

# Modélisations numériques d'équations différentielles stochastiques

Baptiste CALLARD & Malo TANNÉ

10 janvier 2022

# Table des matières

I	Introduction . . . . .	2
II	Diffusion gaussienne stationnaire . . . . .	2
	II.1 Schéma d'Euler . . . . .	2
	II.2 Extrapolation de Romberg-Richardson . . . . .	4
III	Conclusion . . . . .	5

# I Introduction

Il existe plusieurs schémas numériques afin d'approximer la solution d'une équation différentielles stochastique. Celui que nous utiliserons sera la schéma d'Euler, qui est d'ordre  $\mathcal{O}(h)$ . On se donne un pas  $h$  qui nous fournira ainsi  $\frac{T}{h}$  points. À l'aide de plusieurs répliques données par la méthode, nous pourrions estimer différentes espérances, en particulier pour vérifier si celle ci est constante pour une SDE donnée.

## II Diffusion gaussienne stationnaire

On peut approcher les solutions de SDE en 2 dimensions. Prenons cet exemple :

$$X(t) = X(0) + \int_0^t \left(-\frac{1}{2}I + R\right)X(s)ds + B(t)$$

en se donnant

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et la matrice de rotation } R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$B(t)$  est un mouvement brownien standard 2d ( $B(0) = 0$ ) défini sur  $[0, T]$ , où l'on fixera  $T = 10$  tout au long de l'étude. On supposera que  $X(0)$  est de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance identité (ce qui signifie que les v.a sont indépendantes car gaussiennes de covariance nulle et que l'on pourra les tirer comme l'on souhaite avec le *rmnorm* de R).

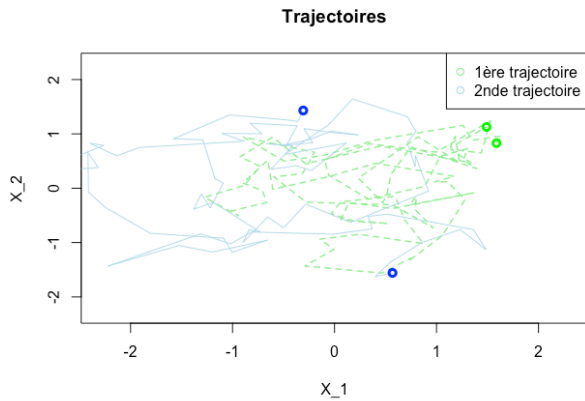
### II.1 Schéma d'Euler

On peut commencer par approximer notre solution de la SDE avec le schéma d'Euler. On se fixe un pas de temps  $h$  qui nous fournira ainsi  $T/h$  points en plus du  $X_0$  fixé. Ainsi,

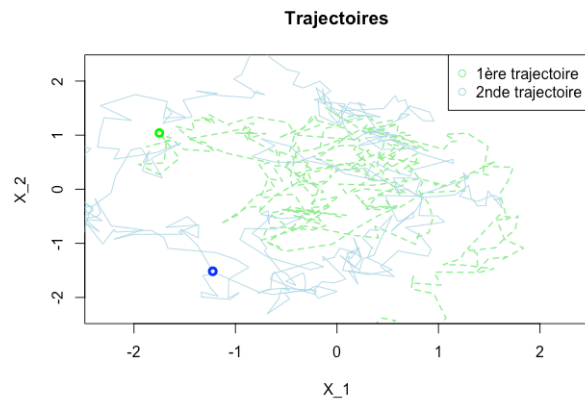
$$\forall k \in \{1, \dots, T/h\}, X_k = X_{k-1} + b * X_{k-1} * h + [B(t_k) - B(t_{k-1})]$$

La matrice  $b$  appliqué à  $X_{k-1}$  est donc  $-\frac{1}{2}I + R$ . De plus, les incréments du mouvement brownien étant gaussiens et indépendants, on peut alors réaliser un tirage de taille  $N = \frac{T}{h}$  d'une loi  $\mathcal{N}(0, h)$ .

