Matematyka

Bartosz Świst

2025-02-25

Rozdział 1

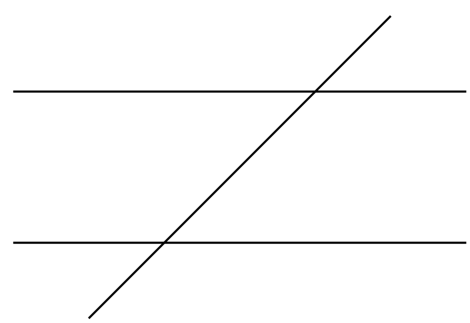
Geometria

Definicja. *Symetralna odcinka to prosta prostopadła do odcinka dzieląca go na dwie równe części.*

Twierdzenie 1.1. *Symetralna odcinka jest zbiorem punków płaszczyzny równoodległych od końców tego odcinka.*

Definicja. *Dwusieczna kąta to półprosta o początku w wierzchołku kąta dzieląca go na dwa kąty równe.*

Twierdzenie 1.2. *Dwusieczną kąta wypukłego jest zbiór punktów równoodległych od ramion tego kąta.*



$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \gamma_1\\ \beta_1 &= \delta_1\\ \alpha_2 &= \gamma_2\\ \beta_2 &= \delta_2\end{aligned}\right\}\begin{array}{c}\text{kąty}\\ \text{wierzchołkowe}\end{array} \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_2\\ \beta_1 &= \beta_2\\ \gamma_1 &= \gamma_2\\ \delta_1 &= \delta_2\end{aligned}\right\}\begin{array}{c}\text{kąty}\\ \text{odpowiadające}\end{array} \tag{1.2}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_2 &= \gamma_1\\ \delta_2 &= \beta_1\end{aligned}\right\}\begin{array}{c}\text{kąty naprzemianległe}\\ \text{wewnętrzne}\end{array} \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \gamma_2\\ \delta_1 &= \beta_2\end{aligned}\right\}\begin{array}{c}\text{kąty naprzemianległe}\\ \text{zewnętrzne}\end{array} \tag{1.4}$$

Twierdzenie 1.3 (Twierdzenie Talesa)**.**

1.1 Geometria trójkątów

Twierdzenie 1.4 (Twierdzenie Pitagorasa)**.** *Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.*

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1.5}$$

Twierdzenie 1.5. *W dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.*

$$\begin{aligned}DE &\parallel AB\\ |DE| &= \frac{1}{2}|AB|\end{aligned} \tag{1.6}$$

Twierdzenie 1.6 (Twierdzenie sinusów)**.** *W dowolnym trójkącie iloraz długości dowolnego boku i sinusa kąta naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \tag{1.7}$$

Twierdzenie 1.7 (Twierdzenie cosinusów)**.** *W dowolnym trójkącie kwadrat długości dowolnego boku jest równy różnicy sum kwadratów długości dwóch pozostałych boków oraz iloczynu tych długości i cosinusa kąta zawartego między tymi bokami.*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{1.8}$$

Definicja. ***Wysokością trójkąta*** *nazywamy odcinek łączący wierzchołek z prostą zawierającą przeciwległy bok.*

Twierdzenie 1.8. *W dowolnym trójkącie wysokości lub ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt to* ***ortocentrum****.*

Definicja. ***Środkową trójkąta*** *nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.*

Twierdzenie 1.9. *W dowolnym trójkącie jego środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 1:2. Ten punkt to* ***środek ciężkości trójkąta****.*

Twierdzenie 1.10. *W dowolnym trójkącie dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok na odcinki, których długość jest proporcjonalna do długości pozostałych boków.*

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BD|} \tag{1.9}$$

Twierdzenie 1.11. *Środek okręgu* ***opisanego*** *na danym trójkącie jest punktem przecięcia* ***symetralnych*** *boków trójkąta.*

Twierdzenie 1.12. *Środek okręgu* ***wpisanego*** *w dany trójkąt jest punktem przecięcia* ***dwusiecznych*** *kątów trójkąta.*

1.1.1 Wzory na pole trójkąta

$$P = \frac{1}{2}ah \tag{1.10a}$$

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \tag{1.10b}$$

$$P = \frac{abc}{4R} \tag{1.10c}$$

$$P = \frac{1}{2}Lr \tag{1.10d}$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{gdzie:} \quad p = \frac{a+b+c}{2} \tag{1.10e}$$

1.2 Geometria okręgów

Twierdzenie 1.13. *Jeżeli przez punkt P, którego odległość od środka danego okręgu jest większa niż promień, poprowadzimy styczną do okręgu w punkcie A i sieczną przecinającą okrąg w punktach B i C, to:*

$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC| \tag{1.11a}$$

Twierdzenie 1.14. *Jeżeli dwie proste przetną okrąg odpowiednio w punktach A i B oraz C i D, a także przecinają się w punkcie P, którego odległość od środka danego okręgu jest większa niż promień, to:*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \tag{1.11b}$$

Twierdzenie 1.15. *Jeżeli cięciwy AB i CD okręgu przecinają się w punkcie P, to:*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \tag{1.11c}$$

