

Projet interdisciplinaire - Simulation par différences finies du chauffage d'une pièce

BARGAIN Charlotte, BENHAMNA Jugurtha,
CALLARD Baptiste, LIAO Yonghan

Décembre 2021



Remerciements

Depuis la sélection du sujet jusqu'à l'achèvement du rapport en passant par la révision de notre code, nous avons reçu l'aide enthousiaste de notre tuteur **M. Nouveau**.

Nous tenons à le remercier chaleureusement pour son implication. Lorsque nous avons rencontré des difficultés d'ordre organisationnelles dans le cadre de ce module, **M. Nouveau** a su prendre les choses en main et réagir rapidement pour nous proposer un nouveau sujet à aborder. De plus, malgré son emploi du temps chargé, il a assuré un suivi régulier de notre projet en se rendant très disponible pour notre groupe et s'est distingué par la clarté et la pertinence de ses explications.

Résumé

Lors de ce projet, nous nous sommes penchés sur le problème de la diffusion de la chaleur dans un logement. Après avoir modélisé une pièce de vie, nous avons souhaité y étudier la propagation de la chaleur. Notre objectif initial était de définir un emplacement optimal pour les radiateurs en fonction des différentes variables de notre problème. Nous avons choisi de minimiser le temps d'allumage des radiateurs en s'inspirant du principe du thermostat pour différentes configurations. Afin de dégager la meilleure solution, nous avons illustré les transferts thermiques en jeu dans ces pièces via des outils de visualisation sur Python. Nous avons ainsi dégagé un emplacement optimal des radiateurs.

Pour modéliser la propagation de la chaleur, nous avons résolu numériquement l'équation de diffusion de la chaleur par la méthode des différences finies. A la fin de notre étude, nous nous sommes penché sur la résolution en 3 dimensions de ce problème. La modélisation amenée par notre groupe est limitée dans la mesure où elle ne prend pas en compte les mouvements de convection dans la pièce.

Abstract

In this project, we studied the problem of heat diffusion in a house. After having modelled a living room, we wanted to study the heat propagation in it. Our initial objective was to define an optimal location for the radiators according to the different variables of our problem. We chose to minimise the ignition time of the radiators by taking inspiration from the thermostat principle for different configurations. In order to find the best solution, we illustrated the heat transfers at stake in these rooms using visualization tools in Python. This allowed us to find an optimal location for the radiators.

To model the heat propagation, we solved the heat diffusion equation numerically using the finite difference method. At the end of our study, we focused on solving this problem in 3 dimensions. The modelling provided by our group is limited because it does not take into account the convection movements in the room.

Vocabulaire technique

- **Transfert thermique** : un mode d'échange d'énergie interne entre deux systèmes.
 - **Chaleur** : énergie échangée lors d'un transfert thermique.
 - **Conductivité thermique** : grandeur physique exprimée en $W \times m^{-1} \times K^{-1}$, caractérisant la capacité d'un matériau à diffuser la chaleur. C'est la quantité d'énergie nécessaire pour augmenter d'une unité de température une unité de masse considérée. Lorsque la valeur de cette grandeur est très petite, la diffusion de la chaleur dans le matériau se fait rapidement, et inversement. Par exemple, la conductivité thermique d'un mur étant plus grande que celle de l'air, la chaleur se diffusera moins rapidement dans le mur que dans l'air.
 - **Déperdition thermique** : perte de chaleur que subit un bâtiment par ses parois et par ses échanges de fluides avec l'extérieur.
 - **Équation aux dérivées partielles (EDP)** : équation différentielle dont les solutions sont des fonctions inconnues dépendant de plusieurs variables vérifiant des conditions concernant leurs dérivées partielles.
 - **Équation de la chaleur** : équation aux dérivées partielles qui décrit un phénomène physique de conduction thermique.
 - **Méthode des différences finies** : technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles qui consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.
-

Table des matières

| | | |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| I | Introduction | 1 |
| II | Approche physique du problème | 1 |
| II.1 | Loi de Fourier | 2 |
| II.2 | Équation de la chaleur | 2 |
| III | Méthode de résolution numérique | 3 |
| IV | Recherche d'une modélisation réaliste | 7 |
| IV.1 | Formulation des hypothèses et modélisation d'un cas d'étude | 7 |
| IV.2 | Étude temporelle du temps d'exécution | 9 |
| IV.3 | Évolution de la température en fixant les conditions initiales | 10 |
| IV.4 | Placement des radiateurs dans la pièce | 12 |
| IV.5 | Placement optimal du radiateur pour minimiser son temps d'allumage dans une maison vide | 15 |
| IV.6 | Placement optimal du radiateur pour minimiser son temps d'allumage dans une maison avec des murs | 17 |
| IV.7 | Comparaison avec le placement optimal d'une climatisation | 18 |
| V | Modélisation en 3 dimensions de la propagation de la chaleur | 20 |
| V.1 | Cas d'étude | 21 |
| V.2 | Première étude : fenêtre et radiateur de part et d'autre de la pièce | 21 |
| V.3 | Deuxième étude : fenêtre et radiateur sur deux faces adjacentes | 22 |
| V.4 | Troisième étude : fente carré en centre du cube sans les conditions de bord | 23 |
| VI | Conclusion | 25 |
| VI.1 | Résumé du projet | 25 |
| VI.2 | Les difficultés rencontrées | 25 |
| VI.3 | Ce que le projet nous a apporté | 26 |

I Introduction

L'étude de la diffusion de la chaleur dans une pièce est un fondement de la thermique du bâtiment qui est une discipline étudiant les besoins énergétiques des bâtiments. Cette branche de la thermique cherche à maintenir une température tempérée à l'intérieur d'une pièce, en y apportant le moins d'énergie possible. Pour cela, il faut étudier les emplacements optimaux des sources de chaleur (radiateurs) par rapport aux sources de déperditions de chaleur (fenêtres, murs).

Il convient de noter que la conduction thermique est le processus de transfert d'énergie thermique d'une température élevée vers une température basse et est le résultat du transfert d'énergie vibratoire d'une molécule à une autre. Grâce à l'équation connue (Loi de Fourier), on peut décrire la loi de conduction thermique dans le milieu :

$$\phi_x = -k \frac{\delta T}{\delta x}$$

La forme différentielle montre ici que la densité de flux thermique est proportionnelle à la conductivité thermique multipliée par le gradient de température négatif. La densité de flux de chaleur est la quantité de chaleur circulant à travers une unité de surface par unité de temps. Dans ce projet, ce terme est une constante donnée.

II Approche physique du problème

Pour arriver à l'équation de la chaleur dans un cas unidimensionnel, partons du cas simple d'un milieu au repos soumis à un gradient thermique selon l'axe x . Notons $T(x, t)$ la température au point x et à l'instant t .

Considérons un cylindre infinitésimal de section S et de longueur dx se situant entre x et $x + dx$. Par des considérations de symétrie et d'invariance de ce solide, nous pouvons seulement nous intéresser au flux selon l'axe x .

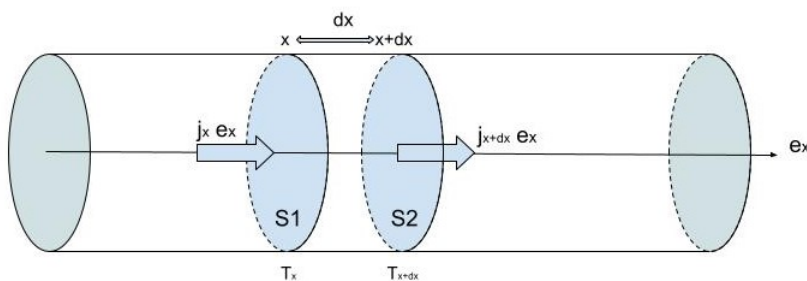


FIGURE 1 – Cylindre infinitésimal

Nous pouvons faire les hypothèses suivantes :

- Il n'y a pas de déplacement de matière
- La pression est considérée constante. On note par c_p la capacité thermique massique du matériau et par ρ sa masse volumique. Ces grandeurs sont stationnaires.
- Il n'y a pas de réaction chimique dans le matériau donc il n'y a pas de production ou consommation de chaleur.

II.1 Loi de Fourier

On peut appliquer le premier principe de la thermodynamique entre t et $t + dt$.

$$U(t + dt) - U(t) = \delta Q + \delta W^{ext}$$

Les forces de pression ne travaillent pas puisque le volume est constant. Ainsi :

$$\delta Q = -\frac{dj_{th}}{dx} S dx dt$$

Par ailleurs on a :

$$U(t + dt) - U(t) = dU = \frac{dU}{dt} dt = \frac{\partial U}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} dt \text{ or } \frac{\partial U}{\partial T} = C_v = \rho S c_v$$

Ainsi on a :

$$-\frac{dj_{th}}{dx} S dx dt = C_v = \rho S c_v$$

Ainsi on trouve la loi de Fourier :

$$j_{th} \vec{x} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \vec{x}$$

II.2 Équation de la chaleur

On note $Q(x, t)$ l'énergie thermique. Son évolution en fonction de la température au point x et à l'instant t est donné par $Q(x, t) = \rho c_p T(x, t)$.

On se place de nouveau sur le cylindre entre x et $x + dx$. Ainsi, les hypothèses précédemment formulées restent valables. Donc comme il n'y a pas de mouvement de matière, ni de réaction on a conservation de l'énergie thermique (pas de conversion d'énergie) au cours du temps. On a donc :

$$\frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = 0 \text{ donc } 0 = \rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t}$$

D'autre part, on a conservation du flux thermique entrant et sortant du cylindre. Ainsi, on montre que :

$$\frac{\partial j_{th}}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

Finalement on en déduit l'équation de la chaleur :

$$-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \rho c_p \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \iff \frac{\lambda}{\rho c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = 0$$

Cette formule est généralisable au 3D. Soit $\bar{x} = (x, y, z)$:

$$-\mu \Delta T(\bar{x}, t) + \frac{\partial T(\bar{x}, t)}{\partial t} = -\mu \left(\frac{\partial^2 T(\bar{x}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(\bar{x}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T(\bar{x}, t)}{\partial z^2} \right) + \frac{\partial T(\bar{x}, t)}{\partial t} = 0$$

III Méthode de résolution numérique

Pour résoudre ce problème, on va utiliser la théorie des différences finies. Cette méthode est une technique courante de recherche de solutions approchées d'équations aux dérivées partielles. Elle consiste à résoudre un système de relations (schéma numérique) liant les valeurs des fonctions inconnues en certains points suffisamment proches les uns des autres.