On peut alors tracer quelques trajectoires pour des  $h$  différents et des conditions initiales différentes :

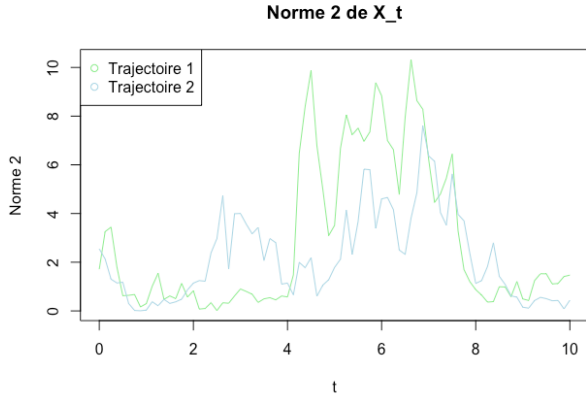


(a) 2 trajectoires pour  $h = 2^{-3}$

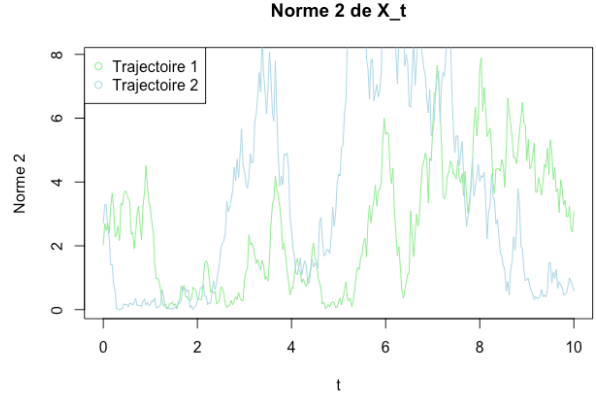


(b) 2 trajectoires pour  $h = 2^{-5}$

On obtient alors la norme 2 pour chacune de ces trajectoires. En rappelant que la solution de cette SDE vérifie  $\forall t \in [0, T], \mathbb{E}[X(t)^2] = 2$ , nous espérons voir cette norme 2 être en moyenne autours de 2.



(a) 2 évolutions des normes 2 pour  $h = 2^{-3}$



(b) 2 évolutions des normes 2 pour  $h = 2^{-5}$

Cette norme 2 est très variable selon la trajectoire et la discrétisation choisie. Cela n'est pas alarmant car en passant à la moyenne empirique sur un grand nombre de trajectoires, on devrait retomber sur la valeur 2. On réalise alors  $M$  simulations numériques de  $X(t)$  à l'aide du schéma d'Euler pour un pas de temps  $h$  choisi. On réalise ensuite la moyenne empirique des normes 2 sur chaque temps de discrétisation  $t_k$  car l'égalité à 2 est vérifiée à chaque temps  $t \in [0, T]$ . Voici ce que l'on obtient pour un vecteur  $h = (2^{-3}, 2^{-4}, 2^{-5})$  et  $M = (100, 1000, 10000)$  avec en rouge, le pas de temps  $h = 2^{-3}$ , en vert le pas de temps  $2^{-4}$  et en bleu le pas de temps  $2^{-5}$ , tout ceci avec les différents  $M$  cités plus haut.

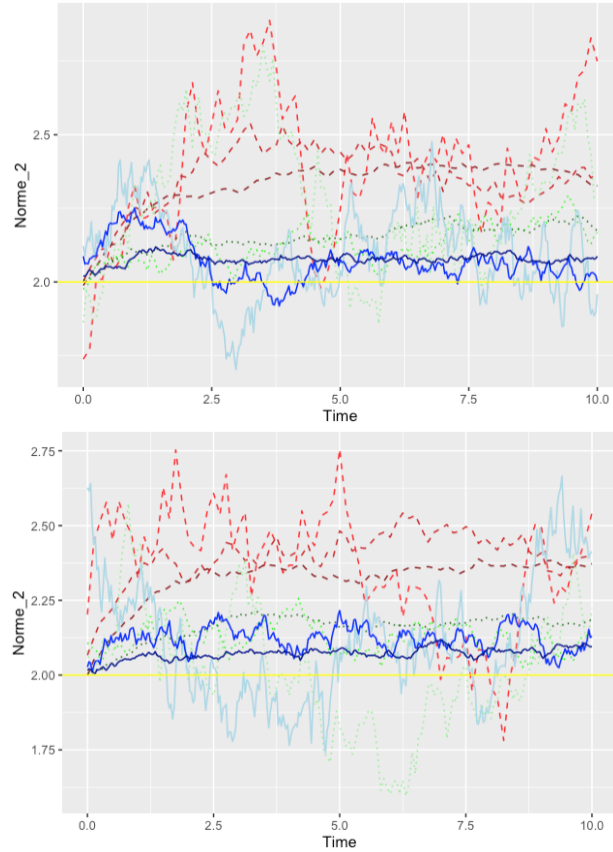


FIGURE 3 – Espérance de la norme 2 pour plusieurs pas de temps et plusieurs nombres de répliques

