# Matematyka

Bartosz Świst

2025-02-25

# Rozdział 1

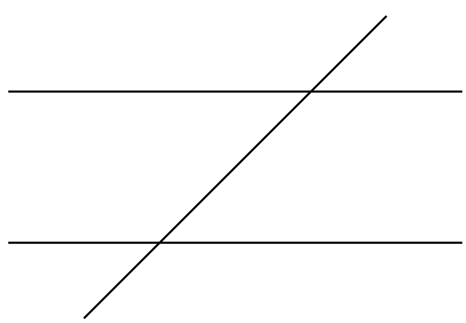
# Geometria

**Definicja.** *Symetralna odcinka to prosta prostopadła do odcinka dzieląca go na dwie równe części.*

**Twierdzenie 1.** *Symetralna odcinka jest zbiorem punków płaszczyzny równoodległych od końców tego odcinka.*

**Definicja.** *Dwusieczna kąta to półprosta o początku w wierzchołku kąta dzieląca go na dwa kąty równe.*

**Twierdzenie 2.** *Dwusieczną kąta wypukłego jest zbiór punktów równoodległych od ramion tego kąta.*



$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_1 \\ \beta_1 &= \delta_1 \\ \alpha_2 &= \gamma_2 \\ \beta_2 &= \delta_2 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{kąty}\\ \text{wierzchołkowe}\end{array} \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 \\ \beta_1 &= \beta_2 \\ \gamma_1 &= \gamma_2 \\ \delta_1 &= \delta_2 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{kąty}\\ \text{odpowiadające}\end{array} \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2 &= \gamma_1 \\ \delta_2 &= \beta_1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{kąty naprzemianległe}\\ \text{wewnętrzne}\end{array} \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \gamma_2 \\ \delta_1 &= \beta_2 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c}\text{kąty naprzemianległe}\\ \text{zewnętrzne}\end{array} \tag{1.4}$$

**Twierdzenie 3** (Twierdzenie Talesa)**.**

## 1.1 Geometria trójkątów

**Twierdzenie 4** (Twierdzenie Pitagorasa)**.** *Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.*

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1.5}$$

**Twierdzenie 5.** *W dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.*

$$\begin{gathered} DE \parallel AB \\ |DE| = \frac{1}{2}|AB| \end{gathered} \tag{1.6}$$

**Twierdzenie 6** (Twierdzenie sinusów)**.** *W dowolnym trójkącie iloraz długości dowolnego boku i sinusa kąta naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \tag{1.7}$$

**Twierdzenie 7** (Twierdzenie cosinusów)**.** *W dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy różnicy sum kwadratów długości dwóch pozostałych boków oraz iloczynu tych długości i cosinusa kąta zawartego między tymi bokami.*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{1.8}$$

**Definicja.** ***Wysokością trójkąta*** *nazywamy odcinek łączący wierzchołek z prostą zawierającą przeciwległy bok.*

**Twierdzenie 8.** *W dowolnym trójkącie wysokości lub ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt to* ***ortocentrum****.*

**Definicja.** ***Środkową trójkąta*** *nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.*

**Twierdzenie 9.** *W dowolnym trójkącie jego środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 1:2. Ten punkt to* ***środek ciężkości trójkąta****.*

**Twierdzenie 10.** *W dowolnym trójkącie dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok na odcinki, których długość jest proporcjonalna do długości pozostałych boków.*

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BD|} \tag{1.9}$$

**Twierdzenie 11.** *Środek okręgu* ***opisanego*** *na danym trójkącie jest punktem przecięcia* ***symetralnych*** *boków trójkąta.*

**Twierdzenie 12.** *Środek okręgu* ***wpisanego*** *w dany trójkąt jest punktem przecięcia* ***dwusiecznych*** *kątów trójkąta.*

### 1.1.1 Wzory na pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2}ah \tag{1.10a}$$

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \tag{1.10b}$$

$$P = \frac{abc}{4R} \tag{1.10c}$$

$$P = \frac{1}{2}Lr \tag{1.10d}$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{gdzie:} \quad p = \frac{a+b+c}{2} \tag{1.10e}$$

## 1.2 Geometria okręgów

**Twierdzenie 13.** *Jeżeli przez punkt $P$, którego odległość od środka danego okręgu jest większa niż promień, poprowadzimy styczną do okręgu w punkcie $A$ i sieczną przecinającą okrąg w punktach $B$ i $C$, to:*

$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC| \tag{1.11a}$$

**Twierdzenie 14.** *Jeżeli dwie proste przetną okrąg odpowiednio w punktach $A$ i $B$ oraz $C$ i $D$, a także przecinają się w punkcie $P$, którego odległość od środka danego okręgu jest większa niż promień, to:*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \tag{1.11b}$$

**Twierdzenie 15.** *Jeżeli cięciwy $AB$ i $CD$ okręgu przecinają się w punkcie $P$, to:*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \tag{1.11c}$$

## 1.3 Geometria czworokątów

**Twierdzenie 16.** *Środek okręgu* ***opisanego*** *na czworokącie jest punktem przecięcia się jego symetralnych.*

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ \tag{1.12}$$

**Twierdzenie 17.** *Środek okręgu* ***wpisanego*** *w czworokąt jest punktem przecięcia się dwusiecznych jego kątów.*

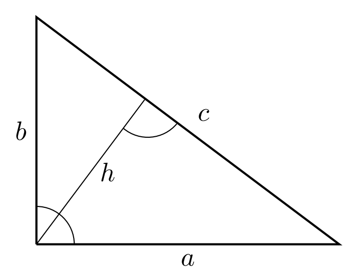
$$\left.\begin{aligned} |AD| + |BC| = w + x + y + z \\ |AB| + |CD| = w + x + y + z \end{aligned}\right\} \Rightarrow |AD| + |BC| = |AB| + |CD| \tag{1.13}$$