Pour résoudre le schéma numérique nous allons alors discrétiser le problème initial sur un maillage. Cette discrétisation peut être obtenue grâce aux formules de Taylor. Puis en faisant tendre l'espace entre les points vers zéro, on a des méthodes itératives relativement convergentes. On peut citer entre autres les schémas numériques tels que Euler implicite ou explicite.

Dans cette étude, nous avons mis en place le schéma d'Euler implicite. Les deux méthodes d'Euler sont grandement similaires. En effet, dans le cas explicite on estime y_{n+1} grâce à la dérivée au point (t_n, y_n) et dans le cas implicite, on utilise le point (t_{n+1}, y_{n+1}) pour notre estimation. Cependant, la méthode d'Euler implicite est linéaire si l'équation initiale l'est également. Dans le cas de non linéarité de l'équation, on ne peut pas isoler y_{n+1} , il alors utiliser des méthodes schémas numériques. En contrepartie, cette méthode converge systématiquement. Si on ne peut pas isoler y_{n+1} , on peut résoudre l'équation par la méthode de Newton-Raphson.

Dans le cadre de notre étude de l'équation de la chaleur, nous avons choisi Euler implicite. De plus, pour ne pas avoir à se soucier des conditions de bords, nous avons utilisé une méthode qui permet d'imposer les conditions aux bords. Nous verrons comment ceci se traduit formellement.

On a une équation qui dépend à la fois du temps et de l'espace. Commençons dans un premier temps par discrétiser notre équation en 1 dimension spatialement grâce au développement de Taylor de $T(\bar{x}_j + \Delta x, t)$ et $T(\bar{x}_j - \Delta x, t)$.

$$\begin{aligned} T(\bar{x}_j + \Delta x, t) &= T(\bar{x}_j, t) + \Delta x T'(\bar{x}_j, t) + \frac{\Delta x^2}{2} T''(\bar{x}_j, t) + O(\Delta x^2) \\ T(\bar{x}_j - \Delta x, t) &= T(\bar{x}_j, t) - \Delta x T'(\bar{x}_j, t) + \frac{\Delta x^2}{2} T''(\bar{x}_j, t) + O(\Delta x^2) \end{aligned}$$

En sommant et en négligeant les termes résiduels d'ordres supérieurs à 2, on obtient :

$$\begin{aligned} T(\bar{x}_j + \Delta x, t) + T(\bar{x}_j - \Delta x, t) &= 2T(\bar{x}_j, t) + \Delta x^2 T''(\bar{x}_j, t) \\ T''(\bar{x}_j, t) &= \frac{T(\bar{x}_j + \Delta x, t) + T(\bar{x}_j - \Delta x, t) - 2T(\bar{x}_j, t)}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

On se ramène à une équation différentielle temporelle classique que l'on sait résoudre numériquement grâce à la méthode d'Euler implicite. Pour écrire cette équation en 1 dimension, nous avons considéré un x , mais nous aurions aussi pu considérer un y ou un z , le résultat resterait le même quel que soit la direction choisie.

On fait un développement dans chaque direction de notre formule en 1 dimension. Les directions sont données par les vecteurs e_x, e_y et e_z de la base orthonormale (e_x, e_y, e_z) . On note $T_{i,j,k} = T(x_i, y_j, z_k)$. Pour le schéma de Euler implicite, on note le pas de temps par dt .

On définit le maillage suivant :

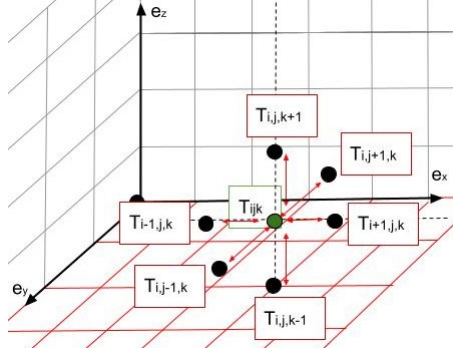


FIGURE 2 – Maillage en 2-dimension

$$T_{ijk}^{n+1} = T_{ijk}^n + \mu dt \left(\frac{T_{i+1,j,k}^{n+1} - 2T_{i,j,k}^{n+1} + T_{i-1,j,k}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^{n+1} - 2T_{i,j,k}^{n+1} + T_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^{n+1} - 2T_{i,j,k}^{n+1} + T_{i,j,k-1}^{n+1}}{\Delta z^2} \right)$$

Dans la suite de notre développement, on indexera chaque point de notre maillage, en utilisant les indices i, j et k associés aux directions des vecteurs e_x, e_y et e_z du domaine en 3D. De plus, nous avons N_x points en e_x , N_y points en e_y et N_z points en e_z .

Pour cela nous définissons l'indice du maillage : $h = i + (j - 1)N_x + (k - 1)N_xN_y$, et nous pouvons obtenir un schéma, pour un maillage en 3 dimensions :

$$T_h^{n+1} = T_h^n + \mu dt \left(\frac{T_{h+1}^{n+1} - 2T_h^{n+1} + T_{h-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{h+N_x}^{n+1} - 2T_h^{n+1} + T_{h-N_x}^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{T_{h+N_xN_y}^{n+1} - 2T_h^{n+1} + T_{h-N_xN_y}^{n+1}}{\Delta z^2} \right)$$

Ainsi :

$$T_h^n = T_h^{n+1} - \mu dt \left(\frac{T_{h+1}^{n+1} - 2T_h^{n+1} + T_{h-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{T_{h+N_x}^{n+1} - 2T_h^{n+1} + T_{h-N_x}^{n+1}}{\Delta y^2} + \frac{T_{h+N_xN_y}^{n+1} - 2T_h^{n+1} + T_{h-N_xN_y}^{n+1}}{\Delta z^2} \right)$$

$$T_h^n = T_h^{n+1} \left(1 + \frac{2dt\mu}{\Delta x^2} + \frac{2dt\mu}{\Delta y^2} + \frac{2dt\mu}{\Delta z^2} \right) - \mu T_{h+1}^{n+1} \frac{dt}{\Delta x^2} - \mu T_{h-1}^{n+1} \frac{dt}{\Delta x^2} - \mu T_{h+N_x}^{n+1} \frac{dt}{\Delta y^2} - \mu T_{h-N_x}^{n+1} \frac{dt}{\Delta y^2} - \mu T_{h+N_xN_y}^{n+1} \frac{dt}{\Delta z^2} - \mu T_{h-N_xN_y}^{n+1} \frac{dt}{\Delta z^2}$$

On peut ainsi en déduire une écriture matricielle. Pour imposer les conditions de bords, on introduit le vecteur $M = (M_1, M_2, \dots, M_{N_xN_yN_z-1}, M_{N_xN_yN_z})$, avec $M_k \rightarrow \infty$ si le point impose la condition fortement au point k et $M_k=1$ sinon.

$$A \begin{pmatrix} T_1^{n+1} \\ T_2^{n+1} \\ T_3^{n+1} \\ \vdots \\ T_{N_xN_yN_z-1}^{n+1} \\ T_{N_xN_yN_z}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 T_1^n \\ M_2 T_2^n \\ M_3 T_3^n \\ \vdots \\ M_{N_xN_yN_z-1} T_{N_xN_yN_z-1}^n \\ M_{N_xN_yN_z} T_{N_xN_yN_z}^n \end{pmatrix}$$

Comme précédemment évoqué, les conditions aux bords vont être imposées fortement. Ainsi, pour la construction de la matrice, on distingue les lignes avec les noeuds où l'on impose la valeur des autres points.

Les points où l'on impose les conditions fortement se distinguent dans la matrice A par l'assignation de la valeur $M_i \rightarrow \infty$ au coefficient A_{ii} . Pour que la condition soit imposée, il faut aussi imposer la condition de bord dans le second membre. Finalement pour ces lignes on aura :

$$M_i T_i^n = M_i T_i^{n+1} + \sum_{i \neq k} A_{ik} T_k \implies T_i^n = T_i^{n+1} + \frac{\sum_{i \neq k} A_{ik} T_k}{M_i}$$

Le terme $\sum_{i \neq k} A_{ik} T_k$ étant fini, on a $\lim_{M_i \rightarrow +\infty} T_i^{n+1} = T_i^n$. Cela permet de faciliter l'implémentation de la méthode via une approximation. Dans notre problème, on supposera les températures de bords constantes. De plus, cette modélisation permet d'introduire facilement un terme de température source (radiateurs). Ensuite on viendra imposer fortement ces conditions.

Pour les points n'étant pas soumis à des conditions de bords on peut alors définir la matrice associée à notre maillage en 2 dimensions comme suit :

$$A_{i,k} = \begin{cases} 1 + \frac{2dt\mu}{\Delta x^2} + \frac{2dt\mu}{\Delta y^2} & \text{si } i = k \\ -\mu \frac{dt}{\Delta x^2} & \text{si } k \in \{i-1, i+1\} \\ -\mu \frac{dt}{\Delta y^2} & \text{si } k \in \{i-N_x, i+N_x\} \end{cases}$$

Ainsi, pour une itération donnée, il suffit d'inverser la matrice A pour obtenir les T^{n+1} .

Remarque : On ne peut pas utiliser des formules de récurrence de la forme $T^n = (A^{-1})^n M^t T^0$ car $A^{-1} M^t T^0$ renvoie T^1 et non $M^t T^1$. Avec une telle formule on imposerait les conditions de bords uniquement pour la première itération.

Espace non constant : Pour la méthode des différences finies de pas non uniformes, nous utilisons toujours le développement de Taylor pour résoudre un schéma numérique.

