

Projet MNNL

B.CALLARD
L.FOSSE

Contents

I	Introduction	2
II	Partie 1 : SIR	2
	II.1 Schéma de Euler Explicite	3
	II.2 Schéma de Euler Implicite	4
	II.3 Les limites des schémas d'Euler	5
III	Partie 2	9
	III.1 Vaccination :	10
	III.2 Confinement :	14
	III.3 Confinement et Vaccination :	16
IV	Nouveau scénario	18
V	Conclusion	22

I Introduction

II Partie 1 : SIR

Présentation du problème : Ici nous allons nous intéresser au modèle SIR qui est un modèle très connu en épidémiologie et qui permet de représenter la propagation d'une épidémie au sein d'une population donnée. La population sera répartie en 3 catégories, les personnes Saines (s), les personnes infectées (i) et les personnes qui ont attrapé la maladie mais qui ont guéri (r). Il est intéressant de noter que dans cette modélisation, aucune personne ne meure, ainsi cette modélisation n'est pas valable pour toutes les épidémies.

Si on considère ainsi le vecteur $(s(t), i(t), r(t))^t$. Qui est un vecteur qui dépend du temps, ce vecteur respecte le système différentiel suivant.

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt}(t) = -\beta s(t)i(t) \\ \frac{di}{dt}(t) = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ \frac{dr}{dt}(t) = \gamma i(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} s(0) \\ i(0) \\ r(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ce modèle peut s'expliquer et peut se retrouver très facilement. En effet ici on ne considère une maladie qui ne se transmet que par un contact proche avec une autre personne qui possède la maladie et tout le monde circule librement. Ainsi les personnes infectées (i) quand elles vont croiser des personnes saines (s) elles vont en contaminer une proportion β par unité de temps ainsi entre un temps t et un temps $t+h$ la proportion de personnes saines va diminuer de $h\beta s(t)i(t)$ tandis que celle des personnes infectées va augmenter de $h\beta s(t)i(t)$. Ainsi plus β sera élevé plus la maladie se propagera vite dans la population, c'est le coefficient de transmissibilité.

En revanche parmi les personnes infectées, une proportion γ guérie par unité de temps, et vont dans la catégorie des personnes rétablies. Ainsi entre un temps t et un temps $t+h$ la proportion de personnes infectées va diminuer de $h\gamma i(t)$ tandis que celle des personnes rétablies va augmenter de $h\gamma i(t)$. Ainsi on peut réécrire ce système sous une forme discrète :

$$\begin{cases} s(t+h) - s(t) = -h\beta s(t)i(t) \\ i(t+h) - i(t) = h\beta s(t)i(t) - h\gamma i(t) \\ r(t+h) - r(t) = h\gamma i(t) \end{cases}$$

En divisant tout par h et en le faisant tendre vers 0, on retrouve notre système (1). On peut remarquer quelque chose dans ce système, qui est que aucune personne ne meurt en effet on a :

$$\frac{ds}{dt}(t) + \frac{di}{dt}(t) + \frac{dr}{dt}(t) = 0 \Leftrightarrow i(t) + s(t) + r(t) = cst$$

or $s(0) + i(0) + r(0) = 1$ ainsi $cst = 1$ ainsi au cours de cette pandémie, on ne perd aucune personne.

Ce système représente en fait une équation différentielle ordinaire du premier ordre car si on appelle $y(t) = (s(t), i(t), R(t))^t$, alors on a bien $y' = F(t, y)$ avec :

$$F(t, y) = \begin{pmatrix} -\beta y_1(t)y_2(t) \\ \beta y_1(t)y_2(t) - \gamma y_2(t) \\ \gamma y_2(t) \end{pmatrix}$$

Ici on parle même d'équation différentielle à variables séparées, car la fonction $F(t, y(t))$ n'est en fait qu'une fonction de $y(t)$. De plus la fonction $F(t, y(t))$ est une fonction de type polynomiale multi-d (chaque composante est un polynôme en y), ainsi elle est localement lipschitzienne d'après le TAF. Ainsi d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz local il existe une unique solution à ce problème. Ceci est

intéressant car on pourra approcher numériquement la solution sans avoir le risque que notre solution finale obtenue numériquement soit un mélange de plusieurs solutions du problème.

Ainsi nous avons décidé pour approcher numériquement la solution de ce problème d'implémenter les très connus schémas de Euler.

II.1 Schéma de Euler Explicite

Le schéma de Euler explicite est sans aucune doute le plus connu et le plus facile à mettre en place pour des résolution d'EDO. il se présente sous la forme suivante. On se fixe un intervalle de temps $[0, T]$ et sur cet intervalle on se donne un pas de temps Δt . Le but va être de créer une suite récurrente qui a chaque étape permet d'approcher la solution grâce à l'approximation de la solution calculé à l'étape précédente. Ainsi à la manière des chaînes de Markov on se servira du passé pour savoir comment le présent se comporte (c'est le principe des systèmes dynamiques). Ainsi si on considère notre EDO du premier ordre du type $y' = F(t, y(t))$, avec une condition initiale du type $y^0 = y(0)$. Alors on a le schéma de Euler explicite qui se met sous la forme suivante :

$$y^{n+1} = y^n + \Delta t F(t^n, y^n) \text{ avec } y^0 = y(0) \quad (2)$$

Ce schéma est très simple et s'appuie sur un Développement de Taylor à l'ordre 1 en utilisant l'EDO. Si on précise le schéma dans le cas d'étude donc en utilisant (1) on obtient la suite récurrente pour $n \in \{0, \dots, \frac{T}{\Delta t} - 1\}$:

$$\begin{pmatrix} y_1^{n+1} \\ y_2^{n+1} \\ y_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^n (1 - \beta \Delta t y_2^n) \\ y_2^n (1 + \Delta t (\beta y_1^n - \gamma)) \\ y_3^n + \Delta t \gamma y_2^n \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ainsi nous avons mis en place ce schéma numériquement sur une durée totale de $T = 80 \text{ jours}$ avec un pas de temps $\Delta t = 1 \text{ jour}$ et avec des coefficients $\beta = 0.8$ et $\gamma = 0.1$. Et cela paraît relativement cohérent dans le contexte d'une épidémie, on aimerait savoir l'évolution journalière de l'épidémie. On obtient les résultats suivants :

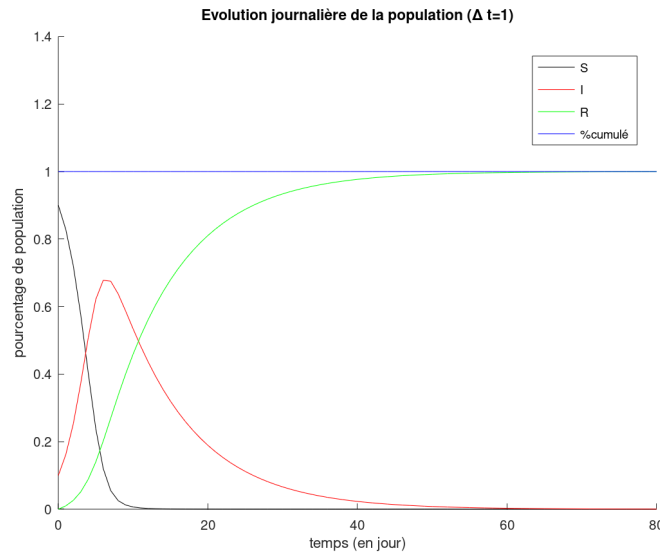


Figure 1: Évolution de la population pour $\Delta t = 1$

Ici on peut observer un comportement intéressant dont nous avons beaucoup entendu parler dernièrement dans l'actualité qui est le pique de l'épidémie. En effet on peut voir que la courbe de $I(t)$ donc les personnes infectées possèdent un pique, c'est le fameux pique de l'épidémie où on a un nombre maximal de personnes qui sont contaminées. On peut voir ici que l'épidémie se dissipe relativement rapidement dans le temps en effet au bout de 40 jours nous n'avons quasiment plus aucune

personne infectée et quasiment tout le monde entre dans la catégorie des rétablis donc les personnes qui ont été infectées et qui ont guéri.