### 1.3.1 Wzór na pole dla dowolnego czworokąta

$$P = \frac{1}{2} ef \sin\gamma \tag{1.14}$$

## 1.4 Szczególne figury geometryczne

### 1.4.1 Trójkąt prostokątny

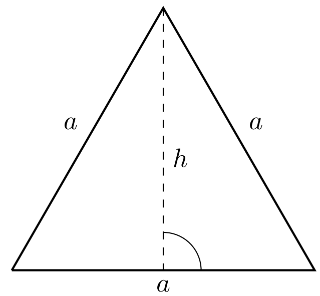



$$h = \sqrt{c_1 \cdot c_2} \tag{1.15a}$$

$$s = \frac{1}{2} c \tag{1.15b}$$

$$r = \frac{a + b - c}{2} \tag{1.15c}$$

### 1.4.2 Trójkąt równoboczny



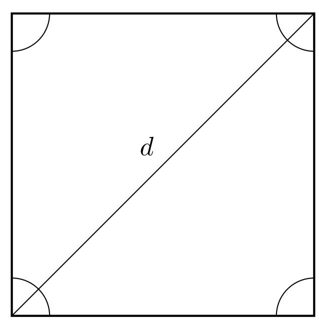

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tag{1.16a}$$

$$s = h \tag{1.16b}$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} \tag{1.16c}$$

$$r + R = h \tag{1.16d}$$

### 1.4.3 Kwadrat

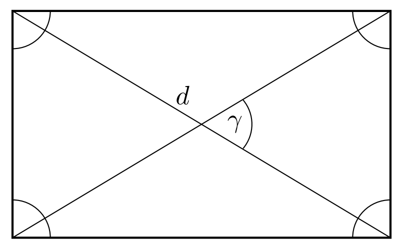



$$P = a^2 = \frac{d^2}{2} \tag{1.17a}$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \tag{1.17b}$$

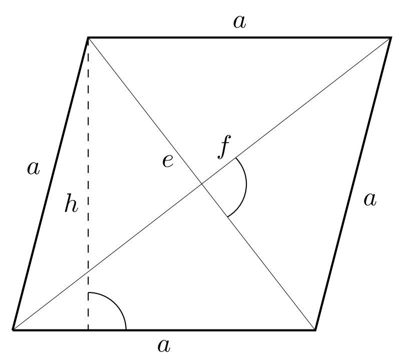
$$r = \frac{1}{2}a \tag{1.17c}$$

### 1.4.4 Prostokąt



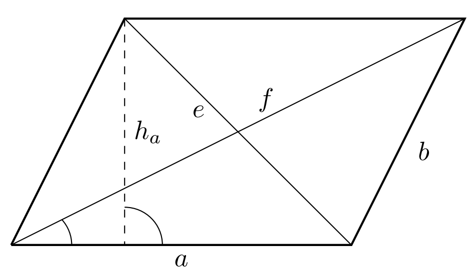

$$P = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \gamma \tag{1.18}$$

### 1.4.5 Romb



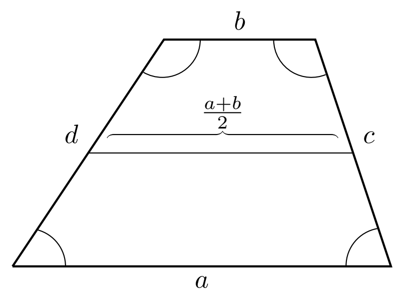

$$P = ah = a^2 \sin \alpha = \frac{ef}{2} \tag{1.19}$$

### 1.4.6 Równoległobok



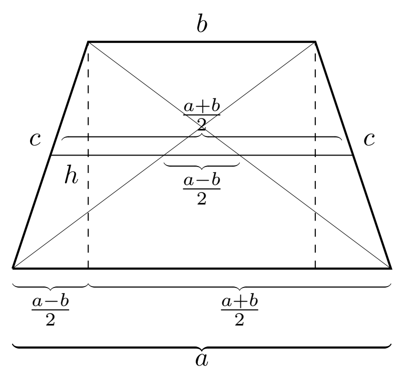

$$P = ah_a = ab \sin \alpha \tag{1.20}$$

### 1.4.7 Trapez

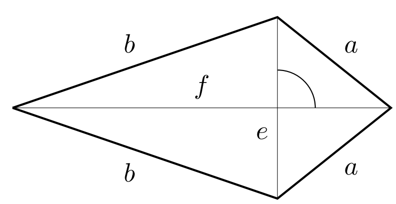



$$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2} \tag{1.21}$$

### 1.4.8 Trapez równoramienny

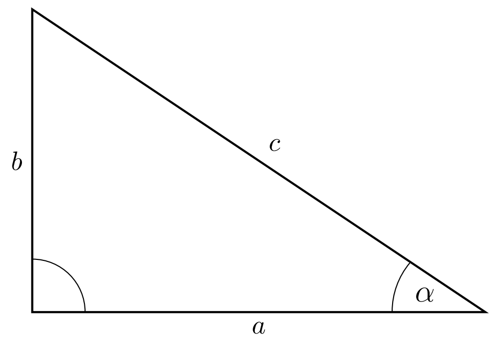



### 1.4.9 Deltoid



# Rozdział 2

# Trygonometria




$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$
$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b} \tag{2.1}$$

| | $0°$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\operatorname{tg}\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | - |
| $\operatorname{ctg}\alpha$ | - | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

## 2.1 Zależności trygonometryczne

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos\alpha \\ \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin\alpha \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\ \operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{2.4a}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \tag{2.4b}$$

## 2.2 Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta