


Modelos Estocásticos de Investigação Operacional

Trabalho Prático N° 1

(Teoria de Filas de Espera)

Identificação do Grupo

<u>Número:</u>	<u>Nome completo:</u>	<u>Rubrica:</u>
a68691	Luís Carlos da Silva Marques	Luis Marques
a72628	Bruno Daíado Gomes Pereira	
a58657	Yuri Ricardo Oliveira Gonçalves	Yuri Oliveira

Data de entrega: 2016-04- 8

Conteúdo

1	Parte 1	2
1.1	Análise do problema	2
1.1.1	Dados	2
1.1.2	Objetivo	2
1.1.3	Cálculos	3
1.1.4	Cálculo do taxa de atendimento para os dois tipos de serviço	3
1.1.5	Cálculo do taxa de chegada às caixas	4
1.1.6	Teste às distribuições	5
1.1.7	Resultados obtidos	7
1.1.7.1	Para até 10 unidades	7
1.1.7.2	Para mais de 10 unidades	7
1.2	Dimensionamento do serviço de clientes	7
1.3	Pressupostos considerados	7
2	Parte 2	9
2.1	Resumo de artigo	9
2.2	Teoria de filas de espera aplicadas a simulações de performance de <i>Cloudcomputing</i>	9
	ANEXOS	12
A	A	12
A.1	A1	12
A.2	A2	14
A.3	A3	35
A.3.1	Tabelas de resultados para o cálculo dos tempos médios de atendimento	35
A.3.2	Resultados obtidos com o <i>supositorio.com</i>	37

Capítulo 1

Parte 1

1.1 Análise do problema

1.1.1 Dados

O objetivo desta parte é a análise de um sistema de atendimento a clientes de um hipermercado, onde se possui alguns dados relativos à afluência dos clientes às caixas e ao volume do compras por cliente. Obteve-se dados referentes usando a aplicação fornecida para o efeito (Apêndice A.1 e Apêndice ??), com o número de aluno 72628. Além deste dados, possui-se a estimativa do tempo de serviço de cada caixa, representada através da formula $s = 25.5 + 3.1n$, onde n é o número de unidades de produtos por cliente, sendo a grandeza de medida deste tempo de atendimento o segundo.

1.1.2 Objetivo

Pretende-se dimensionar o serviço de atendimento de clientes, determinando o número de caixas necessárias para dois tipos de caixa: caixa com limite máximo de compras até 10 produtos e caixas com o limite mínimo de compras de 10 produtos. Este dimensionamento tem que ser tal, que o tempo de espera de cada cliente no tipo de caixa até 10 unidades de artigos seja 1.5 minutos e o no outro tipo seja de 3 minutos.

Com o exposto, em que existem tempos de espera antes de um atendimento numa caixa, e onde temos um tempo de serviço, podemos considerar que o sistema pode ser modelado em termos de filas de espera, onde as caixas serão os respectivos servidores. No entanto é necessário saber que tipo de fila de espera poderá modelar o sistema. Como, relativamente ao sistema, só dispomos de informação relativa a tempos de serviço e tempos de chegada e não sabemos certos aspetos do processo de chegada, disciplina da fila, nº de filas e mecanismo de serviço e número máximo de clientes por fila, assume-se, com base em observações anteriores de hipermercados, o seguinte:

- *Processo de chegada;*

Desconhece-se o número de cliente potenciais, se é infinito ou limitado. Assume-se que o número de potenciais clientes é ilimitado. De igual modo, desconhece-se se os clientes podem chegar em grupo ou não, no entanto, assume-se que o número de clientes que chegam simultaneamente é único. Não se sabe, se a taxa média de chegadas é constante, variável no tempo ou é influenciada pelo estado da fila, todavia assume-se que é constante. Desconhece-se se existe influência externa, pelo que se assume que não existe. No entanto, existem dados relativos às chegadas de clientes que é necessário confirmar a distribuição estatística.

- *Disciplina da fila;*

Relativamente à disciplina das filas, afirma-se que não pode ser *LIFO*, no entanto não se sabe de possíveis modalidades nas filas tal como filas prioritárias ou *pre-emptive*. Assim, assume-se que a disciplina das filas é *FIFO*.

- *Nº de filas*;

Afirma-se que existe uma fila para cada servidor, dado que cada fila é independente das outras.

- *Mecanismo de serviço*;

Não se sabe se existem modalidades de serviço em que clientes sejam atendidos em grupo. Assim assume-se que cada cliente é atendido de cada vez. De igual modo, não se sabe se a disponibilidade de serviço, assumindo-se que o serviço está sempre disponível, e também, desconhece-se se a taxa média de serviço é variável no tempo ou constante, pelo que se assume que a taxa média de serviço é constante. Tal como no processo de chegada, existem dados relativos aos tempos de serviço, pelo que é necessário averiguar a distribuição. Relativamente, ao número de servidores, assume-se que pode haver um ou vários, dependendo do tipo de caixa, uma vez que se desconhece-se se esse número pode variar.

- *Número máximo de clientes por fila*;

Desconhece-se se existe alguma modalidade, na qual existe um limite de clientes numa fila, pelo que se assume que o número de clientes numa fila é ilimitado.

Estas assunções podem ter implicações nos resultados do sistema e serão explicadas na secção seguinte.

