Bài 1

Với mỗi số nguyên dương n, xét

$$P_n(x) = x^{3n} - 3 \cdot 4^{n-1} x^n - 2^{3n-3}.$$

(a) Chứng minh $P_n(x)$ có đúng một nghiệm thực dương, ký hiệu a_n.
(b) Đặt

$$b_n = \frac{2 - a_n}{n}, \qquad c_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

Chứng minh dãy (c_n) có giới hạn hữu hạn.

Lời giải

(a) $P_n(x)$ có đúng một nghiệm dương

Đặt

$$t = \left(\frac{x}{2}\right)^n \qquad (x > 0 \iff t > 0).$$

Khi đó $x^n = 2^n t$ và $x^{3n} = 2^{3n} t^3$. Thế vào $P_n(x)$ ta được:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= 2^{3n} t^3 - 3 \cdot 4^{n-1} \cdot 2^n t - 2^{3n-3} \\ &= 2^{3n} t^3 - 3 \cdot 2^{3n-2} t - 2^{3n-3} \\ &= 2^{3n-3}(8t^3 - 6t - 1). \end{aligned}$$

Đặt

$$Q(t) = 8t^3 - 6t - 1.$$

Khi đó

$$P_n(x) = 0 \iff Q\left(\left(\frac{x}{2}\right)^n\right) = 0.$$

Do ánh xạ $x \mapsto \left(\frac{x}{2}\right)^n$ là song ánh tăng trên $(0, \infty)$, nên số nghiệm dương của P_n đúng bằng số nghiệm dương của Q.

Xét đạo hàm:

$$Q'(t) = 24t^2 - 6 = 6(4t^2 - 1).$$

Suy ra:

$$Q'(t) < 0 \text{ khi } 0 < t < \tfrac{1}{2}, \qquad Q'(t) > 0 \text{ khi } t > \tfrac{1}{2}.$$

Vậy Q giảm trên $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ và tăng trên $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

Tính:

$$Q\left(\frac{1}{2}\right) = -3 < 0, \qquad Q(1) = 1 > 0.$$

Suy ra Q có đúng một nghiệm dương $t_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Do đó P_n có đúng một nghiệm dương

$$a_n = 2 t_0^{1/n}.$$

(b) Dãy (c_n) có giới hạn hữu hạn

Từ trên:

$$a_n = 2t_0^{1/n}, \qquad 0 < t_0 < 1.$$

Suy ra

$$b_n = \frac{2 - 2t_0^{1/n}}{n} = \frac{2(1 - t_0^{1/n})}{n} > 0,$$

nên (c_n) tăng.

Đặt $t_0 = e^{-s}$ với $s > 0$. Khi đó

$$b_n = \frac{2(1 - e^{-s/n})}{n}.$$

Từ bất đẳng thức $e^x \geq 1 + x$ suy ra

$$1 - e^{-s/n} \leq \frac{s}{n}.$$

Do đó

$$0 < b_n \leq \frac{2s}{n^2}.$$

Vì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên theo so sánh

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ hội tụ.}$$

Do $c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ là tổng từng phần của chuỗi hội tụ nên c_n có giới hạn hữu hạn. Hơn nữa

$$c_n \leq 2s \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{3} s.$$

Vậy dãy (c_n) tăng và bị chặn trên, do đó hội tụ.

Bài 2

Câu 2 (5 điểm). Để khám phá không gian, các nhà khoa học thường phải quan sát những vật thể xa xôi như sao chổi, tiểu hành tinh và các hiện tượng thiên văn khác. Nhằm mục đích đó, các nhà khoa học thiết kế và phóng các vệ tinh quan sát lên quỹ đạo quanh Trái Đất. Hầu hết các vệ tinh không chuyển động theo vòng tròn hoàn hảo mà có quỹ đạo là một đường elip, với Trái Đất nằm ở một trong hai tiêu điểm của elip.

