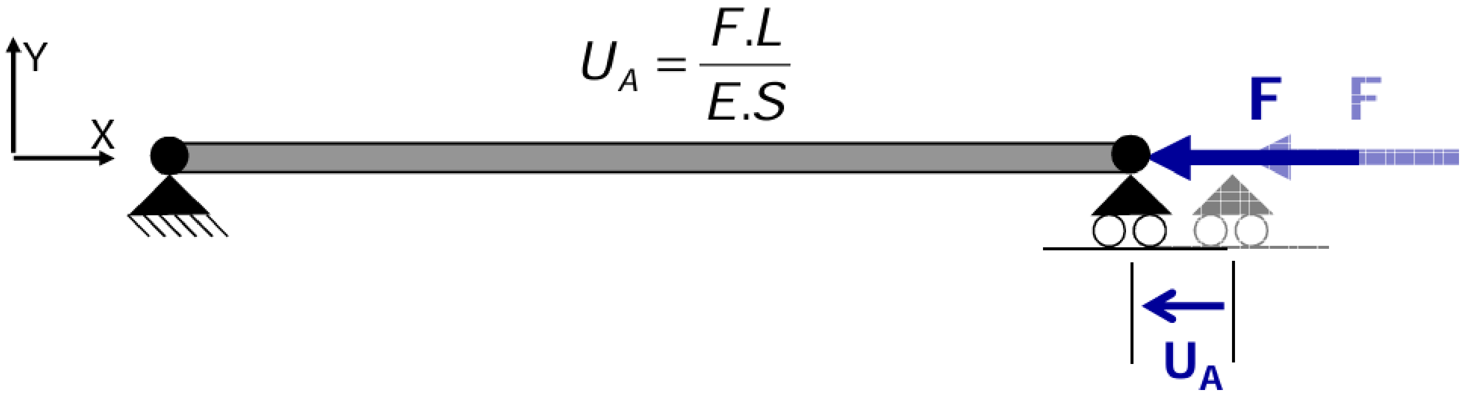
- Charge critique :
  - Charge à partir de laquelle la poutre n'a plus de comportement linéaire : début du flambage
  - Beaucoup d'études ont été faites pour les poutres et les plaques

  → On a des **formules!**

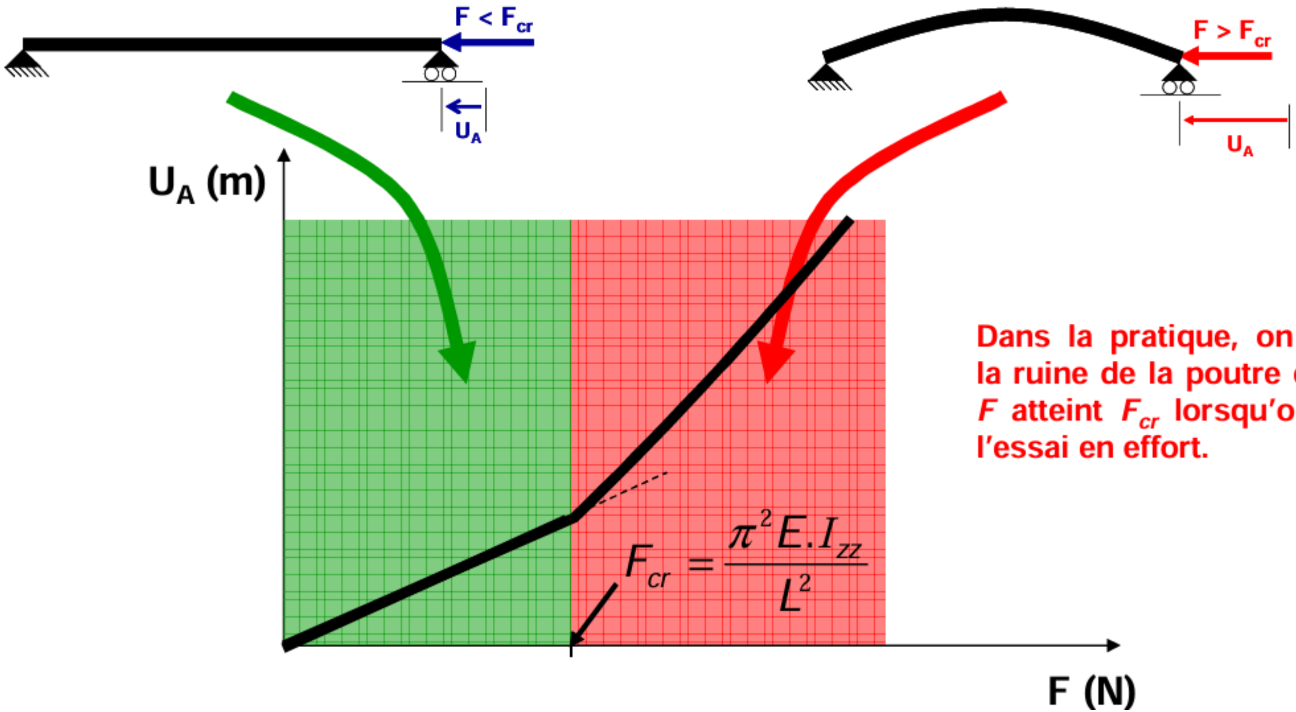
- Selon vous, qu'est-ce qui va influencer la charge critique?
  - Longueur
  - Section
  - Matériau
  - Support

