

Matematyka

Bartosz Świst

2025-02-25

1 Zależności w trójkątach

Twierdzenie 1.1. *Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.*

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1.1)$$

Twierdzenie 1.2. *W dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.*

$$\begin{aligned} DE &\parallel AB \\ |DE| &= \frac{1}{2}|AB| \end{aligned} \quad (1.2)$$

Twierdzenie 1.3. *W dowolnym trójkącie iloraz długości dowolnego boku i sinus kąta naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.*

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R \quad (1.3)$$

Twierdzenie 1.4. *W dowolnym trójkącie kwadrat boku jest równy różnicy sum kwadratów dwóch pozostałych długości boków oraz iloczynu tych długości i cosinusa kąta zawartego między tymi bokami.*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad (1.4)$$

Definicja. **Wysokością trójkąta** nazywamy odcinek łączący wierzchołek z prostą zawierającą przeciwległy bok.

Twierdzenie 1.5. *W dowolnym trójkącie wysokości lub ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt to **ortocentrum**.*

Definicja. **Środkową trójkąta** nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.

Twierdzenie 1.6. *W dowolnym trójkącie jego środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 1:2. Ten punkt to **środek ciężkości trójkąta**.*

1.1 Wzory na pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2}ah \quad (1.5)$$

$$P = \frac{1}{2}ab \sin \gamma \quad (1.6)$$

$$P = \frac{abc}{4R} \quad (1.7)$$

$$P = \frac{1}{2}Lr \quad (1.8)$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{gdzie: } p = \frac{a+b+c}{2} \quad (1.9)$$

2 Zależności związane z okręgami

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli przez punkt P , którego odległość od środka danego okręgu jest większa niż promień, poprowadzimy styczną do okręgu w punkcie A i sieczną przecinającą okrąg w punktach B i C , to:*

$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC| \quad (2.1)$$

Twierdzenie 2.2. *Jeżeli dwie proste przetną okrąg odpowiednio w punktach A i B oraz C i D , a także przecinają się w punkcie P , którego odległość od środka danego okręgu jest większa niż promień, to:*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \quad (2.2)$$

Twierdzenie 2.3. *Jeżeli cięciwy AB i CD okręgu przecinają się w punkcie P , to:*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \quad (2.3)$$

Twierdzenie 2.4. *W dowolnym trójkącie dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok na odcinki, których długość jest proporcjonalna do długości pozostałych boków.*

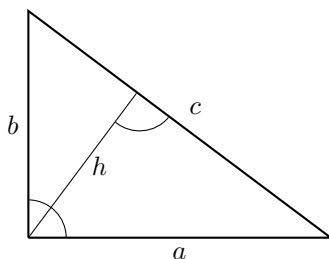
$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BD|} \quad (2.4)$$

Twierdzenie 2.5. *Środek okręgu **opisanego** na danym trójkącie jest punktem przecięcia **symetralnych** boków trójkąta.*

Twierdzenie 2.6. *Środek okręgu **wpisanego** w dany trójkąt jest punktem przecięcia **dwusiecznych** kątów trójkąta.*

3 Szczególne trójkąty

3.1 Trójkąt prostokątny

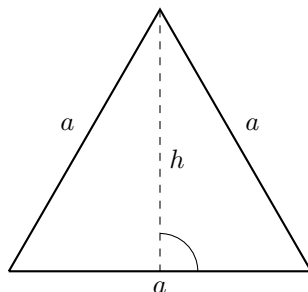


$$h = \sqrt{c_1 \cdot c_2} \quad (3.1)$$

$$s = \frac{1}{2}c \quad (3.2)$$

$$r = \frac{a + b - c}{2} \quad (3.3)$$

3.2 Trójkąt równoboczny



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad (3.4)$$

$$s = h \quad (3.5)$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} \quad (3.6)$$

$$r + R = h \quad (3.7)$$

4 Zależności w czworokątach

Twierdzenie 4.1. Środek okręgu *opisanego* na czworokącie jest punktem przecięcia się jego symetralnych.

