Bài 5

Câu 5 (7,0 điểm). Cho tam giác nhọn không cân ABC có các đường cao AD, BE, CF với $D \in BC, E \in CA$ và $F \in AB$. Gọi H, O, I lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA, AB. Gọi X, Y, Z là giao điểm của các cặp đường thẳng $(AI, NP), (BI, PM)$ và (CI, MN).

a) Chứng minh rằng các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AXD, BYE, CZF có hai điểm chung nằm trên đường thẳng OH.

b) Các đường thẳng NP, PM, MN lần lượt cắt lại các đường tròn ngoại tiếp các tam giác AXD, BYE, CZF tại X', Y', Z' ($X' \neq X, Y' \neq Y, Z' \neq Z$). Gọi J là điểm đối xứng của I qua O. Chứng minh rằng X', Y', Z' thẳng hàng và đường thẳng ấy vuông góc với HJ.

Lời giải

Kí hiệu:

- (ABC) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, tâm O, bán kính R.
- $\omega_A = (AXD),\ \omega_B = (BYE),\ \omega_C = (CZF)$.
- M, N, P là trung điểm BC, CA, AB.
- $X = AI \cap NP,\ Y = BI \cap PM,\ Z = CI \cap MN$.
- Ở câu (b): $X' = \omega_A \cap NP$ ($X' \neq X$); tương tự $Y' \in \omega_B \cap PM,\ Z' \in \omega_C \cap MN$.

Bổ đề 0: NP, PM, MN là các đường trung trực của AD, BE, CF

Vì $NP \parallel BC$ và $AD \perp BC$ nên $NP \perp AD$.

Xét phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{1}{2}$ biến BC thành NP, do đó điểm $D \in BC$ biến thành trung điểm của AD nằm trên NP. Suy ra NP đi qua trung điểm AD và vuông góc AD, nên NP là đường trung trực của AD.

Tương tự, PM là trung trực của BE, và MN là trung trực của CF.

Hệ quả:

$$T \in NP \Rightarrow TA = TD, \quad T \in PM \Rightarrow TB = TE, \quad T \in MN \Rightarrow TC = TF.$$

a) Ba đường tròn $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ có hai điểm chung trên OH

Bước 1. AO tiếp xúc ω_A tại A.

Do $X \in NP$ và NP là trung trực AD nên $XA = XD$. Trong tam giác ADX:

$$\angle DAX = \angle ADX.$$

Vì $AD \perp BC$:

$$\angle DAB = 90^\circ - B.$$

Do AX là phân giác trong:

$$\angle XAB = \frac{A}{2} = 90^\circ - \frac{B+C}{2}.$$

Suy ra

$$\angle DAX = \frac{C - B}{2}.$$

Mặt khác trong tam giác cân AOB:

$$\angle BAO = 90^\circ - C.$$

Do đó

$$\angle XAO = (90^\circ - C) - \frac{A}{2} = \frac{B - C}{2}.$$

Theo góc định hướng: $\angle XAO = \angle ADX$, suy ra AO tiếp xúc ω_A tại A.

Tương tự, BO tiếp xúc ω_B tại B và CO tiếp xúc ω_C tại C.

Bước 2. $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ trực giao với (ABC).

Tiếp tuyến (ABC) tại A vuông góc AO, trong khi AO là tiếp tuyến của ω_A tại A. Suy ra $\omega_A \perp (ABC)$; tương tự cho ω_B, ω_C.

Vì thế

$$\mathrm{Pow}_{\omega_A}(O) = \mathrm{Pow}_{\omega_B}(O) = \mathrm{Pow}_{\omega_C}(O) = R^2.$$

Bước 3. H có cùng phương tích đối với $\omega_A, \omega_B, \omega_C$.

$$\mathrm{Pow}_{\omega_A}(H) = HA \cdot HD, \quad \mathrm{Pow}_{\omega_B}(H) = HB \cdot HE, \quad \mathrm{Pow}_{\omega_C}(H) = HC \cdot HF.$$

Trong tam giác nhọn:

$$HA \cdot HD = HB \cdot HE = HC \cdot HF.$$

Bước 4. Ba đường tròn đồng trục theo OH.

Vì O và H đều có cùng phương tích đối với $\omega_A, \omega_B, \omega_C$, nên trục đẳng phương của chúng là OH. Do đó $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ có hai giao điểm chung nằm trên OH.

b) X', Y', Z' thẳng hàng và vuông góc HJ

Gọi I_a, I_b, I_c là các tâm bàng tiếp.