Trong không gian với hệ trục tọa độ vuông góc $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục đều bằng 6400 km), giả sử vệ tinh chuyển động trong mặt phẳng (Oxy) theo quỹ đạo

$$x^2 + 3y^2 = 17.$$

Vệ tinh cần quan sát một vật thể chuyển động trong không gian; khi vật thể ở vị trí

$$A\left(2, \frac{16}{\sqrt{3}}, 8\right)$$

thì việc quan sát là tốt nhất. Hãy xác định tọa độ điểm C trên quỹ đạo elip sao cho khoảng cách AC là nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi $C(x, y, z)$ là vị trí của vệ tinh. Vì vệ tinh chuyển động trong mặt phẳng (Oxy) nên

$$z = 0, \qquad x^2 + 3y^2 = 17.$$

Khoảng cách bình phương:

$$AC^2 = (x-2)^2 + \left(y - \frac{16}{\sqrt{3}}\right)^2 + 8^2 = F(x, y) + 64,$$

trong đó

$$F(x, y) = (x-2)^2 + \left(y - \frac{16}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

Do 64 là hằng số, việc **tối thiểu hóa** AC tương đương với tối thiểu hóa $F(x, y)$ với ràng buộc

$$g(x, y) = x^2 + 3y^2 - 17 = 0.$$

Ta có

$$\nabla F = \big(2(x-2),\, 2(y - \tfrac{16}{\sqrt{3}})\big), \qquad \nabla g = (2x,\, 6y).$$

Điều kiện Lagrange:

$$\nabla F = \lambda \nabla g \iff \begin{cases} x - 2 = \lambda x, \\ y - \dfrac{16}{\sqrt{3}} = 3\lambda y, \\ x^2 + 3y^2 = 17. \end{cases}$$

Từ hai phương trình đầu:

$$x = \frac{2}{1-\lambda}, \qquad y = \frac{16/\sqrt{3}}{1-3\lambda}.$$

Thử $\lambda = -1$ ta được

$$x = 1, \qquad y = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

Kiểm tra:

$$x^2 + 3y^2 = 1 + 3 \cdot \frac{16}{3} = 17,$$

nên

$$C_1\left(1, \frac{4}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

nằm trên elip.

Do elip là tập compact và AC liên tục, nên tồn tại điểm cực tiểu. Hệ Lagrange chỉ cho hai nghiệm thực và C_1 cho giá trị nhỏ hơn nên là nghiệm cần tìm.

Tính:

$$AC_{\min}^2 = (1-2)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{16}{\sqrt{3}}\right)^2 + 64 = 1 + \frac{144}{3} + 64 = 113,$$

suy ra

$$AC_{\min} = \sqrt{113}.$$

$$\boxed{C\left(1, \frac{4}{\sqrt{3}}, 0\right).}$$

Đổi sang km (vì 1 đơn vị = 6400 km):

$$\boxed{C = \left(6400, \frac{25600}{\sqrt{3}}, 0\right) \text{ km.}}$$

Bài 3

Cho (n, a, b) là các số nguyên dương thỏa mãn

$$1 < n^2 < a < b < n^2 + n + 3.$$

Tìm **tất cả các ước nguyên dương** của ab **nằm trong khoảng** $(n^2,\ n^2 + n + 3)$.

Lời giải

Vì $1 < n^2$ nên $n \geq 2$. Khoảng $(n^2,\ n^2 + n + 3)$ chứa đúng các số nguyên

