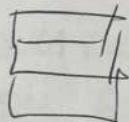
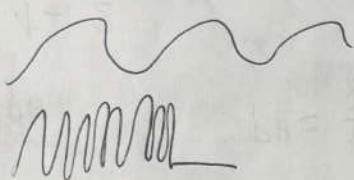


$$\lambda = \frac{c}{f} \rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$$



6 Hz
MHz
kHz



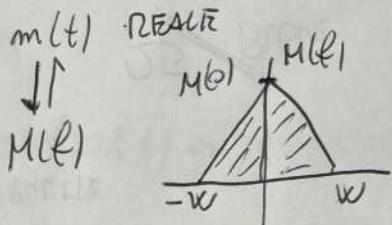
f BASSA, l LUNGO
f ALTA, l CORTO

ANALOG COMMUNICATIONS

- MODULAZIONE IN AMPIZZA

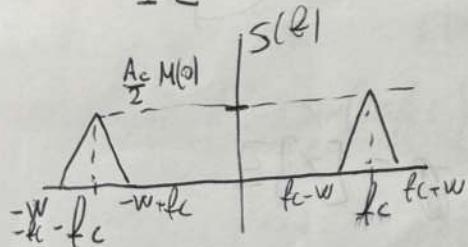
$$m(t) \xrightarrow{\times} s(t) \\ | A_c \cos(2\pi f_c t)$$

DSB (DUAL SIDE BAND)



$$s(t) = m(t) A_c \cos(2\pi f_c t)$$

$$s(f) = \frac{A_c}{2} [M(f-f_c) + M(f+f_c)]$$



$$M(f) = M^*(f)$$

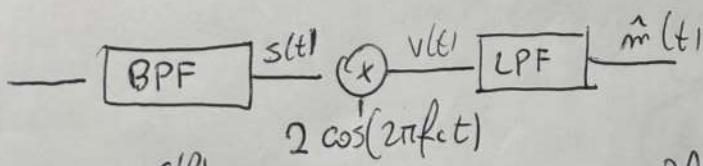
$$|M(-f)| = |M^*(f)| = |M(f)|$$

f_c PORTANTE? (carrier)

- COHERENT

DETECTION

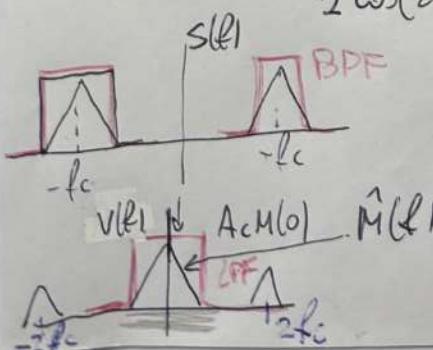
$$s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$$



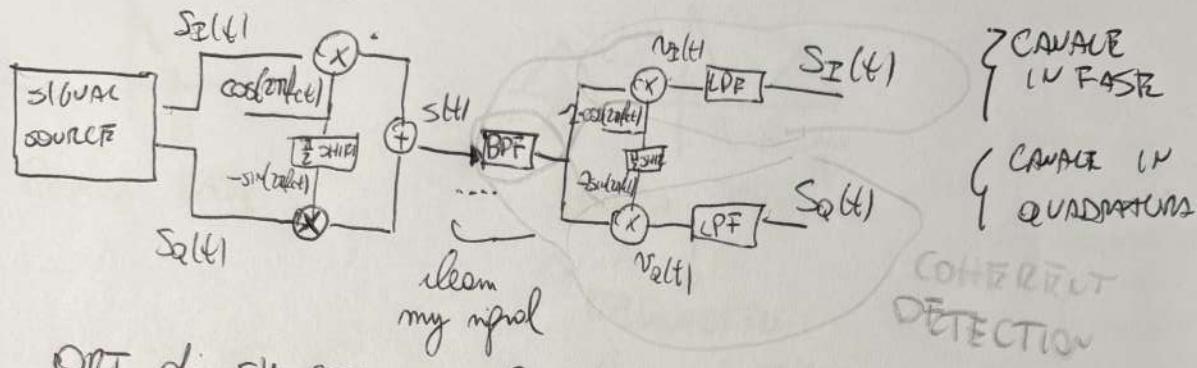
$$v(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t) / 2 \cos(2\pi f_c t)$$

$$2A_c m(t) \cos^2(2\pi f_c t) = \\ \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}$$

$$= 2A_c m(t) \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(4\pi f_c t) \right] = \\ = A_c m(t) [1 + \cos(2\pi f_c t)]$$



- QUADRATURE AMPLITUDE MODULATION
2x AMOUNT of INF. on GIVEN BANDWIDTH



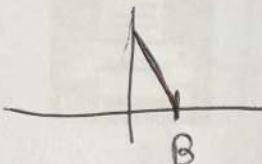
ORT. di SIN, COS \rightarrow 2x INF.

$$S_{\text{QAM}}(t) = A_c m_1(t) \cos(2\pi f_c t) - A_c m_2(t) \sin(2\pi f_c t) \rightarrow \text{TRANSMITTO}$$

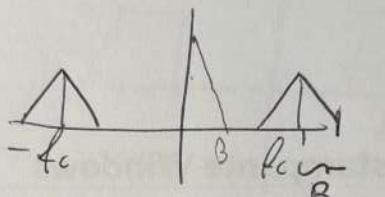
$$\begin{aligned} v_I(t) &= A_c m_1(t) 2 \cos^2(2\pi f_c t) - A_c m_2(t) \sin(2\pi f_c t) 2 \cos(2\pi f_c t) = \\ &\cancel{2A_c m_1(t) 2 \sin^2(2\pi f_c t)} - \cancel{A_c m_2(t)} \quad 2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin(2\alpha) \\ &= \cancel{A_c m_1(t) [1 + \cos(2\pi(2f_c)t)]} - \cancel{A_c m_2(t) [\sin(2\pi(2f_c)t)]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_Q(t) &= S_{\text{QAM}}(t) \cdot (-2 \sin(2\pi f_c t)) = -2 A_c m_1(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) \\ &\quad + 2 A_c m_2(t) \sin^2(2\pi f_c t) \\ &= \cancel{-A_c m_1(t) \sin(2\pi(2f_c)t)} + \cancel{2 A_c m_2(t) [1 - \cos^2(2\pi f_c t)]} \\ &\quad \cancel{2 A_c m_2(t) [1 - (\frac{1}{2} + \cos(2\pi(2f_c)t))]} \\ &= \cancel{A_c m_2(t)} + \cancel{[-\cos(2\pi(2f_c)t) A_c m_2(t)]} \end{aligned}$$

- RADDO BANDA PASSANTE



BANDA BASE



BANDA PASSANTE

REQUISITO:

$$\underline{f_c > 2B}$$

(NUOVO PRO
COMPLESSO)

$$S(t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{S}(t) e^{j2\pi f_c t} \right\} = \underbrace{\tilde{S}_I(t) \cos(2\pi f_c t)}_{\text{SEGNALI REALE IN BANDA PASSANTE}} + \underbrace{\tilde{S}_{QI}(t) \sin(2\pi f_c t)}_{\text{SEGNALI IMMAGINARI IN BANDA PASSANTE}}$$

$\tilde{S}(t)$ È UNA ASTRATZIONE MATEMATICA

INVILUPPO COMPLESSO IN BANDA BASE

SQAM

$$e^jx = \cos(x) + j \sin(x)$$

$$\tilde{S}(t) = \tilde{S}_I(t) + j \tilde{S}_{QI}(t)$$

COMP. IN FASE

COPP. IN QUADRANTI

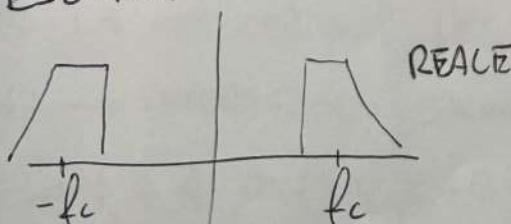
$\int e^jx = 0$ È REALE

$$\tilde{S}_{DSB}(t) \rightarrow S_I(t) = A_c m_1(t) \quad S_Q(t) = 0 \rightarrow \text{REALE}$$

$$\tilde{S}_{AM}(t) \rightarrow S_I(t) = A_c m_1(t) \quad S_Q(t) = A_c m_2(t)$$

$$\tilde{S}_{AM}(t) = S_I(t) + j S_Q(t)$$

ESEMPIO:



REALE

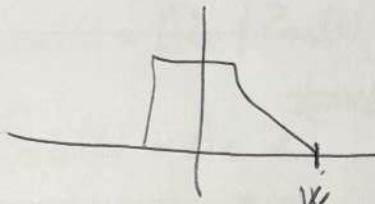
NESSUN SIM/COS

$$\tilde{S}(t)$$

INV.
COMPL.

UTILE PER SEMPLIFICARE LA NOTAZIONE
+ NO EFFETTI SULLA FORMA DEL SEGNALE, CHE PORTA

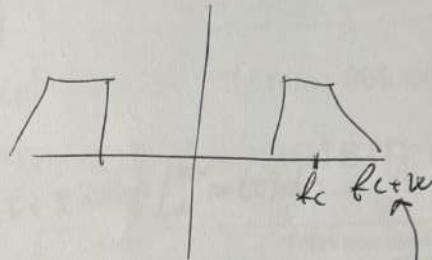
- NON SIMMETRICO
- BANDA BASE
- NON REALE
- NON ESISTERE PER I SISTEMI RISICI



$$f_{\text{SAMPLING}} \geq W$$

RATE DI CAMPIONAMENTO
PIÙ BASSO

MENO SAMPLE NECESSARI,
IL SEGNALE CAMBIA PIÙ
LENTAMENTE

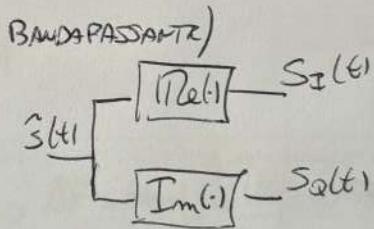
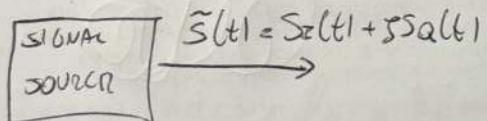


$$f_{\text{SAMPLING}} \geq 2 B_s$$

$$B_s = f_c + W$$

$$f_{\text{SAMPLING}} \geq 2(f_c + W)$$

BANDA BASE (+ SEMPLICE DEL



~~BUONO~~ PORTARE L'INFORMAZIONE NELLA AMPISSIMA, MA FAENDO
CIO' NON POSSO USARE L'AMPLIFICATORE (CHE SERVIRÀ PER AMPLIFICARE
IL SEGNALE PRIMA DI INVIALO) NELLA ZONA LINEARE E

NON SO USO AL LIVELLO MASSIMO

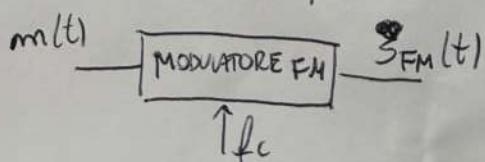
QUINDI

USO LA MODULAZIONE IN FREQUENZA

FM \rightarrow INFORMAZIONE SALVATA NELLA FASE DEL SEGNALE $\phi(t)$

$$S_{\text{FM}}(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau)$$

~~m~~ \rightarrow $\underbrace{\phi(t)}$ $\underbrace{\text{MESSAGGIO}}$



$$\frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = f_c + k_f m(t) = f_i(t)$$

IL SEGNALE MODULATO È
SALVATO NELLA FREQUENZA ISTANTANEA
(DERIVATA DELLA FASE È LA FREQUENZA)

DIMOSTRAZIONE:

$$S_{FM}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{S}_{FM}(t) e^{j2\pi f_c t} \right\}$$

$$\tilde{S}_{FM}(t) = A_c e^{\int_{-\infty}^{2\pi k_f t} m(\tau) d\tau}$$

$$\tilde{S}_{FM}(t) e^{j2\pi f_c t} = A_c e^{j2\pi f_c t + j2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau}$$

$$\operatorname{Re} \left\{ \tilde{S}_{FM}(t) e^{j2\pi f_c t} \right\} = A_c \cos(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(\tau) d\tau)$$

BENEFICI FM:

- AMPLIFICATORE + SEMPLICE

- AGGIUSTANDO I PARAMETRI FM SI PUÒ TROVARE PIÙ
FACILMENTE UNA VIA DI MELLO TMA EFFICIENZA DI
ENERGIA E EFFICIENZA SPATTALE

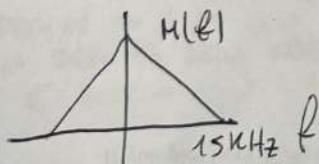
$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \phi(t) = f_c + k_f m(t)$$

L FREQUENZA ISTANTANEA

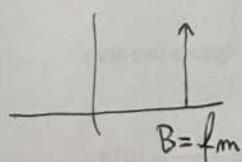
$$f_d(t) = f_i(t) - f_c = k_f m(t) \Rightarrow \Delta f = \max |f_d(t)| = k_f \max(m(t))$$

L DEVIAZIONE DI FREQUENZA

ESEMPIO:



$m_f = \frac{\Delta f}{B} \rightarrow$ MAXIMUM FREQUENCY
DEVIATION
MODULATION INDEX
BANDWIDTH OCCUPATA
DAL SEGNALE MODULATO
IN FM



CONCENTRA TUTTA
L'ENERGIA DEL SEGNALE
NELL'COMPONENTE PIÙ ALTA
DI FREQUENZA IN QUESTO
MODO TROVO L'APPROXIMAZIONE
DELLA BANDA

ESEMPIO

$$m(t) = V_m \cos(2\pi f_m t)$$

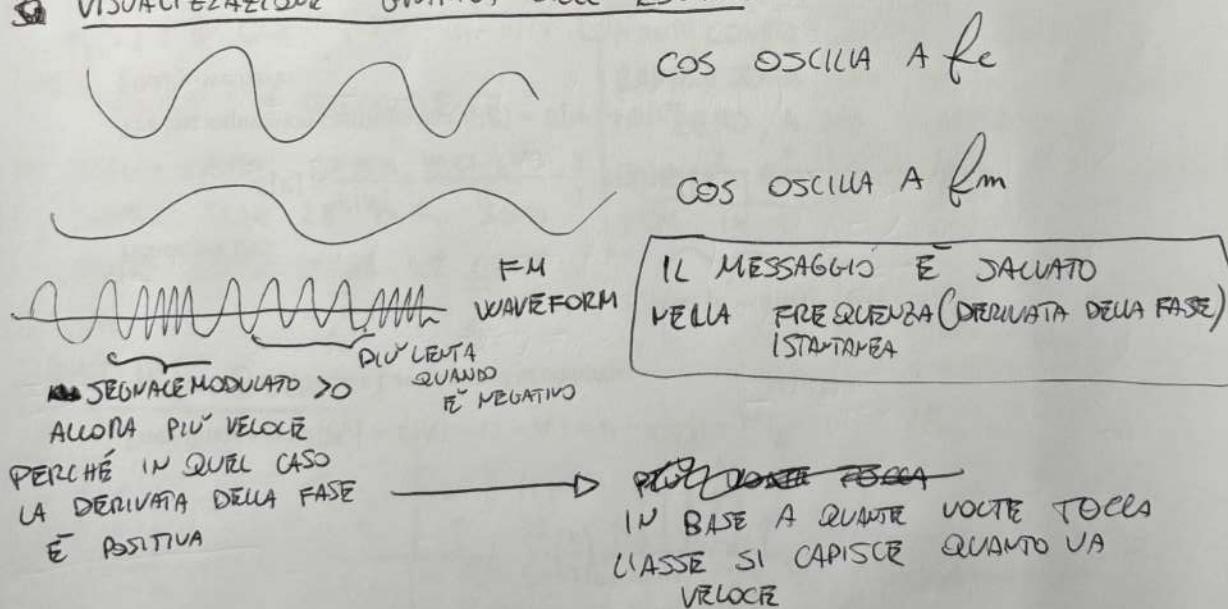
SEGNALE MODULATO
GENERALMENTE CHE
OCCUPA PIÙ A
 f_m

$$\begin{aligned} S_{FM}(t) &= A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_{-\infty}^t V_m \cos(2\pi f_m \tau) d\tau\right) = \\ &= A_c \cos\left(2\pi f_c t + 2\pi k_f V_m \frac{\sin(2\pi f_m t)}{2\pi f_m}\right) = \\ &\approx A_c \cos\left(2\pi f_c t + \frac{k_f V_m}{f_m} \sin(2\pi f_m t)\right) \end{aligned}$$

B — $\frac{k_f V_m}{f_m}$ — APPROXIMATION
INDEX

$$\tilde{S}_{FM}(t) = A_c e^{jmf \sin(2\pi f_m t)}$$

■ VISUALIZZAZIONE GRAFICA DELL'ESEMPIO:



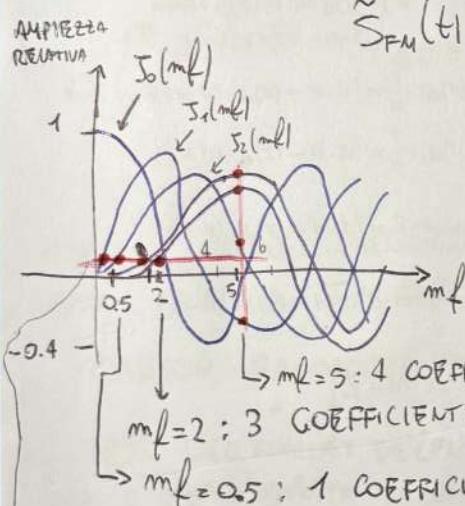
FM SIGNAL SPECTRUM

$$\tilde{S}_{FM}(t) = A_c e^{j2\pi f_m t} \cos(2\pi f_m t)$$

$A_c e^{j2\pi f_m t} \sin(2\pi f_m t)$
PERIODICO

WITH: $m(t) = V_m \sin(2\pi f_m t)$
TSF: (APPLICATA AI PERIODICI)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n e^{j2\pi f_m n t}$$



$$\tilde{S}_{FM}(t) = A_c \sum_m J_m(mf) e^{j2\pi f_m t}$$

BESSEL FUNCTION
DI ORDINE M
DEL PRIMO TIPO

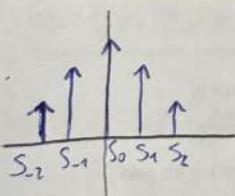
$$S_{FM}(t) = A_c \sum_m J_m(mf) \cos(2\pi(f_c + m f_m)t)$$

Re $\left\{ e^{j2\pi f_m t} \cdot e^{j2\pi f_c t} \right\}$

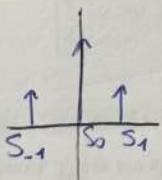
NON CONTO $J_0(mf)$ PERCHÉ RAPPRESENTA UNA DELTA DI DIRAC IN ZERO, A ME INTERESSANO SOLAMENTE CON COMPONENTI IN FREQUENZA NON IN 0

PERCHÉ SCEGLIO QUESTA RETTA ROSSA?
PERCHÉ GUARDO DOVE LE B.F. SONO $\neq 0$, OPPURE POSSO USARE LE RETTE VERTICALI

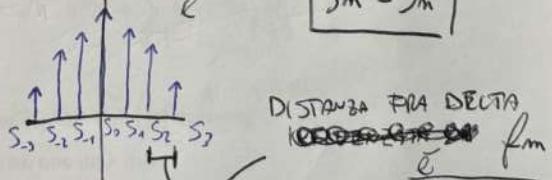
SPECCHIO ESEMPI:



2 COEFFICIENTI



1 COEFFICIENTE
 $mf = 0.5$



3 COEFFICIENTI
 $mf = 2$

MOTTA:
 $J_m = S_m$

$s(t)$ è periodico di periodo T_m SE: $\tilde{s}_{FM}(t+kT_m) = s_m(t) \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\tilde{s}_{FM}(t+kT_m) = A_c e^{j2\pi f_m \sin(2\pi f_m(t+kT_m))}$$

LO SPETTRO OCCUPATO SONO GLI $S_m \neq 0$

PIÙ GRANDE $mf \rightarrow$ MAGGIORI $J_m(mf) \neq 0 \rightarrow$ SPETTRO + LARGO

COEFFICIENTE M-ESIMO DELLA SERIE DI FOURIER: $S_m = \frac{1}{T_m} \int_{-\frac{T_m}{2}}^{\frac{T_m}{2}} \tilde{s}_{FM}(t) e^{-j2\pi f_m t} dt = \frac{1}{T_m} \int_{-\frac{T_m}{2}}^{\frac{T_m}{2}} \tilde{s}_{FM}(t) e^{-j2\pi f_m t} dt$

$$= \frac{1}{T_m} \int_{-\frac{T_m}{2}}^{\frac{T_m}{2}} e^{jmf_m t} \sin(2\pi f_m t) e^{-j2\pi f_m t} dt = \frac{1}{T_m} \int_{-\frac{T_m}{2}}^{\frac{T_m}{2}} e^{jmf_m t} \sin(2\pi f_m t - 2\pi f_m t) dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{jmf_m \theta} \sin(m\theta) d\theta = \underbrace{S_m(m)}$$

↓
NON È POSSIBILE CALCOLARE IN FORMA CHIUSA L'ESPRESSIONE DELLO SPECTRO FM, DUNQUE UNA BUONA APPROSSIMAZIONE È:
CARSON BANDWIDTH RULE: $B_{FM} \approx 2(mf+1)B = 2(\Delta f + B)$

IL 98% DELL'ENERGIA DEL SEGNALE MOD. È DEFINITA DA QUESTA FORMULA, IL SEGNALE VIN. REALTA' AUREBBE BANDA INFINTA

~~BANDA INFINITA~~

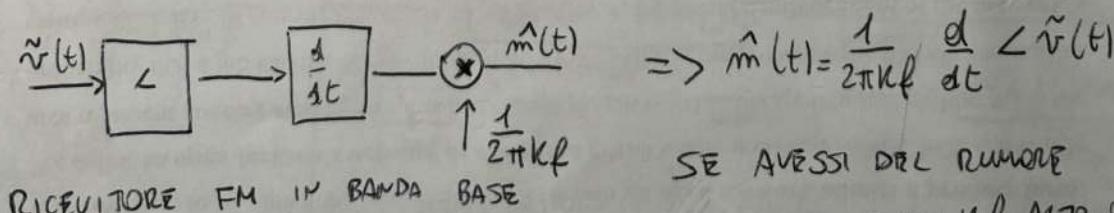
NUMERO DI DELTA $\underbrace{mf+1}_{mf = \frac{\Delta f}{B}}$ BANDA DEL SEGNALE (NON MODULATO)

$\text{SPECTRUM DSB-AM} = 2B$ $\text{SPECTRUM FM} = 2(mf+1)B$
--

$mf = 5 \Rightarrow 6$ VOLTE MAGGIORI

RICEVITORE FM

INVOLURO COMPLESSO DEL SEGNALE RICEVUTO: $\tilde{v}(t) = A_c e^{j2\pi kf \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau}$



SE AVESI DEL RUMORE

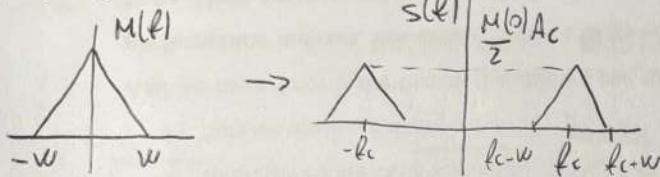
$\hat{m}(t) + \frac{m(t)}{2\pi kf}$ COM kf ALTO, QUINDI CON AMPIO SPECTRO

kf ALTO $\rightarrow \Delta f$ ALTO \rightarrow SPECTRO AMPIO

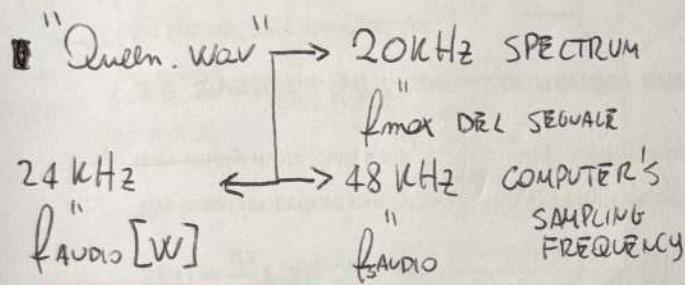
ESERCITAZIONE 1 MATLAB - FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO

- DSB MODULATED SIGNAL : $S_{DSB}(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$
 " " " IN MATLAB : $S_{DSB}(mT_s) = A_c m(mT_s) \cos(2\pi f_c mT_s)$

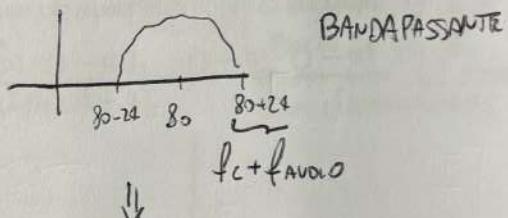
TRASMETTITORE :



SPECTRUM ANALYZER: studia il segnale collegando la F.T. in frequenza



SB $f_c = 80\text{ kHz} > 2 \cdot 20\text{ kHz}$
 VA BENE! [CONDIZIONI DI MODULAZIONE]
 $f_c > 2 \cdot f_{\max}$



$f_s \geq 2 f_{\max}$ DI CAMPIONAMENTO DEL COSENZO → HA f_c CHE QUINDI CERCHIAMO $2f_c$

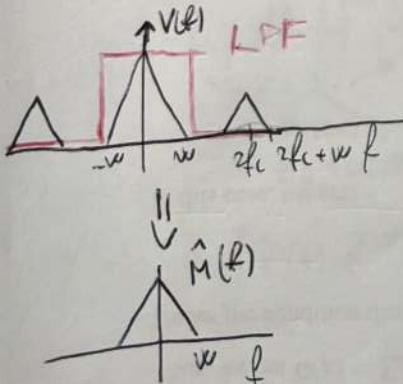
$$f_{\max} = 2f_c + \frac{f_{\text{AUDIO}}}{2}$$

+ ALTA COMPONENTE FREQUENZIALE [Dopo la DEMODULAZIONE] A RICEVITORE

SE VOGLIO CAMPIONARLO :
 $f_s = 104.2 = 208\text{ kHz}$
 MA DEVO CAMPIONARE IL COSENZO CHE È A RICEVITORE

$$f_s \geq 4f_c + f_{\text{AUDIO}} = 4 \cdot 80 + 48 = 368\text{ kHz}$$

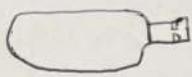
• AL RICEVITORE :



FREQUENZA DI CAMPIONAMENTO DI UN SEGNALE IN BANDA PASSANTE [IN BANDA BASE $\Rightarrow f_s = 48\text{ kHz}$]



SOFTWARE DEFINED RADIO

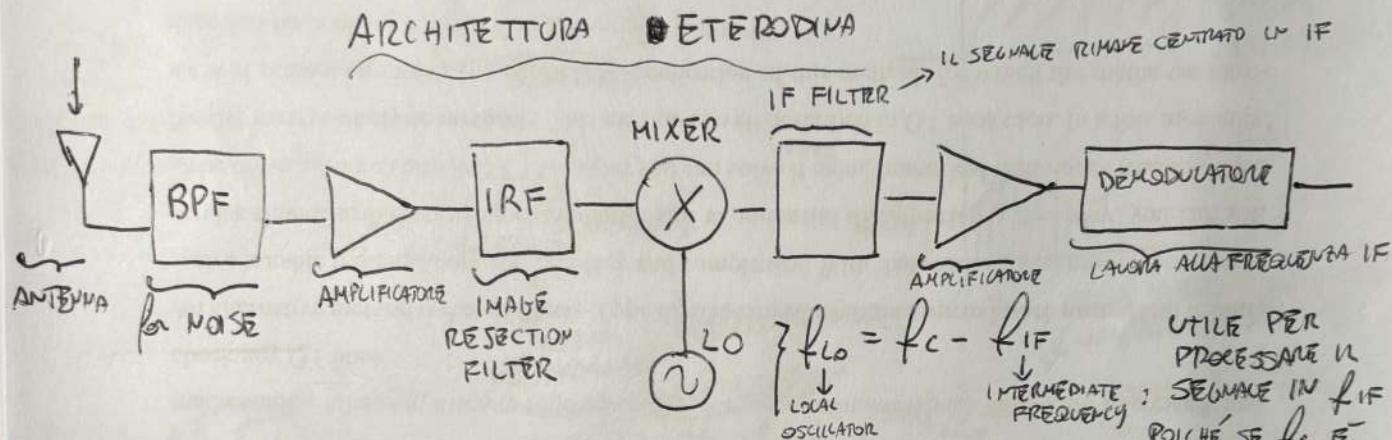


~~NETTUNISTICA~~ ~~NUOVA RADIODINAMICA CON LA DISTRIBUZIONE~~

COMPONENTI PRINCIPALI:

- PROCESSAZIONE ANALOGICA
- CLOCK
- DEMODULATORE IN BANDA BASE

SDR: CATTURA IL SEGNALE DALL'ARIA E LO CAMPIONA, DIGITALIZZANDO



$$r(t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{r}(t) e^{j2\pi f_c t} \right\} = r_I(t) \cos(2\pi f_c t) - r_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

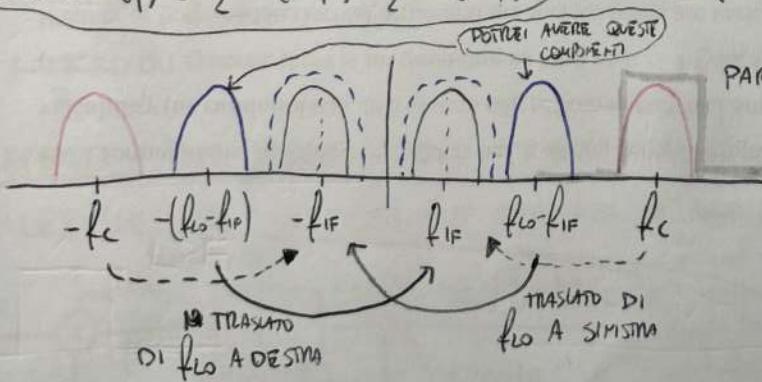
SE $r(t) = m(t) \cdot \cos(2\pi f_c t)$ ALLORA:

$$r(t) \cos(2\pi f_c t) = m(t) \cos(f_c 2\pi t) \cos(2\pi(f_c - f_{IF})t) =$$

$$= \frac{1}{2} m(t) \cos(2\pi(2f_c - f_{IF})t) + \frac{1}{2} m(t) \cos(2\pi f_{IF} t)$$

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2} \cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2} \cos(\alpha-\beta)$$

$$\text{SI FA COSÌ: } r(t) \cdot \cos(2\pi f_{IF} t) = \cos(2\pi(-f_{IF})t) [\cos(\alpha-\beta) = \cos(\beta-\alpha)]$$



LA SIMMETRIA DEI COSENI PUÒ CAUSARE PROBLEMI DI SOMMAZIONE

LE COMPONENTI BLU ROSSO CAUSARE INTERFERENZA INTORNO A f_{IF} DOVE HO TRASLATO IL MIO SEGNALE ROSSO

$$r'(t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{r}(t) e^{j2\pi f_{IF} t} \right\} A_c$$

FM MONO (NO STEREO) - IMPLEMENTAZIONE PRATICA

$$m(t) = L(t) + R(t)$$

NORMA ALZZATO A

1

$$\tilde{v}(k) = \bar{v}(t) \Big|_{t=kT_s} = A_c e^{\int_{-\infty}^{kT_s} m(\tau) d\tau}$$

SAMPLES

USCITA DALL'SOR
CHE CAMPIONA A $\frac{1}{T_s} = f_s$

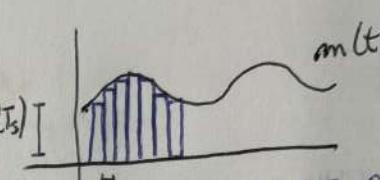
$$\int_{-\infty}^{kT_s} m(\tau) d\tau = \sum_{l=-\infty}^{kT_s} m(lT_s) T_s$$

||

ALTEZZA
DEL RETTANGOLO

BASE DEL RETTANGOLO

$m(lT_s)$



QUESTO VIENE TRASMESSO

$$\tilde{v}(k) = A_c e^{\int_{-\infty}^{kT_s} m(\tau) d\tau}$$

$$\tilde{v}(k-1) = A_c e^{\int_{-\infty}^{(k-1)T_s} m(\tau) d\tau}$$

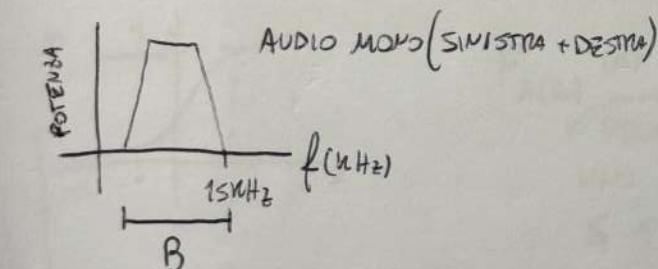
PRODOTTO DI DUE SAMPLE CONSECUTIVI IN BASE BASSA

$$\Rightarrow \tilde{v}(k) \tilde{v}(k-1) = A_c^2 e^{\int_{-\infty}^{kT_s} m(\tau) d\tau - \int_{-\infty}^{(k-1)T_s} m(\tau) d\tau}$$

$$= A_c^2 e^{\int_{kT_s}^{(k-1)T_s} m(\tau) d\tau}$$

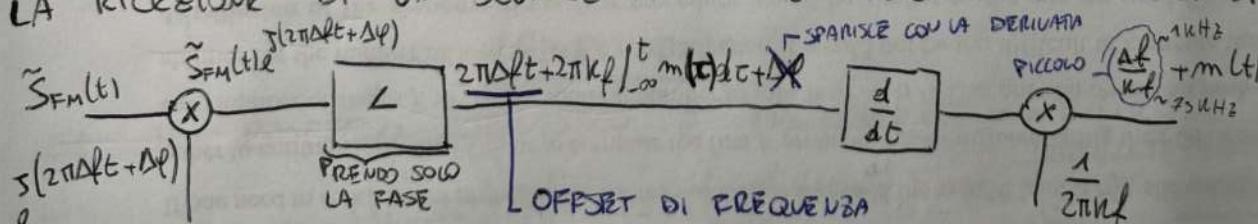
HO SOLO IL SAMPLE k^{th} -ESIMO

FACENDO IL PRODOTTO OTTERMO
SOLO IL CAMPIONE k^{th} -ESIMO



EFFETTI DI ERRORE DI SINCRONIZZAZIONE

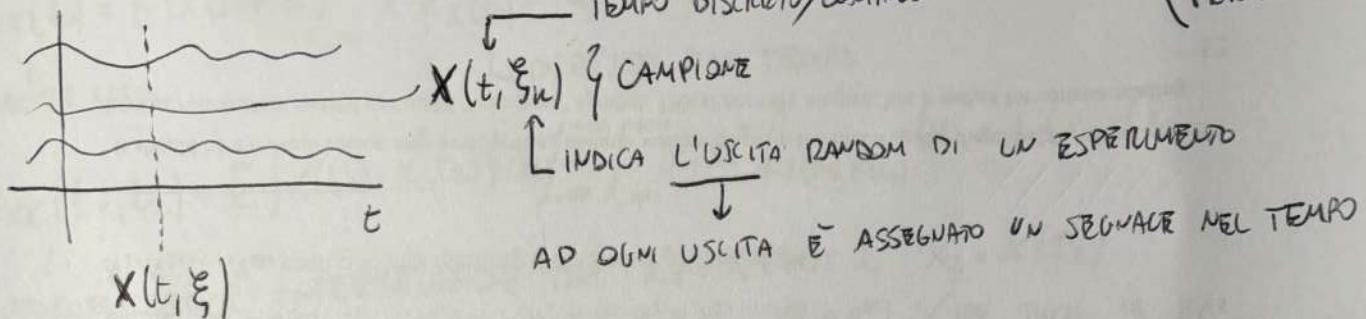
LA RICEZIONE DI UN SEGNALE FM MONO È INFLUENZATA DA OFFSET DI FASE/FREQUENZA



ERRORE GENERICO
(FASE E FREQUENZA)
DOVUTO AL RUMORE

DOVUTO AL RUMORE

PROCESSI STOCASTICI: È UN SET DI RANDOM VARIABLE INDICIZZATE DAL TEMPO (PER ESEMPIO)



$t = t_0 \rightarrow X(t_0, \xi)$ CHE È UNA RANDOM VARIABLE

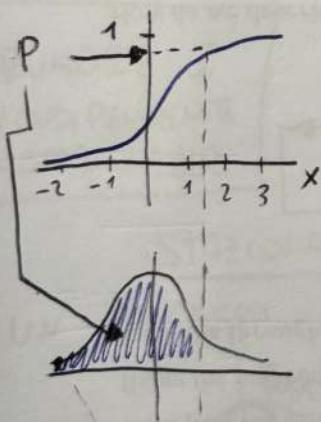
$X(t)$ È LO STOCHASTIC PROCESS

[SPAZIO DEI PARAMETRI : SET T DI INDICI T & T]

[SPAZIO DEGLI STATI : SET S DI VALORI X(t) & S]

CATEGORIE → BASATI SULLO SPAZIO DEI PARAMETRI → { PROCESSI TEMPO DISCRETO " " CONTINUO
BASATI SULLO SPAZIO DEGLI STATI → { PROCESSI TEMPO DISCRETO " " CONTINUO

DISTRIBUZIONE È PDF (PROBABILITY DENSITY FUNCTION)



$$F_{X(t_0)}(x) = P\{X(t_0) \leq x\} \quad \text{CDF}$$

PROBABILITÀ CHE UNA RV OTTENUTA CAMBIANDO UNO STOCHASTIC PROCESS AL TEMPO t_0 SIA $\leq x$ (RV SONO DIVERSO)

$$f_{X(t_0)}(x) = \frac{d}{dx} F_{X(t_0)}(x) \quad \text{PDF}$$

INDIPENDENZA

SE IL PROCESSO STOCASTICO È INDIPENDENTE \Rightarrow TUTTE LE RV OTTENUTE CAMBIANDO SONO INDIPENDENTI

$$F_{X_1(t_1), X_2(t_2), \dots, X_m(t_m)}(x_1, \dots, x_m) = P\{X(t_1) \leq x_1\} \cdot P\{X(t_2) \leq x_2\} \cdots P\{X(t_m) \leq x_m\}$$

$$f_{X_1(t_1), \dots, X_m(t_m)}(x_1, \dots, x_m) = f_{X(t_1)}(x_1) \cdots f_{X(t_m)}(x_m)$$

MEDIA E AUTOCORRRELAZIONE

$$\mu_X(t_0) = E[X(t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_{X(t_0)}(x) dx$$

L' DIPENDE DAL TEMPO
VALORE MEDIO

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1) \cdot X^*(t_2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

AUTOCORRRELAZIONE: INTERAZIONE TRA $X_1 = X(t_1)$ e $X_2 = X(t_2)$
OTTENUTE CAMBIANDO $x(t)$ a t_1 e t_2

STAZIONARITÀ

UN PROCESSO STAZIONARIO È INVARIANTE RISPETTO AL TEMPO

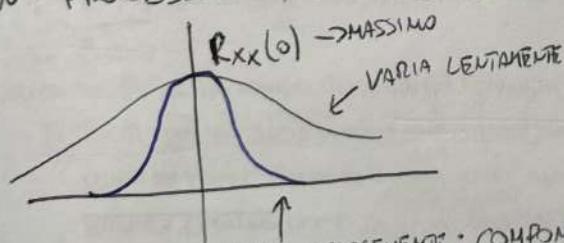
PRIMO ORDINE: $f_{X(t_0)}(x) = f_{X(t_0+c)}(x)$ - PROPRIETÀ STATISTICHE UGUALI IN ISTANTI DIVERSI, $\forall c$
- MEDIA UGUALE, COSTANTE

SECONDO ORDINE: $f_{X(t_1), X(t_2)}(x_1, x_2) = f_X(x_1, x_2, t_2 - t_1)$ - PROPRIETÀ STATISTICHE DELLE COPPIE $\{X(t_1), X(t_2)\}$ e $\{X(t_1+c), X(t_2+c)\}$ UGUALI $\forall c$
- L'AUTOCORRRELAZIONE DIPENDE SOLO DALLA DIFFERENZA DEGLI ISTANTI DI TEMPO

RUMORE È
- INDIPENDENTE
- STAZIONARIO

STAZIONARITÀ NEL SENSE

UN PROCESSO $X(t)$ È WSS SE: $- E[X(t)] = \mu_X$
 $- E[X(t_1), X(t_2)] = R_{XX}(t_2 - t_1)$



VARIA VELOCEMENTE: COMPONENTI FREQUENZIALI PIÙ ALTI
DENSITÀ SPECTRALE DI POTENZA

$$S_{XX}(f) = F\{R_{XX}(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XX}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

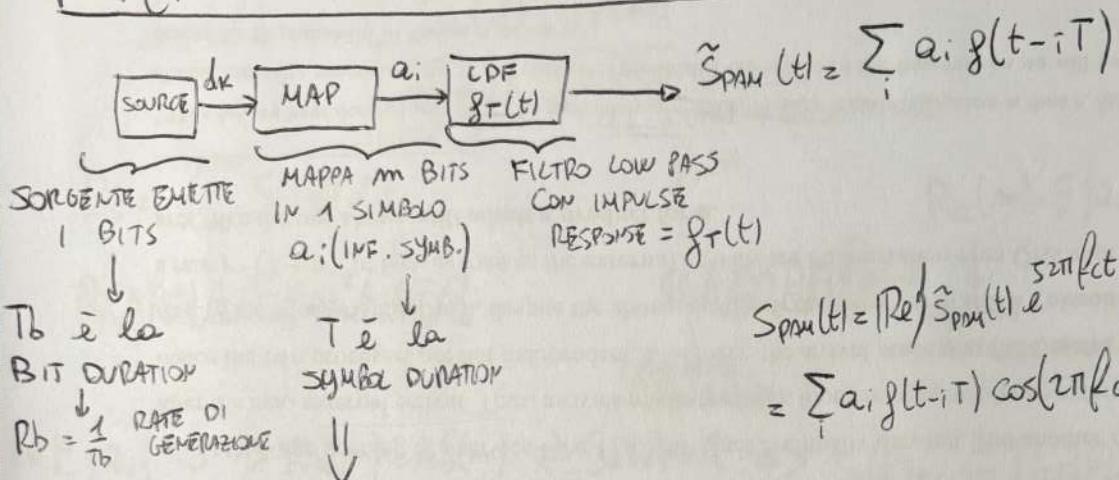
$$P_X = R_{XX}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XX}(f) df \quad \text{POTENZA DEL SEGNALE } X(t)$$

è la distribuzione di potenza nelle componenti frequentuali del segnale

DSDP ottenuta come
TRASFORMATA DI FOURIER
DELLA FUNZIONE DI
AUTOCORRRELAZIONE

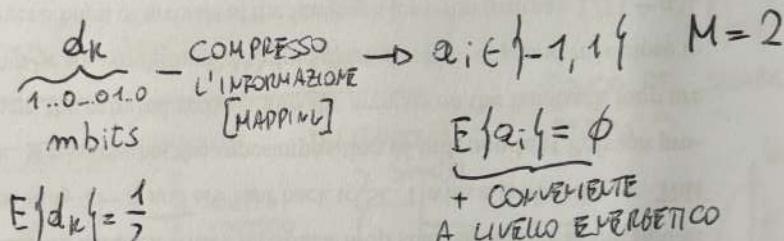
COMUNICAZIONI DI DIGITALI

PAM (PULSE AMPLITUDE MODULATOR)



$$\begin{aligned} S_{\text{mod}}(t) &= \Re \left\{ \sum_i a_i g_T(t-iT) e^{j2\pi f_c t} \right\} \\ &= \sum_i a_i g_T(t-iT) \cos(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

dk È UN PROCESSO STOCHASTICO
IN TEMPO DI DISCRETO



$M = 2^m$
GRANDEZZA DELLA COSTELLAZIONE
DI SIMBOLI

- STAZIONARIO? SÌ, $E[x] = 0$ ESSENDO 0,1 EQUIPROBABILI
- INDIPENDENTI? LO ASSUMIAMO

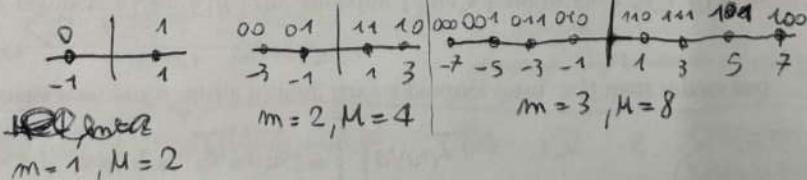
$> M \rightarrow > m \rightarrow > \text{bit/symbol} \rightarrow$ [B MINORE]
EFFICIENZA DI UTILIZZO DELLO SPETTRONE $\rightarrow E[\text{ENERGIA PER BIT}]$

$$T = m T_b = \log_2 M T_b \Rightarrow R = \frac{1}{T} = \frac{1}{\log_2 M T_b} = \frac{1}{\log_2 M} R_b \Rightarrow B \propto \frac{1}{\log_2 M} R_b$$

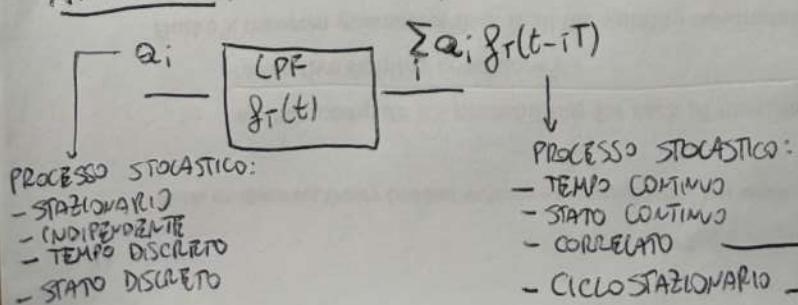
L'ANDAMENTO PER TRASMETTRE 1 bit

OGNI SIMBOLI
MAPPA m BIT

ESEMPI DI MAPPATURE:



ANALISI:



- PROCESSO STOCHASTICO:
- TEMPO CONTINUO
 - STATO CONTINUO
 - CORRELATO
 - CICLOSTAZIONARIO

OMI SYMBOL TIME $E = \text{COST}$
IN UN INTERVALLO PIÙ PICCOLO $E \neq \text{COST}$

DSDP DI UNA PAM (DEL SEGNALE TRASMESSO)

$$S_s(f) = \frac{1}{T} \underbrace{S_a(f)}_{\substack{\text{DSDP del} \\ \text{SIMBOLO } a_i}} \underbrace{|G_T(f)|^2}_{\substack{\text{RISPOSTA IN FREQUENZA} \\ \text{DEL FILTRO A TRASMETTORE}}}$$

$S(t)$ INVOLUCCRO COMPRESSO

$$P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f) df$$

$$g_T(t)$$

$$R_a(m) = E \left\{ a_i a_{i+m} \right\} = \begin{cases} E |a_i|^2 = A & m=0 \\ (E |a_i|)^2 & m \neq 0 \end{cases}$$

~~R_a(m) = E |a_i|² A_m~~

~~$\sum a_i a_{i+m} g_T(f)$~~
↓
FUNZIONE
DI AUTOCORRIZIONE
DEL PROCESSO a_i

$$\text{SE } E \{a_i\} = 0 \Rightarrow R_a(m) = A \delta(m) \Rightarrow S_a(f) = A \Rightarrow S_s(f) = \frac{A}{T} |G_T(f)|^2$$

ORA DI PENDERE
SOLO DAK
FILTRI

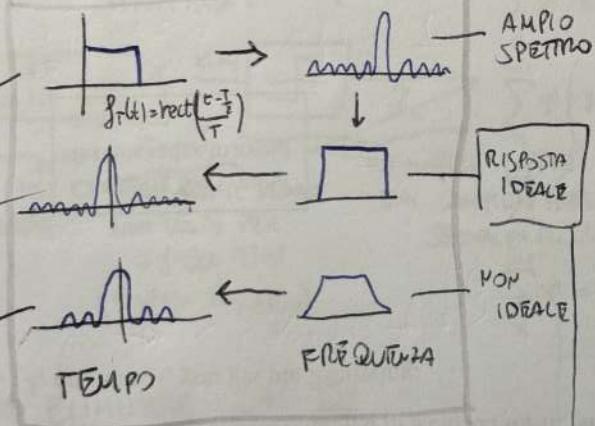
SCELTA DELL'IMPULSO PER UNA PAM

DALLA SCELTA DEL LPF DI TRASMISSIONE

DIPENDONO:
 } $S_a(f)$
 - BANDA DEL SEGNALE
 - SPETTRO " "
 - FILTRO

TIROLOGIE:

IMPULSO
RETTOANGOLARE



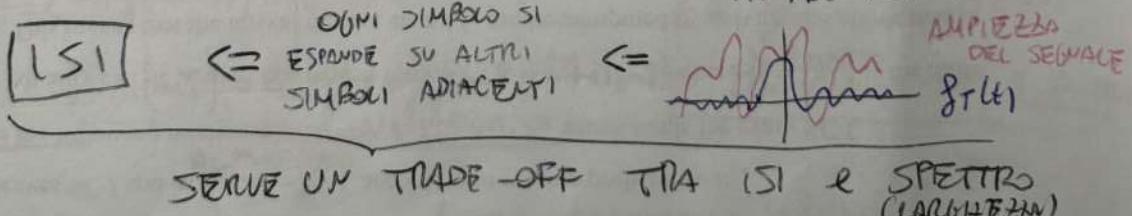
CODE
ZULUTE

CODE
DECODERI

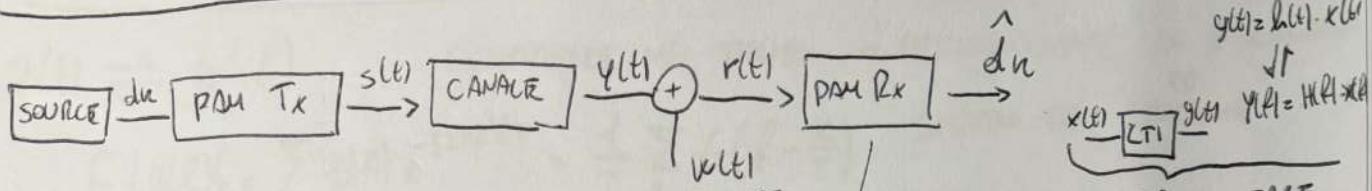
SE L'IMPULSO DI $g_T(t)$ DURA
PIÙ DI T (SYMBOL TIME) ALLORA
SI AVRA' SPETTRO + CORROTTO
MA L'ENERGIA DEL SIMBOLO È
DISTRIBUITA SU PIÙ INTERVALLI

MIGLIORARE → SPETTRO + CORROTTO

MA NEL TEMPO:



RICEVITORE PAM



$y(t) = s(t) \otimes h(t)$
RISPOSTA IMPULSIVA
DEL CANALE

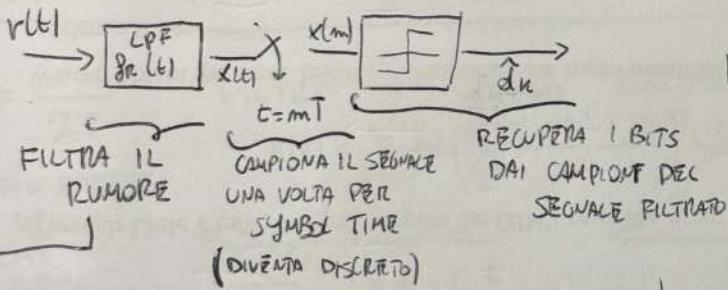
$w(t) \in N(0, \frac{N_0}{2})$ RUMORE GAUSSIANO BIANCO

- STAZIONARIO
- TEMPO CONTINUO
- STATO CONTINUO
- INDEPENDENTE
- DISTRIBUITO GAUSSIANO

$$S_{ww}(f) = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow R_{ww}(n) = \frac{N_0}{2} \delta(n)$$