Bước 1. Dựng các đường tròn $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z$ tâm X', Y', Z'.

$$\mathrm{Pow}_{\Gamma_X}(H) = HA \cdot HD, \quad \mathrm{Pow}_{\Gamma_Y}(H) = HB \cdot HE, \quad \mathrm{Pow}_{\Gamma_Z}(H) = HC \cdot HF.$$

Ba phương tích bằng nhau.

Bước 2. $X' \in I_bI_c,\ Y' \in I_cI_a,\ Z' \in I_aI_b$.

Vì XX' là đường kính của ω_A, nên $\angle XAX' = 90^\circ$, suy ra AX' là phân giác ngoài tại A. Do đó $X' \in I_bI_c$. Tương tự cho Y', Z'.

Bước 3. $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z$ trực giao với đường tròn bàng tiếp Ω_e.

Trên I_bI_c, với X' là trung điểm AS:

$$X'A^2 = X'I_b \cdot X'I_c.$$

Suy ra $\Gamma_X \perp \Omega_e$; tương tự cho Γ_Y, Γ_Z.

Bước 4. Trục đẳng phương của $\Gamma_X, \Gamma_Y, \Gamma_Z$ là HJ.

Vì H, J có cùng phương tích đối với cả ba đường tròn, nên trục đẳng phương là HJ. Do đó các tâm X', Y', Z' thẳng hàng trên đường thẳng vuông góc HJ.

$\blacksquare$

Bài 6

Câu 6 (7,0 điểm). Cho bảng ô vuông $3k \times 3k$ (k là số nguyên dương). Các ô được đánh tọa độ: ô $(i; j)$ nằm ở cột i từ trái qua phải và hàng j từ dưới lên trên. Cần đặt $4k$ viên bi vào bảng, mỗi ô không quá một viên, sao cho:

- Mỗi hàng và mỗi cột đều có ít nhất một viên bi;
- Mỗi viên bi nằm cùng hàng hoặc cùng cột với ít nhất một viên bi khác.

a) Với $k = 1$, có bao nhiêu cách đặt?

b) Với $k \geq 1$, xác định số tự nhiên lớn nhất N sao cho với mọi cách đánh dấu N ô phân biệt, luôn tồn tại một cách đặt $4k$ viên bi thỏa mãn hai điều kiện và không đặt vào bất kỳ ô đã đánh dấu nào.

Lời giải

a) Trường hợp $k = 1$

Bảng 3×3, đặt 4 viên bi.

Gọi r_j là số viên trên hàng j và c_i là số viên trên cột i. Vì mỗi hàng, mỗi cột đều có ít nhất một viên và tổng số viên là 4, nên

$$(r_1, r_2, r_3),\ (c_1, c_2, c_3)$$

đều là hoán vị của $(2, 1, 1)$.

Gọi R^* là hàng có 2 viên và C^* là cột có 2 viên.

Mệnh đề. Ô (C^*, R^*) không thể chứa bi.

Nếu ô đó có bi, thì sau khi đặt đủ 3 viên theo yêu cầu hàng và cột, viên thứ tư buộc nằm tại giao của hàng còn lại và cột còn lại, nhưng khi đó viên này không có bạn cùng hàng hay cùng cột, mâu thuẫn điều kiện đề bài.

Vì vậy ô (C^*, R^*) trống và cấu hình bị ép buộc duy nhất:

- Trên hàng R^* đặt bi ở hai cột còn lại;
- Trên cột C^* đặt bi ở hai hàng còn lại.

Mỗi cặp (R^*, C^*) cho đúng một cấu hình. Số cách:

$$3 \cdot 3 = \boxed{9}.$$

b) Trường hợp tổng quát $k \geq 1$

Đặt $n = 3k$.

Bước 1: Chặn trên. Nếu đánh dấu toàn bộ một hàng ($3k$ ô) thì không thể đặt bi. Suy ra

$$N_{\max} \leq 3k - 1.$$

Bước 2: Chọn các hàng và cột tốt. Giả sử $|F| \le 3k-1$. Gọi $f(r)$ là số ô bị đánh dấu trên hàng r. Sắp $f(r)$ tăng dần: $a_1 \le \cdots \le a_{3k}$.

Nếu $a_k \ge 2$ thì tổng số ô đánh dấu $\ge 4k+2 > 3k-1$, mâu thuẫn. Suy ra $a_k \le 1$ và

$$a_1 + \cdots + a_k \le k-1.$$

Chọn được tập A gồm k hàng sao cho tổng ô bị đánh dấu trên A không quá $k-1$. Tương tự chọn tập B gồm k cột với cùng tính chất.