A partir de l'équation de la chaleur :

$$\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} = \frac{\delta T}{\delta t} C := f(x) \text{ avec } C \text{ une constante.}$$

Pour (i,j,k) fixé, on introduit les notations suivantes :

$$x_b = x_i - x_{i-1} \text{ et } x_f = x_{i+1} - x_i$$

$$y_b = y_j - y_{j-1} \text{ et } y_f = y_{j+1} - y_j$$

$$z_b = z_k - z_{k-1} \text{ et } z_f = z_{k+1} - z_k$$

En utilisant les développements de Taylor, on a :

$$T_{j+1} = T_j + x_f \left(\frac{\delta T}{\delta x} \right)_j + \frac{x_f^2}{2!} \left(\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} \right)_j + O(\dots) \quad (1)$$

$$T_{j-1} = T_j - x_b \left(\frac{\delta T}{\delta x} \right)_j + \frac{x_b^2}{2!} \left(\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} \right)_j + O(\dots) \quad (2)$$

En sommant les deux équations ci-dessus, on obtient :

$$x_b(1) + x_f(2) \implies x_b T_{j+1} + x_f T_{j-1} = (x_b + x_f) T_j + \frac{x_b x_f^2 + x_f x_b^2}{2!} \left(\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} \right)_j + O(\dots)$$

Ainsi on a :

$$\left(\frac{\delta^2 T}{\delta x^2} \right)_j = \frac{2(x_b T_{j+1} - (x_b + x_f) T_j + x_f T_{j-1})}{x_b x_f^2 + x_f x_b^2} + O(\dots)$$

D'où l'expression :

$$T_{ijk}^{n+1} = T_{ijk}^n + \mu dt \left(\frac{2(x_b T_{i+1,j,k} - (x_b + x_f) T_{ijk} + x_f T_{i-1,j,k})}{x_b x_f^2 + x_f x_b^2} + \frac{2(y_b T_{i,j+1,k} - (y_b + y_f) T_{ijk} + y_f T_{i,j-1,k})}{y_b y_f^2 + y_f y_b^2} + \frac{2(z_b T_{i,j,k+1} - (z_b + z_f) T_{ijk} + z_f T_{i,j,k-1})}{z_b z_f^2 + z_f z_b^2} \right)$$

Par le même changement de variables, on en déduit :

$$\begin{aligned} T_h^n &= T_h^{n+1} \left(1 + \frac{2dt(x_b + x_f)\mu}{x_b x_f^2 + x_f x_b^2} + \frac{2dt(y_b + y_f)\mu}{y_b y_f^2 + y_f y_b^2} + \frac{2dt(z_b + z_f)\mu}{z_b z_f^2 + z_f z_b^2} \right) \\ &\quad - 2x_b \mu T_{h+1}^{n+1} \frac{dt}{x_b x_f^2 + x_f x_b^2} - 2x_f \mu T_{h-1}^{n+1} \frac{dt}{x_b x_f^2 + x_f x_b^2} - 2y_b \mu T_{h+N_x}^{n+1} \frac{dt}{y_b y_f^2 + y_f y_b^2} \\ &\quad - 2y_f \mu T_{h-N_x}^{n+1} \frac{dt}{y_b y_f^2 + y_f y_b^2} - 2z_b \mu T_{h+N_x N_y}^{n+1} \frac{dt}{z_b z_f^2 + z_f z_b^2} - 2\mu z_f T_{h-N_x N_y}^{n+1} \frac{dt}{z_b z_f^2 + z_f z_b^2} \end{aligned}$$

De la même façon on peut résoudre le problème grâce à la méthode d'Euler implicite. Le problème se met sous la forme $AT^{n+1} = M^t T^n$ donnant : $T^{n+1} = A^{-1} M^t T^n$

IV Recherche d'une modélisation réaliste

Dans le cadre d'un projet de rénovation, des architectes font appel à des professionnels pour décider de l'emplacement optimal des radiateurs. Dans ce projet, l'emplacement des fenêtres n'est pas modifié. Les propriétaires, inquiets du montant de leurs factures de chauffage, souhaitent participer aux décisions et ont demandé à observer plusieurs scénarios suivant la position des radiateurs. Pour leur fournir une vulgarisation efficace et simple du problème, on décide de modéliser la pièce de vie à rénover, dans laquelle on rendra visible la propagation de la chaleur en fonction du temps.

IV.1 Formulation des hypothèses et modélisation d'un cas d'étude

Formulation des hypothèses :

On ne prendra pas en compte les mouvements de convection dans notre étude. On se place dans un premier temps en 2-dimension, ainsi on suppose que la température sera égale le long de l'axe z pour chaque point de la surface (x, y) .

De plus, nous considérons un modèle simple de l'évolution de la chaleur. L'air étant un très bon isolant au regard des autres matériaux de nos futures modélisations, le temps d'évolution du système peut être long. Comme nous faisons de la simulation numérique, la capacité et les temps de calculs sont limités. Nous serons ainsi amenés à prendre des valeurs pour les coefficients de conductivité thermique moins réalistes, grossies par rapport à la réalité, qui nous permettront de mettre en lumière les phénomènes intéressants. Pour nos cas d'études, nous expliciterons les valeurs de ces coefficients pour l'air, les murs et les fenêtres.

Choix de la discrétisation :

La méthode des différences finies repose sur le choix d'un maillage. Dans notre cas, le problème peut se représenter de manière matricielle. Cela nous amène naturellement à choisir un maillage de la forme suivante :

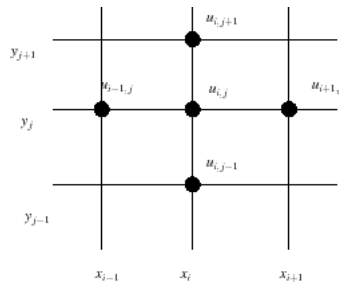


FIGURE 3 – Maillage en 2-dimension

Nous avons choisi de prendre un maillage uniforme. Cela permet de simplifier le schéma numérique. En revanche, cela possède l'inconvénient de stocker un nombre très important de valeurs. Dans le problème de la diffusion de la chaleur, les domaines nous intéressant le plus sont ceux se situant à la jonction entre deux matières différentes. Par exemple sur les bords de notre pièce de vie, à la jonction entre l'air dans la pièce et les murs. Pour se concentrer sur les zones intéressantes de notre domaine et éviter le sur-stockage d'informations, on peut construire un maillage non uniforme.

On utilise alors un maillage plus fin où l'on a plus de points, dans les régions où les phénomènes

intéressants se déroulent. Dans les autres régions de l'espace, nous utilisons un maillage plus grossier. Cela permet de gagner en temps de calcul et en stockage mémoire.

Nous avons fait le choix, au vu du temps disponible pour la finalisation du projet, de faire notre étude en utilisant un maillage uniforme. Nous avons choisi de bien approfondir nos études avec ce maillage. Cela nous a permis de nous pencher sur la résolution de cas concrets. Cela nous a aussi laissé le temps de faire une étude en 3 dimensions. Nous avons certes perdu dans la finesse de la discrétisation dans les zones que l'on peut qualifier de plus intéressantes. En revanche, bien que les subdivisions soient moins fines, nous nous sommes arrangés pour trouver une discrétisation faisant le compromis entre l'interprétabilité et le temps de calcul.

Nous avons donc choisi de nous intéresser à un schéma numérique avec un pas de temps discontinu. Ainsi, nous sommes en capacité de fournir des simulations avec un maillage non uniforme dans une future étude.

Modélisation d'un cas d'étude :



FIGURE 4

Pour commencer notre étude et simplifier la modélisation, on ne s'intéresse qu'à une unique pièce de vie. On pourra par la suite enrichir notre modélisation en ajoutant d'autres pièces, en créant des cloisons par exemple.

Dans un premier temps, nous avons modélisé la pièce à rénover qui est rectangulaire, entourée de quatre murs. Nous choisissons de modéliser une pièce de dimension $N_x \times N_y$. Cette maison possède un mur d'une épaisseur constante notée e que nous fixerons à $e = 2$. Enfin, cette pièce sera placée dans un environnement à une température notée T_{ext} . Cette température que nous pourrions faire varier restera constante au cours d'une simulation. L'hypothèse de température constante est justifiée car la pièce est de dimension très négligeable devant l'environnement. Ainsi cela revient à dire que la pièce ne fera pas évoluer la température de l'extérieur.

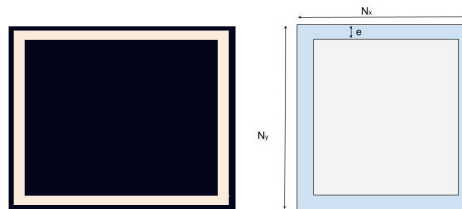


FIGURE 5

On fixe une température initiale T_{int} à l'intérieur de la pièce. La température est homogène dans le milieu, c'est-à-dire qu'à chaque endroit de la pièce, la température initiale est la même. On peut d'ailleurs aussi fixer une température extérieure T_{ext} . Ici on considère que cette température extérieure est homogène et que $T_{int} > T_{ext}$.

IV.2 Étude temporelle du temps d'exécution

Pour justifier nos choix de modélisation, nous avons commencé par regarder comment évoluait le temps de calcul en fonction du nombre d'itérations et de la taille des instances.

Nous avons fixé la taille de la pièce à 40 x 40. La première étude a porté sur l'évolution du temps de calcul en fonction du nombre d'itérations. Nous pouvons voir que la tendance est linéaire. A partir de 60 000 itérations, nous voyons une légère cassure avec une augmentation de la tendance linéaire. Cela montre que l'ordinateur est probablement ralenti avec ce flux de données très important. Pour avoir des temps de calculs raisonnables, nous allons essayer de ne pas dépasser plus de 10 000 itérations même si nous pouvons atteindre les 100 000 itérations.

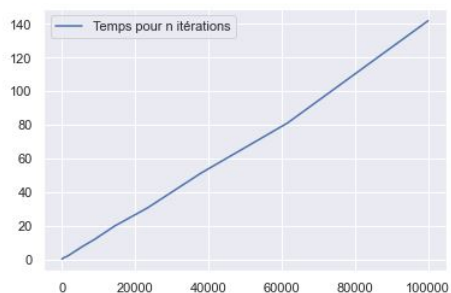


FIGURE 6 – Pièce entourée de murs

Une deuxième étude a porté sur le temps de calcul en fonction de la taille de la pièce pour 1000 itérations. Nous avons fait varier le paramètre N pour une pièce carrée de côté $N \times N$.

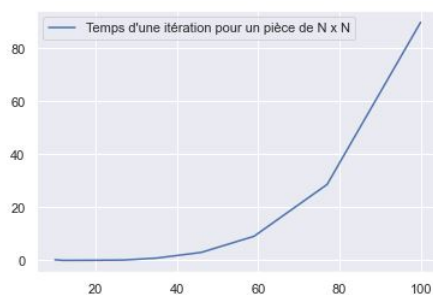


FIGURE 7 – Pièce entourée de murs

Nous pouvons observer que le temps de calcul est proportionnellement exponentiel à la longueur d'un mur de la pièce. La taille de la pièce est plus clairement plus limitante que le nombre d'itérations en terme de temps de calcul. Pour la suite du compte rendu, nous avons choisi de fixer la taille de la pièce à 40 x 40 unités d'espace. Cette unité est arbitraire et peut aussi bien représenter des mètres que des pieds pour les anglosaxons.