II.2 Schéma de Euler Implicite

Dans cette section nous allons nous intéresser au même problème mais cette fois-ci en considérant le schéma de Euler Implicite. Le schéma de Euler Implicite se met en équation sous la forme suivante :

$$\boxed{y^{n+1} = y^n + \Delta t F(t^n, y^{n+1}) \text{ avec } y^0 = y(0)} \quad (4)$$

Dans le cas qui nous intéresse, on a le schéma suivant :

$$\begin{pmatrix} y_1^{n+1} \\ y_2^{n+1} \\ y_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^n \\ y_2^n \\ y_3^n \end{pmatrix} + \Delta t \begin{pmatrix} -\beta y_1^{n+1} y_2^{n+1} \\ \beta y_1^{n+1} y_2^{n+1} - \gamma y_2^{n+1} \\ \gamma y_2^{n+1} \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

La particularité de ce schéma est que pour trouver notre vecteur y^{n+1} , on doit résoudre une équation non linéaire de type $F(u) = 0$ avec ici :

$$F(u) = \begin{pmatrix} u_1 - y_1^n + \Delta t \beta u_1 u_2 \\ u_2 - y_2^n - \Delta t (\beta u_1 u_2 - \gamma u_2) \\ u_3 - y_3^n - \Delta t \gamma u_2 \end{pmatrix}$$

Ici le meilleur algorithme que nous connaissons pour résoudre ce genre de système est celui de **Newton Raphson** (NR). Cependant avant d'utiliser cet algorithme il nous faut regarder la matrice Jacobienne de la fonction F que l'on doit annuler :

$$J_F(u) = \begin{pmatrix} 1 + \Delta t \beta u_2 & \Delta t \beta u_1 & 0 \\ -\Delta t \beta u_2 & 1 - \Delta t (\beta u_1 - \gamma) & 0 \\ 0 & -\Delta t \gamma & 1 \end{pmatrix}$$

En effet à chaque pas de notre schéma on doit mettre en place l'algorithme de NR qui est aussi une méthode qui construit une suite récurrente u_k tq :

$$u_{k+1} = u_k - J_F^{-1}(u_k) F(u_k) \text{ avec } u_0 \text{ donné}$$

Nous avons ainsi mis en place l'algorithme de NR et le schéma de Euler Implicite et nous avons les résultats suivants :

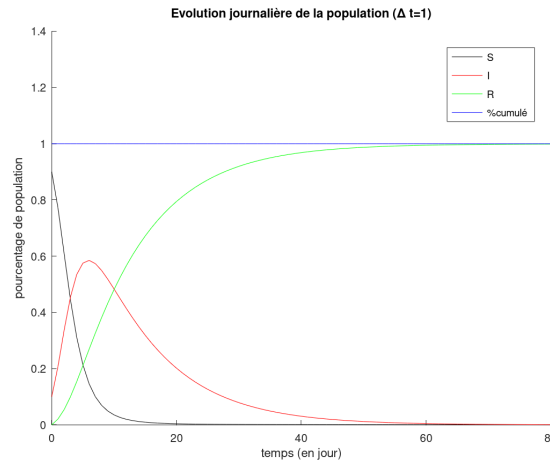


Figure 2: Évolution de la population pour $\Delta t = 1$

On obtient ainsi pour ce pas de temps de 1jour les mêmes résultats avec les deux schémas numériques.

II.3 Les limites des schémas d'Euler

Comme on l'a vu précédemment le schéma de Euler explicite est très simple à mettre en place et permet d'approcher relativement bien les solutions. Cependant ce schéma possède ses limites, et pour mettre en évidence ces limites nous avons considéré les paramètres suivants : $\beta = 1$ et $\gamma = 0.005$ et nous nous plaçons sur l'intervalle $[0, T]$ avec $T = 1200j$. Pour expliquer ce changement au niveau des coefficients, ici on considère une épidémie qui se propage beaucoup plus vite ($\beta = 1$) et donc les personnes guérissent beaucoup plus lentement ($\gamma = 0.005$). Ainsi ici on considère une épidémie qui dure beaucoup plus longtemps dans le temps. D'où le fait que on se place sur un intervalle de temps très long.

Dans un premier temps on va comme dans la partie précédente, faire un suivi journalier de l'épidémie ($\Delta t = 1j$), et voici ce que nous obtenons :

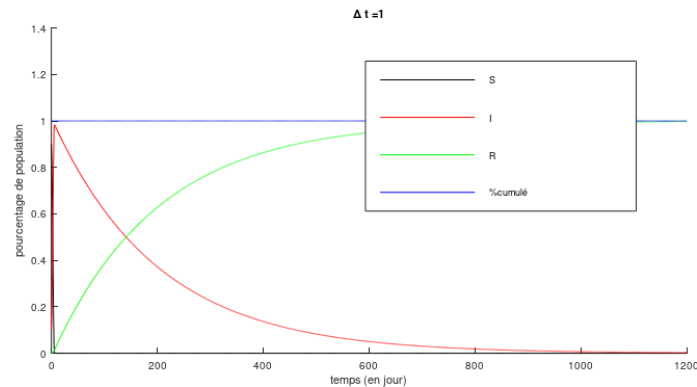


Figure 3: Euler Explicite pour $\Delta t = 1$

Ici on observe des comportements qui sont en accord avec l'interprétation des coefficients que nous avons fait précédemment, en effet on peut voir une population d'infectés qui explose au début, la propagation est très rapide, en revanche l'épidémie s'étale beaucoup plus dans le temps. Tout ceci paraît très cohérent au vu de ce qui a été dit.

Comme on se place sur un intervalle de temps très grand on pourrait se dire ainsi qu'il est seulement nécessaire de faire un suivi de l'épidémie tous les deux jours ou tous les trois jours de façon à gagner en rapidité au niveau des calculs. Cependant si on considère le schéma de **Euler Explicite** pour un pas de temps $\Delta t = 2j$ voici les résultats que nous obtenons.

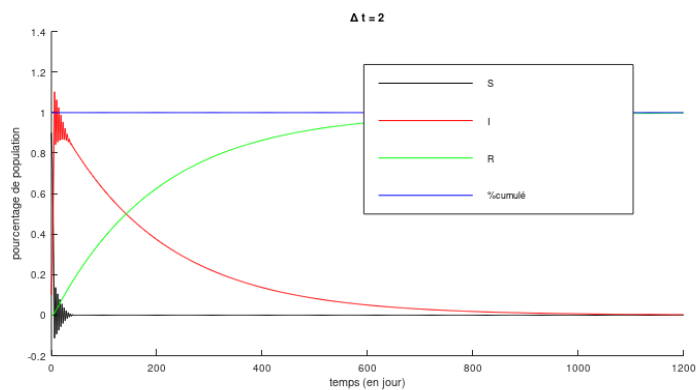


Figure 4: Euler Explicite pour $\Delta t = 2$

On observe en fait des oscillations pour les courbes des personnes infectées et des personnes saines.

Ce phénomène est bien connu pour le schéma de Euler Explicite et ici il peut s'expliquer car si on reprend notre schéma numérique, on a l'équation de récurrence (3), on a l'équation suivante pour la quantité S :

$$y_1^{n+1} = y_1^n(1 - \beta\Delta t y_2^n)$$

Sur cette première équation on peut voir que si on choisit un pas Δt qui est trop grand, on prend le risque d'avoir une quantité S qui soit négative pour un temps donné. C'est effectivement ce que l'on peut observer sur notre graphique.

On peut observer quelque chose de similaire pour la quantité I. En effet on a l'équation de récurrence suivante :

$$y_2^{n+1} = y_2^n(1 + \Delta t(\beta y_1^n - \gamma))$$

On peut sentir ici aussi que si le pas de temps est trop important ainsi que la quantité y_n donc la population des sains (cela peut arriver à cause des oscillations précédentes), alors la quantité I va passer cette fois ci au-dessus de 1.

Ainsi on peut voir que pour le schéma d'Euler explicite on a une contrainte sur le pas de temps. En effet si le pas de temps est trop grand, il va en fait y avoir un double jeu entre les quantités S et I. C'est ce que l'on peut observer sur les graphiques. Ces deux populations vont osciller de plus en plus fortement à mesure que l'on augmente le pas de temps, mais elles vont toujours osciller ensemble. Pour illustrer ceci, on peut regarder ce qu'il se passe pour un pas de temps $\Delta t = 3j$

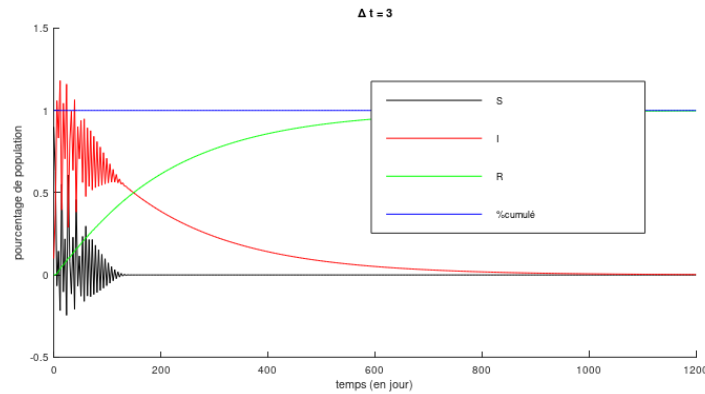


Figure 5: Euler Explicite pour $\Delta t = 3$

On peut voir ici que pour $\Delta t = 3j$ les oscillations sont très fortes et concernent toujours les populations S et I, et ont lieu sur le même intervalle de temps pour les deux populations.

Ainsi le schéma de Euler explicite est en fait soumis à une contrainte sur le pas de temps. Si on augmente trop le pas de temps on perd la physique du problème (on obtient des pourcentages négatifs et supérieur à 100% pour certaines populations). Il n'y a rien d'inquiétant à tout cela le schéma d'Euler est trop souvent soumis à ce genre de contraintes, c'est quelque chose de très connu. En effet un schéma aussi simple d'implémentation et aussi peu cher en termes de calcul devait bien cacher quelque chose. Cette contrainte sur le pas de temps peut sembler au premier coup d'œil ne pas être très importante (on prend $\Delta t = 1$ et le problème est réglé), cependant c'est une contrainte qui limite grandement l'utilisation de la méthode de Euler Explicite car on aimerait pouvoir approcher notre solution avec n'importe quel pas de temps de façon à limiter les temps de calculs. Une question se pose alors, qui est comment passer outre cette contrainte. Dans beaucoup de cas, ce qui permet de passer outre cette contrainte c'est de passer à la version de Euler Implicite. Cependant ici en passant à la méthode de Euler Implicite on obtient des résultats avec des comportements tout aussi intéressants.