1.3 Geometria czworokątów

Twierdzenie 1.16. *Środek okręgu* ***opisanego*** *na czworokącie jest punktem przecięcia się jego symetralnych.*

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ \tag{1.12}$$

Twierdzenie 1.17. *Środek okręgu* ***wpisanego*** *w czworokąt jest punktem przecięcia się dwusiecznych jego kątów.*

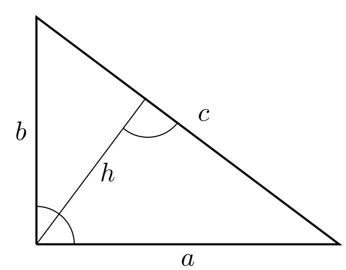
$$\left.\begin{aligned} |AD| + |BC| = w + x + y + z \\ |AB| + |CD| = w + x + y + z \end{aligned}\right\} \Rightarrow |AD| + |BC| = |AB| + |CD| \tag{1.13}$$

1.3.1 Wzór na pole dla dowolnego czworokąta

$$P = \frac{1}{2} ef \sin\gamma \tag{1.14}$$

1.4 Szczególne figury geometryczne

1.4.1 Trójkąt prostokątny

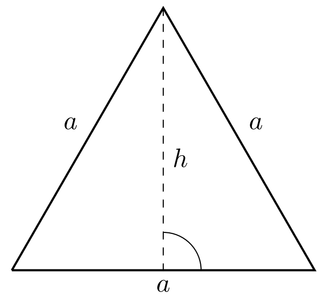


$$h = \sqrt{c_1 \cdot c_2} \tag{1.15a}$$

$$s = \frac{1}{2} c \tag{1.15b}$$

$$r = \frac{a + b - c}{2} \tag{1.15c}$$

1.4.2 Trójkąt równoboczny



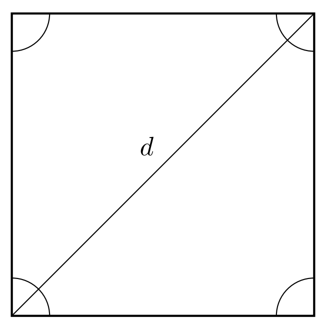
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tag{1.16a}$$

$$s = h \tag{1.16b}$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} \tag{1.16c}$$

$$r + R = h \tag{1.16d}$$

1.4.3 Kwadrat

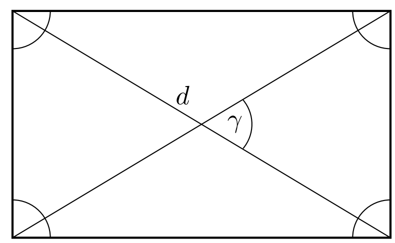


$$P = a^2 = \frac{d^2}{2} \tag{1.17a}$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \tag{1.17b}$$

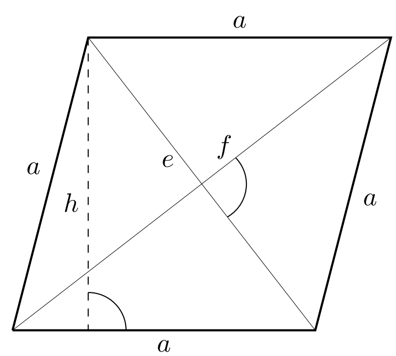
$$r = \frac{1}{2}a \tag{1.17c}$$

1.4.4 Prostokąt



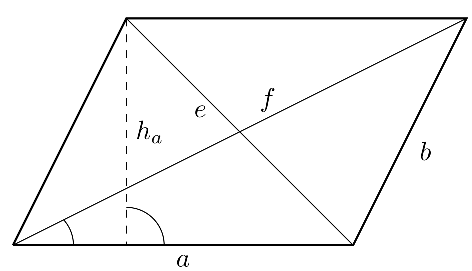
$$P = ab = \frac{1}{2}d^2 \sin\gamma \tag{1.18}$$

1.4.5 Romb



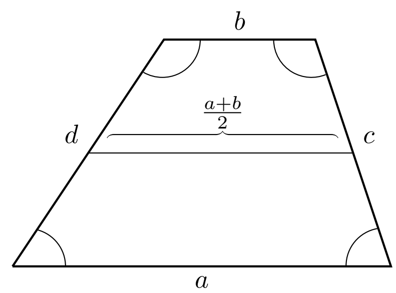
$$P = ah = a^2 \sin\alpha = \frac{ef}{2} \tag{1.19}$$