IV.3 Évolution de la température en fixant les conditions initiales

Nous pouvons à présent faire une première simulation où l'on visualise l'évolution de la température dans la pièce, dans laquelle il n'y a ni source de chaleur ni fenêtre. On peut remarquer que le coefficient de conductivité thermique est plus élevé dans les murs que dans l'air dans cette étude.

| | intérieur | mur | extérieur |
|-----------------------|-----------|------|-----------|
| Température | 20°C | 20°C | 10°C |
| Coefficient diffusion | 0.0262 | 0.52 | fortement |

On recense ici 4 graphiques correspondant à différentes étapes de la simulation, du début à la fin.

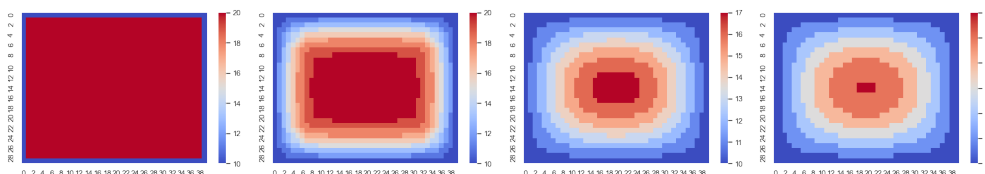


FIGURE 8

Nous pouvons observer ici le phénomène de perte de chaleur. En effet, nous pouvons remarquer sur l'échelle de température qu'au fur et à mesure de la simulation, la température maximale dans la pièce diminue. De plus, nous remarquons que la température est plus élevée au centre de la pièce, et qu'elle diminue aux abords des murs. Il y a des courbes de niveau pour la température ovales, centrées au milieu de la pièce de vie. En effet, les murs sont un point de fuite de chaleur.

Cette fois, nous adoptons un nouveau point de vue. Nous ne considérons plus une coupe "vue de haut", mais une coupe latérale, en observant un sol et un plafond. La particularité de cet exemple est que le sol est à la même température initiale que le reste de la pièce. Ainsi, seuls les murs et le plafond sont à une température plus basse. C'est un mode de chauffage que l'on retrouve pour les maisons possédant un plancher chauffant (chauffage par le sol).

| | intérieur | mur | extérieur bas | extérieur autre |
|-----------------------|-----------|------|---------------|-----------------|
| Température | 20°C | 20°C | 20°C | 10°C |
| Coefficient diffusion | 0.0262 | 0.52 | fortement | fortement |

Dans l'exemple précédent, on observait des courbes de niveau pour la température ovales, montrant la symétrie dans le problème. Nous n'avons ici plus qu'une symétrie axiale selon l'axe vertical.

Ici, la diminution de la température commence à proximité des murs pour rejoindre petit à petit le centre de la pièce. Dans ce nouveau cas, la perte de chaleur se fait par le haut de la pièce car le mur en bas de la pièce, symbolisant le sol, est à la même température initiale que la pièce. Il faut être conscient que ce que nous modélisons n'est pas la convection.

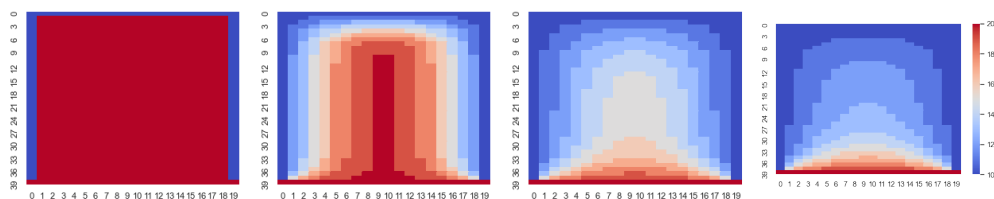


FIGURE 9

Ces deux premiers exemples viennent illustrer les phénomènes que nous allons chercher à étudier par la suite. Les simulations ont permis d'identifier les régions de la pièce par où la température diminuait en premier.

Maintenant que nous avons modélisé une pièce entourée de quatre murs avec une température initiale extérieure et une température initiale intérieure, nous décidons d'ajouter des fenêtres pour rendre la modélisation plus réaliste.



FIGURE 10 – Pièce entourée de murs (en rose) et de 2 fenêtres (en blanc)

Dans un souci d'amélioration de notre modélisation, nous pourrions considérer que notre pièce de vie est entourée d'autres pièces. C'est-à-dire que les murs extérieurs représenteraient des cloisons. Ainsi, les températures extérieures, autour des quatre murs de notre pièce, ne seraient pas nécessairement identiques.

Nous pouvons, par exemple, imaginer trouver le salon derrière un mur et le jardin derrière un autre. Néanmoins, quitte à souhaiter modéliser plusieurs pièces dans notre maison, on peut essayer de segmenter notre pièce initiale en y ajoutant des murs intérieurs, symbolisant des cloisons. Nous obtenons alors une nouvelle modélisation, qui correspondrait à celle d'un ensemble de pièces de vie, ou même d'un appartement.



FIGURE 11 – Appartement avec des murs (en rose) et 2 fenêtres (en blanc)

Nous allons à nouveau faire une simulation pour observer la propagation de la chaleur dans un appartement qui contient deux fenêtres.

Nous relevons dans le tableau ci-dessous les différentes valeurs du coefficient de conductivité thermique

utilisées pour notre simulation¹.

| | intérieur | mur | vitre | extérieur |
|-----------------------|-----------|-------|-------|-----------|
| Température | 20°C | 20°C | 20°C | 10°C |
| Coefficient diffusion | 0.05 | 0.001 | 10 | fortement |

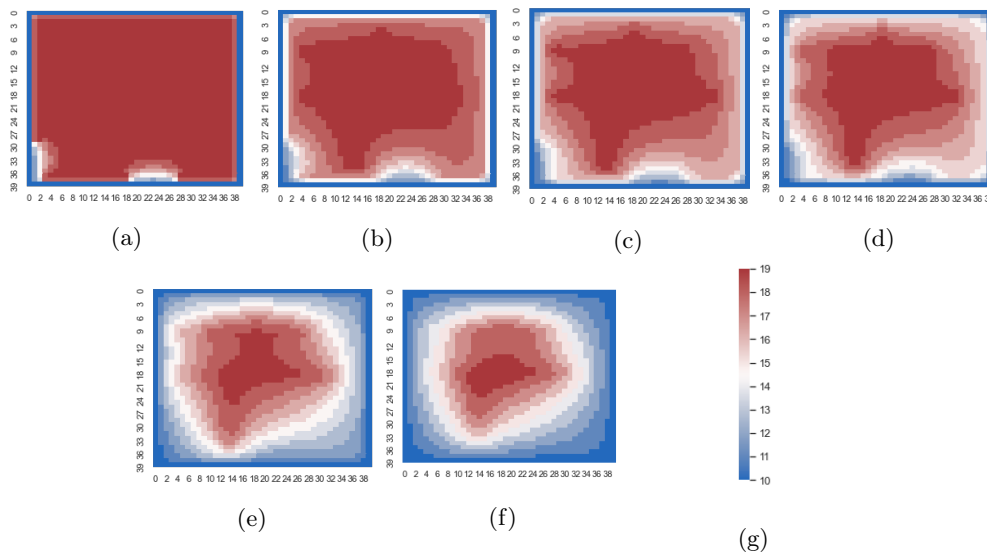


FIGURE 12 – Appartement avec deux fenêtres

Nous pouvons à nouveau observer le phénomène de perte de chaleur. La température dans la pièce diminue au fur et à mesure de la simulation. Cette fois-ci, la température ne diminue pas seulement aux abords des murs extérieurs, mais aussi à proximité des fenêtres, et de façon encore plus prononcée. Les fenêtres représentent elles aussi un point de fuite de chaleur. De plus, on remarque sur les figures (b) à (e) que la température est plus élevée dans les cloisons de notre appartement. Comme le coefficient de conductivité thermique est plus élevé dans l'air que dans les murs, la chaleur se diffuse moins vite dans les murs. Ainsi, la chaleur reste plus longtemps dans ces derniers, d'où l'observation de la température qui reste plus élevée et plus longtemps dans les cloisons. Enfin, nous nous approchons d'un régime stationnaire où la température serait égale à T_{ext} en tout point de la pièce. Il faut faire un grand nombre d'itérations pour observer cette stationnarité, ce qui est très coûteux en temps de calcul. Pour 100 000 itérations nous sommes arrivé à une température uniforme de 10°C mais 90 000 n'étaient pas suffisant.

IV.4 Placement des radiateurs dans la pièce

Maintenant que nous avons modélisé les pièces de vie de notre logement, nous souhaitons étudier la diffusion de la chaleur dans notre appartement en jouant sur les paramètres de diffusion associés à chacun des éléments qui constituent notre pièce. L'objectif, lors de cette étude, est à terme de dégager les paramètres qui ont un réel impact sur les déperditions de chaleurs. On pourra dans un second temps tenter de les limiter en déterminant le placement optimal de nos radiateurs. Dans cette première étude,

1. En toute généralité, la conductivité thermique est une donnée intrinsèque à un matériau. Pour changer la conductivité, on doit changer le matériau utilisé ou ses propriétés thermiques. Pour ne pas s'embêter à redéfinir de nouveaux milieux correspondant à de nouveaux coefficients thermiques, et pour garder notre exemple d'une pièce de vie, nous continuerons à nommer le milieu "air" même si la valeur de conductivité associée ne lui correspond pas. Nous ferons de même pour les autres matériaux constituant les murs et les fenêtres.

on se place dans une configuration avec 4 radiateurs. Nous avons placé ces radiateurs sans justification, nous avons essayé de les espacer et d'en mettre proche de toutes les pièces. L'énergie nécessaire pour faire fonctionner les radiateurs est de $1kWh$. Avec cet apport énergétique fixé, on souhaite limiter les pertes de chaleur.