1.1.3 Cálculos

Para a obtenção de uma solução ótima do problema é necessário, verificar a distribuição dos tempos de chegada, bem como dos tempos de serviço. Note-se que estes tempo, pelo que se pode observar nos dados não são constantes, pelo que podem ser um de duas hipóteses: ou são exponenciais negativos ou genérico. Mesmo que uma das distribuições se mostrem genéricas, ou melhor, que não seguem uma distribuição exponencial negativa, usar-se-á a exponencial negativa como simplificação. Para o caso da distribuição do tempo de serviço assumir-se-á que segue uma distribuição exponencial negativa, sem efetuar um teste de *bom ajuste* (ver Subsecção 1.1.6), uma vez que para o fazer seria necessário calcular o valor esperado de observações de cada categoria, o que acrescia bastante a complexidade do problema, sem garantias de obtenção de uma solução correta.

De igual modo, pede-se que se faça a distinção entre servidores: caixas até 10 itens e caixa mais de 10 itens. Cada um deste tipos de servidor tem um tempo associado, como já foi descrito anteriormente, pelo que é necessário dividir a amostra dada com os valores do número de compras por cliente, e a sua frequência, em dois grupos de dados. A Tabela A.1, no Apêndice A.3.1 é referente às caixas até 10 unidades, e a Tabela A.2 é referente às caixas para mais de 10 unidades.

1.1.4 Cálculo do taxa de atendimento para os dois tipos de serviço

Como temos dois grupos de dados, com determinados requisitos em relação ao tempo, necessitamos de obter a taxa média de atendimento (μ) para cada tipo de caixa. O procedimento adotado consistiu na obtenção do valor médio do tempo de serviço (\bar{s}) para obter cada um dos μ 's. Assim, recorreu-se à seguinte fórmula para achar o valor médio:

$$\tilde{s} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (t_i \cdot f_i) \quad (1.1)$$

Note-se que N é número total de observações, t_i é o tempo obtido através da formula $s = 25.5 + 3.1n$, onde n é o número de compras e, f_i é a frequência que n , ou t_i , ocorre. Assim obtemos a Tabela A.1 e Tabela A.2, que figuram no Apêndice A.3.1, onde a primeira coluna corresponde ao número de artigos por compra n , a segunda coluna a frequência em que a compra ocorre, a terceira coluna é o valor de $t_i \times f_i$. Com estes valores, aplicando a Equação 1.1, por partes, obtemos os seguintes valores:

- Para até 10 artigos;
 - Amostra de 864 clientes;
 - Tempo total de atendimento 37569.2 segundos;
 - Tempo médio de atendimento $\tilde{s} = 43.4829$ segundos;
 - Taxa de atendimento $\mu = \frac{1}{\tilde{s}} = 0.0230$ clientes/segundo;
 - Taxa de atendimento $\mu = \frac{1}{\tilde{s}} \times 60 \times 60 = 82.7912$ clientes/hora;
- Para mais de 10 artigos;
 - Amostra de 9733 clientes;
 - Tempo total de atendimento 1560874.1 segundos;
 - Tempo médio de atendimento $\tilde{s} = 160,3693$ segundos;
 - Taxa de atendimento $\mu = \frac{1}{\tilde{s}} = 0.0062$ clientes/segundo;
 - Taxa de atendimento $\mu = \frac{1}{\tilde{s}} \times 60 \times 60 = 22.4482$ clientes/hora;

1.1.5 Cálculo do taxa de chegada às caixas

Como não dispomos de informação suficiente, sobre a taxa de chegada (λ) a cada um dos tipos de caixa, temos que simplificar e usar λ para os dois tipos de serviço.

Para obter $\tilde{\lambda}$ para o número de observações existentes, usou-se a seguinte fórmula:

$$\tilde{\lambda} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m t_i} \quad (1.2)$$

Na Equação 1.2, m é o número total de observações e t_i é o tempo marcado da ocorrência.

Assim, para os dados relativos à taxa de chegada fornecidos e, aplicando a Equação 1.2 por partes, temos que:

- $m = 1000$ observações;
- Total da soma dos intervalos de tempo entre chegadas $\sum_{i=1}^m t_i = 17254,5$ segundos;
- $\tilde{\lambda} = 0,0580$ chegadas/segundo;
- $\tilde{\lambda} = \frac{m}{\sum_{i=1}^m t_i} \times 60 \times 60 = 208,6412$ chegadas/hora;

1.1.6 Teste às distribuições

Para testar o $\tilde{\lambda}$ e TODO o é necessário recorrer ao teste do *bom ajuste* ou χ^2 . Este processo consiste, em dividir a amostra em k categorias, correspondentes a intervalos, onde cada uma delas possui uma frequência de ocorrência, i.e. o número de t_i em segundos que cai em cada uma das categorias. Para o cálculo da estatística de teste, para além dos valores das frequências o_j observadas, temos o número esperado de ocorrências e_j . A estatística de teste pode ser calculada a partir, da seguinte fórmula:

$$\chi^2(obs) = \sum_{j=1}^k \frac{(o_j - e_j)^2}{e_j} \quad (1.3)$$

O k é o número de categorias, e $\chi^2(obs)$ deverá seguir uma distribuição χ^2 com $k - r - 1$ graus de liberdade, onde $r = 1$ e $\alpha = 0.05$.