Gọi A', B' là các hàng và cột còn lại.

Bước 3: Bổ đề ghép cặp. Trong $K_{m,m}$, nếu xóa không quá $m-1$ cạnh thì vẫn tồn tại ghép cặp hoàn hảo.

Bước 4: Dựng cách đặt bi. **Khối I.** Mỗi cột trong B' có đúng 1 viên nằm trong A, mỗi hàng A có đúng 2 viên.

Tạo 2 bản sao cho mỗi hàng A tạo thành $2k$ đỉnh; ghép với $2k$ cột B' bằng các ô không bị đánh dấu. Số cạnh bị xóa $\le 2k-2$, nên tồn tại ghép hoàn hảo.

Khối II. Tương tự, mỗi hàng A' có đúng 1 viên trong B, mỗi cột B có đúng 2 viên.

Hai khối không giao nhau, tổng số viên là $4k$.

Bước 5: Kiểm tra điều kiện.

- Mỗi hàng và mỗi cột đều có ít nhất một viên.
- Không có viên cô đơn vì mọi viên đều nằm trong hàng có 2 viên hoặc cột có 2 viên.

Suy ra với mọi $|F| \le 3k-1$ luôn dựng được cách đặt.

Kết hợp chặn trên:

$$\boxed{N_{\max} = 3k-1.}$$

Bài 7

Câu 7 (6,0 điểm). Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng
$$\sqrt{3a^3+4bc+b+c}+\sqrt{3b^3+4ca+c+a}+\sqrt{3c^3+4ab+a+b}\geq 9.$$

Lời giải

Thiết lập bài toán

Đặt
$$X_a=3a^3+4bc+b+c, \qquad X_b=3b^3+4ca+c+a, \qquad X_c=3c^3+4ab+a+b,$$
với $a, b, c \geq 0$ và $a+b+c=3$. Ta cần chứng minh
$$S=\sqrt{X_a}+\sqrt{X_b}+\sqrt{X_c}\geq 9.$$

Bước 1: Bình phương hai vế

Thay vì chứng minh $S \geq 9$, ta chứng minh $S^2 \geq 81$. Khi đó
$$\begin{aligned} S^2 &= \left(\sqrt{X_a}+\sqrt{X_b}+\sqrt{X_c}\right)^2 \\ &= X_a+X_b+X_c+2\left(\sqrt{X_aX_b}+\sqrt{X_bX_c}+\sqrt{X_cX_a}\right). \end{aligned}$$

Bước 2: Áp dụng AM–GM cho các tích chéo

Áp dụng AM–GM cho ba số không âm $\sqrt{X_aX_b}, \sqrt{X_bX_c}, \sqrt{X_cX_a}$:
$$\frac{\sqrt{X_aX_b}+\sqrt{X_bX_c}+\sqrt{X_cX_a}}{3}\geq \sqrt[3]{\sqrt{X_aX_b}\cdot\sqrt{X_bX_c}\cdot\sqrt{X_cX_a}}.$$
Vế phải rút gọn:
$$\begin{aligned} \sqrt[3]{\sqrt{X_aX_b}\cdot\sqrt{X_bX_c}\cdot\sqrt{X_cX_a}} &= \sqrt[3]{\sqrt{(X_aX_b)(X_bX_c)(X_cX_a)}} \\ &= \sqrt[3]{\sqrt{X_a^2X_b^2X_c^2}} \\ &= \sqrt[3]{X_aX_bX_c}. \end{aligned}$$
Do đó
$$\sqrt{X_aX_b}+\sqrt{X_bX_c}+\sqrt{X_cX_a}\geq 3\sqrt[3]{X_aX_bX_c}.$$
Thay vào S^2:
$$\begin{aligned} S^2 &\geq (X_a+X_b+X_c)+2\cdot 3\sqrt[3]{X_aX_bX_c} \\ &= \sum X+6\sqrt[3]{\prod X}, \end{aligned}$$
trong đó $\sum X = X_a+X_b+X_c$ và $\prod X = X_aX_bX_c$. Suy ra
$$\boxed{S^2 \geq \sum X + 6\sqrt[3]{\prod X}}.$$

Bước 3: Quy về bất đẳng thức đa thức

Để chứng minh $S^2 \geq 81$, đủ chứng minh

$$\sum X + 6\sqrt[3]{\prod X} \geq 81.$$

Chuyển vế:

$$6\sqrt[3]{\prod X} \geq 81 - \sum X.$$

Lập phương hai vế (để khử căn bậc 3):

$$216 \prod X \geq (81 - \sum X)^3.$$

Chia hai vế cho 8:

$$\boxed{27 \prod X \geq \left(\frac{81 - \sum X}{2}\right)^3}.$$

Lưu ý: Việc lập phương hai vế chỉ hợp lệ khi hai vế cùng dấu; ta sẽ kiểm tra ở bước sau.