FIGURE 13 – Appartement avec des murs extérieurs (en rouge), 2 fenêtres (en blanc), des murs intérieurs (en violet) et les emplacements potentiels des radiateurs (en orange)

Dans notre étude, on fixe la température extérieure ($T_{ext} = 10^{\circ}C$) et celle des radiateurs ($T_{rad} = 30^{\circ}C$). La température initiale à l'intérieur du logement est fixée à $20^{\circ}C$ en tout point.

| | intérieur | mur | vitre | radiateur | extérieur |
|-----------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|
| Température | $20^{\circ}C$ | $20^{\circ}C$ | $20^{\circ}C$ | $30^{\circ}C$ | $10^{\circ}C$ |
| Coefficient diffusion | 0.05 | 0.001 | 10 | fortement | fortement |

On fait une simulation à partir de la valeur de ces coefficients de conductivité thermique, en observant la propagation de la chaleur lorsque quatre radiateurs sont allumés dans le logement.

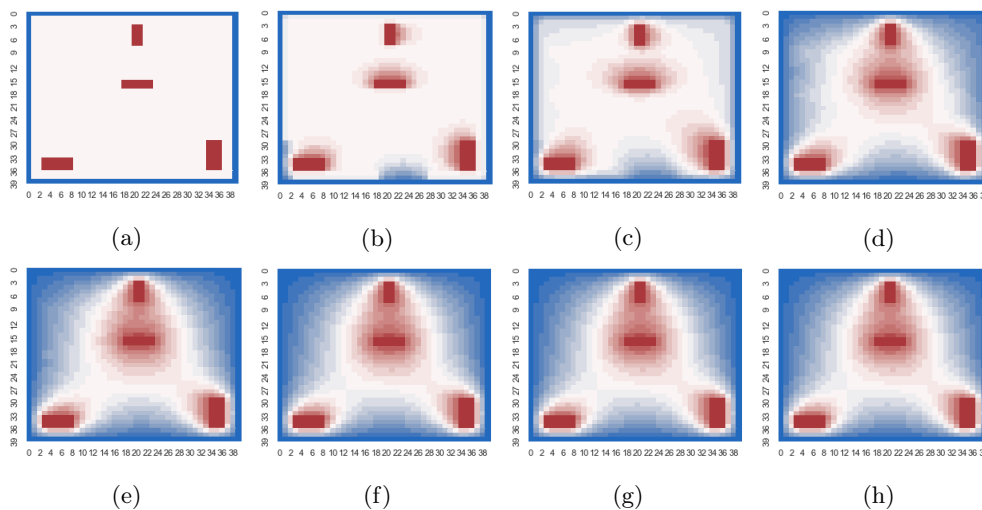


FIGURE 14 – Évolution de la température

Les zones de chaleurs se concentrent autour des radiateurs. La température moyenne dans la pièce est plus élevée que dans nos simulations précédentes où l'on ne plaçait pas de radiateurs.

Au bout d'une certaine durée, on entre dans un état stationnaire où la température moyenne à l'intérieur d'une pièce n'évolue plus.

Pour mieux se rendre compte de l'impact des coefficients de diffusion. Nous avons choisi de réaliser deux études avec des conditions initiales identiques, mais en changeant seulement les valeurs des coefficients de conductivité thermique d'un matériau.

Dans un premier temps, nous allons modifier le coefficient thermique associé à la fenêtre. Nous avons décidé de diminuer ce coefficient. Cela revient par exemple à passer d'un vitrage simple à un double vitrage. Nous avons ensuite lancé la même simulation.

| | intérieur | mur | vitre | radiateur | extérieur |
|-----------------------|-----------|-------|-------|-----------|-----------|
| Température | 20°C | 20°C | 20°C | 30°C | 10°C |
| Coefficient diffusion | 0.05 | 0.001 | 0.5 | fortement | fortement |

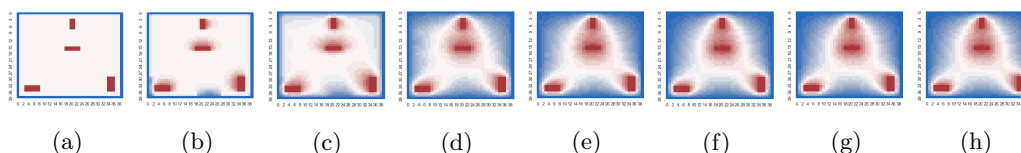


FIGURE 15 – Évolution de la température avec un coefficient de diffusion moins élevé au niveau de la fenêtre

Nous pouvons voir que le froid prend plus de temps à rentrer dans la pièce. La nouvelle fenêtre étant donc plus isolante. Cependant, en temps long, nous atteignons à nouveau le même état que dans l'étude précédente. La différence étant que le temps de transition devient plus important.

Nous faisons une troisième étude comparative ayant pour but d'observer comment se diffuse la chaleur si le coefficient thermique de l'air augmente. Nous nous attendons au vu des deux études précédentes à observer un régime transitoire, puis un régime permanent étant identique. Nous avons conservé le coefficient de diffusion de la fenêtre de la deuxième étude permettant d'avoir une meilleure isolation. En revanche, nous nous attendons à voir une évolution plus rapide à l'intérieur de cette pièce une fois la température rentrée.

| | intérieur | mur | vitre | radiateur | extérieur |
|-----------------------|-----------|-------|-------|-----------|-----------|
| Température | 20°C | 20°C | 20°C | 30°C | 10°C |
| Coefficient diffusion | 0.5 | 0.001 | 0.5 | fortement | fortement |

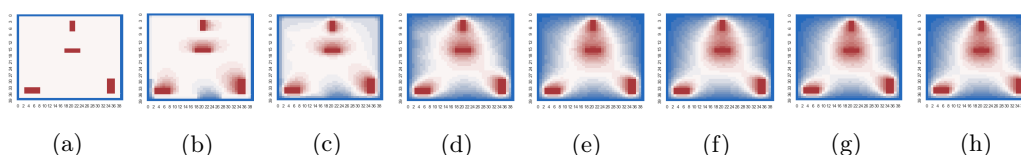


FIGURE 16 – Évolution de la température avec un coefficient de diffusion dans l'air plus important

On voit qu'au début de la simulation, la chaleur des radiateurs se diffuse plus rapidement que précédemment. Le froid prend du temps à entrer par la fenêtre, mais une fois dans la pièce, on voit que les isoniveaux se propagent plus rapidement au alentour de la fenêtre se propagent plus rapidement.

Toujours dans un souci d'amélioration de notre modélisation, on souhaiterait obtenir la température idéale dans la maison. Par exemple, la température recommandée dans une pièce de vie (par exemple salon et cuisine) est de 19°C. L'objectif final serait de déterminer les emplacements optimaux des radiateurs dans chacune de ces pièces pour se rapprocher au plus de cette température idéale en limitant les pertes de chaleur.

Objectif :

Maintenant que nous avons modélisé les pièces de vie à rénover, nous souhaitons déterminer quel serait l'emplacement optimal d'un radiateur.

IV.5 Placement optimal du radiateur pour minimiser son temps d'allumage dans une maison vide

Jusqu'à présent, nous avons imposé des conditions initiales puis nous avons laissé le système évoluer. Nous avons choisi dans cette nouvelle partie de s'intéresser à un modèle dynamique.

Pour se placer dans un cas d'étude concret, nous nous sommes intéressés au placement optimal d'un radiateur dans une maison. Nous avons simulé une maison avec un thermostat. Pour faire des économies sur leur dépense d'électricité, les propriétaires ont choisi de régler le thermostat à 19°C. Ainsi, le radiateur sera mis en route seulement si la température moyenne de la maison descend en dessous de cette température.

Pour savoir quel emplacement choisir, nous avons dû choisir un critère d'optimisation. Le critère le plus évident est de conserver le radiateur qui est le moins souvent allumé pour que la température moyenne de la maison ne descende pas en dessous de la température moyenne seuil.

La température moyenne dans une maison est calculée en retirant celle de l'extérieur ; on ne conserve que la température à l'intérieur de la maison (mûrs et fenêtres compris).

Nous avons ainsi placé consécutivement dans cette maison le radiateur dans 24 emplacements étant décrits dans la figure 14. Ainsi, les dimensions caractéristiques de notre étude sont les suivantes :

| | épaisseur | radiateur | vitre1 | vitre2 |
|----------------|-----------|-----------|--------|--------|
| dimension (UA) | 2 | 3x7 | 9x2 | 2x9 |

De plus, les conditions initiales sont les suivantes :

| | intérieur | mur | vitre | radiateur | extérieur |
|-----------------------|-----------|-------|-------|-----------|-----------|
| Température | 18°C | 18°C | 18°C | 50°C | 5°C |
| Coefficient diffusion | 0.05 | 0.001 | 10 | fortement | fortement |

Nous avons représenté sur ce graphique l'ensemble des positions prises par le radiateur.

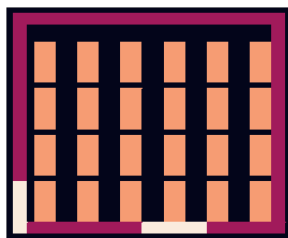


FIGURE 17 – placement de tous le radiateur l'on va étudier

Remarque : Le modèle que l'on étudie possède un régime transitoire. A partir d'un certain temps, le modèle que l'on observera sera périodique. Ainsi, rien ne sert de faire des simulations sur des temps

plus importants.

Premièrement, on peut voir qu'il y a une dissymétrie dans les temps d'allumage selon les axes x et y .

- Un premier point de dissymétrie provient du fait que les radiateurs ne sont pas à égale distance de tous les murs. Si l'on regarde suivant l'axe x , les radiateurs se situant sur la partie droite sont collés aux murs de droite, tandis que les radiateurs de gauche sont à une distance d'une unité des murs. On retrouve la même dissymétrie selon l'axe y .
- Par ailleurs, on retrouve deux fenêtres étant disposées dans la partie inférieure de la pièce.

Les dernières simulations ont permis d'avoir une intuition de ce placement optimale. Placer le radiateur au centre de la pièce semble être la meilleure option pour chauffer au mieux en moyenne la pièce. Parmi toutes les positions des radiateurs, celle qui semble remplir au mieux ces critères est le radiateur ligne 2, colonne 3. Vérifions que l'on retrouve bien cela dans la simulation.

Pour ce qui est du radiateur le moins bien placé, on aurait tendance à choisir le radiateur sur la ligne 4 colonne 1. En effet, celui-ci est juste devant une fenêtre et dans un coin d'une pièce.