Assim, se $\chi^2(obs) \leq \chi^2_{k-r-1}$ pode-se admitir que os t_i representam uma amostra da distribuição $f(t) = \tilde{\lambda}e^{-\tilde{\lambda}t}$. Caso contrário, não será razoável admitir essa consideração.

Deste forma, procedeu-se à implementação do processo. Dividiu-se a amostra em 5 categorias, tais que, a probabilidade de cair em cada uma delas é igual. Logo, 5 categorias indicam uma probabilidade de 0.2 para cada uma delas. Consequentemente, o número esperado $e_j = 0.2 \times 1000 \iff e_j = 200$, onde 1000 é o número total de observações.

Para calcular os limites de fronteira das categorias necessitou-se de recorrer à função acumulada $F(t) = P(A \leq t) = 1 - e^{-\tilde{\lambda}t}$, onde $\tilde{\lambda} = 0,0580$, já previamente mencionado.

Temos que $F(l_1) = 0.2$, $F(l_2) = 0.4$, $F(l_3) = 0.6$ e $F(l_4) = 0.8$. Resolvendo em ordem a $l_i \forall i \in \{1, 2, 3, 4\}$ temos a seguinte equação:

$$l_i = -\frac{1}{0,0580} \times \ln(1 - F(l_i)), \forall i \in \{1, 2, 3, 4\} \quad (1.4)$$

Assim, obtemos os valores fronteira que figuram na Tabela 1.1.

Fronteira	Valor (segundos)
$L1$	3,85
$L2$	8,81
$L3$	15,81
$L4$	27,77

Tabela 1.1: Fronteiras dos Intervalos

Para cada categoria, os intervalos ficaram como figura na Tabela 1.2.

Categoria	Intervalo	Número observado
1	$0 \leq t < L1$	187
2	$L1 \leq t < L2$	192
3	$L2 \leq t < L3$	215
4	$L3 \leq t < L4$	221
5	$L4 \leq t$	185

Tabela 1.2: Intervalos (tempo em s)

As parcelas na Tabela 1.3, correspondem ao valor obtido para cada o_j na Equação 1.3. O total figura na última linha e é a estatística de teste.

Cálculo do χ^2 para os valores observados	
Parcela 1	0,845
Parcela 2	0,32
Parcela 3	1,125
Parcela 4	2,205
Parcela 5	1,125
$\chi^2(obs)$	5,62

Tabela 1.3: χ^2 para valores observados

Para $\alpha = 0.05$, com $k - r - 1 = 3$ graus de liberdade, temos que o valor tabelado do $\chi^2_3 = 7.81$. Como $\chi^2_3 > \chi^2(obs)$ aceita-se que os t_i seguem uma distribuição exponencial negativa, com um nível de confiança de 95%.

1.1.7 Resultados obtidos

Os resultados foram obtidos através da aplicação *web* `supositorio.com`, iterando os valores dos servidores até o tempo de espera do cliente ser menor ou igual 3 minutos para caixas para mais de 10 compras e 1.5 minutos para caixas até 10 unidades. Note-se que se tentou aproximar o máximo o valor de Lq para estes valores.

1.1.7.1 Para até 10 unidades

Para até 10 unidades, tentou-se com 2, 3 e 4 servidores, para os valores de λ e μ indicados acima. Para 2 servidores, sendo $\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$, temos que $\rho = 1.62$ o que é maior que 1, logo a fila crescerá infinitamente. Para 3 servidores, temos que $\rho = 0.84$, $L = 6.2887$ clientes no sistema, e $Lq = 3.767$ clientes na fila, sendo que a medida que interessa, tempo de espera na fila, $Wq = 1.0825$ minutos. Para 4 servidores, temos que $\rho = 0.63$, $L = 3.0799$, e $Lq = 0.5582$ minutos, sendo que a medida que interessa $Wq = 0.1604$ minutos.

1.1.7.2 Para mais de 10 unidades

Para mais de 10 unidades, tentou-se com 9, 10, 11 e 12 servidores, para os valores de λ e μ indicados acima. Para 9 servidores, sendo $\rho = \frac{\lambda}{S\mu}$, temos que $\rho = 1.039$ o que é maior que 1, logo a fila crescerá infinitamente. Para 10 servidores, temos que $\rho = 0.9355$, $L = 20.639$ clientes no sistema, e $Lq = 11.2841$ clientes na fila, sendo que a medida que interessa, tempos de espera na fila, $Wq = 3.2426$ minutos. Note-se que os valores já estão em minutos. Para 11 servidores, temos que $\rho = 0.8504$, $L = 12.2668$ clientes no sistema, e $Lq = 2.912$ clientes na fila, sendo que a medida que interessa $Wq = 0.8368$ minutos.

Os resultados completos podem ser consultados no Apêndice [A.3.2](#).

1.2 Dimensionamento do serviço de clientes

Com os dados descritos na anterior secção, podemos concluir que a solução ótima para o número de caixas até 10 unidades, são 3 servidores, pois tem o Wq mais próximo de 1.5 minutos, e para caixas para mais de 10 unidades temos que, a solução ótima são 10 servidores porque tem o Wq mais próximo de 3 minutos. Embora o tempo de espera na fila seja de 0.8363 minutos, o ρ ronda os 80%, que é um valor aceitável.