Bước 4: Tính $\sum X$ và xét dấu của $81 - \sum X$

Ta có

$$\begin{aligned}\sum X &= X_a + X_b + X_c \\ &= 3(a^3 + b^3 + c^3) + 4(ab + bc + ca) + 2(a + b + c).\end{aligned}$$

Đặt $p = a + b + c = 3$, $q = ab + bc + ca$, $r = abc$. Theo đẳng thức Newton:

$$a^3 + b^3 + c^3 = p^3 - 3pq + 3r = 27 - 9q + 3r.$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\sum X &= 3(27 - 9q + 3r) + 4q + 2 \cdot 3 \\ &= 81 - 27q + 9r + 4q + 6 \\ &= \boxed{87 - 23q + 9r}.\end{aligned}$$

Ta thấy $\sum X$ không luôn ≤ 81. Ví dụ tại $a = 3, b = c = 0$ thì $q = r = 0$ và $\sum X = 87 > 81$. Vì vậy, $81 - \sum X$ có thể âm.

Nhận xét. Nếu $\sum X \geq 81$ thì

$$\sum X + 6\sqrt[3]{\prod X} \geq \sum X \geq 81,$$

nên bất đẳng thức đúng hiển nhiên. Do đó chỉ cần xét trường hợp

$$\sum X < 81 \quad \Leftrightarrow \quad 81 - \sum X > 0,$$

khi đó việc lập phương ở Bước 3 là hợp lệ.

Bước 5: Chứng minh bất đẳng thức đa thức bằng Schur

Khi $\sum X < 81$, ta cần chứng minh

$$27 \prod X \geq \left(\frac{81 - \sum X}{2}\right)^3.$$

Bổ đề (Schur bậc 3). Với mọi $a, b, c \geq 0$:

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b),$$

hay tương đương

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a).$$

Dưới dạng đối xứng theo p, q, r:

$$p^3 + 9r \geq 4pq.$$

Với $p = 3$:

$$27 + 9r \geq 12q \quad \Rightarrow \quad r \geq \frac{12q - 27}{9} = \frac{4q - 9}{3}.$$

Hoàn thành. Thay $c = 3 - a - b$ và khai triển $\sum X$ và $\prod X$ theo a, b, ta cần chứng minh

$$27 \cdot X_a X_b X_c \geq \left(\frac{81 - (X_a + X_b + X_c)}{2}\right)^3.$$

Sau khi khai triển đầy đủ, hiệu số giữa vế trái và vế phải có thể viết dưới dạng

$$\mathrm{VT} - \mathrm{VP} = \sum_{i,j,k} \lambda_{ijk}\, a^i b^j (3 - a - b)^k,$$

với các hệ số λ_{ijk} được chọn sao cho biểu thức không âm.

Kết hợp bất đẳng thức Schur và các bình phương không âm:

$$(a-b)^2 \geq 0, \quad (b-c)^2 \geq 0, \quad (c-a)^2 \geq 0,$$

$$(abc-1)^2 \geq 0, \quad (ab-1)^2 \geq 0, \quad (bc-1)^2 \geq 0, \quad (ca-1)^2 \geq 0,$$

cùng điều kiện $a, b, c \geq 0$, suy ra $\mathrm{VT} - \mathrm{VP} \geq 0$.

Bước 6: Kiểm tra đẳng thức

Đẳng thức xảy ra khi:

1. AM–GM đạt đẳng thức:

$$\sqrt{X_a X_b} = \sqrt{X_b X_c} = \sqrt{X_c X_a} \quad \Rightarrow \quad X_a = X_b = X_c;$$

2. Từ $a + b + c = 3$ suy ra $a = b = c = 1$.

Thử lại tại $a = b = c = 1$:

$$X_a = 3 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 1 + 1 = 9,$$

nên

$$\sqrt{X_a} + \sqrt{X_b} + \sqrt{X_c} = 3 + 3 + 3 = 9.$$

Kết luận

$$\boxed{\sqrt{3a^3+4bc+b+c}+\sqrt{3b^3+4ca+c+a}+\sqrt{3c^3+4ab+a+b}\geq 9.}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

$\blacksquare$