On observe que pour les pas de temps plus précis ( $h = 2^{-5}$  sur les courbes bleues), on a une courbe de la norme 2 qui tourne plus autour de 2 que pour les autres pas de temps, elle a une amplitude beaucoup plus faible. De plus sur ces mêmes courbes bleues, on a une estimation moins précise pour  $M = 100$  car la courbe bleue claire est plus variable autour de 2 que pour les 2 autres. Ceci est logique car nous utilisons la moyenne

empirique qui est plus précise à mesure que  $M$  augmente. Malheureusement, de par la longueur des calculs, nous ne pourrions pas aller sur des pas de discrétisation plus faibles.

## II.2 Extrapolation de Romberg-Richardson

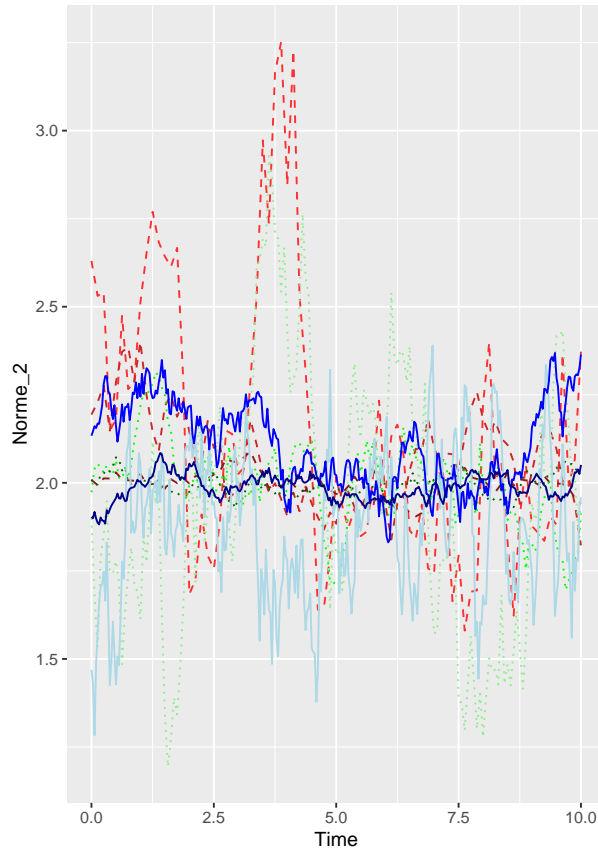
On peut cependant trouver une meilleure approximation de  $\mathbb{E}[X(t)^2]$  à l'aide de l'extrapolation de Romberg-Richardson. On définit pour  $h$  et  $M$  donnée :

$$NS^{h,M}(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |X_i^h(t)|^2$$

et

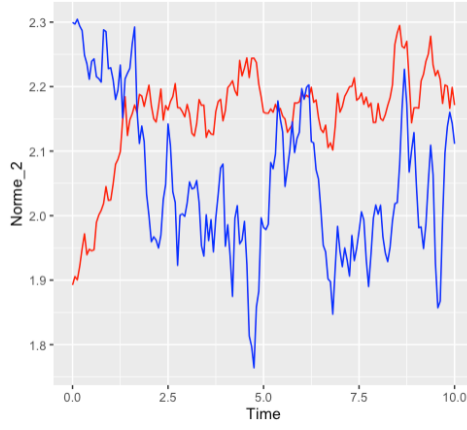
$$NS^{\frac{h}{2},M}(t) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |X_i^{\frac{h}{2}}(t)|^2$$

Pour  $M$  assez grand, ces valeurs approximent bien  $\mathbb{E}[X(t)^2]$ . Ainsi, avec la combinaison  $2 * NS^{\frac{h}{2},M}(t) - NS^{h,M}(t)$ , on a une approximation en  $\mathcal{O}(h^2)$  de  $\mathbb{E}[X(t)^2]$ .