Pour présenter nos résultats nous avons représenté dans une matrice le temps où les radiateurs sont allumés pour 5000 itérations.

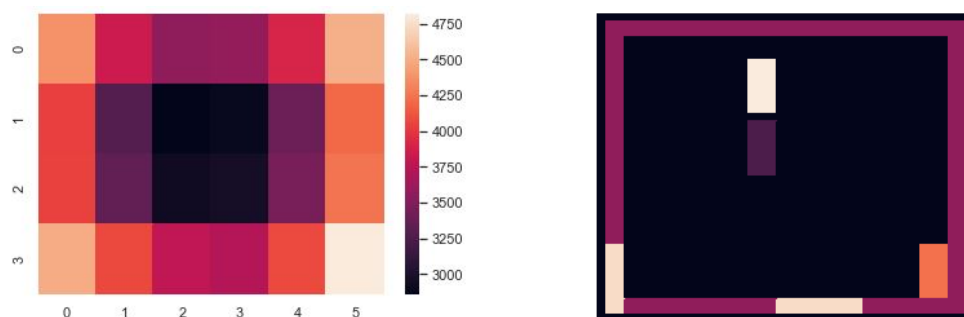


FIGURE 18 – Résultat de la simulation

De cette étude, on peut tirer beaucoup d'informations très intéressantes sur notre modèle et sur ses limites. Sur le graphique de droite est placé le radiateur le plus souvent allumé en orange. En violet est représenté le radiateur qui minimise le temps d'allumage en violet. En toute généralité, placer un radiateur au milieu d'une pièce est rarement observé. Ainsi, on a aussi fait ressortir en blanc le radiateur se situant sur le bord et minimisant le temps d'allumage.

Interprétation

Globalement, la tendance montre que les radiateurs se situant dans la partie inférieure sont plus allumés que les radiateurs de la partie supérieure symétriquement équivalent. De même, on retrouve le même phénomène entre les radiateurs de la partie droite qui sont plus sollicités que ceux de la partie gauche.

Pour les meilleurs placements, l'intuition nous a permis de déterminer la solution de notre problème. En revanche pour le radiateur le plus sollicité, on s'attendait au radiateur en bas à gauche et c'est finalement le radiateur en bas à droite. Notre première intuition s'est basée sur l'expérience de la vie courante. Placer un radiateur devant une fenêtre ouverte ne permettra pas de chauffer de manière efficace. En fait, dans notre modèle nous n'avons pas introduit de mouvements tels que les courants d'air. De plus, l'air est

un très bon isolant (c'est pour cela qu'on le retrouve dans les doubles ou triples vitrages pour isoler les fenêtres).

Dans notre étude, se situer proche d'une fenêtre ne veut pas forcément signifier que l'on va chauffer l'extérieur. Finalement, le radiateur en bas à droite se trouvant relativement proche des murs sera le plus sollicité. De plus, avec notre modélisation des différences finies, un point de chaleur a une influence sur l'environnement proche. Le fait de se trouver dans l'angle limitera son impact sur la température moyenne.

IV.6 Placement optimal du radiateur pour minimiser son temps d'allumage dans une maison avec des murs

De par la valeur du coefficient thermique propre au matériau constituant les murs, un mur offre une bonne isolation thermique. Par conséquent, la disposition d'un radiateur plus ou moins proche des murs de notre maison aura un impact sur la diffusion de la chaleur dans une pièce de vie.

Nous reprenons les mêmes conditions initiales que précédemment :

| | intérieur | mur | vitre | radiateur | extérieur |
|-----------------------|-----------|-------|-------|-----------|-----------|
| Température | 18°C | 18°C | 18°C | 50°C | 5°C |
| Coefficient diffusion | 0.2 | 0.001 | 10 | fortement | fortement |

Nous représentons les emplacements potentiels des radiateurs en orange sur le graphique ci-dessous. Nous testerons individuellement les différents radiateurs.

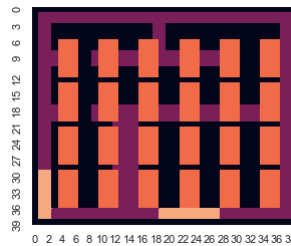
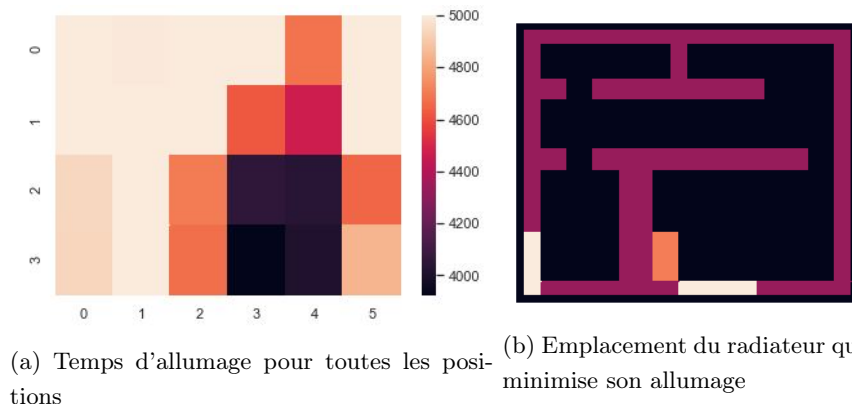


FIGURE 19 – Emplacements des radiateurs l'on étudiera

Nous allons faire une simulation pour essayer de trouver l'emplacement optimal du radiateur. Nous représentons les résultats ci-dessous.



(a) Temps d'allumage pour toutes les positions

(b) Emplacement du radiateur qui minimise son allumage

Interprétation

Globalement, nous pouvons observer que les radiateurs en haut du graphique sont plus longtemps allumés que ceux en bas. De même, les radiateurs à gauche de notre modélisation d'un appartement fonctionnent plus que ceux à droite.

Nous pouvons remarquer que les deux pièces en haut dans notre graphique sont celles qui ont des surfaces les plus petites. Un radiateur placé dans une de ces pièces sera entouré par des murs proches de lui, et la chaleur se propagera plus difficilement dans le reste de l'appartement. En conséquence, un radiateur placé dans l'une de ces pièces doit fonctionner plus longtemps pour atteindre la température idéale dans l'ensemble de l'appartement. Les radiateurs loin des fenêtres et dans des petites pièces sont perpétuellement allumés et ne permettent pas d'atteindre la température de 19°C.

De plus, la pièce en bas à droite du graphique est celle qui a la surface la plus grande. Ainsi, un radiateur placé dans cette pièce influencera d'avantage son environnement car les murs ne bloqueront pas la diffusion. Ainsi, il devra fonctionner moins longtemps pour atteindre la température idéale dans l'ensemble de l'appartement. De plus, une fenêtre se situe dans cette pièce et donc mettre un radiateur dans cette dernière permet de contrebalancer la dissipation de la chaleur. Notre intuition et les résultats des simulations concordent.

Le meilleur emplacement pour un radiateur se situe donc dans la plus grande pièce, et plus précisément dans le coin inférieur gauche de cette pièce. Cette simulation permet de mettre en lumière que bien placer un radiateur permet d'optimiser de l'énergie. Il faut quand même faire attention à ne pas surinterpréter les résultats. Cela reste une simulation simpliste en 2-dimensions avec une équation modélisant une partie des phénomènes physiques derrière le transfert thermique. C'est pourquoi pour ne pas perdre tout sens physique et ne pas s'enfermer dans une réflexion purement mathématiques et algorithmique, il est important de s'appuyer sur d'autres sciences comme la thermique mais aussi le bon sens.

Lien avec la vie courante

Il existe de nombreuses hypothèses pour simplifier le modèle dans ce projet, la sélection de l'emplacement d'un radiateur dans la vie réelle est plus compliquée. Par exemple, dans la vie réelle nous avons un phénomène d'échange de chaleur par convection lorsqu'on allume un radiateur. Mais grâce à nos simulations, nous avons quand même atteint un certain degré de satisfaction.

Dans la vie réelle, les emplacements les plus courants et recommandés sont dans l'ordre : sous une fenêtre, près d'une fenêtre, derrière une porte et au niveau d'un mur intérieur. Parce que le choix de l'emplacement d'un radiateur a une conséquence sur l'efficacité du chauffage dans une pièce de vie, il est nécessaire de relier les connaissances théoriques aux conditions réelles d'un logement. Nous devons choisir l'emplacement qui s'adapte à l'environnement domestique, pour limiter la dissipation thermique. Le placement pouvant notamment dépendre de l'encombrement autour du radiateur.

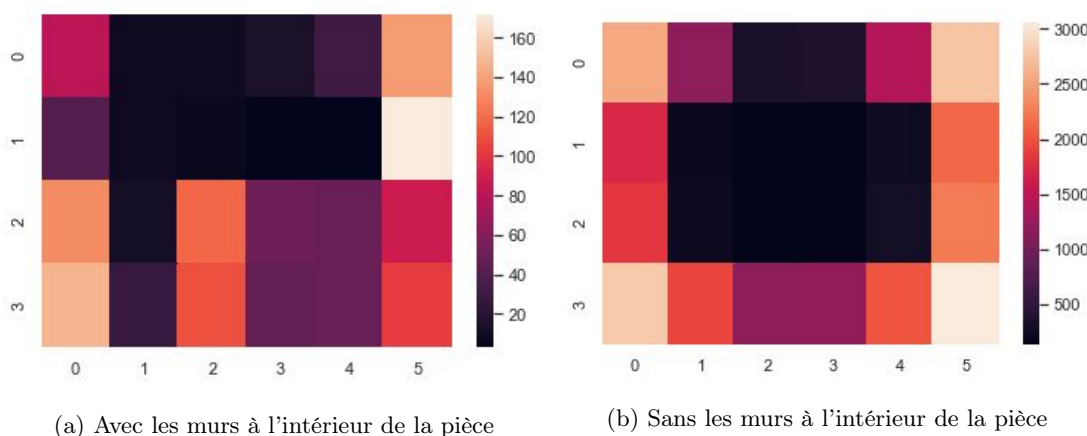
IV.7 Comparaison avec le placement optimal d'une climatisation

Nous avons mené une deuxième étude comparative pour voir si le placement optimal d'un climatiseur est le même que celui d'un radiateur dans les mêmes configurations. Pour cela, nous avons gardé la même pièce et les mêmes coefficients. En revanche, nous avons changé les conditions sur les températures de la manière suivante.

| | intérieur | mur | vitre | climatiseur | extérieur |
|-----------------------|-----------|-------|-------|-------------|-----------|
| Température | 18°C | 18°C | 18°C | 2°C | 25°C |
| Coefficient diffusion | 0.2 | 0.001 | 10 | fortement | fortement |

Nous mettrons la climatisation en fonctionnement seulement si la température dans la pièce dépasse les 20°C.