1.3 Pressupostos considerados

Durante a análise e do problema apresentado, foi pressuposto que nas caixas normais são atendidos apenas clientes que tragam mais do que 10 unidades de artigos. Esta suposição tem como objetivo simplificar a resolução deste problema, pois em situações reais o atendimento a clientes que comprem até 10 unidades de artigos não está limitado às caixas designadas para tal volume de compras.

A partir dos dados gerados para a resolução deste problema, é possível determinar apenas uma taxa de chegada única, usando os intervalos de tempo entre duas chegadas consecutivas. Na listagem deste intervalos não existe uma discriminação entre clientes com compras de mais ou menos 10 unidades de artigos. Consequentemente, para determinar uma taxa de chegada para cada tipo de sistema de servidores, seria necessário assumir que uma parte dos intervalos listados corresponderia a chegadas a uma caixa para menos de 10 unidades, e a parte restante corresponderia a chegadas a uma caixa normal. Esta separação poderia ser definida ao determinar a percentagem de clientes que compraram

menos de 10 unidades de artigos, e aplicar este valor à soma dos intervalos de chegadas, usando o valor correspondente para calcular a taxa de chegada para caixas de 10 artigos ou menos, e o restante valor para as caixas normais.

Existem outros pressupostos que podem influenciar o modelo, e que não são dados do problema. Como já mencionado nas primeiras secções, desconhece-se se podem chegar em grupo ou não. De facto, existem serviços de hipermercado, nos quais a chegada pode ser em grupo, tal como pessoas de zonas rurais que chegam de camionetas para ir à compras. Outra assunção, é que a taxa de chegadas é constante. Ora, esta pode variar consoante dias da semana, bem como em horários distintos durante o dia. Pode haver influência externa, por exemplo, o hipermercado fazer parte de um centro comercial, como é o caso de *Pingo Doce* no *Braga Parque*, e como essa influência influencia o hipermercado. Em relação à disciplina das filas, assumiu-se que as filas teriam uma disciplina do tipo *FIFO*. Note-se no entanto, que pode haver filas prioritárias para pessoas com deficiência, grávidas, entre outros grupos. Pensa-se que a disciplina de *pre-emptive* não se aplica, dado que se desconhece implementação do género.

Em relação ao número de filas, dado a taxa de chegada ser única, e de igual modo, temos dois tipos de caixas, em que não existe uma obrigatoriedade de limite de compras, a assunção de que existem várias filas pode estar errada. A fila pode ser única.

Outra nuance do problema tem a ver como o facto de clientes serem ou não atendidos em grupo, i.e. existem serviços, tais como compras online, onde são encomendadas compras e próprio hipermercado pode criar os lotes para entrega, ou empresas ou particulares que o façam. De igual modo, não é possível saber se o serviço alguma vez está indisponível, tal como, em feriados como, se fecha ao fim de semana — embora os hipermercados conhecidos não o façam, — ou outro. Da mesma forma, não é possível saber se a taxa média de serviço é constante, ou se é variável: pode depender do tipo de mecanismos por caixa, ou simplesmente ter mais que uma pessoa a atender.

Não se sabe se as filas têm limite de clientes, dependendo da política do hipermercado.

Capítulo 2

Parte 2

2.1 Resumo de artigo

2.2 Teoria de filas de espera aplicadas a simulações de performance de *Cloudcomputing*

1

Este artigo introduz os conceitos de teoria de filas de espera e processos estocásticos aplicáveis à modelação de performance computacional, comparando no final os resultados obtidos através da solução matemática com os resultados obtidos através da simulação por software de um modelo de filas de espera.

Inicialmente, é descrito de uma forma geral o processo de *Poisson*, correspondente ao registo e contagem dos intervalos de tempo entre a ocorrência de eventos independentes. Considerando um processo em que tais eventos ocorrem de forma aleatória, a distribuição exponencial é a função necessária para descrever tal processo. O autor defende a importância da distribuição exponencial na simulação de performance computacional, usando como exemplo a modelação da chegada de pedidos a um servidor, no qual se pode assumir que os pedidos são gerados de forma aleatória e independente.

Para a futura análise da aplicabilidade de uma simulação computacional, o autor considera um modelo de fila de espera $M/G/1$, ou fila de espera com distribuição genérica. Este modelo usa uma distribuição exponencial para descrever taxa de chegada de pedidos ao sistema, com um tempo de atendimento aleatório. A utilização da teoria das filas de espera permite determinar o tempo médio que um pedido espera na fila antes de ser servido, que corresponde à total dos tempos de atendimento para cada pedido à frente do pedido considerado, somado com o tempo de atendimento restante do pedido que é servido no momento da chegada do pedido considerado à fila. O autor apresenta também os processos matemáticos para a medição de performance no modelo $M/G/1$, usando uma taxa de chegada λ e um tempo de atendimento X para determinar a utilização do sistema.

Seguidamente, o autor descreve a criação do algoritmo para modelar os sistema $M/G/1$, referindo o uso do método da transformada inversa para a geração de tempos de intervalo entre chegadas e tempos de atendimento aleatórios. Consequentemente o autor procede à comparação entre a solução matemática e a simulação informática deste problema de filas de espera, com o objetivo de testar a aplicabilidade da última. A simulação é testada com quatro distribuições de tempo de chegada diferentes, e confirma a precisão do modelo de simulação ao verificar que os valores obtidos estão de acordo com os resultados das soluções matemáticas para as quatro distribuições testadas.