$$n^2 + 1,\ n^2 + 2,\ \ldots,\ n^2 + n + 2.$$

Đặt

$$a = n^2 + x, \qquad b = n^2 + y,$$

trong đó

$$1 \leq x < y \leq n + 2.$$

Xét một ước dương d của ab sao cho

$$n^2 < d < n^2 + n + 3.$$

Khi đó d cũng có dạng

$$d = n^2 + z, \qquad 1 \leq z \leq n + 2.$$

Vì $d \mid ab$ nên

$$n^2 + z \mid (n^2 + x)(n^2 + y).$$

Lấy modulo $n^2 + z$ suy ra $n^2 \equiv -z$, do đó

$$(n^2 + x)(n^2 + y) \equiv (x - z)(y - z) \pmod{n^2 + z},$$

hay

$$n^2 + z \mid (x - z)(y - z). \tag{1}$$

Vì $x, y, z \in [1, n + 2]$ nên

$$|x - z| \leq n + 1, \qquad |y - z| \leq n + 1,$$

suy ra

$$|(x - z)(y - z)| \leq (n + 1)^2. \tag{2}$$

Mặt khác, với $n \geq 2$ và $z \geq 1$,

$$2(n^2 + z) - (n + 1)^2 \geq 2(n^2 + 1) - (n + 1)^2 = (n - 1)^2 > 0.$$

Suy ra

$$(n + 1)^2 < 2(n^2 + z) = 2d. \tag{3}$$

Từ (2) và (3) ta có

$$|(x - z)(y - z)| < 2d.$$

Kết hợp với (1), một bội của d có trị tuyệt đối nhỏ hơn $2d$ chỉ có thể là

$$0,\ d,\ \text{hoặc}\ -d.$$

Do đó
$$(x-z)(y-z) \in \{0,\ d,\ -d\}. \tag{4}$$

(i) Trường hợp $(x-z)(y-z)=0$.
Khi đó $z=x$ hoặc $z=y$, suy ra

$$d = n^2+z = n^2+x = a \quad \text{hoặc} \quad d = n^2+y = b.$$

(ii) Trường hợp $(x-z)(y-z)=\pm d$.
Đặt
$$u = |x-z|, \qquad v = |y-z|.$$

Ta có $1 \le u, v \le n+1$ và
$$uv = d = n^2+z > n^2. \tag{5}$$

Nếu $u \le n$ và $v \le n$ thì $uv \le n^2$, trái với (5). Do đó ít nhất một trong u, v bằng $n+1$. Suy ra

$$n+1 \mid uv = n^2+z. \tag{6}$$

Vì $n \equiv -1 \pmod{n+1}$ nên $n^2 \equiv 1 \pmod{n+1}$. Từ (6) suy ra

$$n^2+z \equiv 1+z \equiv 0 \pmod{n+1},$$

hay $z \equiv -1 \pmod{n+1}$. Với $1 \le z \le n+2$ suy ra $z=n$. Do đó

$$d = n^2+n = n(n+1).$$

Khi đó $\{u,v\} = \{n, n+1\}$. Suy ra

$$|x-n| = n+1 \quad \text{hoặc} \quad |y-n| = n+1,$$

mâu thuẫn vì $1 \le x, y \le n+2$. Trường hợp này không thể xảy ra.

Kết luận. Mọi ước dương của ab nằm trong $(n^2,\ n^2+n+3)$ chỉ có thể là a hoặc b. Ngược lại, $a \mid ab$ và $b \mid ab$ nên cả hai đều xuất hiện.

$$\boxed{\text{Các ước dương của } ab \text{ trong } (n^2,\ n^2+n+3) \text{ là đúng hai số } a \text{ và } b.}$$

Bài 4

Câu 4 (5 điểm). Bạn An chơi trò chơi ghi lên bảng các bộ ba số theo thứ tự từ trái sang phải. Ban đầu trên bảng ghi sẵn bộ ba số $(1, 1, 1)$. Ở mỗi lượt chơi, An thực hiện một trong hai thao tác sau với bộ ba số (x, y, z) hiện có:

(i) Xóa bộ ba số (x, y, z) và viết lên bảng bộ ba số $(y,\ z,\ x+z)$.

(ii) Xóa bộ ba số (x, y, z) và viết lên bảng bộ ba số $(x+z+1,\ x+y+z+1,\ x+y+2z+1)$.

(a) Chứng minh An cần đúng 4 lượt chơi để có thể viết lên bảng bộ ba số $(a, b, 6)$.