MMC / RdM | RdM – Flambage d'une poutre

- Tant que nous sommes dans le domaine linéaire, le déplacement dépend linéairement de la force



MMC / RdM | RdM – Flambage d’une poutre

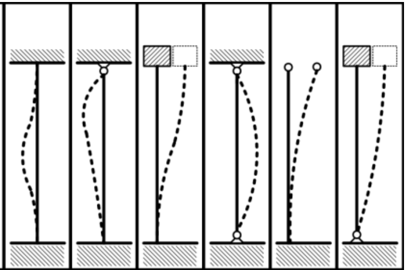
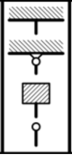


Dans la pratique, on obtient la ruine de la poutre dès que *F* atteint F_{cr} lorsqu’on pilote l’essai en effort.

- **Force critique d'Euler :**

$$F_{euler} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eq}^2}$$

- E : module d'Young
- I : moment quadratique
- L_{eq} = KL : longueur équivalente
- K : dépend des conditions limites

Buckled shape of column shown by dashed line						
Theoretical K value	0.5	0.7	1.0	1.0	2.0	2.0
Recommended design value K	0.65	0.80	1.2	1.0	2.10	2.0
End condition key		Rotation fixed and translation fixed Rotation free and translation fixed Rotation fixed and translation free Rotation free and translation free				

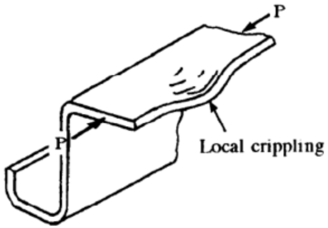
La longueur équivalente prend en compte les conditions limites de la poutre.

MMC / RdM | RdM – Flambage d'une poutre

- Le flambage global intervient quand la section reste stable (souvent le cas quand elle est pleine).

- Dans le cas d'une poutre plutôt courte et avec des **sections minces**, il peut y avoir un flambage local → crippling

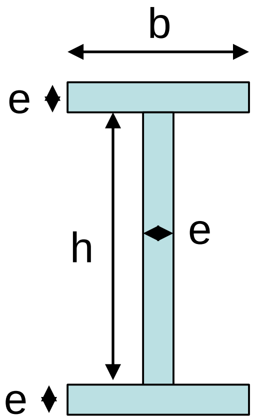
- Contrairement au flambage global, le flambage local n'amène pas nécessairement la ruine de la structure : les autres parties de la section continuent de supporter la charge.



- La force critique pour le crippling, notée $\mathbf{F_{cc}}$ est définie **expérimentalement** : pas de formule simple!