Pour un pas de temps $\Delta t = 1$ on obtient la même figure que pour le schéma de Euler Explicite, il n'y a aucun problème à signaler.

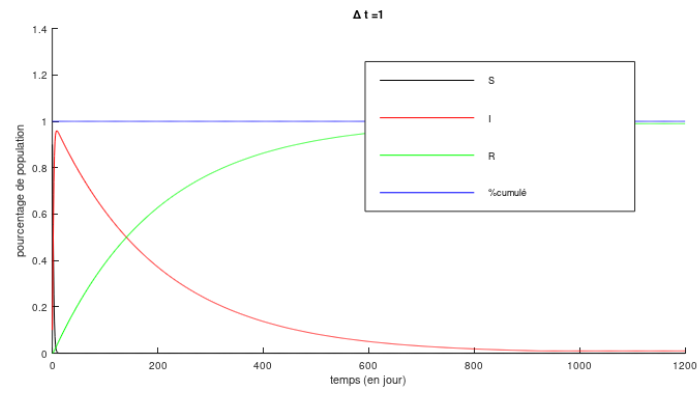


Figure 6: Euler Implicite pour $\Delta t = 1$

Cependant pour $\Delta t = 2$, on retrouve le caractère oscillant que l'on a observé précédemment.

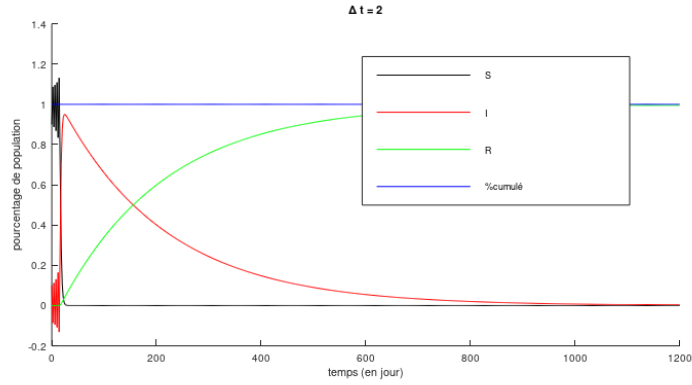


Figure 7: Euler Implicite pour $\Delta t = 2$

Le caractère oscillant est ainsi toujours présent mais cette fois ci les rôles sont inversés. En effet cette-ci c'est la population des infectés qui à un effectif négatif au début des temps et celle des sains qui fait un passage au-dessus de 100%. Cependant ces oscillations sont de courtes durées, et la dessusite après ce "passage à vide" on le comportement obtenu pour $\Delta t = 1j$.

Essayons ainsi d'augmenter le pas de temps et regardons pour un pas de temps de $\Delta t = 3$.

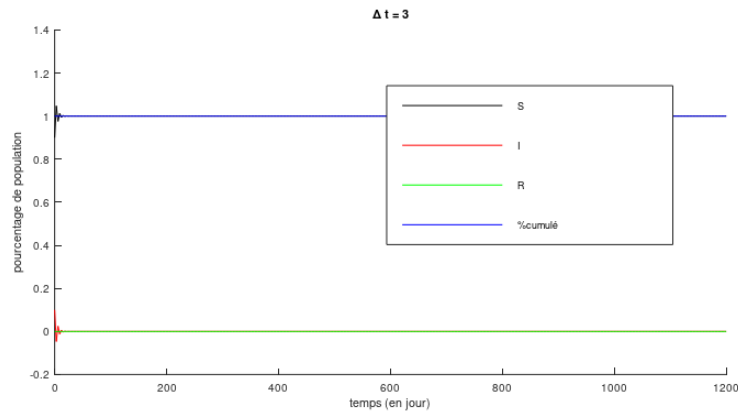


Figure 8: Euler Implicite pour $\Delta t = 3$

Cette fois ci les deux schémas se détachent vraiment. On peut voir que ici tout se passe comme si il n'y avait aucune épidémie, la population des rétablit reste quasiment constante égale à zéro tandis

que celle des saine reste quasiment constante égale à 100%. On peut voir ici qu'avec le schéma de Euler Implicite on perd totalement le comportement de l'épidémie pour ce pas de temps donné tandis qu'avec le schéma de Euler Explicite il y a certes des oscillations forte mais la tendance qui se dégage des oscillations, se rapproche beaucoup plus du comportement de l'épidémie. On observe exactement le même type de graphique pour des pas de temps de 4 ou de 5. On perd totalement le comportement de l'épidémie.

Premièrement, on remarque que la partie la plus compliquée à approcher est la partie correspondant au régime transitoire. Cela s'explique par le fait que dans notre cas c'est la partie la plus sensible celle où les courbes évoluent le plus rapidement.

Ainsi contrairement a tous les cas que nous avons pu croiser dans ce module, le schéma de Euler Implicite ne permet pas de venir corriger le caractère non stable de Euler I, au contraire on vient perdre la dynamique de l'épidémie. Avec Euler Explicite en regardant les courbes, on voit que même si l'on a un caractère oscillant en augmentant les pas de temps on garde le comportement de l'épidémie. En effet, en moyennant les valeurs sur la partie correspondant au régime transitoire alors on pourrait avoir une estimation correcte du comportement de la maladie.

Quand il est impossible d'isoler la valeur au temps $n+1$ dans Euler Implicite on est amené à utiliser Newton Raphson à chaque étape. Il semble raisonnable d'affirmer qu'une itération de Euler I est plus coûteuse en temps de calcul que Euler E. Mais comme vu en cours, il ne faut pas tomber dans le raccourci de dire qu'il faut éviter Euler I quand Newton Raphson est nécessaire car parfois c'est plus rapide de prendre cette méthode avec un pas de temps raisonnable que de prendre Euler E en prenant des pas de temps très petit.

Nous avons décidé de faire une étude du temps d'exécution des deux méthodes Euler E et Euler I pour différents pas de temps. Cela nous sera utile en plus des courbes obtenues pour choisir la méthode à employer.

Voici les courbes que nous avons obtenues :

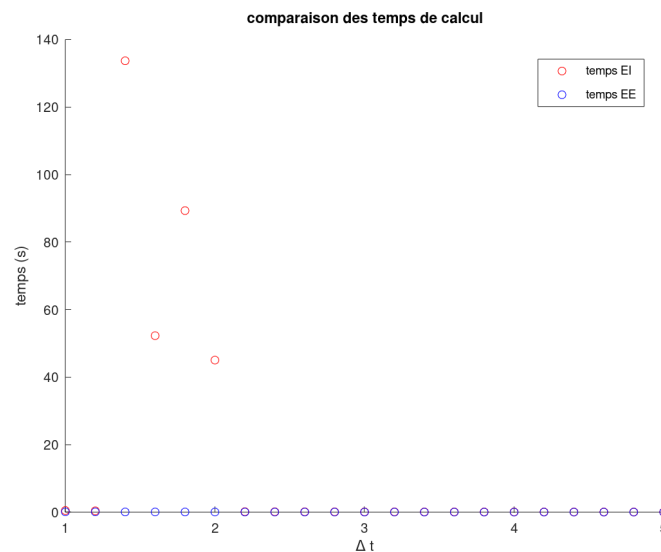


Figure 9: temps d'exécution en fonction du pas de temps pour les deux méthodes d'Euler explicite et implicite

On peut voir ici que le schéma de Euler Implicite est globalement plus long en temps de calcul notamment pour des pas de temps compris entre 1 et 2 jours. Ensuite les temps de calcul des deux méthodes sont comparables, mais à partir de ces pas de temps les méthodes ne sont plus valides (apparition d'oscillations et perte de la dynamique). On passe par des pas de temps avec des situations irréalisables, des populations négatives ou des populations avec un pourcentage supérieur à 100%.

Ainsi au vu de ce qui vient d'être dit sur ces deux schémas il semble raisonnable de dire que le schéma d'Euler Explicite est plus adapté au problème. En effet on obtient des résultats similaires avec les deux schémas et le schéma de Euler explicite est plus rapide.

III Partie 2

Dans cette deuxième partie, nous allons venir compléter notre modèle en rajoutant une nouvelle catégorie dans la population, qui est les personnes qui sont vaccinées. Avec cette nouvelle catégorie, vient se rajouter un coefficient α qui est le taux de vaccination par unité de temps. Le système que l'on a présentée dans la partie précédente reste valide mais cette fois ci on vient rajouter les vaccinées. En effet entre un temps t et $t+h$ le nombre de personnes vaccinées sera : $h\alpha s(t)$ ainsi durant ce temps h le nombre de personnes vaccinées va augmenter de cette quantité tandis la quantité de personnes saines, va elle diminuer de cette même quantité. Ce qui, combiné avec le système précédent, nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} s(t+h) - s(t) = -h\beta s(t)i(t) - h\alpha s(t) \\ i(t+h) - i(t) = h\beta s(t)i(t) - h\gamma i(t) \\ r(t+h) - r(t) = h\gamma i(t) \\ v(t+h) - v(t) = h\alpha s(t) \end{cases}$$

En divisant tout par h et en faisant tendre ce dernier paramètre vers 0, on se retrouve avec le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt}(t) = -\beta s(t)i(t) - \alpha s(t) \\ \frac{di}{dt}(t) = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ \frac{dr}{dt}(t) = \gamma i(t) \\ \frac{dv}{dt}(t) = \alpha s(t) \end{cases}$$

En plus de cette nouvelle catégorie de population nous allons avoir des coefficients α et β qui vont varier dans le temps suivant la date à laquelle la vaccination commence, ou encore si on instaure un confinement qui force la population à rester chez elle et qui ainsi limite la propagation du virus et donc ralenti l'épidémie.