Nous avons en quelque sorte inversé le rôle du froid et du chaud. Nous avons l'intuition que nous allions retrouver des résultats similaires pour les placements optimaux.



Nous pouvons observer dans la maison sans les murs intérieurs que, comme pour le placement optimal d'un radiateur, ces emplacements se situent au centre du logement.

Pour la maison avec des murs, nous voyons qu'il faut maintenant placer le climatiseur dans la partie supérieure. Cette fois-ci, il faudrait placer les climatiseurs dans les petites pièces en haut à gauche de la maison.

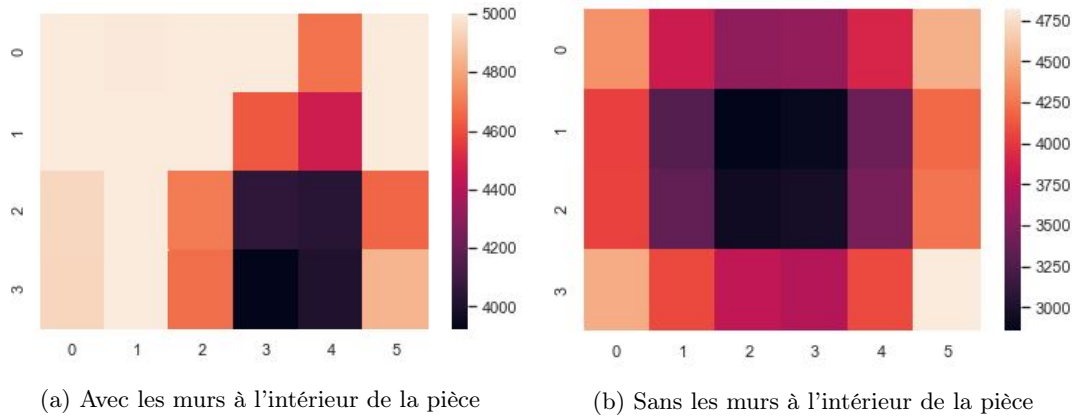
Il faut garder à l'esprit que les rapports des températures ne sont pas les mêmes entre les deux problèmes. Il y a certes des similitudes, mais nous ne sommes pas surpris d'observer des différences. Les problèmes ne sont pas symétriques. Cela montre que l'intuition peut parfois mener à de mauvaises conclusions. Les méthodes simples comme celle que nous avons fait peuvent permettre de mettre en garde sur des conclusions hâtives erronées.

Nous nous sommes donc intéressés plus en détails à la question suivante : pourquoi n'avons-nous pas les mêmes emplacements optimaux ?

Notre première piste était que le problème n'est pas vraiment symétrique. Pour cela, nous avons choisi de prendre les mêmes écarts de températures entre l'intérieur, le climatiseur et l'extérieur. Nous voulions avoir les mêmes modules de gradients de température entre les deux situations.

Nous avons fait la simulation avec les données suivantes. Cette fois-ci, nous avons mis en route la climatisation quand la température dépassait les 19°C. Nous avons commencé à 18°C dans la simulation avec les radiateurs et donc ce n'est pas symétrique (par rapport à 19°C). Nous commencerons cette fois avec le seuil de température de 20°C.

| | intérieur | mur | vitre | climatiseur | extérieur |
|-----------------------|-----------|-------|-------|-------------|-----------|
| Température | 20°C | 20°C | 20°C | -12°C | 33°C |
| Coefficient diffusion | 0.2 | 0.001 | 10 | fortement | fortement |



Nous retombons exactement sur les mêmes résultats. Ainsi, nous pouvons voir que notre intuition se vérifie lorsque le problème symétrique. De plus, nous avons vu que nous ne pouvons pas tirer de conclusion trop rapidement à partir d'une simulation. Il est nécessaire de refaire cette simulation pour un problème différent.

Enfin, nous avons également montré une des limites du modèle. Il est important de savoir que la chaleur ne se déplace pas par hasard : le froid attire le chaud. Tout système dynamique tend à retrouver un état d'équilibre en minimisant l'énergie à dépenser. De plus, une molécule chaude est plus agitée et instable qu'une molécule froide. C'est pourquoi par collision entre molécules, une molécule chaude perdra de l'énergie et donc de la chaleur : "le froid attire le chaud". Ce mouvement et les transferts engendrés se calculent selon la loi de refroidissement de Newton. Notre modèle ne prend pas cela en compte car ici nous avons observé une symétrie.

V Modélisation en 3 dimensions de la propagation de la chaleur

Jusqu'à présent, nous avons étudié la propagation de la chaleur en 2 dimensions. Cette simplification permet de tirer des conclusions quant à la disposition des radiateurs pour minimiser leur temps d'activité. En revanche, on passe à côté de certaines possibilités d'emplacment. En effet, on ne peut pas placer un radiateur sous une fenêtre. De plus, une source de chaleur diffusera différemment dans la pièce en fonction de sa position verticale (plus proche du sol ou du plafond).

Nous avons vu dans les simulations en 2 dimensions qu'en ne parallélisant pas nos calculs, ceux-ci deviennent très longs quand le nombre de points de la discrétisation augmente.

En ajoutant la troisième dimension, on se retrouve à inverser des matrices qui croient de manière exponentielle en fonction de la finesse du maillage. De ce fait, nous allons nous concentrer sur des cas avec un maillage grossier. Même avec ce type de discrétisation, nous pouvons observer le phénomène physique sous-jacent.

V.1 Cas d'étude

Considérons un cube de dimension $N_x = 15$, $N_y = 15$, $N_z = 15$. L'unité de cette dimension est arbitraire. Ce cube possède une cavité qui est caractérisée par l'épaisseur des murs, égale à $e = 1$. Nous pouvons voir ce cube comme une pièce avec des murs, un toit et un sol, l'espace de vie étant de dimension $(N_x - 2e) \times (N_y - 2e) \times (N_z - 2e)$.

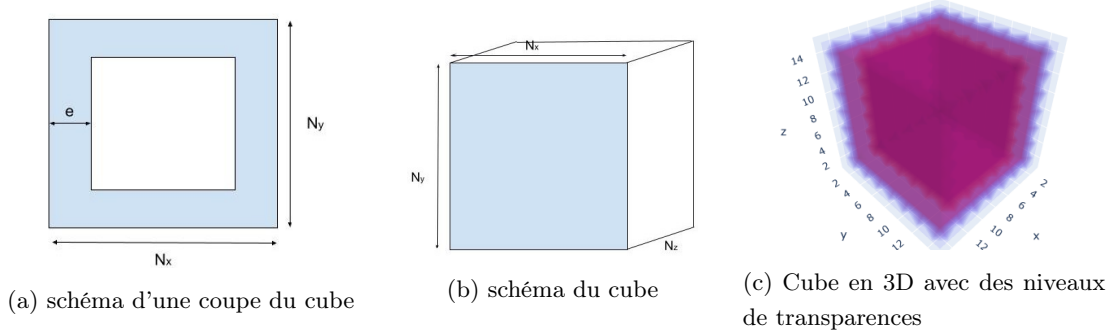


FIGURE 23 – Schématisation de du cube avec une cavité étudié

Le cube possédera une température initiale notée T_0 . Le volume du cube sera supposé négligeable par rapport au volume de son environnement. On pourra de ce fait supposer la température notée T_{ext} constante, et on fixera cette température à 10°C .

Comme dans l'étude précédente, nous introduirons des fenêtres et des radiateurs, pour se rapprocher au mieux de la modélisation d'une pièce de vie. On possède une fenêtre et un radiateur dont on va tester plusieurs dispositions dans la pièce. Nous observerons ensuite l'évolution du phénomène physique avec quelques simulations.

V.2 Première étude : fenêtre et radiateur de part et d'autre de la pièce

On souhaite maintenant observer l'évolution de la température en plaçant une source de chaleur dans le cube. On introduit un radiateur qui possède une température de 30°C . La température à l'extérieur du cube est de 10°C .

On a choisi des valeurs moins réalistes pour les coefficients de conductivité thermique, de sorte à observer une évolution. Par exemple, on a fixé une valeur du coefficient de diffusion pour les fenêtres très grande, modélisant en quelque sorte une fuite de chaleur (fenêtre ouverte). De plus, on a diminué le coefficient de conductivité thermique des murs, pour symboliser des murs très isolants.

On reporte les valeurs choisies dans le tableau ci-dessous.

| | mur | air | vitre |
|--------------------------|-------|------|-------|
| Coefficient de diffusion | 0.001 | 0.05 | 10 |

Concernant la modélisation, on a placé le radiateur et la fenêtre de part et d'autre de la pièce. La fenêtre est de dimension $\frac{N_x}{2} \times \frac{N_y}{2}$ et se situe au centre d'une face.

On peut obtenir une première simulation avec $n = 1000$ pas de temps :

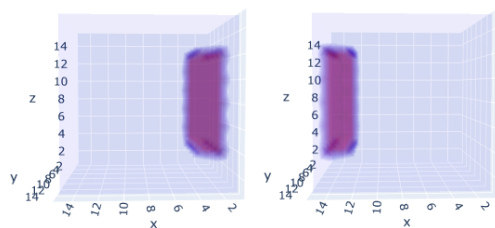


FIGURE 24

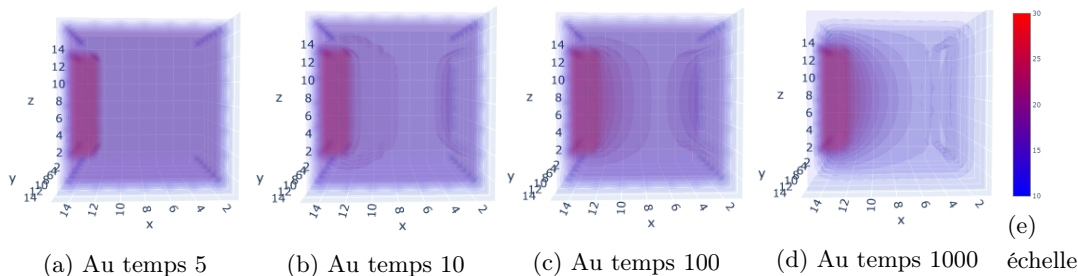


FIGURE 25

Le fait d'avoir positionné la fenêtre en face du radiateur fait que l'on observe une évolution des isosurfaces relativement symétrique. On appelle isosurface les points de l'espace pour lesquels la température est constante.