- Par exemple, poutre d'alliage d'aluminium avec une section en I :

$$F_{cc} = \left(\frac{\pi e}{h}\right)^2 \frac{E}{12(1-\nu^2)} k \text{ (k fonction de b/h)}$$



MMC / RdM | RdM – Flambage d'une poutre

- Modèle de Johnson-Euler : permet de relier le flambage local au global.
- On définit le **rayon de giration** $\rho = \sqrt{\frac{I}{A}}$ (attention : quel I?!)
- On définit l'élancement (slenderness) de la poutre $\frac{L_{eq}}{\rho}$
- L'élancement critique est calculé par $\left(\frac{L_{eq}}{\rho}\right)_{crit} = \pi\sqrt{\frac{2E}{F_{cc}}}$

Finalement, quelle est la force critique?

Dépend de l'élancement de la poutre :

- Inférieur à l'élancement critique ($\pi\sqrt{\frac{2E}{F_{cc}}}$):

$$F_{buckling} = F_{cc} - \frac{F_{cc}{}^2\left(\frac{Leq}{\rho}\right)^2}{4\pi^2 E} \text{ avec}$$

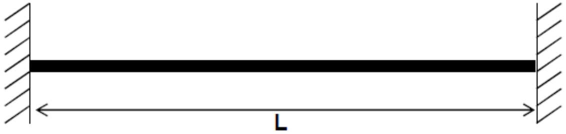
$$F_{cc} = \left(\frac{\pi e}{h}\right)^2 \frac{E}{12(1-\nu^2)} k \text{ (k fonction de b/h)}$$

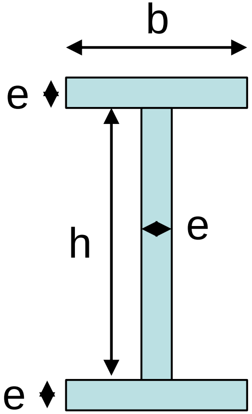
- Supérieur à l'élancement critique :

$$F_{buckling} = \frac{\pi^2 EI}{L_{eq}^2}$$

Exercice 4 (énoncé)

Trouver la force critique d'Euler, la force critique de voilement et la force critique réelle de la poutre en aluminium suivante :





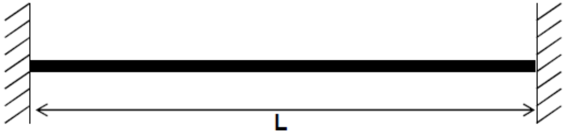
h=10cm, b=4cm, e=2mm

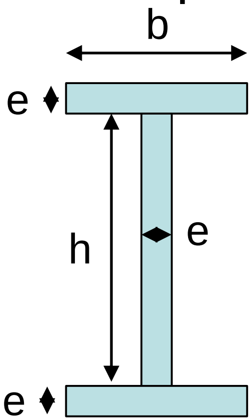
L=50 cm puis 2 m

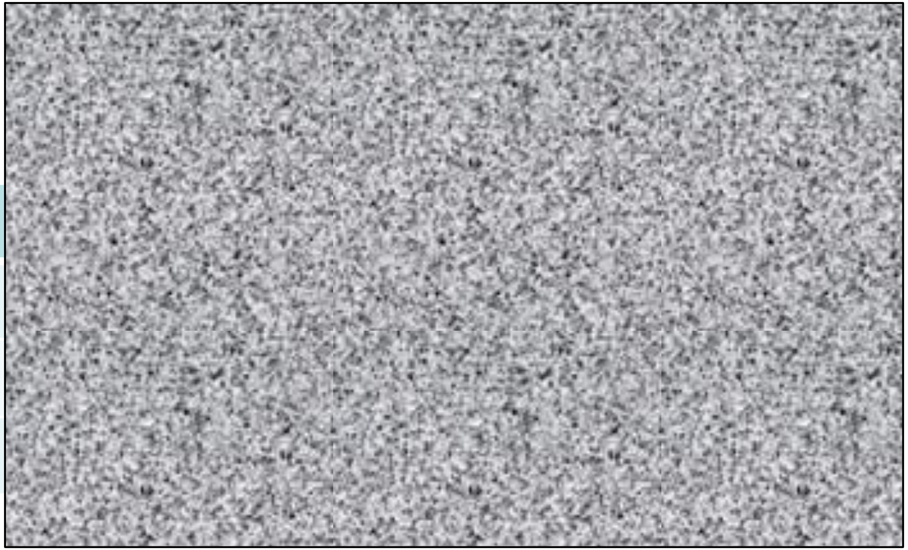
MMC / RdM | TP : Dimensionnement

Exercice 4 (correction)