1.4.6 Równoległobok



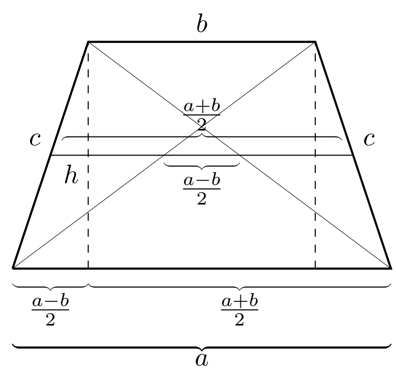
$$P = ah_a = ab\sin\alpha \tag{1.20}$$

1.4.7 Trapez

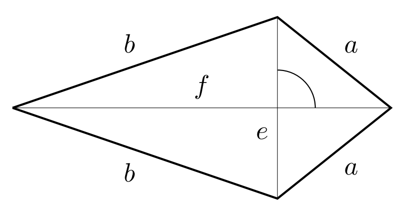


$$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2} \tag{1.21}$$

1.4.8 Trapez równoramienny

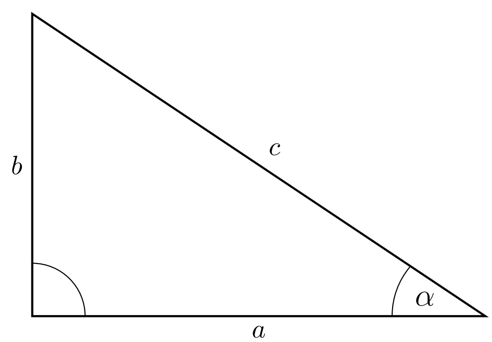


1.4.9 Deltoid



Rozdział 2

Trygonometria



$$\sin\alpha = \frac{b}{c} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$
$$\cos\alpha = \frac{a}{c} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b} \tag{2.1}$$

	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-
$\operatorname{ctg}\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

2.1 Zależności trygonometryczne

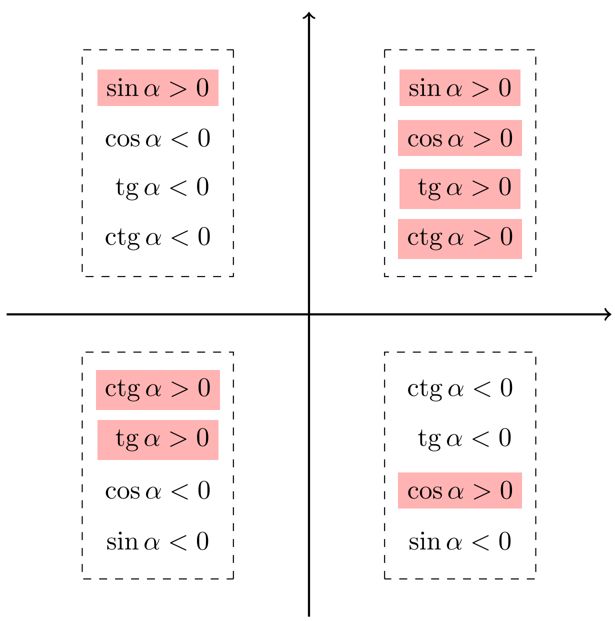
$$
\begin{aligned}
\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos\alpha \\
\cos(90^\circ - \alpha) &= \sin\alpha \\
\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha \\
\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{tg}\alpha
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \\
\operatorname{ctg}\alpha &= \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{2.4a}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \tag{2.4b}$$

2.2 Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta



Rozdział 3

Analiza matematyczna

3.1 Granica funkcji w punkcie

3.1.1 Działania na granicach

$$\lim_{x\to x_0}[c\cdot f(x)] = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x)$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$$

3.1.2 Granica funkcji wielomianowej

$$\lim_{x\to a} W(x) = W(a)$$

3.1.3 Granice jednostronne

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = g$$

3.1.4 Granice niewłaściwe

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$$

3.2 Ciągłość funkcji

Twierdzenie 3.1. *Funkcje wielomianowe, wymierne, potęgowe, wykładnicze, logarytmiczne i trygonometryczne oraz ich sumy, różnice, iloczyny i ilorazy są ciągłe w każdym punkcie, w którym są określone.*

Twierdzenie 3.2 (Twierdzenie Darboux)**.** *Jeśli funkcja f jest ciągła w przedziale domkniętym $\langle a, b\rangle$ oraz $f(a)\cdot f(b) < 0$, to istnieje taka liczba c, $c \in \langle a, b\rangle$, dla której $f(c) = 0$.*

3.3 Pochodna funkcji

3.3.1 Pochodna funkcji w punkcie

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$$

3.3.2 Wybrane wzory pochodnych

$$(c)' = 0$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

3.3.3 Działania na pochodnych

$$[c\cdot f(x)]' = c\cdot f'(x)$$

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

3.3.4 Pochodne funkcji złożonych

$$(g\circ f)(x) = g(f(x))$$

$$(g\circ f)'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

3.3.5 Pochodna a monotoniczność funkcji

Twierdzenie 3.3. *Niech funkcja f ma pochodną w przedziale (a, b). Jeżeli dla każdego $x \in (a, b)$:*

- $f'(x) > 0$, *to f jest rosnąca w (a, b),*
- $f'(x) < 0$, *to f jest malejąca w (a, b),*
- $f'(x) = 0$, *to f jest stała w (a, b)*

Twierdzenie 3.4. *Jeżeli funkcja f jest ciągła w przedziale $\langle a, b\rangle$ oraz rosnąca lub malejąca w przedziale (a, b), to jest też rosnąca lub malejąca w przedziale $\langle a, b\rangle$.*

3.4 Styczna do wykresu funkcji

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$
$$\operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$$

dla punktu $P(x_0, f(x_0))$