Matematyka

Bartosz Świst

2025-02-25

1 Zależności w trójkątach

Twierdzenie 1.1. *Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości przyprostokątnych.*

$$c^2 = a^2 + b^2 \tag{1.1}$$

Twierdzenie 1.2. *W dowolnym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do boku trzeciego i jego długość jest równa połowie długości boku trzeciego.*

$$\begin{gathered} DE \parallel AB \\ |DE| = \frac{1}{2}|AB| \end{gathered} \tag{1.2}$$

Twierdzenie 1.3. *W dowolnym trójkącie iloraz długości dowolnego boku i sinusa kąta naprzeciw tego boku jest stały i równy długości średnicy okręgu opisanego na tym trójkącie.*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R \tag{1.3}$$

Twierdzenie 1.4. *W dowolnym trójkącie kwadrat boku jest równy różnicy sum kwadratów dwóch pozostałych długości boków oraz iloczynu tych długości i cosinusa kąta zawartego między tymi bokami.*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{1.4}$$

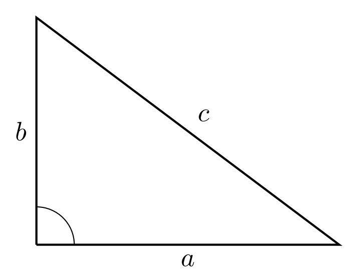
Definicja. ***Wysokością trójkąta*** *nazywamy odcinek łączący wierzchołek z prostą zawierającą przeciwległy bok.*

Twierdzenie 1.5. *W dowolnym trójkącie wysokości lub ich przedłużenia przecinają się w jednym punkcie. Ten punkt to* ***ortocentrum****.*

Definicja. ***Środkową trójkąta*** *nazywamy odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku.*

Twierdzenie 1.6. *W dowolnym trójkącie jego środkowe przecinają sie w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 1:2. Ten punkt to* ***środek ciężkości trójkąta****.*

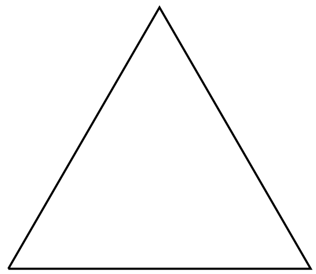
1.1 Trójkąt prostokątny



$$h = \sqrt{c_1 \cdot c_2} \tag{1.5}$$

$$s = \frac{1}{2}c \tag{1.6}$$

1.2 Trójkąt równoboczny



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tag{1.7}$$

$$s = h \tag{1.8}$$

2 Pole trójkątów

$$P = \frac{1}{2}ah \tag{2.1}$$

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \tag{2.2}$$

$$P = \frac{abc}{4R} \tag{2.3}$$

$$P = \frac{1}{2}Lr \tag{2.4}$$

$$P = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{gdzie:} \quad p = \frac{a+b+c}{2} \tag{2.5}$$

3 Zależności związane z okręgami

Twierdzenie 3.1. *Jeżeli przez punkt P, którego odległość od środka danego okręgu jest większa niż promień, poprowadzimy styczną do okręgu w punkcie A i sieczną przecinającą okrąg w punktach B i C, to:*

$$|PA|^2 = |PB| \cdot |PC| \tag{3.1}$$

Twierdzenie 3.2. *Jeżeli dwie proste przetną okrąg odpowiednio w punktach A i B oraz C i D, a także przecinają się w punkcie P, którego odległość od środka danego okręgu jest większa niż promień, to:*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \tag{3.2}$$

Twierdzenie 3.3. *Jeżeli cięciwy AB i CD okręgu przecinają się w punkcie P, to:*

$$|PA| \cdot |PB| = |PC| \cdot |PD| \tag{3.3}$$

Twierdzenie 3.4. *W dowolnym trójkącie dwusieczna kąta dzieli przeciwległy bok na odcinki, których długość jest proporcjonalna do długości pozostałych boków.*

$$\frac{|AC|}{|CD|} = \frac{|AB|}{|BD|} \tag{3.4}$$

Twierdzenie 3.5. *Środek okręgu **opisanego** na danym trójkącie jest punktem przecięcia **symetralnych** boków trójkąta.*