(b) Tìm số tự nhiên k nhỏ nhất sao cho tồn tại một cách chơi để sau k lượt, An có thể viết lên bảng bộ ba số $(c, d, 129)$.

Lời giải

Ký hiệu hai phép biến đổi:

$$A(x, y, z) = (y,\ z,\ x+z), \qquad B(x, y, z) = (x+z+1,\ x+y+z+1,\ x+y+2z+1).$$

Bắt đầu từ $(1, 1, 1)$.

Quan sát then chốt: (ii) là "ba lần (i), rồi $+1$"

Áp dụng A ba lần lên (x, y, z):

$$\begin{aligned}
A(x,y,z) &= (y,\ z,\ x+z),\\
A^2(x,y,z) &= A(y,z,x+z) = (z,\ x+z,\ x+y+z),\\
A^3(x,y,z) &= A(z,x+z,x+y+z) = (x+z,\ x+y+z,\ x+y+2z).
\end{aligned}$$

Do đó

$$B(x, y, z) = A^3(x, y, z) + (1, 1, 1).$$

Đẳng thức này là động cơ của lời giải.

Dãy "thuần A" cho tọa độ thứ ba

Đặt

$$A^n(1, 1, 1) = (*, *, u_n),$$

tức u_n là tọa độ thứ ba sau khi thực hiện thao tác (i) đúng n lần.

Từ $A(x, y, z) = (y, z, x+z)$ suy ra khi lặp A, ta có hệ thức

$$u_{n+3} = u_{n+2} + u_n,$$

vì tọa độ thứ ba mới bằng "tọa độ thứ nhất cũ + tọa độ thứ ba cũ", tương ứng với u_n và u_{n+2} theo cách đánh chỉ số này.

Các giá trị đầu:

$$u_0 = 1, \qquad u_1 = 2, \qquad u_2 = 3.$$

Suy ra lần lượt:

$$\begin{aligned} u_3 &= u_2 + u_0 = 4,\\ u_4 &= u_3 + u_1 = 6,\\ u_5 &= u_4 + u_2 = 9,\\ u_6 &= u_5 + u_3 = 13,\\ u_7 &= u_6 + u_4 = 19,\\ u_8 &= u_7 + u_5 = 28,\\ u_9 &= u_8 + u_6 = 41,\\ u_{10} &= u_9 + u_7 = 60,\\ u_{11} &= u_{10} + u_8 = 88,\\ u_{12} &= u_{11} + u_9 = 129. \end{aligned}$$

Ngoài ra,

$$u_{n+3} - u_{n+2} = u_n > 0 \quad \Rightarrow \quad (u_n) \text{ tăng ngặt.}$$

Bổ đề cấu trúc cho mọi cách chơi hỗn hợp

Giả sử sau k lượt chơi, ta đã dùng phép B đúng m lần. Vì

$$B = A^3 + (1,1,1),$$

mỗi lần dùng B tương ứng với việc thực hiện 3 bước-A và đồng thời "cộng thêm" một $(1,1,1)$ (về sau còn bị biến đổi bởi các bước A tiếp theo). Do đó bộ ba cuối cùng có thể viết dưới dạng

$$A^N(1,1,1) \; + \; \sum_{j=1}^{m} A^{t_j}(1,1,1),$$

với

$$N = (k-m)\cdot 1 + m \cdot 3 = k + 2m,$$

và các số mũ thỏa điều kiện khoảng cách

$$t_j \geq t_{j+1} + 3.$$

Lấy riêng tọa độ thứ ba:

$$z = u_N + \sum_{j=1}^{m} u_{t_j}, \qquad N = k + 2m, \qquad t_j \geq t_{j+1} + 3.$$

(a) Cần đúng 4 lượt để đạt $(a, b, 6)$

Dùng phép (i) bốn lần:

$$(1,1,1) \xrightarrow{(i)} (1,1,2) \xrightarrow{(i)} (1,2,3) \xrightarrow{(i)} (2,3,4) \xrightarrow{(i)} (3,4,6).$$

Vậy sau 4 lượt ta có thể viết một bộ ba dạng $(a, b, 6)$, ví dụ $(3,4,6)$.