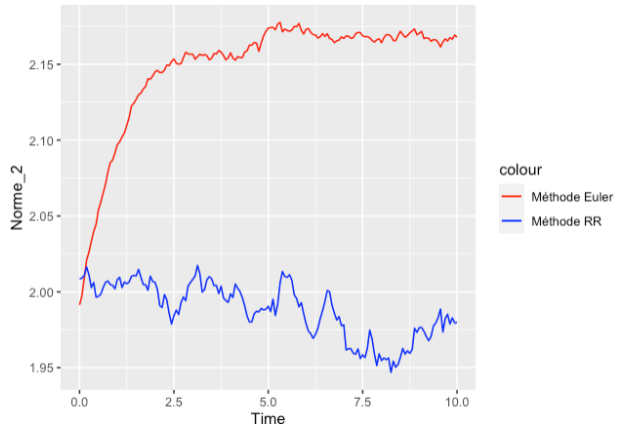


(a) Espérance de la norme 2 pour plusieurs pas de temps et plusieurs nombres de répliques avec l'extrapolation R-R

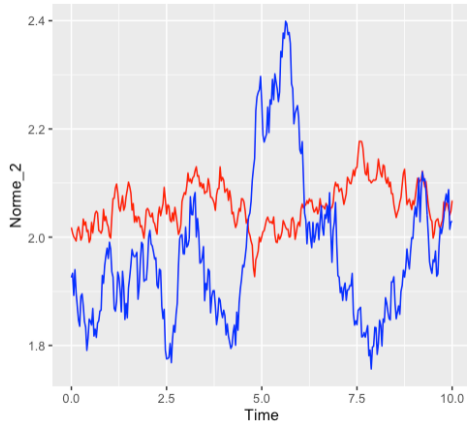
De même que pour les précédentes estimations, pour des pas de temps assez faibles et un nombre de réplique faible, nous obtenons une approximation moyenne (courbe en pointillée rouge pour  $h = 2^{-3}$  et  $M = 100$ ). Cependant, plus  $M$  est grand, plus l'on reste autour de l'ordonnée  $y = 2$  comme en témoigne la courbe pleine bleue foncée ( $h = 2^{-5}$  et  $M = 10000$ ). Cette approximation est d'ailleurs meilleure que celle pour le même pas et le même nombre de répliques précédent. On peut comparer ces deux types d'approximations en les affichant sur le même graphique :



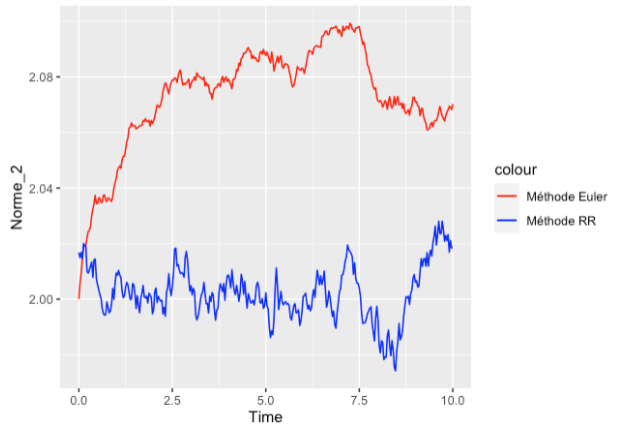
(a) Comparaison des deux approximations pour  $h = 2^{-4}$  et  $M = 1000$



(b) Comparaison des deux approximations pour  $h = 2^{-4}$  et  $M = 100000$



(a) Comparaison des deux approximations pour  $h = 2^{-5}$  et  $M = 1000$



(b) Comparaison des deux approximations pour  $h = 2^{-5}$  et  $M = 100000$

On s'aperçoit que pour des  $M$  faibles, la méthode de Romberg-Richardson est moins précise que l'approximation initiale mais que lorsque l'on augmente le nombre de répliques, on arrive à une estimation bien plus précise.

### III Conclusion

À l'aide d'un grand nombre de répliques, nous avons pu vérifier le caractère stationnaire de la solution de cette SDE. Plus  $M$  augmente, on mieux on se rapproche de 2,  $\forall t \in [0, T]$ . Mais à l'aide d'une nouvelle méthode, nous avons plus faire des estimations plus précises et plus proches de 2. Cela confirme bien la théorie et les ordres d'erreurs attendus.