Nous mènerons notre étude avec la méthode d'Euler explicite car les modèles deviennent compliqués à résoudre avec les méthodes implicites. Nous veillerons ainsi à prendre un pas de temps suffisamment petit afin d'éviter tout problème de stabilité du schéma numérique.

Cette fois ci, on partira d'une population où l'on a initialement 20 % des personnes infectées et 80 % des personnes saines :

Cela peut se traduire matriciellement ainsi :

$$\begin{pmatrix} s(0) \\ i(0) \\ r(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous noterons pour la suite :

- β : le coefficient de transition
- γ : le coefficient de rémission
- α : le coefficient de vaccination

Remarque :

Dans la suite, les coefficients γ et α pourront évoluer avec le temps et donc il ne faut pas les voir comme des constantes. nos coefficients vont avoir une évolution qui sera dictée par des fonctions qui

ne seront pas continues. Ainsi pour notre schéma de Euler Explicite dans la suite, si on considère t_0 le temps où nos paramètres doivent changer alors quand on calculera le premier terme qui correspond à un temps supérieur à t_0 alors on considérera que la condition initiale pour calculer ce terme est le terme qui vient d'être calculé juste avant.

III.1 Vaccination :

On introduit dans cette section un nouveau groupe de catégorie : les personnes saines qui sont vaccinées et ne peuvent être infectées $v(t)$. On aura toujours conservation de la population et une personne pourra appartenir uniquement à une seule catégorie. On aura donc $\forall t \in [0, 80] s(t) + i(t) + r(t) + v(t) = 1$

On va expliquer les hypothèses, les justifier et expliquer le modèle.

On se placera sur un temps d'étude de 80 jours avec un pas de temps de 1 jour.

On va faire les hypothèses suivantes :

- H1 : initialement on a une population avec $s(0)=80\%$, $i(0) = 20\%$ et on aura $v(0) = 0\%$.
- H2 : Seule une personne saine de peu devenir infectée
- H3 : Une personne infectée ne peut pas mourir et peut seulement guérir avec une probabilité α entre chaque pas de temps (sachant que la population saine évolue avec le temps)
- H4 : Une personne ne peut pas être infectée qu'une seule fois
- H5 : Un vaccin est disponible uniquement dans un second temps et seulement 10% des personnes saines peuvent avoir accès à ce vaccin (dans un premier temps on considérera que le vaccin sera disponible au 6ième jour et pour les jours suivants)
- H6 : Une personne vaccinée devient saine mais avec l'étiquette vaccinée et donc elle ne peut pas être infectée à nouveau

Si on considère ainsi le vecteur $(s(t), i(t), r(t), v(t))^t$. Qui est un vecteur qui dépend du temps, ce vecteur respecte le système différentiel suivant, avec α une fonction du temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt}(t) = -\beta s(t)i(t) - \alpha s(t) \\ \frac{di}{dt}(t) = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ \frac{dr}{dt}(t) = \gamma i(t) \\ \frac{dv}{dt}(t) = \alpha s(t) \end{array} \right. \text{ avec } \begin{pmatrix} s(0) \\ i(0) \\ r(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

De plus en faisant un raisonnement similaire sur les intervalles où $\alpha = 0$ et $\alpha = 0.1$, il vient que sur chacun des intervalles, la fonction $F(t, y(t))$ est une fonction de type polynomiale multi-d en y . ainsi elle est localement lipschitzienne d'après le TAF. Ainsi d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz local il existe une unique solution à ce problème.

Le problème avec Euler explicite peut se traduire par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1^{n+1} \\ y_2^{n+1} \\ y_3^{n+1} \\ y_4^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^n(1 - \beta \Delta t y_2^n) \\ y_2^n(1 + \Delta t(\beta y_1^n - \gamma)) \\ y_3^n + \Delta t \gamma y_2^n \\ y_4^n + \Delta t \alpha y_1^n \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \\ y_4^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} \alpha = 0 & \text{si } t < 6 \\ \alpha = 0.1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (7)$$

Avec Euler explicite nous obtenons les courbes suivantes :

Pour faire nos comparaisons, nous commençons dans un premier temps pas représenter Euler explicite sans vaccination, c'est à dire le propos de la question précédente :

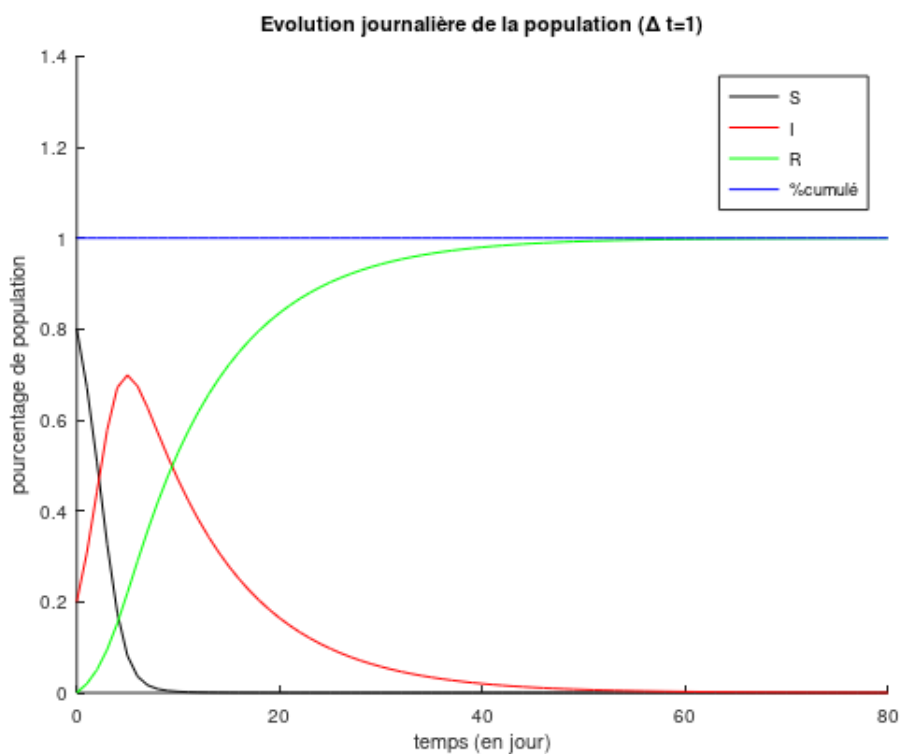


Figure 10: Évolution de la population pour $\Delta t = 1$

Approche intuitive avec l'introduction d'un vaccin:

Ici sans observer les courbes, nous pouvons nous attendre avec l'introduction d'un vaccin à voir une proportion inférieure de la population infectée par rapport au scénario sans vaccins.

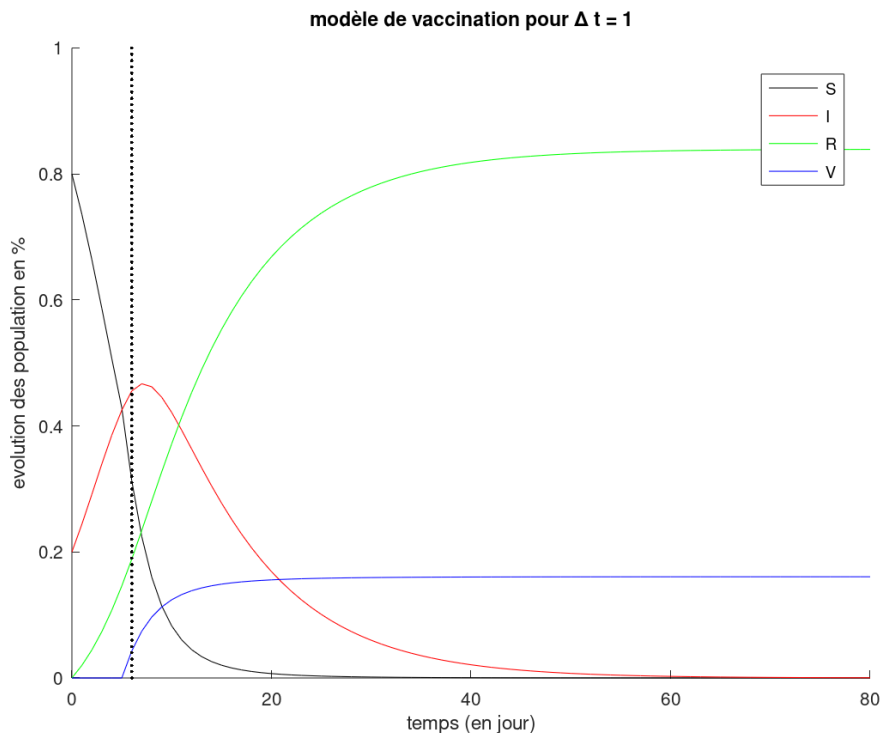


Figure 11: Euler explicite avec un pas de temps d'un jour

La ligne verticale nous indique quand la vaccination débute. Sur ce graphique on peut faire de nombreuses observations :