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ \quad (4.1)$$

Twierdzenie 4.2. Środek okręgu *wpisanego* w czworokąt jest punktem przecięcia się dwusiecznych jego kątów.

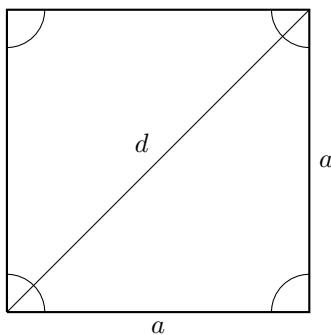
$$\left. \begin{array}{l} |AD| + |BC| = w + x + y + z \\ |AB| + |CD| = w + x + y + z \end{array} \right\} \Rightarrow |AD| + |BC| = |AB| + |CD| \quad (4.2)$$

4.1 Wzór na pole dla dowolnego czworokąta

$$P = \frac{1}{2}ef \sin \gamma \quad (4.3)$$

5 Szczególne czworokąty

5.1 Kwadrat

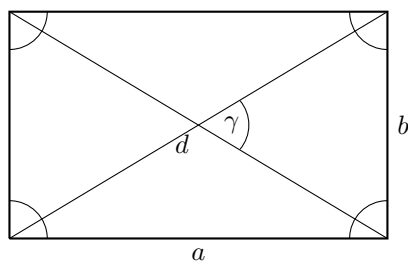


$$P = a^2 = \frac{d^2}{2} \quad (5.1)$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \quad (5.2)$$

$$r = \frac{1}{2}a \quad (5.3)$$

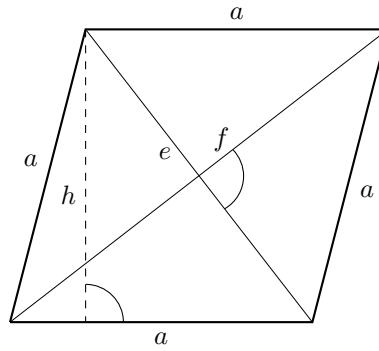
5.2 Prostokąt



$$P = ab \quad (5.4)$$

$$P = \frac{1}{2}d^2 \sin \gamma \quad (5.5)$$

5.3 Romb

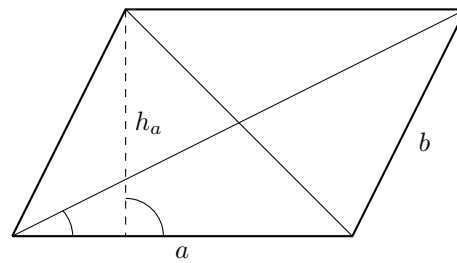


$$P = ah \quad (5.6)$$

$$P = \frac{ef}{2} \quad (5.7)$$

$$P = a^2 \sin \alpha \quad (5.8)$$

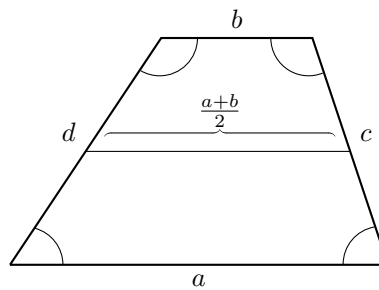
5.4 Równoległobok



$$P = ah_a = bh_b \quad (5.9)$$

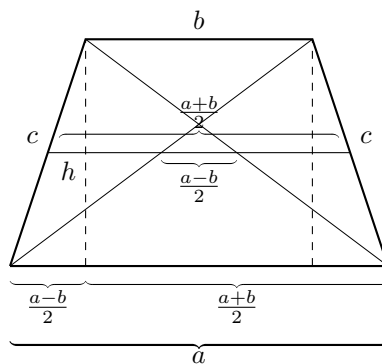
$$P = ab \sin \alpha \quad (5.10)$$

5.5 Trapez



$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2} \quad (5.11)$$

5.5.1 Trapez równoramienny



5.6 Deltoid