- Trouver la force critique d'Euler, la force critique de voilement et la force critique réelle de la poutre en aluminium suivante :



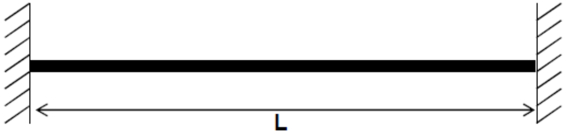


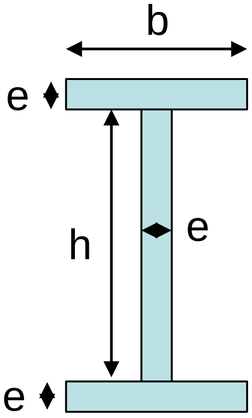


h=10cm, b=4cm, e=2mm
L=50 cm puis 2 m

Exercice 5 (énoncé)

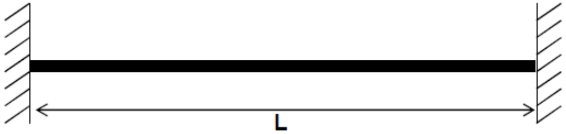
- Pour une longueur de 4m, optimiser la section pour ne pas flamber sous une force axiale de -100 N.

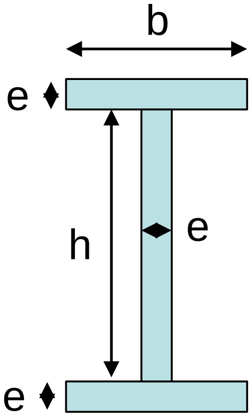


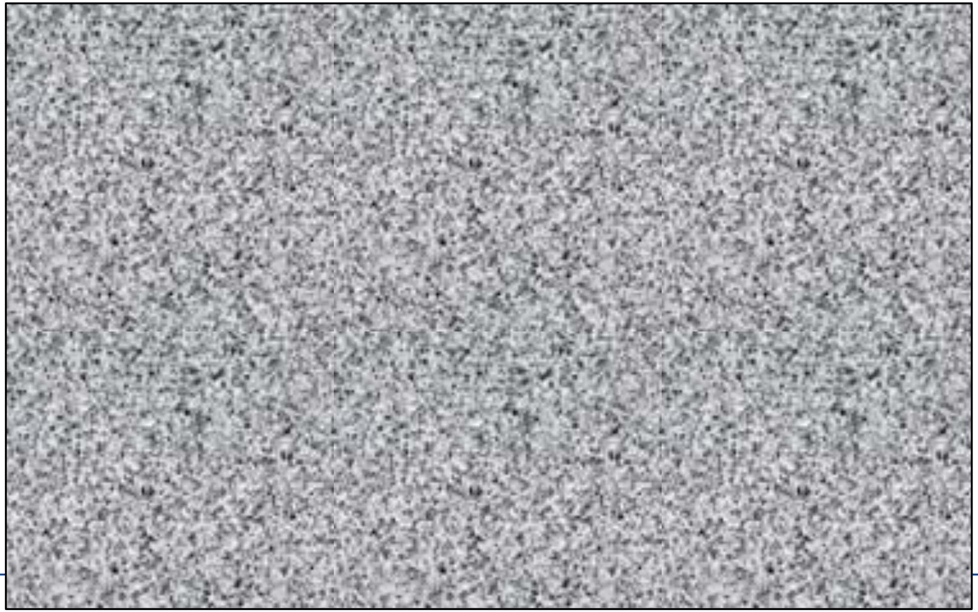


Exercice 5 (correction)

- Pour une longueur de 4m, optimiser la section pour ne pas flamber sous une force axiale de -100 N.







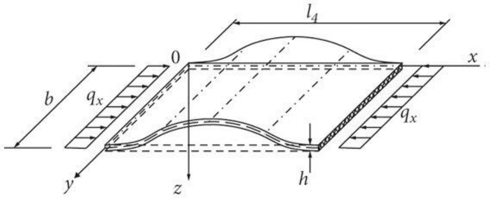
MMC / RdM | RdM – Flambage d'une plaque

- Comme pour les poutres, les paramètres principaux influant le flambage sont les dimensions (longueur, largeur, épaisseur) et la nature du matériau.

- Sur un panneau raidi (i.e. une plaque avec des lisses), l'instabilité de la plaque est moins « fatale » que celle des raidisseurs.

- Il faut cependant l'éviter car une surcharge sera alors transférée sur les lisses.

MMC / RdM | RdM – Flambage d'une plaque



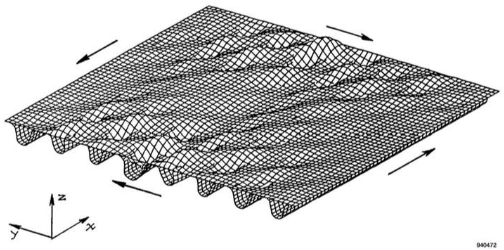


Figure 6. Buckling shape of hat-stiffened panel under shear loading (finite element analysis by Donnell-Douglas; full-panel model).

- Le flambage peut intervenir avec des forces de traction/compression ou de cisaillement

- Dans les 2 cas, la force critique de flambage d'un panneau est de la forme

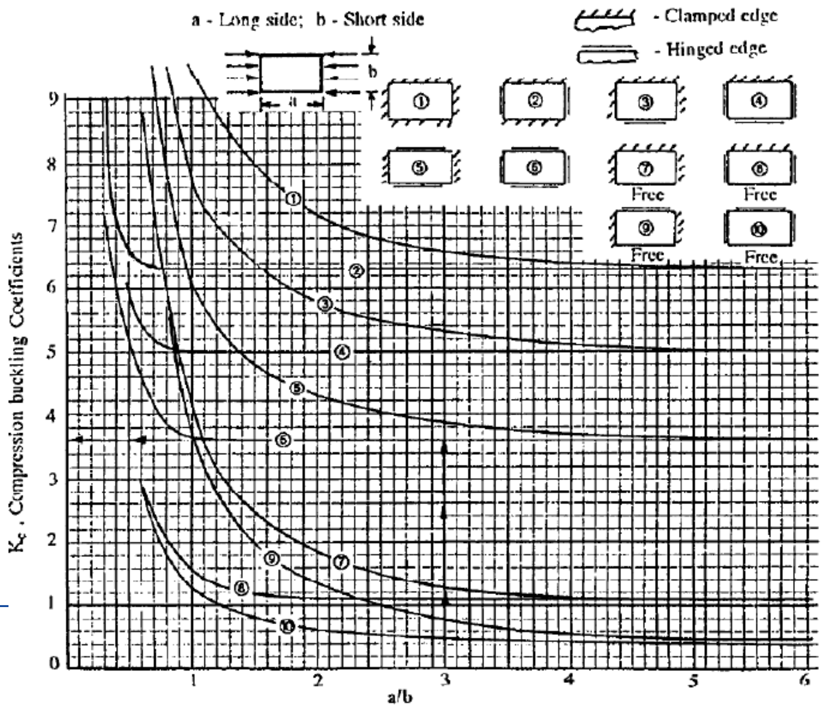
$$F_{cr} = K\eta E\left(\frac{t}{b}\right)$$

K : coefficient qui depend des conditions limites
de la forme de la plaque
et de traction/compression ou cisaillement
η : coefficient de correction plastique (souvent =1)
t ,b : épaisseur , largeur
E : module d'Young

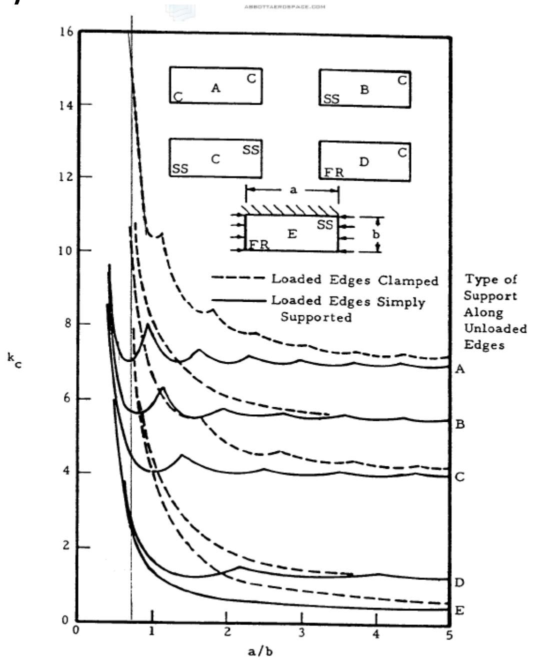
MMC / RdM | RdM – Flambage d'une plaque

- L'équation paraît simple mais tout se cache dans le K

Exemple de courbe pour Kc (compression)



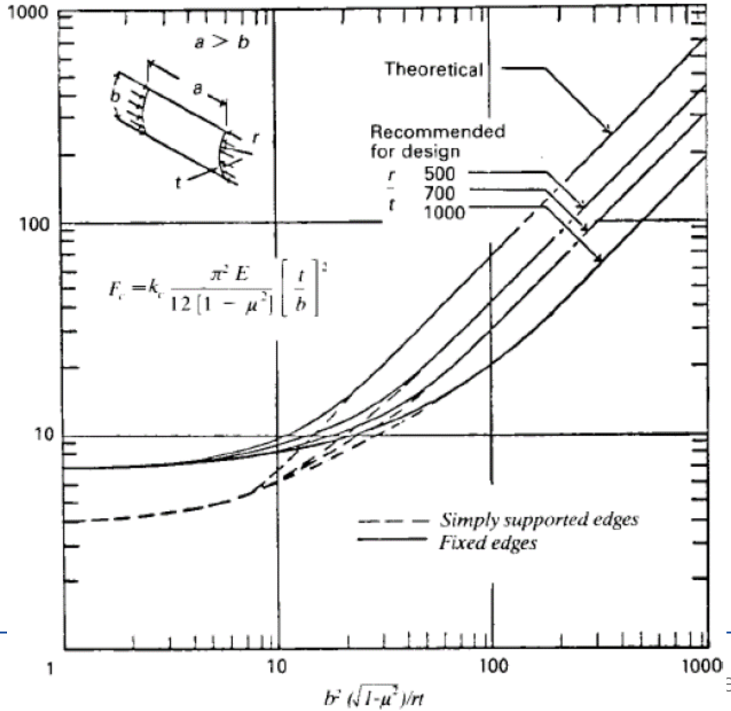
- Attention ,dans la littérature on trouve aussi K écrit sous la forme $K = k_c \frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}$ et les courbes de kc sont tracées



MMC / RdM | RdM – Flambage d'une plaque

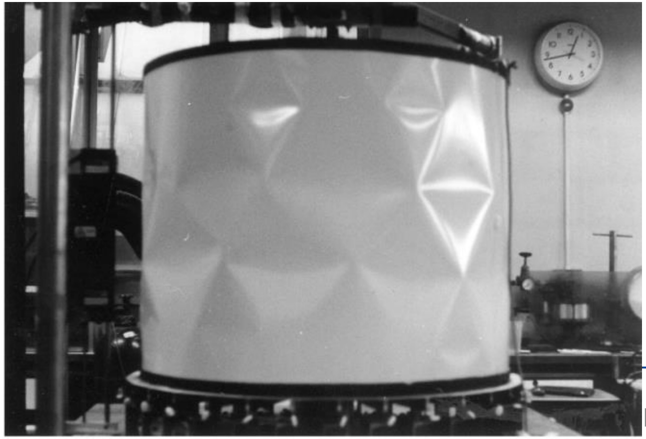
- Et quand la plate n'est pas parfaitement plane….

