INSA INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES RENNES
Département Génie Mathématique

Année universitaire 2019–2020
3 GM - Méthodes Numériques du Linéaire

TP 2 - Méthode de la puissance

Soit A une matrice carrée d'ordre d. On définit la méthode de la puissance de la façon suivante :

Initialisation : $x^{(0)}$ *donné*
$q^{(0)} = x^{(0)}/\|x^{(0)}\|$

Itérations : $k \geq 0$ $x^{(k)} = Aq^{(k-1)}$
$\lambda^{(k)}(j) = x^{(k)}(j)/q^{(k-1)}(j)$ pour $j = 1, \ldots, d$
$q^{(k)} = x^{(k)}/\|x^{(k)}\|$

Théorème. Soit A une matrice carrée d'ordre d, diagonalisable dont la valeur propre de plus grand module λ_1 est unique. Si $q^{(0)}$ n'est pas orthogonal au sous espace propre associé à λ_1, alors la suite construite précédemment vérifie :

1. $\lim_{k \to +\infty} \left(\dfrac{\overline{\lambda_1}}{|\lambda_1|} \right)^k q^{(k)}$ est un vecteur propre de norme unité associé à λ_1,
2. $\lim_{k \to +\infty} \|Aq^{(k)}\| = |\lambda_1|$,
3. $\lim_{k \to +\infty} \dfrac{x^{(k+1)}(j)}{q^{(k)}(j)} = \lambda_1$ pour $1 \leq j \leq d$ si $q^{(k)}(j) \neq 0$.

- Écrire un programme qui, étant donnés une matrice A, un vecteur $x^{(0)}$ et un entier N, construit les suites de vecteurs $x^{(k)}$, $\lambda^{(k)}$ et $q^{(k)}$ pour $k = 1, 2, \ldots, N$.
- On testera le programme avec

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}, \qquad x^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad N = 10.$$

  Tracer l'évolution des composantes de $\lambda^{(k)}$ et de $\|x^{(k)}\|_2$ en fonction de k pour $1 \leq k \leq N$. Que peut-on en déduire ?
- Tester de même le script avec le vecteur initial $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ et $N = 100$. Tracer l'évolution des composantes de $\lambda^{(k)}$ et de $\|x^{(k)}\|_2$ en fonction de k pour $1 \leq k \leq N$.
- Écrire un nouveau programme qui prend comme argument A, $x^{(0)}$ et une tolérance TOL, analogue au programme précédent, mais qui utilise cette fois un critère d'arrêt sur la convergence de la valeur propre.
  Tester ce programme avec le vecteur initial $x^{(0)} = (1, 0, 0)^T$ et une tolérance de 10^{-5}.