- courbe S :
 - On peut voir qu'au moment où la vaccination commence la courbe des personnes saines diminue plus fortement. En effet à chaque pas de temps certaines personnes saines vont se faire vacciner et entre ainsi dans la catégorie des personnes vaccinées (et donc sortent de la catégorie des personnes saines). Cela va ainsi faire diminuer la population des personnes saines plus rapidement.
- courbe I :
 - L'introduction du vaccin a permis de diminuer la valeur max de la proportion d'infectées. En effet, il était à environ 70% sans le vaccin contre environ 50% avec son introduction. Cela permet donc de diminuer le pic d'infection.
 - On peut voir que sur les deux graphiques, il faut environ autant de temps pour que le virus disparaisse de la circulation (environ 50 jours). Ainsi le vaccin n'a pas permis de diminuer la période sur laquelle s'étale l'épidémie.
 - Le fait qu'il y ait dans les premiers jours une diminution du nombre de personnes infectées engendre également une augmentation du temps max où il y a encore des personnes saines. En effet, dans le modèle une personne saine ne peut avoir le virus que par une personne infectée : $\pm \beta s(t)i(t)$. S'il n'y a moins de personne infectée la chance d'attraper le virus est plus faible.
- courbe R :
 - Nous n'observons pas de comportement particulier concernant la courbe des personnes rétablit excepté le fait qu'à la fin de l'épidémie nous avons une proportion qui n'est plus de 100% mais de 80% de personnes rétablit. En effet les 20% qui manque entre les deux courbes se retrouvent en fait dans la catégorie des personnes vaccinées.

- courbe V :
 - Il se trouve que dans notre modèle on suppose qu'au jour 6 on a une introduction du vaccin avec un coefficient d'accessibilité de α (à chaque tour on tire au "hasard" α personnes qui seront vaccinés).
 - Une première remarque que nous pouvons faire est que le nombre de personnes saines tend toujours vers 0. Cela vient du fait qu'être vacciné reste une possibilité à partir du 6^{ème} jour et c'est un état absorbant. Ici on parle d'état absorbant dans le sens que si on atteint l'état absorbé alors la probabilité de ne plus être vacciné est nulle. Le nombre d'état possible étant fini et comme on a une probabilité non nulle à chaque journée d'être vacciné alors finalement s'il n'y a plus de personne infectée (car toutes remises) alors les personnes saines disparaîtront et seront obligatoirement vaccinées.
- Observations générales :
 - Sur nos courbes on observe tout de même quelque chose d'étrange. La vaccination commence au jour 6, pourtant nous avons des changements de comportement au jour 5 (cassure au niveau des courbes). Cela est due à notre pas de temps qui est un peu grossier ($\Delta t = 1j$). Afin de régler ce problème on peut diminuer le pas de temps pour venir "lisser" un peu plus la courbe. C'est ce que nous avons fait dans le graphique suivant, en prenant un pas de temps $\Delta t = 0.1j$, et on peut voir qu'effectivement ce problème est réglé.

En revanche, avec notre modélisation nous devrions observer la cassure seulement le jour 6 et non pas un peu avant comme nous pouvons le voir sur ce graphique. Nous pouvons expliquer cela assez simplement, avec notre discrétisation qui est grossière, ce que va faire OCTAVE, c'est qu'il va prendre le point du jour 5 sans vaccin et va le relier en faisant une interpolation avec le point au jour 6. En faisant cela, OCTAVE fait l'hypothèse que le vaccin arrive de manière progressive et non de manière brutale entre le jour 5 et 6. Pour éviter cette interprétation de OCTAVE et faciliter l'interprétation graphique, nous nous sommes dit que diviser le pas de temps par 10 permettrait d'éviter d'avoir ce problème d'interpolation à l'échelle de notre étude qui est la journée.

Remarque :

Nous pourrions éviter ce problème en traçant un nuage de points, mais cela rend l'interprétation plus compliquée.

Voici ce que l'on obtient pour un pas de temps $\Delta t = 0.1j$

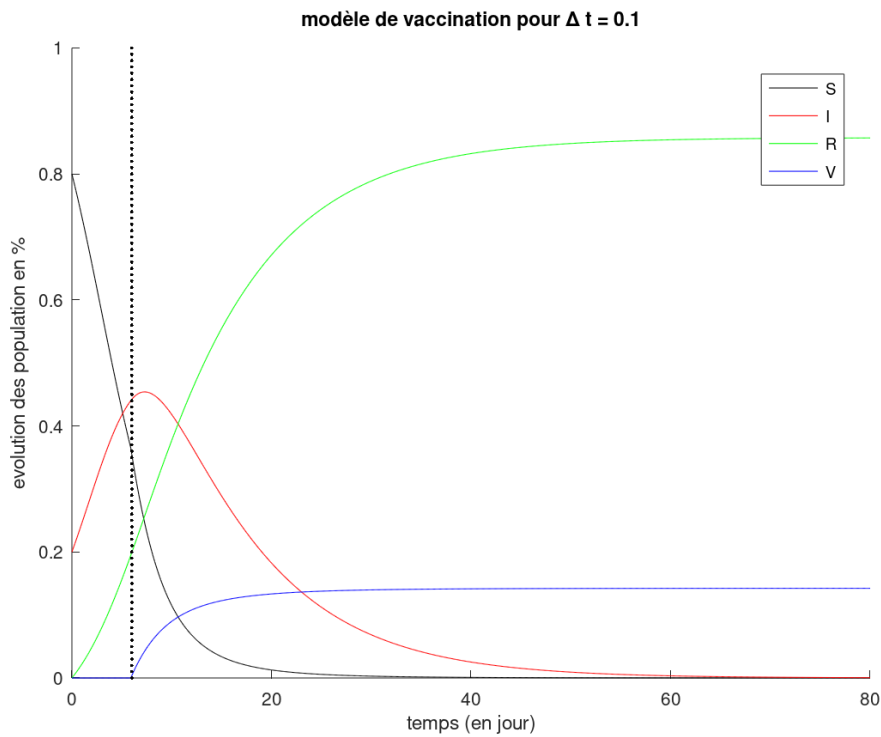


Figure 12: Euler explicite avec un pas de temps d'un dixième de jour

Commentaires :

Nous remarquons cette fois-ci que la ligne horizontale matérialisant le jour 6 tombe plus proche du début de la vaccination (ie le décollage de la courbe bleue). De même la cassure a lieu de manière plus visible le 6^{ème} jour.

Le fait de mettre un vaccin à disposition de la population permet donc d'éviter un pic trop haut et donc de pouvoir mieux soigner les personnes infectées. Les ressources médicales et le personnel soignant est une contrainte non extensible et limitée. En outre, si le nombre d'infection dépasse la capacité nécessaire pour la prise en charge des malades dans de bonnes conditions alors le corps médical doit faire des choix et donc le vaccin permet d'avoir un meilleur contrôle de la maladie.

La vaccination semble être un premier facteur sur lequel on peut agir pour diminuer le pic de la maladie.

III.2 Confinement :

On a pu voir avec la Covid-19 que parfois le vaccin met un temps assez long avant d'être commercialisable surtout face à un nouveau virus. Imaginons que sur les 80 premiers jours de l'épidémie on n'ait pas de vaccin disponible. Dans ce cas, une option possible pour réduire la circulation du virus est de confiner la population pour diminuer la transmission du virus. En effet, ici nous travaillons sur un virus qui se transmet par interaction physique entre les personnes ainsi, il semble alors assez clair que lorsque la population est confinée, le coefficient de transmission est réduit. Dans un premier temps on pourra supposer que la population est confinée pendant 10 jours et le confinement commencera le jour 5. Le coefficient de transmissibilité passera alors de 0.4 à 0.1, i.e. $\beta = 0.1$ si $t \in [5, 15]$, $\beta = 0.4$ sinon.

Une fois de plus, en considérant le vecteur $(s(t), i(t), r(t))^t$. Qui est un vecteur qui dépend du temps, ce vecteur respecte le système différentiel suivant, avec β une fonction du temps :

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt}(t) = -\beta s(t)i(t) \\ \frac{di}{dt}(t) = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ \frac{dr}{dt}(t) = \gamma i(t) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} s(0) \\ i(0) \\ t(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

De plus en faisant un raisonnement similaire sur les intervalles où $\beta = 0.4$ et $\beta = 0.1$, il vient que sur chacun des intervalles, la fonction $F(t, y(t))$ est une fonction de type polynomiale multi-d en y (les coefficients sont constants en se plaçant sur ces intervalles). ainsi elle est localement Lipschitzienne d'après le TAF. Ainsi d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz local il existe une unique solution à ce problème.