Ta chứng minh không thể đạt tọa độ thứ ba $z = 6$ trong $k \leq 3$ lượt.

- Nếu $m = 0$ (không dùng (ii)), thì $z = u_k \leq u_3 = 4$, vô lý.

- Nếu $m \geq 1$, đặt $N = k + 2m$. Khi $k \leq 3$ thì $N \geq 3$. Theo bổ đề,

$$z = u_N + \sum_{j=1}^{m} u_{t_j} \geq u_N + 1.$$

  Xét các khả năng:

  - $k = 3, m = 1 \Rightarrow N = 5 \Rightarrow z \geq u_5 + 1 = 10 > 6.$
  - $k = 2, m = 1 \Rightarrow N = 4 \Rightarrow z \geq u_4 + 1 = 7 > 6.$
  - $k = 1, m = 1 \Rightarrow N = 3 \Rightarrow z = u_3 + u_0 = 4 + 1 = 5 \neq 6.$

  Đều không thể.

Suy ra cần tối thiểu 4 lượt, và vì 4 lượt làm được nên số lượt cần thiết là đúng 4.

(b) Tìm k nhỏ nhất để đạt $(c, d, 129)$

Tồn tại với $k = 12$. Ta đã có $u_{12} = 129$, nên chỉ dùng (i) 12 lần là đạt tọa độ thứ ba bằng 129. Thực tế,

$$A^{12}(1, 1, 1) = (60, 88, 129),$$

nên tồn tại $(c, d) = (60, 88)$. Do đó $k \leq 12$.

Không thể với $k \leq 11$. Giả sử đạt $z = 129$ trong $k \leq 11$ lượt.
Nếu $m = 0$ thì $z = u_k \leq u_{11} = 88$, mâu thuẫn. Vậy $m \geq 1$.
Đặt $N = k + 2m$. Theo bổ đề:

$$129 = u_N + \sum_{j=1}^{m} u_{t_j}, \qquad t_j \geq t_{j+1} + 3.$$

Nếu $N \geq 12$ thì $u_N \geq u_{12} = 129$ và do $m \geq 1$ nên $\sum u_{t_j} \geq 1$, suy ra $z > 129$, vô lý. Vậy $N \leq 11$, nên $u_N \leq u_{11} = 88$ và do đó

$$\sum_{j=1}^{m} u_{t_j} = 129 - u_N \geq 129 - 88 = 41. \tag{$\star$}$$

Mặt khác, do $t_1 \leq N - 3 \leq 8$ và $t_j \geq t_{j+1} + 3$:

- Nếu $m = 1$ thì $t_1 \leq 8$ nên

$$\sum u_{t_j} = u_{t_1} \leq u_8 = 28 < 41,$$

  mâu thuẫn với $(\star)$.

- Nếu $m = 2$ thì $t_1 \leq 8$, $t_2 \leq 5$ nên

$$\sum u_{t_j} \leq u_8 + u_5 = 28 + 9 = 37 < 41,$$

  mâu thuẫn.

- Nếu $m = 3$ thì $t_1 \le 8$, $t_2 \le 5$, $t_3 \le 2$ nên

$$\sum u_{t_j} \le u_8 + u_5 + u_2 = 28 + 9 + 3 = 40 < 41,$$

  mâu thuẫn.

Ngoài ra khi $N \le 11$, ta không thể có $m \ge 4$ vì mỗi lần dùng B đóng góp ít nhất 3 bước-A nên $3m \le N \le 11 \Rightarrow m \le 3$.

Vậy không thể đạt $z = 129$ trong $k \le 11$ lượt. Kết hợp với $k \le 12$ ở trên, suy ra giá trị nhỏ nhất là

$$\boxed{k = 12.}$$