On observe que les isosurfaces sortant du radiateur se dirigent vers la fenêtre ouverte tandis que les isosurfaces de la fenêtre se dirige vers le radiateur. Cela s'apparente à un phénomène de perte de chaleur. Par exemple, si on aère une pièce de vie sans éteindre le radiateur, la chaleur émanant du radiateur ne réchauffera que la partie proche du radiateur. Si l'on a un thermostat alors le radiateur peut s'allumer de manière abusive et ainsi augmenter fortement l'empreinte carbone, mais aussi la facture d'électricité.

V.3 Deuxième étude : fenêtre et radiateur sur deux faces adjacentes

Pour cette deuxième modélisation, on utilise les mêmes conditions initiales pour la température et les coefficients de conductivité thermique.

En revanche, on a changé la disposition de la fenêtre et du radiateur qui se trouvent dorénavant sur deux murs adjacents. Le radiateur se situe sur la face inférieure du cube, et la fenêtre sur la face de droite sur nos représentations ci-dessous.

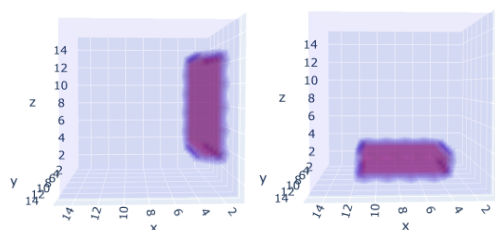


FIGURE 26

On peut obtenir une simulation avec n pas de temps :

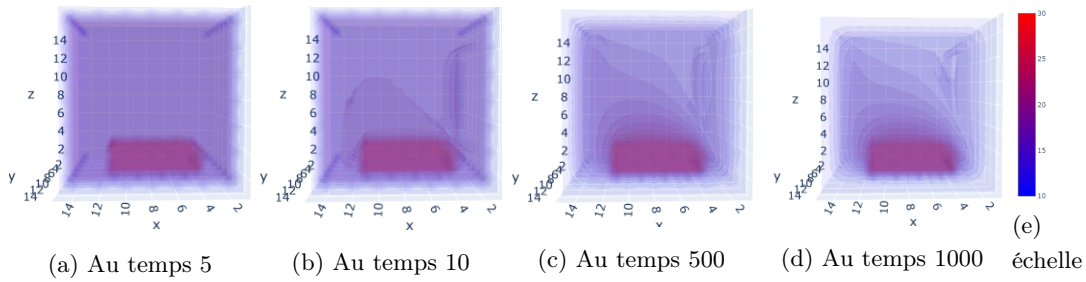


FIGURE 27

Dans cette simulation, on peut observer que les isosurfaces sortant du radiateur et de la fenêtre ne possèdent plus de plan ou d'axe de symétrie. En choisissant de ne pas mettre ces éléments face à face, nous cassons la symétrie. Nous voyons que les isosurfaces se déforment. Celles du radiateur se déforment vers le haut de la pièce et celles de la fenêtre vers la partie droite de la pièce.

V.4 Troisième étude : fente carré en centre du cube sans les conditions de bord

On propose une dernière simulation en 3 dimensions. Cette fois, nous avons une fente carrée au centre du cube, pouvant symboliser une ouverture entre deux pièces (fenêtre, porte).

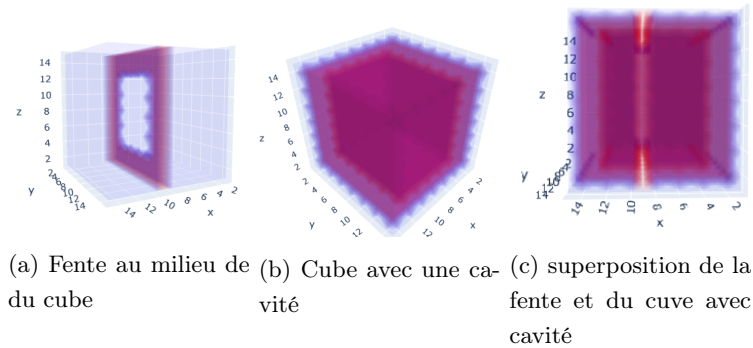


FIGURE 28

Ici nous cherchons à modéliser deux pièces liées par une fenêtre. On place un radiateur sur une face du cube dans la pièce de gauche. Cela s'apparente à placer un radiateur dans une pièce, et de ne pas en placer dans l'autre pièce en enfilade.

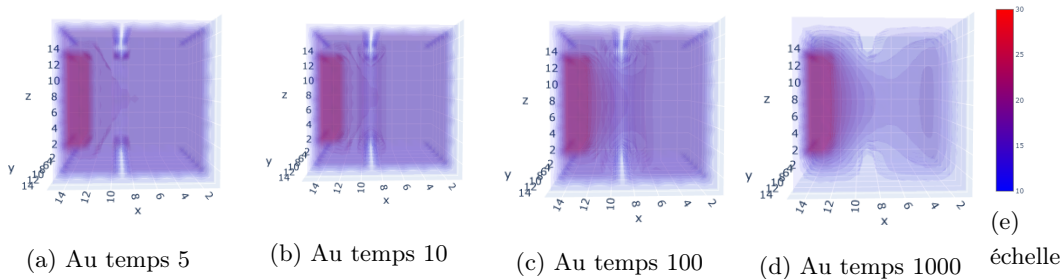


FIGURE 29

Dans cette dernière simulation, on peut observer la chaleur émanant du radiateur se propageant d'une pièce à l'autre, en passant par l'ouverture. On observe que cette chaleur emplit d'abord tout l'espace de la pièce dans laquelle est positionné le radiateur, avant de se diffuser dans l'ensemble de la deuxième pièce en enfilade. La chaleur ne pouvant passer qu'à travers la fente, celle-ci met plus de temps à rejoindre la deuxième pièce.

VI Conclusion

VI.1 Résumé du projet

Dans ce projet, nous avons étudié la propagation de la chaleur dans une pièce de vie. L'objectif était de trouver les emplacements optimaux des radiateurs pour limiter les pertes de chaleur, en utilisant une quantité d'énergie moindre pour chauffer la pièce. Autrement dit, pour chaque position potentielle, chaque radiateur a la même température, et chauffe pendant la même durée. En définitive, on a cherché à maintenir une température tempérée à l'intérieur d'une pièce, en y apportant le moins d'énergie possible.

Pour faire cette étude, nous nous sommes penchés sur l'équation de la chaleur, que nous avons discrétisé. Ensuite, nous l'avons résolue numériquement en utilisant un schéma d'Euler implicite et la théorie sur les différences finies. Enfin, après avoir calculé cette solution numérique approchée, nous avons effectué différentes modélisations et simulations sur python afin d'apporter une solution concrète et d'illustrer le problème.

VI.2 Les difficultés rencontrées

Au cours de ce projet, nous avons été confrontés à de nombreuses difficultés. La première, d'ordre organisationnelle, a réduit de manière conséquente le temps de recherche sur le sujet. Nous avons dû compenser ce contretemps en s'organisant au mieux, dès l'obtention de notre nouveau sujet, pour avancer au maximum et éviter d'avoir à gérer ce projet en parallèle des autres rendus et DS avec pour échéance la fin de semestre.

Ensuite, au niveau de l'implémentation, nous nous sommes retrouvés face à une difficulté. Celle-ci n'étant pas tant liée à l'écriture du problème physique en lui-même, mais en rapport avec l'optimisation du temps de calcul. En effet, en passant par le calcul de différences finies, le nombre de calculs à effectuer augmentait exponentiellement avec la taille de la matrice (comme on calcule la nouvelle température en chaque point). Nous avons approfondi la question et tenté de résoudre le problème en se penchant sur le concept de matrice creuse (via le module *scipy*). Les matrices creuses sont des matrices dont seuls les coefficients non nuls sont stockés en mémoire. L'utilisation de tels objets peut nous permettre de gagner un temps considérable au niveau du temps de calcul et d'optimiser l'espace mémoire dédié au stockage de nos matrices.

D'autre part, nous avons eu besoin de visualiser nos résultats, et nous avons dû trouver un objet adéquat pour représenter la diffusion de la chaleur assez précisément pour observer le phénomène physique, mais suffisamment discret pour coller au concept de différences finies. Nous sommes passés par plusieurs packages avant de s'accorder sur la heatmap fournie par le package *seaborn*. Pour les figures en 3D nous avons eu du mal à trouver une représentation permettant de voir l'évolution des iso-surfaces. Nous avons finalement trouver une visualisation avec *plotly* qui permet de représenter et visualiser correctement leur évolution.

VI.3 Ce que le projet nous a apporté

Ce projet était l'occasion d'appliquer nos connaissances en mathématiques et nos compétences dans l'utilisation d'outils numériques pour résoudre un problème physique. Nous avons effectué des recherches documentaires pour mieux comprendre les notions physiques propres à ce projet, et notre tuteur M.Nouveau nous a guidé pour réaliser le passage des équations physiques vers les modèles mathématiques.

Bien que nous ayons reçu ce sujet un mois plus tard que les autres groupes de ce module, nous avons réussi à rattraper ce retard et nous avons obtenu des simulations en deux et en trois dimensions du phénomène physique que nous cherchions à étudier.

Nous avons apprécié le travail en équipe sur ce projet. Pour effectuer l'ensemble du travail demandé, nous nous sommes répartis les tâches selon les points forts de chacun, et nous avons échangé régulièrement sur nos avancées respectives. De plus, nous avons organisé des rendez-vous réguliers avec notre tuteur M. Nouveau pour le tenir informé de notre progression. Cette organisation du travail est un premier pas vers notre futur métier d'ingénieur où l'on sera souvent amenés à travailler en collaboration avec d'autres professionnels sur un même projet, et où l'on devra présenter nos avancées devant les autres membres de l'équipe.