La méthode de Euler peut s'écrire ainsi :

$$\begin{pmatrix} y_1^{n+1} \\ y_2^{n+1} \\ y_3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^n(1 - \beta \Delta t y_2^n) \\ y_2^n(1 + \Delta t(\beta y_1^n - \gamma)) \\ y_3^n + \Delta t \gamma y_2^n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \alpha = 0.1 & \text{si } t \in [5, 15] \\ \alpha = 0.4 & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

Avec Euler explicite nous obtenons les courbes suivantes :

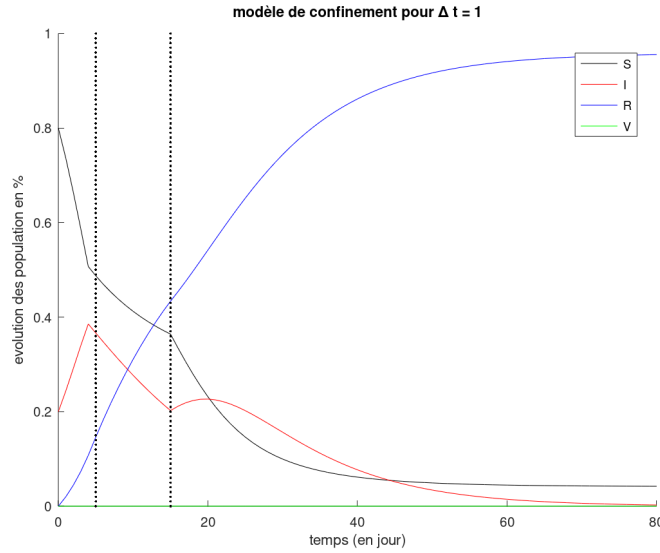


Figure 13: Euler explicite avec un pas de temps de 1 jour

Ici on peut observer des décalages entre nos traits verticaux qui symbolisent le début et la fin du confinement et les changements de comportement au niveau des courbes. Cela est due au pas de temps un peu grossier de 1 jour que nous avons considéré. En effet les solutions sont calculées à partir d'une suite récurrente qui se base sur la valeur précédente pour obtenir la valeur présente, si le pas de temps est trop important il y a des intervalles assez grands où nous n'avons des "trous" (aucune valeur calculée). Nous avons décidé de refaire les calculs mais avec un pas de temps de 0.1 jour afin de venir "lisser" nos résultats, et nous obtenons les résultats suivants.

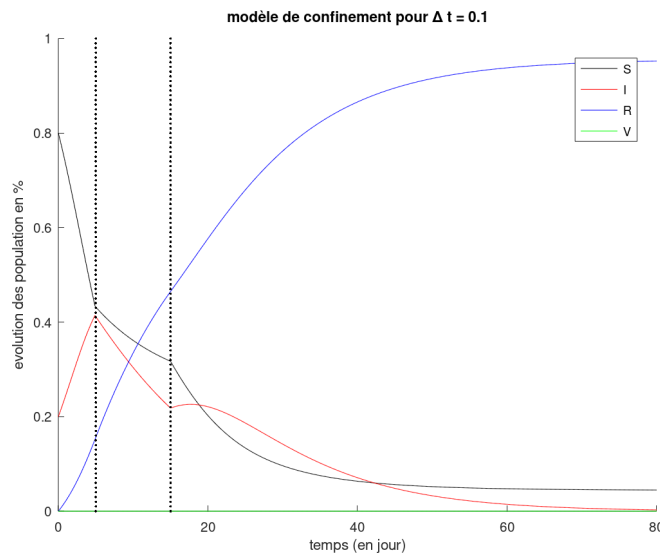


Figure 14: Euler explicite avec un pas de temps de 0.1 jour

Commentaires :

Sur cette dernière courbe obtenue après lissage (diminution du pas de temps) on peut observer des effets très intuitifs du au confinement.

- courbe S : On peut voir que pendant le confinement (entre les deux droites verticales), la courbe des personnes saines décroît mais beaucoup moins lentement qu'au début. Dès la fin du confinement cette courbe se remet à décroître fortement pendant un instant assez bref puis se stabilise pour finalement tendre vers une valeur non nulle. On remarque quelque chose d'intéressant ici qui est que comparé aux différents modèles précédents la proportion de personnes saines ne tend pas vers 0. Ainsi avec ce modèle on peut voir qu'une certaine partie de la population ne sera jamais affectée par l'épidémie.
- courbe I : De même, la courbe des personnes infectées, après avoir eu une phase de forte croissance au début, se met à décroître dès le début du confinement. Cependant dès que le confinement est terminé, cette dernière se remet à augmenter mais pendant un très court instant, pour finalement atteindre un nouveau pic puis décroît tranquillement vers 0.
- courbe R : Sur cette courbe on n'observe pas grand-chose d'intéressant pour l'interprétation, ou qui viendrait apporter des informations supplémentaires par rapport aux deux courbes précédentes.

III.3 Confinement et Vaccination :

On peut supposer que la maladie est déjà apparue dans le passé et qu'un vaccin est disponible assez rapidement, ainsi le temps de le produire en quantité suffisante ou alors pour adapté l'ancien vaccin à la nouvelle mutation du virus. On peut aussi supposer que le virus est dangereux et donc les autorités veulent étouffer le virus le plus rapidement possible et décident de faire un confinement malgré la présence du vaccin.

Dans les deux sections précédentes on a regardé comment évoluait la maladie avec la présence d'un vaccin à partir d'une date donnée, puis l'impact d'un confinement sur celle-ci, nous allons observer ce qu'il se passe en combinant un confinement et l'utilisation d'un vaccin. Nous allons combiner les deux.

Si on considère ainsi le vecteur $(s(t), i(t), r(t), v(t))^t$. Qui est un vecteur qui dépend du temps, ce vecteur respecte le système différentiel suivant, avec α et β sont des fonctions du temps :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt}(t) = -\beta s(t)i(t) \\ \frac{di}{dt}(t) = \beta s(t)i(t) - \gamma i(t) \\ \frac{dr}{dt}(t) = \gamma i(t) \\ \frac{dv}{dt}(t) = \alpha s(t) \end{array} \right. \text{ avec } \begin{pmatrix} s(0) \\ i(0) \\ t(0) \\ s(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 \\ 0.2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

De plus en faisait un raisonnement similaire sur les intervalles (s'ils existent) où :

- $\beta = 0.4$ et $\alpha = 0$ (pas de vaccin, pas de confinement)
- $\beta = 0.4$ et $\alpha = 0.1$ (présence de vaccin, pas de confinement)
- $\beta = 0.1$ et $\alpha = 0$ (pas de vaccin, présence de confinement)
- $\beta = 0.1$ et $\alpha = 0.1$ (présence de vaccin et de confinement)

Il vient que sur chacun des intervalles, la fonction $F(t, y(t))$ est une fonction de type polynomiale multi-d en y (les coefficients sont constants en se plaçant sur ces intervalles). ainsi elle est localement lipschitzienne d'après le TAF. Ainsi d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz local il existe une unique solution à ce problème. On peut alors écrire le problème avec Euler explicite :

$$\begin{pmatrix} y_1^{n+1} \\ y_2^{n+1} \\ y_3^{n+1} \\ y_4^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^n(1 - \beta \Delta t y_2^n) \\ y_2^n(1 + \Delta t(\beta y_1^n - \gamma)) \\ y_3^n + \Delta t \gamma y_2^n \\ y_4^n + \Delta t \alpha y_1^n \end{pmatrix} \text{ avec } \begin{pmatrix} y_1^0 \\ y_2^0 \\ y_3^0 \\ y_4^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{cases} \alpha = 0 & \text{si } t < 6 \\ \alpha = 0.1 & \text{si } 6 \leq t \\ \alpha = 0.1 & \text{si } t \in [5, 15] \\ \alpha = 0.4 & \text{si } t \notin [5, 15] \end{cases} \quad (11)$$

Nous avons ici tracé les courbes avec un pas de 0.1 jour et nous obtenons :

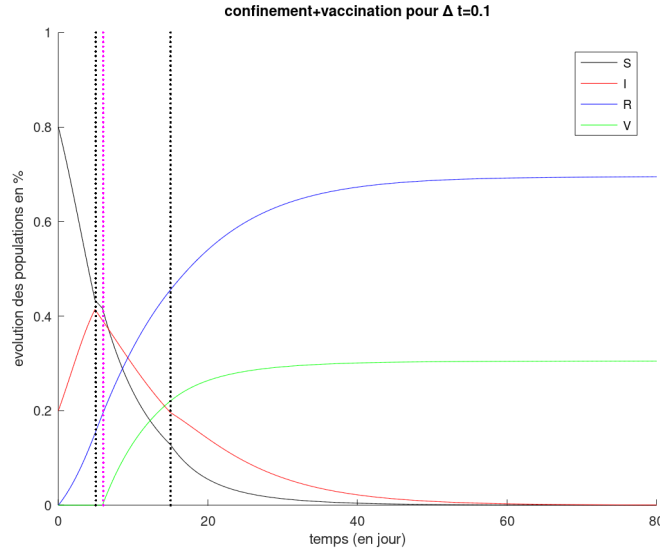


Figure 15: Évolution de la maladie avec un confinement de 10 jour commençant le jour 5 et un vaccin disponible le 6ième jour