DSDP di
w

STRUTTURA: (IN BANDA BASE)

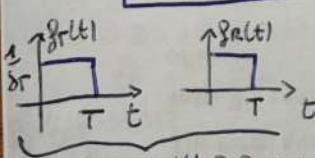


$g_r(t)$ DEVE ELIMINARE LA ISI

$$x(t)|_{t=mT} = x(m) = \sum_i a_i g(mT - iT) + m(mT) =$$

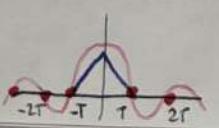
$$\sum_{m-i=l}^m a_i g(mT - iT) + m(mT) = a_m g(0) + \sum_{l=0}^{m-1} a_{m-l} g(lT) + m(mT)$$

MESMO SIMBOLO



$g(t) = g_r(t) \otimes g_r(t)$

NON HA ISI MA ESSENDO LIMITATO NEL TEMPO, IN FREQUENZA HA UN AMPIO SPECTRUM



BASIA CHE SIA 0 OGNI LT
MA AVENDO UNA DECADIMENTO LENTO
DELLA SIM, UNA PICCOLA VARIABILITA FA CRESCERE L'ISI

$$y(t) = h(t) \cdot x(t)$$

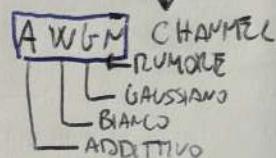
CANALE: FILTRO LINEARE TEMPO INVARIALE

APPROXIMAZIONE + SEMPLICE:

$$h(t) \approx \delta(t)$$

$$x(t) \otimes \delta(t) = x(t)$$

NON CAMBIA LA FORMA DEL SEGNALE



$$x(t) = r(t) \otimes g_r(t) = \sum_i a_i g_r(t-iT) + m(t)$$

$$x(t) = (y(t) + w(t)) \otimes g_r(t)$$

$$\sum_i a_i g_r(t-iT) \otimes g_r(t) + m(t)$$

CONVOLUZIONE DEI 3 FILTRI

$$L \text{ PER AZZERARLA: } g(lT) = \begin{cases} 1 & l=0 \\ 0 & l \neq 0 \end{cases}$$

CRITERIO DI NYQUIST

SOTTO QUESTA CONDIZIONE:

$$x(m) = a_m + m(mT)$$

È UNA RV, RICOLTINERATA DELLA POTENZA
che trovo SDDP

CRITERIO DI NYQUIST NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

$$g(t) \hat{\rightarrow} G(f)$$

CAMPIONARE NEL TEMPO = PERIODIZZARE IN FREQUENZA

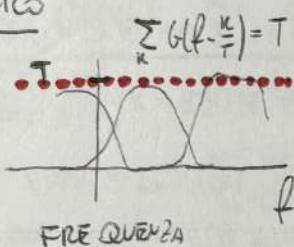
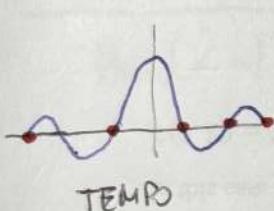
$$F\{g(t)\}_T = \sum_k g(t) e^{-j2\pi f k T} = \frac{1}{T} \sum_k G(f - \frac{k}{T})$$

$\underbrace{\quad}_{g(t) \text{ CAMPIONATA}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{SPETTORE DEL CAMPIONE}}$

$\underbrace{\quad}_{\text{OTTO T SECONDI}} \quad \underbrace{\quad}_{\text{TRASFORMATA DISCRETA DI FOURIER}}$

$$\text{SE } g(t) \text{ SODDISFA IL CRITERIO DI NYQUIST} \Rightarrow g(t) = \delta(t) \hat{\rightarrow} F\{\delta(t)\}_T = 1$$

CONFRONTO GRAFICO



$$\boxed{\sum_k G(f - \frac{k}{T}) = T}$$

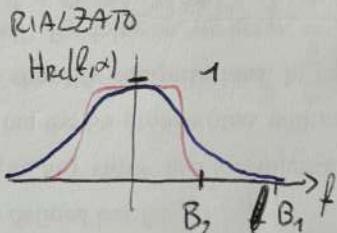
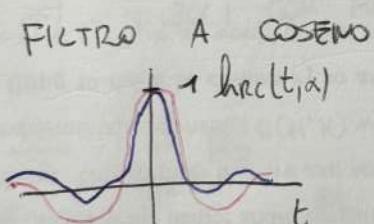
CRITERIO NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA

ESEMPIO DI FILTRO CHE SODDISFA IL CRITERIO DI NYQUIST

$$B_{RC} = \frac{1+\alpha}{2T}$$

CODE DI MOLTIPILE
VARIANO MENO
RAPIDAMENTE IN
FREQUENZA

VICEVERSA



$\alpha_1 = 1$
 $\alpha_2 = 0.1$
FATTORE DI ROLL-OFF

PER $\alpha = 0$ IL FILTRO
È UNA RECT, È
QUELLO A MINIMA BANDA

- LATI POSITIVI:
- CRITERIO DI NYQUIST SODDISFATTO
- PLESSIBILE, POSSO SCEGLIERE α

AWGN

$$\tilde{w}(t) = w_I(t) + jw_Q(t) \quad S_w(f) = 2N_0 \quad (\text{PERCHÉ CONSIDERO L'INVILUPPO COMPLESSO})$$

(SEMMOSCE ERA $\frac{N_0}{2}$)

COMPONENTI INDIPENDENTI: $S_{w_I}(f) = N_0 = S_{w_Q}(f)$

[POTENZA EQUAMENTE DISTRIBUITA NEI 2 CANALI]

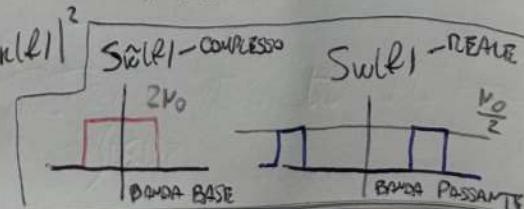
$$E|w_I(t) \cdot w_Q(t)|^2$$

$$E|w_I(t)|^2 \cdot E|w_Q(t)|^2 = 0$$

$\tilde{m}(t) = m_I(t) + jm_Q(t) = g_R(t) \otimes w(t)$ È UN PROCESSO STOCHASTICO
A MEDIA nulla GAUSSIANO

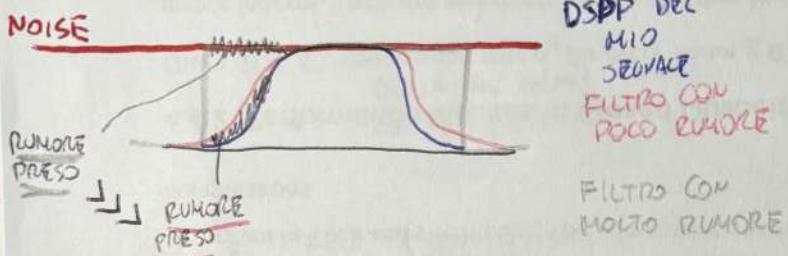
NON È BIANCO
NON ESSENDO COSTANTE
IN FREQUENZA, DATO
CHE DIPENDE
DA GRAD

$$\downarrow \quad \left. \begin{aligned} S_{\tilde{w}}(f) &= S_w(f) |G_R(f)|^2 = 2N_0 |G_R(f)|^2 \\ S_m(f) &= S_w(f) = N_0 |G_R(f)|^2 \end{aligned} \right\}$$



MATCHED FILTER

AL DI LÀ DELL'EFFETTO DEL CANALE \rightarrow DEVO MINIMIZZARE IL RUMORE
 $g_R(t) = g_T(t) \Rightarrow G_R(f) = G_T(f)$ { SCEGLIERI UGUALI MASSIMIZZA
 L'SMR AL RICEVITORE



SI DICE CHE IL FILTRO RICEVITORE È "MATCHED" RISPETTO AL FILTRO TRASMETTITORE

ROOT RAISE COSIN (RADICE DI COSENTO RIALZATO)

$$H_{RRC}(f, \alpha) = \sqrt{h_{rc}(f, \alpha)} \Rightarrow \text{SCELGO: } G_R(f) = G_T(f) = H_{RRC}(f, \alpha)$$

CHE SODDISFA:

- CRITERIO DI NYQUIST $\Rightarrow G_R(f) \cdot G_T(f) = H_{RRC}(f, \alpha)$
- FILTRI "MATCHED"

BANDWIDTH DELLA PAM CON RRC

$$(G_T(f) = H_{RRC}(f, \alpha), \text{ SYMBOLI CON MEDIA} = 0 : S_s(f) = \frac{1}{T} |S(f)|^2 = \frac{A}{T} |h_{rc}(f, \alpha)|^2)$$

(MULUPPO COMPRESO)

$$B_{PAM}^{(BB)} = \frac{1+\alpha}{2T} = \frac{1+\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 M} R_b$$

$$B_{PAM}^{(PB)} = 2 B_{PAM}^{(BB)} = \frac{1+\alpha}{T} = (1+\alpha) \frac{R_b}{\log_2(M)}$$

POTENZA PER TRASMETTERE UN SEGNALE PAM CON RRC

$$P_s^{(BB)} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_s(f) df = \frac{A}{T} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h_{rc}(f, \alpha) df}_{h_{rc}(t, \alpha)|_{t=0} = 1} = \frac{A}{T} \Rightarrow P_s^{(PB)} = \frac{1}{2} P_s^{(BB)} = \frac{A}{2T}$$

ENERGIA PER TRASMETTERE UN SIMBOLO PAM CON RRC

$$A = E \{ |a_i|^2 \} = \frac{M^2 - 1}{3} \quad E_s = P_s \cdot T = \frac{A}{2T} \cdot T = \frac{M^2 - 1}{6}$$