¹http://www.dbjournal.ro/archive/20/20_7.pdf

O autor conclui por fim, que a simulação computacional é uma ferramenta importante para a análise de modelos de filas de espera, principalmente em casos de maior complexidade em que a aproximação matemática pode ser não prática.

ANEXOS

Apêndice A

A

A.1 A1

Grupo que inclui o Aluno com o No 72628

MEIO-TP1 – Numero de unidades de artigos compradas por cada cliente

Numero/ Frequencia

1	67
2	71
3	88
4	81
5	82
6	96
7	98
8	88
9	91
10	102
11	89
12	89
13	64
14	76
15	74
16	90
17	83
18	120
19	100
20	95
21	106
22	104
23	122
24	109
25	144
26	140
27	122
28	156
29	159
30	146

31	156
32	170
33	183
34	185
35	201
36	187
37	197
38	187
39	206
40	204
41	206
42	199
43	196
44	242
45	220
46	225
47	243
48	263
49	257
50	227
51	213
52	213
53	203
54	203
55	202
56	203
57	175
58	176
59	172
60	145
61	164
62	145
63	113
64	100
65	129
66	110
67	95
68	98
69	86
70	85
71	68
72	72
73	54
74	45
75+	122

Listing 1: cópia do ficheiro de dados 'tp1_nc.xls' após ter gerado os valores

A.2 A2

Grupo que inclui o Aluno com o No 72628

MEIO-TP1 – Intervalos de tempo entre duas chegadas consecutivas as caixas (

30.3

38.1

17.1

23.7

12.1

5.3

1.2

8.0

23.5

6.1

28.9

22.2

1.7

21.9

26.6

13.6

2.9

10.0

33.8

5.5

56.1

44.3

27.1

4.4

27.6

12.3

17.3

0.9

31.7

15.6

9.8

52.5

19.8

6.9

0.9

1.0

37.8

25.3

5.3

16.3

6.2

5.5

13.5

6.4

1.0
14.4
11.5
13.7
9.8
23.9
4.3
5.9
24.4
20.9
25.0
39.8
6.1
2.9
11.5
54.4
9.1
24.8
26.1
9.5
4.9
4.5
25.6
21.8
4.8
5.9
22.7
5.4
6.6
31.7
8.7
10.9
4.7
26.0
0.7
1.6
47.4
17.9
3.6
16.5
58.1
3.4
27.0
22.2
1.4
38.7
14.4
70.7

19.4
15.9
34.3
11.1
5.3
1.1
9.6
7.4
14.0
1.0
3.6
8.6
10.8
28.7
10.4
11.2
5.8
22.8
28.0
2.3
13.9
5.7
1.4
6.1
3.8
26.3
20.3
19.4
40.8
4.9
25.2
2.4
35.7
46.9
5.0
11.4
2.4
3.3
14.7
8.0
21.6
12.3
5.7
17.6
3.1
9.0
21.7
10.2

4.5
12.5
27.7
6.4
14.1
15.8
12.1
19.3
7.6
3.9
18.3
11.6
9.1
23.2
21.7
18.6
14.5
3.3
46.2
17.2
41.2
46.7
30.1
28.6
5.4
27.9
2.8
13.9
10.0
6.2
3.1
95.4
18.4
4.9
26.9
10.7
7.0
26.0
10.7
14.5
11.5
1.1
7.7
2.8
26.9
0.5
11.4
23.8

4.3
51.6
19.2
6.3
17.8
12.1
65.6
8.3
2.1
14.2
14.7
47.5
6.7
1.5
9.5
1.6
18.2
9.7
85.5
23.2
0.7
14.6
27.1
53.7
9.0
5.1
8.1
2.1
11.2
38.6
11.2
11.2
5.8
5.1
18.1
34.2
5.0
16.0
4.3
14.5
38.7
7.8
5.3
20.8
10.7
27.1
74.8
6.7

30.7
6.5
12.9
28.8
4.4
4.3
7.6
2.2
19.4
16.9
7.6
10.5
12.6
20.6
1.7
2.7
13.3
45.9
1.0
0.1
11.5
2.2
7.8
16.0
15.4
4.5
5.5
27.0
11.1
16.1
12.0
15.9
100.3
18.0
34.3
9.0
13.9
8.5
7.2
13.6
16.8
19.2
80.2
11.0
21.9
0.7
14.3
10.9

17.5
26.1
4.5
19.2
5.3
31.1
11.5
23.5
2.8
7.2
11.2
17.7
5.4
6.2
0.2
7.7
5.0
7.2
12.6
23.1
21.5
67.0
27.0
5.7
6.5
27.0
8.8
37.7
2.4
20.9
14.1
13.8
3.5
6.0
12.5
29.4
19.1
16.8
62.0
2.8
19.6
0.5
8.1
18.3
14.2
22.9
1.3
27.2

17.0
21.4
3.6
8.4
37.2
17.1
3.9
14.0
38.4
8.0
9.3
14.4
2.3
16.2
0.9
15.4
36.7
14.1
37.9
9.8
18.3
78.4
10.4
53.6
3.5
3.6
17.3
0.1
16.1
14.4
19.4
8.3
74.1
7.7
1.0
4.3
10.9
3.3
27.2
17.2
0.5
55.9
8.4
28.4
5.4
4.0
4.7
0.3