Exemple de courbe pour kc (compression)

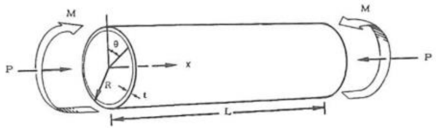


MMC / RdM | RdM – Flambage d’un cylindre

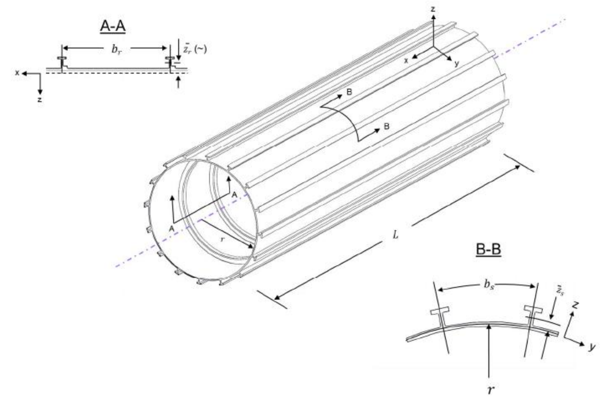
- Une structure de forme cylindrique peut subir du flambage à cause de :
    - Pression externe
    - Compression longitudinale
    - Flexion



MMC / RdM | RdM – Flambage d'un cylindre



- Comme ces formes se retrouvent souvent dans l'industrie, ces cas sont beaucoup étudiés
- Comme pour les poutres/plaques, beaucoup d'études expérimentales



NASA/SP-8007-2020/REV 2

Buckling of Thin-Walled Circular Cylinders

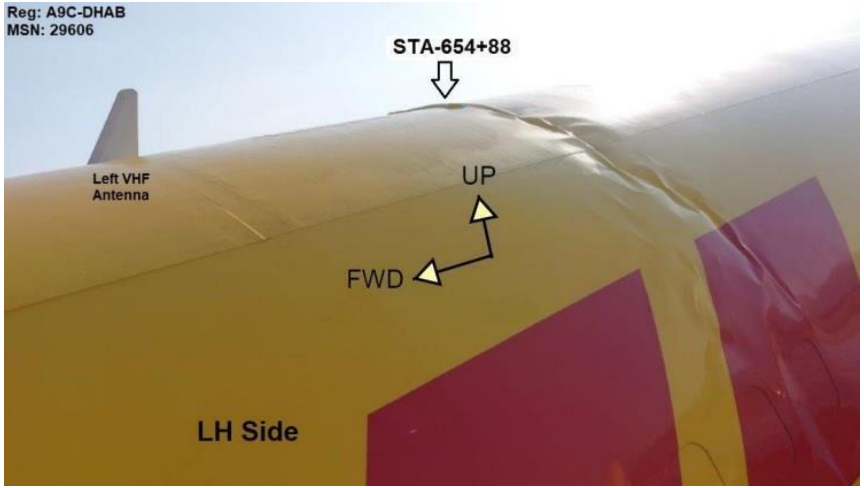
MMC / RdM | RdM – Flambage d'un cylindre

- Pour notre avion, on pense au fuselage!

- <u>Comment peut-il subir un flambage global?</u>
  - Pression externe? Mais il a la pression interne qui est plus élevée que l'externe
  - Pas de compression dans le sens de la longueur

  - Flexion trop importante? En vol cela semble improbable, mais possible lors d'un atterissage dur → cas de dimensionnement

Récemment (2023), cas d’un atterrissage avec Boeing 767.



Que retenir du flambage ?

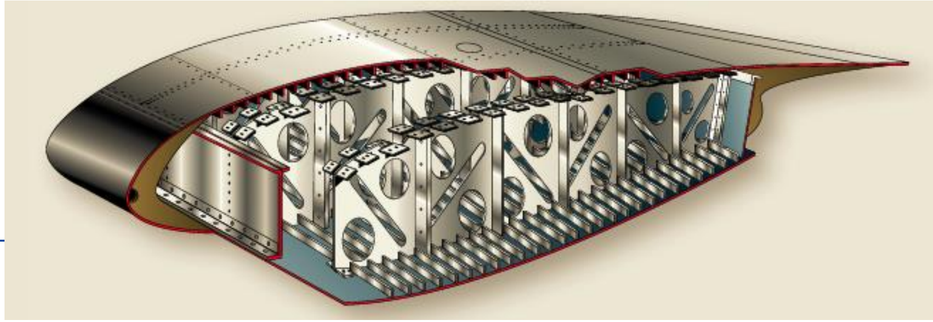
- Pour une poutre ou une plaque, dépend de :
  - Ses dimensions (longueur, largeur, section pour la poutre)
  - Son matériau (E, v)
  - Conditions limites → valeurs expérimentales

- Poutre : $F_{euler} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$ en 1ère approximation
- Plaque : $F_{cr} = KE\left(\frac{t}{b}\right)$

MMC / RdM | RdM – Flambage - Conclusion

Comment l'appliquer à notre avion?