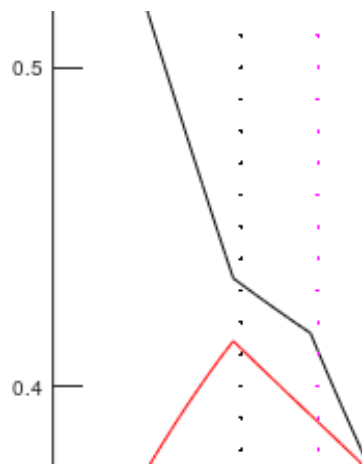


Figure 16: Zoom sur le début du confinement

Commentaires :

Le trait en magenta correspond à la date au le vaccin devient disponible (ie jour 6). L'intervalle entre les traits noirs correspond à la période de confinement

- courbe S : On peut voir sur le graphique précédent, que dès le début du confinement la courbe des personnes saines diminue de façon beaucoup moins importante du aux interactions entre les individus qui sont beaucoup moins importantes. Ensuite dès que la vaccination commence la pente recommence à diminuer fortement mais cela est dû aux faites que les personnes qui sont saines, vont se faire vaccinées et vont entrer dans la catégorie des personnes vaccinées.
- courbe I : la courbes des personnes infectées quant à elle va se mettre à diminuer dès le début du confinement, mais ne va pas être affecté par le début de la vaccination comme on peut le voir sur le zoom que on a fait. Cela s'explique très bien, car pendant le confinement il n'y quasiment aucune interaction sociale ainsi quasiment pas de nouveaux infectées et de plus la vaccination ne concerne pas les personnes infectées. Ainsi pendant le confinement la vaccination n'affecte pas les personnes infectées. Ce que l'on peut remarquer c'est que dès la levée du confinement nous n'avons de rebond sur cette courbe comme nous avions pour le cas où il n'y avait qu'un confinement en effet dès la levée du confinement, la courbes des personnes infectées continue de diminuer.
- courbe V : La courbe des personnes infectées quant à elle suit à peu près la même trajectoire que dans la section **Vaccination**, avec cependant une observation en plus qui est que dans ce modèle nous arrivons à vacciner beaucoup plus de personnes, en effet dans le modèle précédent nous étions en dessous des 20% tandis que ici nous avons largement passé la barre des 20% et cela est due au faite que pendant le confinement, comme il n'y a quasiment pas de nouvelles personnes infectées, on peut vacciner beaucoup plus de personnes, car il y a beaucoup plus de personnes saines qui restent.
- courbe R : cette courbe suit à peu près la même trajectoire que dans les modèles précédents.

IV Nouveau scénario

Étant donné la situation actuelle nous commençons à avoir un petit peu d'expérience avec les épidémies. Nous avons donc décidé de faire notre propre scénario :

- Nous avons à faire à un premier virus, appelons le COVID 1. Ce premier virus se transmet par contact entre les personnes saines et infectées avec un coefficient de transmissibilité de β . Ce COVID 1, parmi les personnes infectées fait un certain nombre de victimes, on introduit ainsi un taux de mortalité ϵ . Mais il y a aussi des personnes qui guérissent et qui entrent dans la catégorie

des personnes rétablit en effet à chaque unité de temps, une proportion γ de personnes infectées, guérissent du virus.

Une personne qui est rétablit, peut certes posséder une certaine immunité pendant un certain temps mais pas toujours ainsi parmi les personnes rétablit, une proportion δ de la population rétablit, retourne dans la population saine à chaque unité de temps, traduisant que ces personnes peuvent rattraper le virus

Ainsi des recherches se mettent en place, et un certain vaccin est créé au bout d'un certain temps. Une fois la création terminée on décide de vacciner une proportion α de la population saine à chaque unité de temps. Cependant le vaccin n'est pas efficace à 100% ainsi parmi les personnes vaccinées une proportion ϕ de personnes retournent dans la population saine traduisant que pour ces personnes le vaccin n'est plus efficace et ainsi ces personnes sont de nouveau vulnérables.

- Après un certain temps t_0 une mutation du COVID 1 arrive et donne naissance au COVID 2, rendant ainsi le vaccin précédent totalement inutile. Ainsi l'efficacité du vaccin précédent tombe à 0%. Ce virus possède ainsi un nouveau coefficient de transmissibilité β' . Une fois de plus ce virus fait certain mort, avec un taux de mortalité, ϵ' . Une fois de plus des recherches se mettent en place pour trouver un nouveau vaccin, pour pouvoir lutter contre ce nouveau virus. Ce nouveau vaccin ne sera pas non plus fiable à 100% et donc une proportion ϕ des personnes vaccinées attrapera le virus, par unité de temps.
- On considérera pour simplifier notre approche qu'au temps t_0 où le nouveau virus arrive, les personnes qui sont infectées, sont infectées par ce nouveau virus. Les personnes qui étaient dans la catégorie des personnes rétablit retourneront toutes dans la catégorie des personnes saines. Ceci traduit une arrivée très brutale du nouveau virus, mais c'est pour simplifier les calculs et le modèle.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{ds}{dt}(t) = s(t) + \Delta t(-\beta s(t)i(t) - \alpha s(t) + \delta r(t) + \phi v(t)) \\ \frac{di}{dt}(t) = i(t) + \Delta t(\beta s(t)i(t) - \gamma i(t) - \epsilon i(t)) \\ \frac{dr}{dt}(t) = r(t) + \Delta t(\gamma i(t) - \delta r(t)) \\ \frac{dv}{dt}(t) = v(t) + \Delta t(\alpha s(t) - \phi v(t)) \\ \frac{dm}{dt}(t) = m(t) + \Delta t(\epsilon i(t)) \end{array} \right. \quad (12)$$

Ce qui donne avec Euler explicite :

$$\begin{pmatrix} y_1^{n+1} \\ y_2^{n+1} \\ y_3^{n+1} \\ y_4^{n+1} \\ y_5^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1^n + \Delta t(-\beta y_1^n y_2^n - \alpha y_1^n + \delta y_3^n + \phi y_4^n) \\ y_2^n + \Delta t(\beta y_1^n y_2^n - \gamma y_2^n - \epsilon y_2^n) \\ y_3^n + \Delta t(\gamma y_2^n - \delta y_3^n) \\ y_4^n + \Delta t(\alpha y_1^n - \phi y_4^n) \\ y_5^n + \Delta t(\epsilon y_2^n) \end{pmatrix} \quad (13)$$

Nous avons ensuite mis en place la résolution de ce problème. Nous avons fait le même genre d'hypothèse que les modèle du TP mais en complexifiant comme expliqué auparavant. Pour la modélisation, nous avons fait varier plusieurs coefficients avec le temps. Il se trouve que nous n'avons pas de connaissance en épidémiologie et donc nous n'avons pas les ordres de grandeur des coefficients pouvant représenter une épidémie. Au contraire, nous avons l'idée de la courbe que nous aimerions obtenir et l'idée était de faire varier les valeurs des coefficients qualitativement en regardant le système différentiel pour ne pas avoir des coefficients qui écrasent les autres et observer deux vagues (correspondant au

virus et son variant) et donc observer deux pics.

Si on règle les coefficients à la va vite on peut avoir un modèle qui converge trop vite avec une tendance qui tend à écraser certaine catégorie de personne. Par exemple, si ϵ est trop grand alors tout le monde meurt et comme on a conservation de la population (on fait l'hypothèse qu'il n'y a pas de naissance), si tout le monde meurt et bien la dynamique devient inintéressante. En effet, les personnes mortes le sont pour toujours donc "sortent" de la dynamique.

On a par ailleurs fait l'hypothèse que les personnes rétablies pour le premier virus deviennent saines pour le second virus dès son apparition et donc que le premier virus n'est plus présent significativement dans la population et laisse place à son variant. Pour les valeurs de ϕ qui caractérise l'efficacité du vaccin, nous avons choisi des valeurs qui ne correspondent pas à la réalité car dans la réalité le processus pour mettre un vaccin sur le marché est long et un vaccin n'est pas mis sur le marché s'il est fiable à 50%. Mais dans notre modèle nous faisons l'hypothèse qu'un vaccin avec 50% est commercialisable car il permet de sauver plus de personnes que s'il n'était pas présent. Le système étant sensible, si on met un ϕ proche de 0 (ie un vaccin efficace) alors tout le monde finit rapidement vacciné, c'est bien dans la vraie vie mais sur notre modèle on voulait une évolution harmonieuse des courbes.