Twierdzenie 3.6. *Środek okręgu **wpisanego** w dany trójkąt jest punktem przecięcia **dwusiecznych** kątów trójkąta.*

$$\begin{aligned} &r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6} \qquad\qquad r = \frac{a+b-c}{2} \\ &r + R = h \end{aligned} \tag{3.5}$$

4 Zależności w czworokątach

Twierdzenie 4.1. *Środek okręgu **opisanego** na czworokącie jest punktem przecięcia się jego symetralnych.*

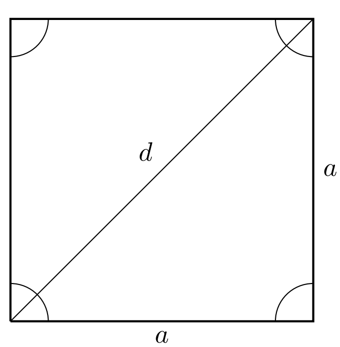
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ \tag{4.1}$$

Twierdzenie 4.2. *Środek okręgu **wpisanego** w czworokąt jest punktem przecięcia się dwusiecznych jego kątów.*

$$\left.\begin{aligned} |AD| + |BC| = w + x + y + z \\ |AB| + |CD| = w + x + y + z \end{aligned}\right\} \Rightarrow |AD| + |BC| = |AB| + |CD| \tag{4.2}$$

5 Pole czworokątów

5.1 Kwadrat

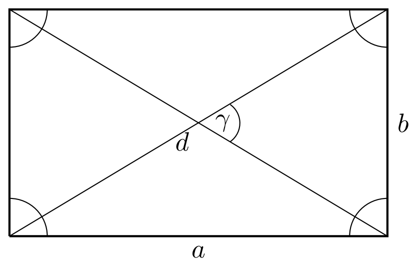


$$P = a^2 = \frac{d^2}{2} \tag{5.1}$$

$$R = \frac{1}{2}d = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \tag{5.2}$$

$$r = \frac{1}{2}a \tag{5.3}$$

5.2 Prostokąt



$$P = ab \tag{5.4}$$

$$P = \frac{1}{2}d^2 \sin\gamma \tag{5.5}$$

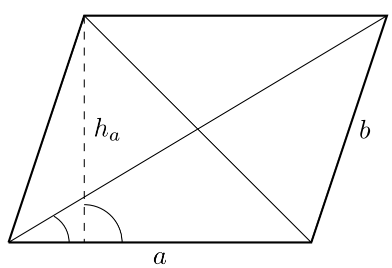
5.3 Romb

$$P = ah \tag{5.6}$$

$$P = \frac{ef}{2} \tag{5.7}$$

$$P = a^2 \sin\alpha \tag{5.8}$$

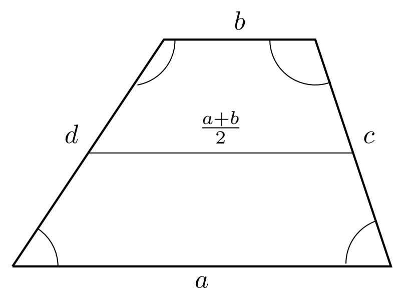
5.4 Równoległobok



$$P = ah_a = bh_b \tag{5.9}$$

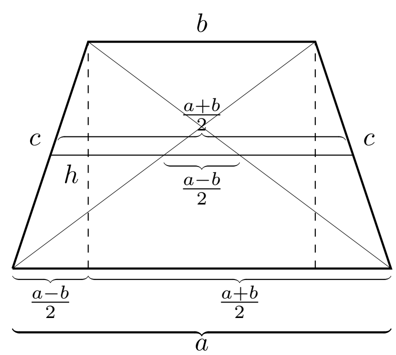
$$P = ab\sin\alpha \tag{5.10}$$

5.5 Trapez



$$P = \frac{(a+b)\cdot h}{2} \tag{5.11}$$

5.5.1 Trapez równoramienny



5.6 Dowolny czworokąt

$$P = \frac{1}{2} ef \sin\gamma \tag{5.12}$$