23.3
2.4
15.4
10.5
17.2
5.1
1.4
8.8
8.9
29.5
11.4
5.4
6.4
16.3
10.4
2.0
19.0
19.5
8.2
20.5
60.0
38.3
7.6
3.5
4.4
10.9
13.7
9.6
2.0
26.3
32.1
6.1
8.8
8.9
94.7
45.1
7.7
23.7
31.7
37.6
5.1
14.4
9.8
1.4
10.1
11.6
7.4
1.1

16.2
10.8
3.0
15.1
0.7
14.5
18.8
2.5
3.2
25.0
15.9
30.1
45.5
12.2
16.5
12.2
5.5
30.3
30.4
1.0
1.1
55.0
21.4
6.7
8.2
2.9
5.1
23.0
8.6
2.2
53.0
7.7
17.7
50.9
13.1
18.1
20.8
19.6
3.1
57.1
4.4
13.3
66.0
13.2
6.5
1.4
25.4
0.6

15.6
7.1
15.2
13.7
0.5
2.7
18.1
9.8
35.1
0.5
29.3
17.8
7.7
2.8
21.9
1.1
15.6
44.7
14.8
7.1
19.1
17.0
10.0
13.4
11.3
13.8
18.3
9.3
44.5
19.5
1.9
23.3
33.6
7.4
2.5
10.1
0.1
13.9
12.6
14.6
40.2
11.4
3.8
5.5
29.6
43.4
20.2
84.4

1.9
26.0
18.7
9.4
19.1
10.7
8.6
22.3
15.9
18.9
2.2
3.1
68.6
13.0
1.9
19.5
22.5
14.5
8.6
14.8
35.1
22.6
1.7
10.1
11.5
20.4
25.9
13.2
5.1
15.2
0.9
1.0
21.8
8.5
45.9
40.8
10.5
8.7
2.0
32.2
22.7
23.2
39.8
35.4
2.7
40.4
5.6
12.2

35.2
8.4
11.4
0.4
4.8
29.4
1.1
1.8
5.6
11.5
18.8
19.5
92.9
4.5
17.9
25.0
3.8
8.0
3.8
3.7
39.1
5.4
2.0
13.5
3.3
41.8
9.4
2.7
12.6
67.9
3.5
26.0
18.7
23.4
15.8
1.1
1.9
0.8
20.3
34.1
2.8
10.7
3.3
45.7
27.5
33.9
2.6
10.2

13.6
3.3
20.6
2.3
5.7
20.1
32.4
10.3
9.2
0.7
21.2
7.4
3.8
21.3
2.5
42.5
46.0
3.1
18.8
3.1
30.8
11.5
2.6
8.1
3.8
35.8
8.6
17.8
0.4
5.8
17.5
27.7
3.6
27.1
12.0
5.0
1.8
15.1
2.6
36.0
7.3
18.0
15.6
22.5
6.8
2.7
45.4
27.8

18.0
24.2
23.1
27.3
5.3
10.5
2.4
0.4
14.8
5.7
5.3
20.8
4.2
4.3
7.9
18.4
2.3
29.7
68.6
10.5
38.2
9.5
7.7
22.8
8.3
0.2
12.8
64.4
5.1
30.3
18.6
1.6
15.7
18.6
51.0
52.8
48.9
11.7
3.6
27.9
24.5
1.6
3.6
31.0
6.7
3.8
33.7
55.5

29.6
48.9
3.8
2.0
30.6
28.8
35.8
11.3
2.3
13.8
0.2
14.4
23.1
4.7
1.6
63.1
4.3
18.2
0.0
24.5
12.5
10.0
8.4
10.3
15.9
7.4
31.7
8.7
27.1
15.0
37.7
0.9
4.9
17.7
8.1
9.5
8.8
12.0
5.3
4.1
1.9
39.9
7.9
42.0
48.4
17.6
16.8
6.0

4.4
10.5
9.6
40.9
29.1
48.7
25.5
11.1
8.8
26.0
4.3
19.9
13.1
9.7
21.9
10.4
2.0
21.7
9.0
17.0
3.5
20.4
7.6
29.8
7.7
28.4
8.3
16.7
10.6
9.9
27.3
17.7
1.3
7.5
25.6
9.0
30.5
17.8
21.6
18.1
7.6
54.2
39.8
53.7
5.3
2.3
8.3
0.6

12.2
70.9
15.5
76.1
47.7
65.5
37.6
4.9
11.7
5.1
16.4
32.3
19.7
22.5
4.2
1.9
7.6
4.6
3.3
3.9
14.1
3.9
8.5
1.8
2.0
4.3
22.5
10.2
9.7
12.8
15.4
10.4
1.0
4.2
3.7
17.9
60.8
36.9
1.7
30.7
25.4
13.6
44.5
3.8
29.0
40.9
2.8
7.3

50.6
2.6
72.7
6.5
2.5
22.6
12.1
8.7
3.6
48.5
37.6
21.3
15.1
5.7
9.5
8.2
83.9
18.3
15.7
18.0
2.2
17.9
24.4
10.0
12.0
66.6
8.3
2.1
61.3
2.8
20.6
4.5
3.8
1.2
23.8
1.3
30.5
5.2
2.9
40.9
11.1
49.4
11.0
20.7
41.7
50.2
6.1
32.4