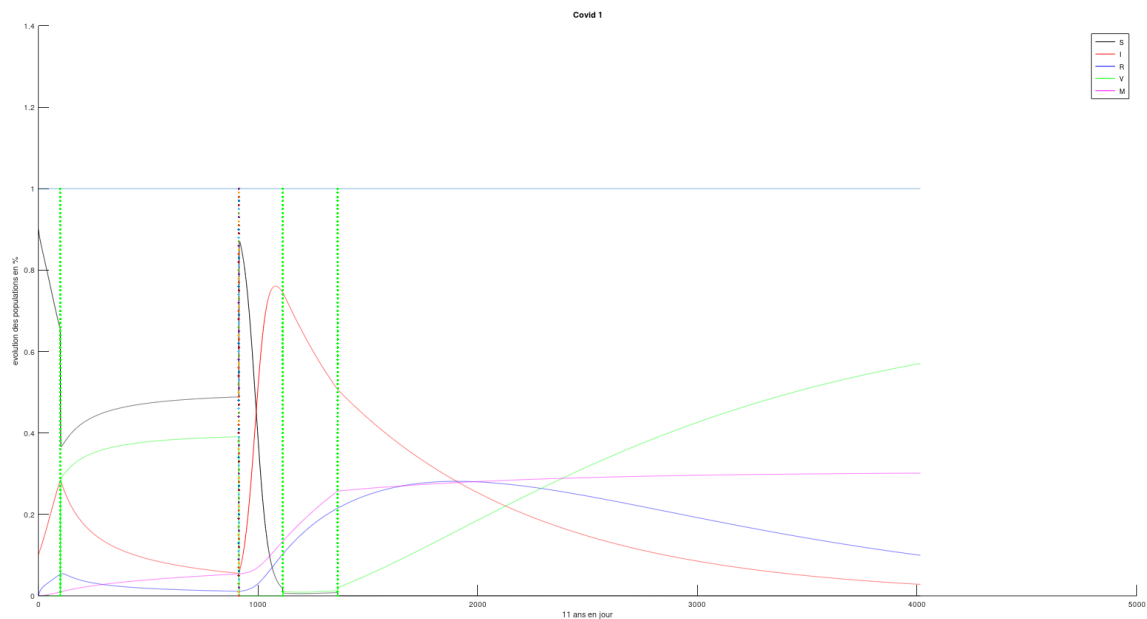


Figure 17: Résultat de la simulation

Explication des droites verticales :

en vertte :

- avant le 1er trait : arrivé du premier vaccin
- entre le 1er et le 2ème trait : on vaccine 40% des personnes et le vaccin n'est pas très fiable car il a été fait à la va vite et donc est fiable à 50%
- entre le 2ème et 3ème trait : arrivé du deuxième vaccin efficace à 50% et l'on vaccine 80% de la population
- après le 3ème trait le vaccin devient efficace à 0.1% et on vaccine massivement à 90%

en multicolor :

- Limite entre le premier virus et son variant, on n'a jamais les deux virus en même temps (c'est une hypothèse grossière mais cela permet de faire des simplifications notamment pour faire passer à t_0 toutes les personnes vaccinées et rétablies en personnes saines (ie qui peuvent à nouveau avoir le virus). Sinon, il se posait la question qu'une personne rétablie ou vaccinée pour un virus en fonction de quelle version du virus elle a n'est pas forcément protégée contre le deuxième.

Interprétation :

Nous noterons : $v_i \forall i \in \{1, \dots, 3\}$ le trait verticale vert et on note par m_1 la séparation entre le virus et son variant.

Avant v_1 , on peut voir que l'épidémie (courbe rouge) se propage rapidement dans la population saine (courbe noire). Des personnes remises ainsi que des morts apparaissent logiquement. Puis partir de v_1 , le premier vaccin est disponible sur le marché, on vaccine qu'une faible partie de la population (40%) et ce vaccin n'est pas très efficace (50%). Mais comme le virus n'est pas très virulent cela suffit donc à faire diminuer l'épidémie. Jusqu'à m_1 on contrôle l'épidémie et on a l'impression que l'on a aussi contrôlé le nombre de mort et fait diminuer le nombre d'infection et le nombre de vacciné et de sain se stabilise vers une asymptote horizontale. Cependant, à partir de m_1 , le variant du virus apparaît et comme l'ancien vaccin n'est pas efficace alors on a qu'une grande partie de la population devient saine par rapport au variant. En m_1 , on a des CI semblable à celle en 0, les proportions entre infection et personnes saines et du même ordre de grandeur. Mais les laboratoires mettent cette fois ci, plus de temps à faire un vaccin et donc le pic d'infection devient cette incontrôlable (+80% de personne en vie sont infectées). Le nombre de mort est multiplié par 4 environs. Même si le vaccin n'est pas encore optimal, une version alpha est mise sur le marché en v_2 pour 80% de la population, il est efficace à 50%. l'épidémie diminue mais pas le nombre de mort. Une version avancée du vaccin, est alors disponible en v_3 et remplace l'ancien vaccin. Cette fois ci le nombre d'infection diminue nettement et tend vers 0. Le nombre de mort quant à lui va diminuer sur cette période. Cela est possible car plus de personne deviennent remises et donc sont résistantes et on cela freine l'épidémie. Finalement on peut voir qu'un tiers de la population est morte.

Après coup, les épidémiologies se disent qu'une alternative était possible et donc ils décident de faire une simulation de la même situation avec les mêmes chiffres, mêmes coefficients mais de cette fois ci de faire un confinement pendant la seconde vague pour réduire la transmissibilité et finalement de limité le nombre d'infection et donc de mort.

Voici ce qu'ils observent :

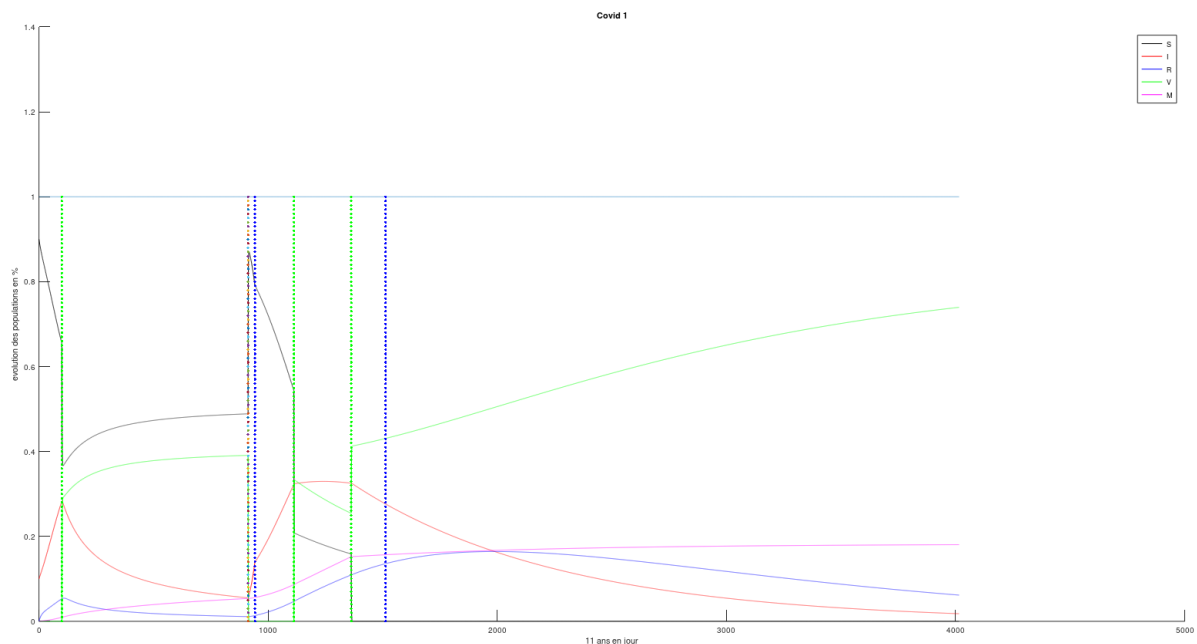


Figure 18: Résultat de la simulation

Explication des droites verticales :

en bleu :

- On a juste ajouté deux traits verticaux en bleu en plus qui correspondent à la période de confinement, sinon on a laissé les mêmes paramètres pour voir l'impact d'un confinement.

Interprétation :

On peut voir que d'ajouté un confinement permet de ne pas avoir un pic d'infection autant important et cela nous permet de le diviser par deux. Finalement, on peut voir qu'on a sauvé 10% de la population.

Remarque :

Ici on peut voir qu'il y a des cassures dans notre évolution temporelle des variances. Dans la réalité on pourrait s'attendre à avoir des fonctions $C^1(R)$ car les choses sont moins brutales, moins instantanées et plutôt polynomiales, exponentielles etc... Un vaccin n'est pas un jour efficace à 70% et le lendemain à 80% de manière brutale.

V Conclusion

Au travers de ce projet nous avons pu mettre en œuvre les deux schémas d'Euler et le très célèbre algorithme de Newton Raphson et appliquer tout ceci dans un cadre concret qui est celui de l'épidémiologie. On a pu voir les limites des différents schémas, avons été confronté à des limites théoriques (pas de temps de trop grands) et des limites pratiques (temps de calculs, mémoire,...). On a pu aussi voir les limites du modèle que nous avons manipulé pour modéliser une épidémie en effet nous avons fait beaucoup d'hypothèses qui nous ont permis de simplifier les équations. Au travers de ce projet nous avons aussi pu faire un parallèle avec un autre champs des mathématiques. En effet les équations différentielles ordinaires sont des systèmes qui sont dynamiques à évolution déterministes dont l'état présent du système est entièrement dicté par les états passés, on peut le voir quand on écrit les schémas numériques pour approcher les solutions. Cela nous a fait penser directement aux chaînes de Markov qui sont aussi des systèmes dynamiques, dont l'évolution temporelle est entièrement dictée par les états passés, cependant cette évolution n'est plus déterministe mais soumise à une notion d'aléatoire. Cette notion d'aléatoire pourrait peut-être permettre de mieux représenter la propagation d'une épidémie. Après tout pourquoi cette dernière aurait une évolution déterministe ? Est-ce une bonne approche pour ce genre de problème ? En tout cas ces questions restent pour nous ouvertes, et peuvent donner lieu à des pistes d'amélioration du modèle.