AWGN CON RRC

$$m(m) = \tilde{m}(t) \Big|_{t=mT} = m_I(m) + j m_Q(m)$$

INVESTITO COMPLESSO

INDIPENDENTI

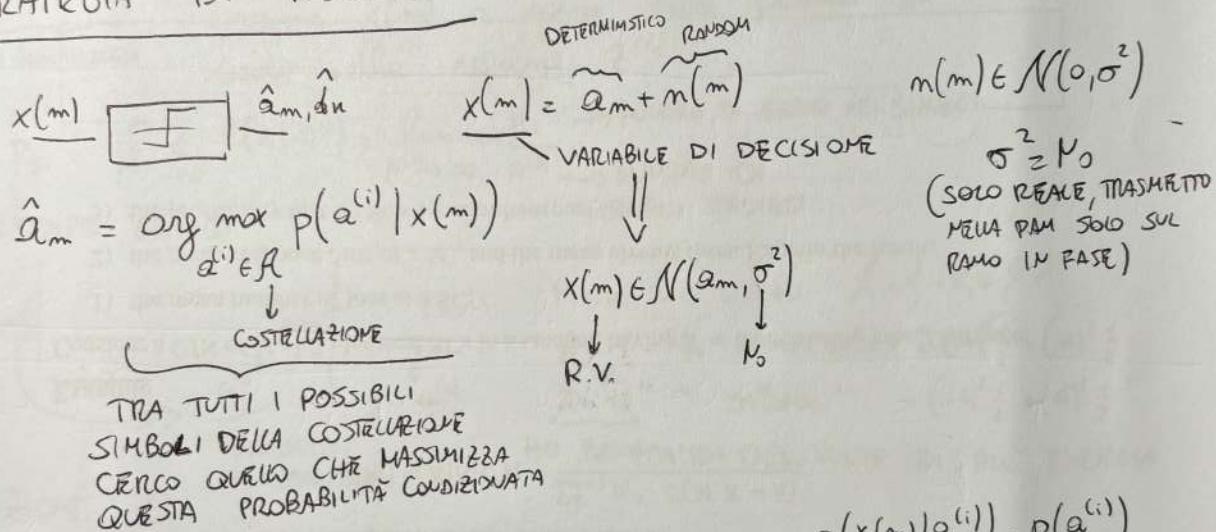
$$\sigma^2 = E \left[\|m(m)\|^2 \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) df = 2N_0 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} |G_R(f)|^2 df}_{\text{SE RRC} = 1}$$

VARIANZA
DELLA RV $m(m)$
CON $E[m] = 0$

$$\sigma^2 = 2N_0$$

$$\sigma_I^2 = \sigma_Q^2 = N_0$$

STRATEGIA DI DECISIONE



SE I SIMBOLI SONO EQUIPROBABILI:

$$p(a^{(i)} | x(m)) \propto p(x(m) | a^{(i)})$$

QUINDI $a^{(i)}$ MASSIMIZZA ENTRAMBI \Rightarrow DECISIONE A MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

$$p(a^{(i)} | x(m)) = \frac{p(x(m) | a^{(i)}) \cdot p(a^{(i)})}{p(x(m))} = 1 \text{ PERCHÉ HO RICEVUTO } x(m)$$

$$\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M p(x(m) | a^{(i)})$$

1 IN TUTTE LE POSSIBILITÀ

CONSIDERIAMO SOLO LA COMPONENTE IN FASE:

$$x(m) = X_I(m) \quad m(m) = M_I(m)$$

$$\sigma^2 = \sigma_{m_I}^2 = N_0$$

$$\text{PDF: } p(x(m) | a^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}} e^{-\frac{(x(m) - a^{(i)})^2}{2N_0}}$$

$a^{(i)}$ MINIMIZZA LA DISTANZA TRA IL CAMPIONE RICEVUTO E IL SIMBOLO

$$\hat{a}_m = \arg \min_{a^{(i)}} |x(m) - a^{(i)}|$$

ESEMPIO:

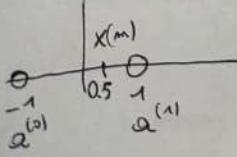
$$f = \{-1, 1\}$$

$$M=2 \rightarrow 2-\text{PAM}$$

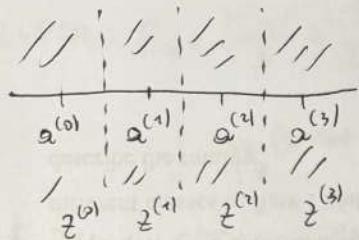
$$d(x(m), a^{(0)}) = 1.5$$

$$d(x(m), a^{(1)}) = 0.5 \leftarrow \text{DECIDO PER } a^{(1)}$$

$$\hat{a}_m = 1$$



DECISION REGIONS



PROBABILITÀ DI ERRORE NELLA PAM

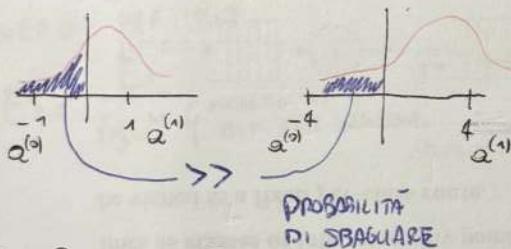
$P(e|a^{(i)})$ è la probabilità che avvenga ~~un errore~~ trasmesso $a^{(i)}$ il compagno $x(m)$ a causa della presenza di rumore non cade nella regione $z^{(i)}$

VOGGLIO MINIMIZZARLA

$$P_e = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} P(e|a^{(i)}) = \lim_{N^{(s)} \rightarrow \infty} \frac{N_e^{(s)}}{N^{(s)}} \rightarrow \text{NUMERO DI ERROTI NEI SIMBOLI}$$

$\rightarrow \text{NUMERO DI SIMBOLI TRASMESSI}$

ESEMPIO GRAFICO:



PERCHÉ NON SCELGO $A = \{-4, +4\}$?

$$A = 1 \text{ nel primo caso } = (-1)^2 \frac{1}{2} + (1)^2 \frac{1}{2}$$

$$A = 16 \text{ " secondo " } = (-4)^2 \frac{1}{2} + (4)^2 \frac{1}{2}$$

HO BISOGNO DI 16 VOLTE DI PIÙ ENERGIA

FUNZIONE Q

Q CALCOLA L'INTEGRALE DELLA CODA DI UNA DISTRIBUZIONE GAUSSIANA (L'AREA NELL'ESEMPIO SOPRA) [CDF DELLA GAUSSIANA]

$$\text{DATO } X \in \mathcal{N}(m_x, \sigma_x^2) \rightarrow \int_{-\infty}^{t_1} \text{PDF}(x) dx = Q\left(\frac{m_x - t_1}{\sigma_x}\right) \Rightarrow P\{X < t_1\} = Q\left(\frac{d(t_1, m_x)}{\sigma}\right)$$

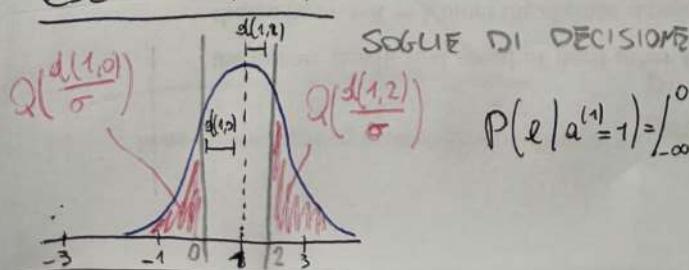
$$\int_{t_2}^{+\infty} \text{PDF}(x) dx = Q\left(\frac{t_2 - m_x}{\sigma}\right) \Rightarrow P\{X > t_2\} = Q\left(\frac{d(t_2, m_x)}{\sigma}\right) \quad i=1,2$$

• m_x È IL SIMBOLO $a^{(i)}$

• t_1, t_2 SONO LE SOGIE DI DECISIONE

PROPRIETÀ DI Q: $Q(-\infty) = 0$, $Q(+\infty) = 1$, $Q(0) = 0.5$, $Q(-x) = 1 - Q(x)$

ESEMPIO 4-PAM:



SOGIE DI DECISIONE

$$P(e|a^{(1)}=1) = \int_{-\infty}^0 p(x|a^{(1)}=1) dx + \int_1^{+\infty} p(x|a^{(1)}=1) dx = Q\left(\frac{d(1,0)}{\sigma}\right) + Q\left(\frac{d(1,2)}{\sigma}\right)$$

$$= 2 Q\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

PERCHÉ LE REGIONI SONO UGUALI

PROBABILITÀ DI ERRORE PAM IN FUNZIONE DI E_s/N_0

• 2-PAM : $E_s = \frac{M^2 - 1}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2E_s = 1, \sigma^2 = N_0, \frac{1}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{1}{N_0}} = \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}$

$$P_e^{(2\text{-PAM})} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$$

• 4-PAM : STESSO CALCOLO $\Rightarrow P_e^{(4\text{-PAM})} = \frac{3}{2}Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{5N_0}}\right)$

È 5 VOLTE MINORE,
LA 4-PAM NECESSITA
5 VOLTE L'ENERGIA DELLA
2-PAM PER AVERE
LA STESSA P_e

MAPPATURA DI GRAY

LE STRINGHE DI m BITS ASSOCIATE A SIMBOLI ADIACENTI DIFFERISCONO
DI UN SOLO BIT

ESEMPIO:

1 bit											
000	001	011	010	110 111 111 100							
-7	-5	-3	-1	1 3 5 7							

ENERGIA PER BIT:

$$E_b = \frac{E_s}{\log_2 M} \quad \begin{matrix} \text{NUMERO DI} \\ \text{BIT PER SIMBOLI} \end{matrix}$$

SI ASSUME CHE CON MAPPATURA DI GRAY
E MEDIO/ALTO SNR OGNI SIMBOLO ABBIA
SOLO 1 BIT DI ERRORE

SIGNIFICA CHE SE SI HA SOLO 1 BIT
DI ERRORE IL SIMBOLO POTRA "CADERE" SUL
NELLA REGIONE ADIACENTE A DESTRA O SINISTRA

$$P_e^{(b)} = \lim_{N(b) \rightarrow \infty} \frac{P_e^{(b)}}{P_e^{(s)}} \approx \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{P_e^{(s)}}{\log_2(M)} = \frac{1}{\log_2(M)} \lim_{N(s) \rightarrow \infty} \frac{P_e^{(s)}}{N(s)} = \underbrace{\frac{1}{\log_2 M} P_e^{(s)}}$$

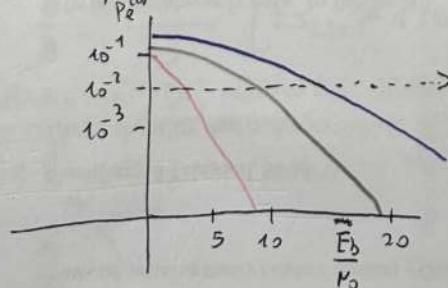
APPROXIMAZIONE

PROBABILITÀ DI ERRORE PAM SUL BIT

2-PAM : $M=2, m=1$ bit per simbolo $\Rightarrow P_e^{(b)} = P_e, E_b = E_s \Rightarrow Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right)$

4-PAM : $M=4, m=2$ bit " " $\Rightarrow P_e^{(b)} = \frac{1}{2} P_e, E_b = \frac{1}{2} E_s \Rightarrow \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4E_s}{5N_0}}\right)$