20.2
43.4
12.9
57.0
2.6
3.3
15.8
17.7
14.8
61.4
6.1
3.6
4.0
47.2
4.5
9.5
10.7
1.0
0.9
17.7
31.8
11.8
11.4
0.6
0.9
13.1
13.7
43.5
11.0
9.3
15.3
1.0
17.3
73.0
17.2
0.1
0.9
7.6
2.5
15.6
38.8
22.5
23.5
13.6
18.9
15.5
3.2
43.3

12.3
1.5
32.6
44.9
3.2
43.1
6.4
11.2
23.0
5.9
1.7
22.9
13.8
20.5
8.8
11.8
6.6
11.9
1.4
19.6
24.5
6.9
103.9
19.6
9.5
19.0
49.9
0.8
24.3
3.4
2.6
46.5
38.6
10.7
0.3
39.1
1.8
38.6
10.2
8.3
21.5
11.1
1.5
29.2

Listing 2: cópia do ficheiro de dados 'tp1_ta.xls' após ter gerado os valores

A.3 A3

A.3.1 Tabelas de resultados para o cálculo dos tempos médios de atendimento

Frequência	T. de atendimento s (segundos)	T. de atendimento p/ vol. compra
67	28,6	1916,2
71	31,7	2250,7
88	34,8	3062,4
81	37,9	3069,9
82	41	3362
96	44,1	4233,6
98	47,2	4625,6
88	50,3	4426,4
91	53,4	4859,4
102	56,5	5763

Tabela A.1: Listagem freq., tempos de atendimento

Nº de artigos p/ compra	Freq.	T. de atendimento s (segundos)	T. de atendimento total p/ vol. de compras
11	89	59,6	5304,4
12	89	62,7	5580,3
13	64	65,8	4211,2
14	76	68,9	5236,4
15	74	72	5328
16	90	75,1	6759
17	83	78,2	6490,6
18	120	81,3	9756
19	100	84,4	8440
20	95	87,5	8312,5
21	106	90,6	9603,6
22	104	93,7	9744,8
23	122	96,8	11809,6
24	109	99,9	10889,1
25	144	103	14832
26	140	106,1	14854
27	122	109,2	13322,4
28	156	112,3	17518,8
29	159	115,4	18348,6
30	146	118,5	17301
31	156	121,6	18969,6
32	170	124,7	21199
33	183	127,8	23387,4
34	185	130,9	24216,5
35	201	134	26934
36	187	137,1	25637,7
37	197	140,2	27619,4
38	187	143,3	26797,1
39	206	146,4	30158,4
40	204	149,5	30498
41	206	152,6	31435,6
42	199	155,7	30984,3
43	196	158,8	31124,8
44	242	161,9	39179,8
45	220	165	36300
46	225	168,1	37822,5
47	243	171,2	41601,6
48	263	174,3	45840,9
49	257	177,4	45591,8
50	227	180,5	40973,5
51	213	183,6	39106,8
52	213	186,7	39767,1
53	203	189,8	38529,4
54	203	192,9	39158,7
55	202	196	39592

56	203	199,1	40417,3
57	175	202,2	35385
58	176	205,3	36132,8
59	172	208,4	35844,8
60	145	211,5	30667,5
61	164	214,6	35194,4
62	145	217,7	31566,5
63	113	220,8	24950,4
64	100	223,9	22390
65	129	227	29283
66	110	230,1	25311
67	95	233,2	22154
68	98	236,3	23157,4
69	86	239,4	20588,4
70	85	242,5	20612,5
71	68	245,6	16700,8
72	72	248,7	17906,4
73	54	251,8	13597,2
74	45	254,9	11470,5
75	122	258	31476

Tabela A.2: Listagem freq., tempos de atendimento

A.3.2 Resultados obtidos com o *supositorio.com*

C

3

Número de servidores

Número de servidores en paralelo abiertos para atender clientes.

Tasas de llegada y servicio

λ Arrivals / Second

0.058 Cust/sec ▾

Convertir

μ Services / Second

0.023 Cust/sec ▾

Convertir

Figura A.1: Valores introduzidos para a solução ótima com 3 servidores, para até 10 compras

3. Ver tus resultados.

Ver resultados en: **Custom** y mostrar los resultados con 4 decimales

6.2887

Customers
L Promedio de Clientes en el Sistema

Valor esperado de clientes en el sistema.

3.767 Customers

Lq Promedio de Clientes en fila

Promedio de clientes (entidades) en la fila. En otras palabras, la cantidad esperada de clientes esperando a ser atendidos.

1.8071 Minutes

W Tiempo Promedio Dentro del Sistema

Tiempo promedio que está un cliente desde que llega y hasta que lo terminan de atender.

1.0825 Minutes

Wq Tiempo Promedio en Fila

Tiempo promedio que tarda un cliente desde que llega hasta que lo comienzan a atender.

0.8406

p Utilización de los servidores

Porcentaje del tiempo que los servidores están siendo utilizados por algún cliente.

λ' Lambda prima

Este valor se usa en algunos cálculos.