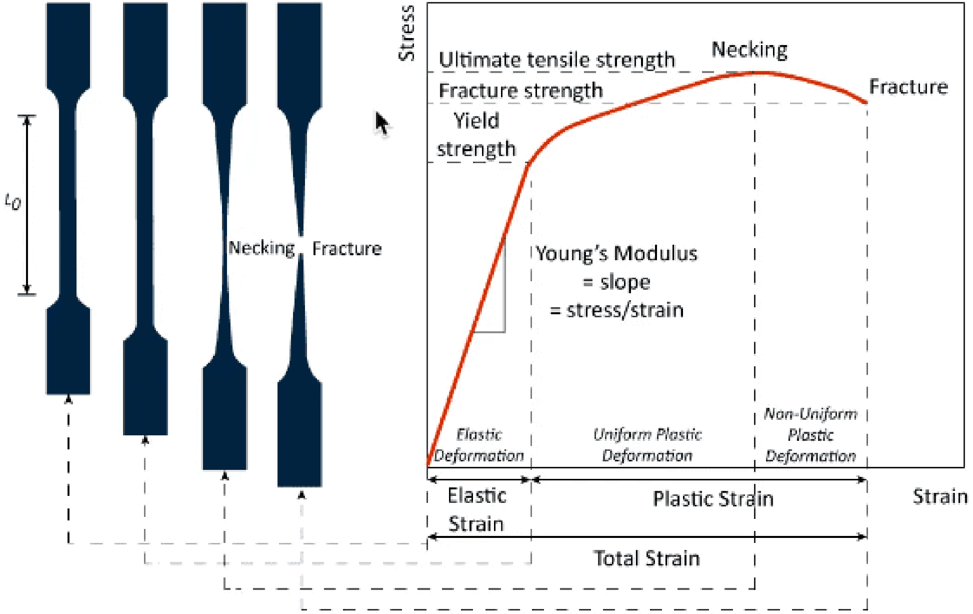
- <u>Aile :</u>
  - Plein de poutre (lisse) et panneaux (nervure, longeron et revêtement) à optimiser!

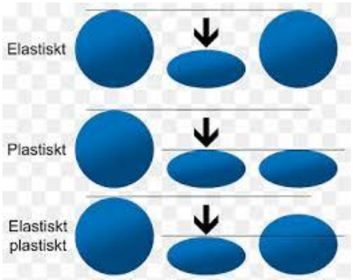


Comment l'appliquer à notre avion?

- <u>Fuselage :</u>
  - Flambage global possible en flexion mais surtout à l'atterrissage
  - Et aussi plein de poutres/panneaux à optimiser

- Définition : <u>déformation irréversible</u>





MMC / RdM | **RdM** - Plasticité

- Plusieurs critères existent pour calculer s'il y a de la plasticité.
- Le plus connu : **Von Mises**
  - Cas général : $$\sigma_v = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2+(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2+(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2\right]+3\left(\sigma_{12}^2+\sigma_{23}^2+\sigma_{31}^2\right)}$$
  - Contraintes planes : $\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2-\sigma_{11}\sigma_{22}+3\sigma_{12}^2}$

- Cette contrainte de Von Mises σ_{VM} est à comparer à la limite élastique σ_y (yield strength) du matériaux :

$\sigma_{VM} > \sigma_y$: plasticité

- Une fois la plasticité atteinte, nos calculs linéaires ne sont plus valables
  - Calculs complexes non-linéaires

Nous, on vérifie a posteriori si on est encore en comportement élastique

MMC / RdM | Bibliographie

- https://www.youtube.com/@TheEfficientEngineer/videos
- https://www.youtube.com/watch?v=cgLnADEfm6E

- Jean-Fred BEGUE , Cours sur *Instabilité des Poutres et des Coques*
- Air Force, 1986 , *Stress Analysis Manual*