Probabilidades

Discretas

P (n clientes en sistema) = **0**

Clientes: **0.0426**

Time Based

P (tiempo en sistema <= **0** Minutes) = **0**

P (tiempo en fila <= **0** Minutes) = **0.2856**

(a) 3 servidores

3. Ver tus resultados.

Ver resultados en: **Custom** y mostrar los resultados con 4 decimales

3.0799

Customers
L Promedio de Clientes en el Sistema

Valor esperado de clientes en el sistema.

0.5582

Customers
Lq Promedio de Clientes en fila

Promedio de clientes (entidades) en la fila. En otras palabras, la cantidad esperada de clientes esperando a ser atendidos.

0.885 Minutes

W Tiempo Promedio Dentro del Sistema

Tiempo promedio que está un cliente desde que llega y hasta que lo terminan de atender.

0.1604 Minutes

Wq Tiempo Promedio en Fila

Tiempo promedio que tarda un cliente desde que llega hasta que lo comienzan a atender.

0.6304

p Utilización de los servidores

Porcentaje del tiempo que los servidores están siendo utilizados por algún cliente.

λ' Lambda prima

Este valor se usa en algunos cálculos.

Probabilidades

Discretas

P (n clientes en sistema) = **0**

Clientes: **0.0718**

Time Based

P (tiempo en sistema <= **0** Minutes) = **0**

P (tiempo en fila <= **0** Minutes) = **0.6728**

(b) 4 servidores

Figura A.2: Resultados para configurações com $S = 3$ e $S = 4$ para até 10 items

2. Ingresa todos los valores requeridos.

C

10

Número de servidores
Número de servidores en paralelo abiertos para atender clientes.

Tasas de llegada y servicio

λ Arrivals / Second

0.058 Cust/sec ▾ Convertir

μ Services / Second

0.0062 Cust/sec ▾ Convertir

Figura A.3: Valores introducidos para a solução ótima para 10 servidores, para mais de 10 compras

3. Ver tus resultados.

Ver resultados en: **Cust/min** y mostrar los resultados con 4 decimales

20.639

Customers
L Promedio de Clientes en el Sistema

Valor esperado de clientes en el sistema.

11.2841

Customers
Lq Promedio de Clientes en fila

Promedio de clientes (entidades) en la fila. En otras palabras, la cantidad esperada de clientes esperando a ser atendidos.

5.9307 Minutes

W Tiempo Promedio Dentro del Sistema

Tiempo promedio que está un cliente desde que llega y hasta que lo terminan de atender.

3.2426 Minutes

Wq Tiempo Promedio en Fila

Tiempo promedio que tarda un cliente desde que llega hasta que lo comienzan a atender.

0.9355

ρ Utilización de los servidores

Porcentaje del tiempo que los servidores están siendo utilizados por algún cliente.

λ' Lambda prima

Este valor se usa en algunos cálculos.

Probabilidad

Discretas

P (n clientes en sistema) = Clientes >= 0

Time Based

P (tiempo en sistema <= Minutos) = 0

P (tiempo en fila <= Minutos) = 0.2218

(a) 10 servidores

3. Ver tus resultados.

Ver resultados en: **Cust/min** y mostrar los resultados con 4 decimales

12.2668

Customers
L Promedio de Clientes en el Sistema

Valor esperado de clientes en el sistema.

2.912 Customers

Lq Promedio de Clientes en fila

Promedio de clientes (entidades) en la fila. En otras palabras, la cantidad esperada de clientes esperando a ser atendidos.

3.525 Minutes

W Tiempo Promedio Dentro del Sistema

Tiempo promedio que está un cliente desde que llega y hasta que lo terminan de atender.

0.8368 Minutes

Wq Tiempo Promedio en Fila

Tiempo promedio que tarda un cliente desde que llega hasta que lo comienzan a atender.

0.8504

ρ Utilización de los servidores

Porcentaje del tiempo que los servidores están siendo utilizados por algún cliente.

λ' Lambda prima

Este valor se usa en algunos cálculos.

Probabilidad

Discretas

P (n clientes en sistema) = Clientes >= 0

Time Based

P (tiempo en sistema <= Minutos) = 0

(b) 11 servidores

3. Ver tus resultados.

Ver resultados en: **Cust/min** y mostrar los resultados con 4 decimales

10.5016

Customers
L Promedio de Clientes en el Sistema

Valor esperado de clientes en el sistema.

1.1468

Customers
Lq Promedio de Clientes en fila

Promedio de clientes (entidades) en la fila. En otras palabras, la cantidad esperada de clientes esperando a ser atendidos.

3.0177 Minutes

W Tiempo Promedio Dentro del Sistema

Tiempo promedio que está un cliente desde que llega y hasta que lo terminan de atender.

0.3295 Minutes

Wq Tiempo Promedio en Fila

Tiempo promedio que tarda un cliente desde que llega hasta que lo comienzan a atender.

0.7796

ρ Utilización de los servidores

Porcentaje del tiempo que los servidores están siendo utilizados por algún cliente.

λ' Lambda prima

Este valor se usa en algunos cálculos.

Probabilidad

Discretas

P (n clientes en sistema) = Clientes >= 0

Time Based

P (tiempo en sistema <= Minutos) = 0

P (tiempo en fila <= Minutos) = 0.6757

(c) 12 servidores

Figura A.4: Resultados para configuraciones con $S = 10$, $S = 11$ e $S = 12$ para para cima de 10 items