$M=2$
 $M=4$
 $M=8$



PER AVERE LA STESSA P_e , SE USO 1 bit
IN PIÙ, AVOGLIO BISOGNO DI 2 VOLTE O PIÙ
L'ENERGIA DEL CASO CON 1 bit IN MEZO

DI POSITIVO C'È CHE HO PIÙ BIT
CON LA STESSA B

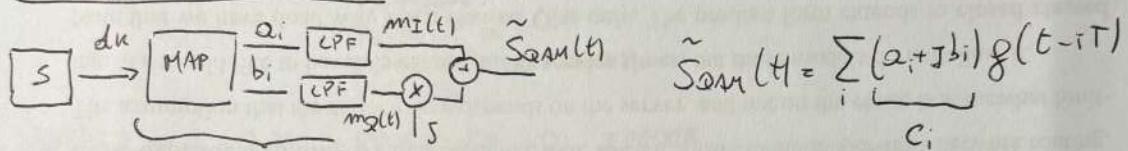
QAM (QUADRATURE AMPLITUDE MODULATOR)

$$\tilde{s}_{\text{QAM}}(t) = m_I(t) + j m_Q(t) \quad \text{ORTOGONALI (GRAZIE ALL'ORTOGONALITÀ DI SEUS E COSENO)}$$

$$m_I(t) = \sum_i a_i g(t-iT) \quad m_Q(t) = \sum_i b_i g(t-iT) \quad a_i, b_i \text{ SIMBOLI PAM}$$

$$\tilde{s}_{\text{QAM}}(t) = \underbrace{\sum_i a_i g(t-iT)}_{\text{IN FASÀ}} + j \underbrace{\sum_i b_i g(t-iT)}_{\text{IN QUADRATURA}} \quad \begin{cases} \text{UVALE A TRASMETTERE} \\ \text{DUE SEGNALI PAM} \end{cases}$$

TRASMETTORE QAM



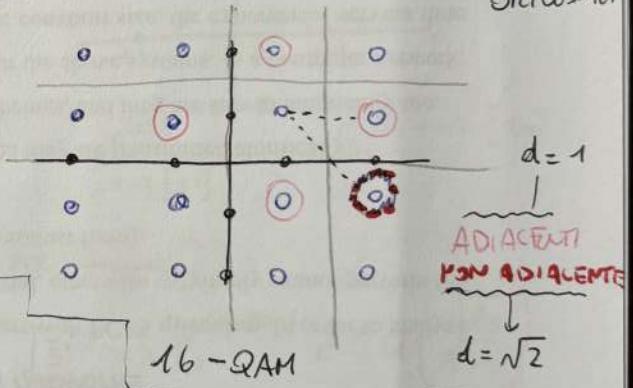
$$\tilde{s}_{\text{QAM}}(t) = \sum_i (a_i + j b_i) g(t-iT)$$

$\boxed{\text{MAP}}$ $c_i = a_i + j b_i$? SIMBOLI COMPLESSI \rightarrow UNICA DIFFERENZA CON LA PAM

$M_{\text{QAM}} = M_{\text{PAM}}^2$ DAL MOMENTO CHE LA QAM È LA COMBINAZIONE DI DUE PAM ORTOGONALI.

$$m_{\text{QAM}} = 2 m_{\text{PAM}}$$

$$2 \times 4\text{-PAM} = 16\text{-QAM} \quad [M_{\text{QAM}}=16, m_{\text{QAM}}=4]$$



ENERGIA DI UN SIMBOLO QAM

L'UNICA DIFFERENZA CON LA PAM È IL VALORE QUADRATICO MEDIO DEI SIMBOLI

$$A = E \{ C_m \cdot C_m^* \} = E \{ a_m^2 \} + E \{ b_m^2 \} = 2 \frac{M_{\text{PAM}}^2 - 1}{3} = 2 \frac{M_{\text{QAM}} - 1}{3}$$

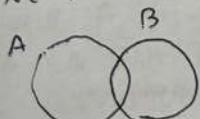
ESEMPIO:

$$A^{(16\text{-PAM})} = \frac{16^2 - 1}{3} = 85 \quad A^{(16\text{-QAM})} = 2 \cdot \frac{16 - 1}{3} = 10 \Rightarrow \begin{aligned} &\text{L'ENERGIA DEL SIMBOLO} \\ &\text{È MOLTO MINORE PERCHÉ LA QAM HA UNO SPECTRO PIÙ COMPATTO} \end{aligned}$$

$$E_s = \frac{4}{2} = \frac{M_{\text{QAM}} - 1}{3} \quad [E_{\text{QAM}} \approx \sqrt{E_{\text{PAM}}}]$$

PROBABILITÀ DI ERRORE QAM

$$x(m) = C_m + n(m) = (a_m + j b_m) + (n_I(m) + j n_Q(m)) = \underbrace{a_m + n_I(m)}_{\text{PARTE REALE}} + j \underbrace{(b_m + n_Q(m))}_{\text{PARTE COMPLESSA}}$$



$$A \cup B = A + B - A \cap B \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq P(A) + P(B)$$

$$\boxed{\text{UNION BOUND}}$$

PROBABILITÀ DI ERRORE SULLE DUE COMPONENTI È INDEPENDENTE PERCHÉ ESSA DIPENDE DAL RUMORE

$\mathcal{E}^{(i)} = \{ \text{error } | c^{(i)} \} = \mathcal{E}_I^{(i)} \cup \mathcal{E}_Q^{(i)} = \{ \text{error on channel I} \} + \{ \text{error on channel Q} \}$

ERRORE IN ENTRAMBI

$$P\{\epsilon | c^{(i)}\} = P\{\epsilon^{(i)}\} \leq P\{\epsilon_I^{(i)}\} + P\{\epsilon_Q^{(i)}\} \quad \text{UNION BOUND}$$

ESSENDO INDIPENDENTI LA P_e NEI 2 CANALI
PUÒ ESSERE CALCOLATA DISTINTAMENTE

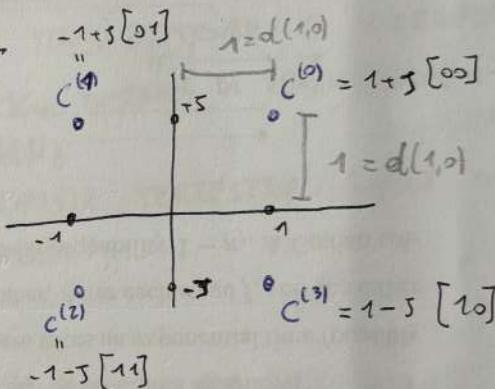
$$P_e^{(M-QAM)} < 2 \underbrace{P_e}_{(\text{PM}-\text{PM})}$$

PROBABILITÀ DI
ERRORE NELLA CORRISPONDENTE
 P_{PM}

ESEMPIO \Rightarrow 4-QAM PROBABILITÀ DI ERRORE

$$P_e^{(4-QAM)} = \frac{1}{4} \sum_{i=0}^3 P(\epsilon | c^{(i)}) = P(\epsilon | c^{(0)})$$

$$\begin{aligned} P(\epsilon | c^{(0)}) &< Q\left(\frac{d(1,0)}{\sigma_{mI}}\right) + Q\left(\frac{d(1,0)}{\sigma_{mQ}}\right) \\ &= 2 Q\left(\frac{1}{\sigma}\right) = 2 P_e^{(2-\text{PM})} \end{aligned}$$



$$E_s = \frac{A}{2}$$

$\sigma = \sqrt{N_0}$ [SI A PER REALE CHE PER IMMAGINARIA]

$$E_s = \frac{4-1}{3} = 1 \Rightarrow E_s = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{E_s}{N_0}} \Rightarrow P_e^{(4-QAM)} < 2 Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$

16-QAM

$$M=16, E_s = \frac{16-1}{3} = 5 \Rightarrow \frac{1}{5} E_s = 1 \Rightarrow P_e^{(16-QAM)} < 2 \cdot \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{5N_0}}\right)$$

PROBABILITÀ DI ERRORE SUL BIT M-QAM

$$P_e^{(M-QAM, b)} = \lim_{N^{(b)} \rightarrow \infty} \frac{N_e^{(b)}}{N^{(b)}} \approx \lim_{N^{(s)} \rightarrow \infty} \frac{N_e^{(s)}}{\log_2 M N^{(s)}} = \frac{1}{\log_2 M} \lim_{N^{(s)} \rightarrow \infty} \frac{N_e^{(s)}}{N^{(s)}} = \frac{1}{\log_2 M} P_e^{(M-QAM)} =$$

$$= \frac{1}{\log_2 \sqrt{M}} \cancel{P_e^{(\sqrt{M}-\text{PM})}} = \underline{\underline{P_e^{(\sqrt{M}-\text{PM}, b)}}}$$

PROBABILITÀ DI
ERRORE M-QAM

UVVALE A $\sqrt{M}-\text{PM}$

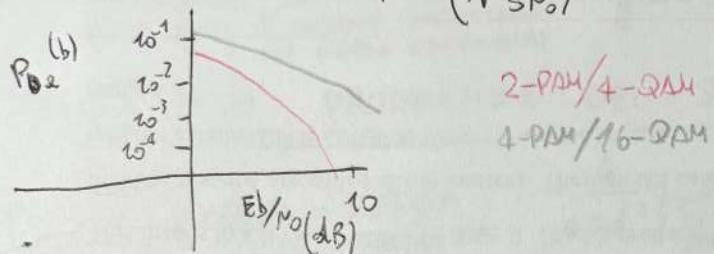
MA LA QAM TRASMETTE
IL DOPPIO DEI BIT

CONFRONTO PROBABILITÀ DI ERRORE SUL BIT 4-QAM e 16-QAM

$$P_e^{(4\text{-QAM}, b)} = P_e^{(2\text{-PSK}, b)} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$

$$P_e^{(16\text{-QAM})} = P_e^{(4\text{-PSK}, b)} = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{SN_0}}\right)$$

• L'ENERGIA PER TRASMETTERE UN BIT NELLA QAM È MOLTO MINORE RISPETTO ALLA PSK PERCHÉ HA UNA COSTELLAZIONE PIÙ COMPATTA



2-PSK/QAM

4-PSK/QAM

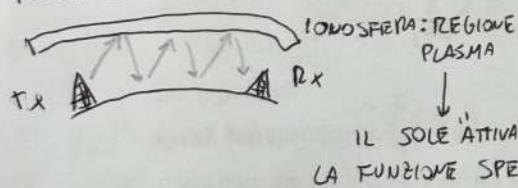
CANALE DI PROPAGAZIONE WIRELESS

OBIETTIVO: MODELLARE CIÒ CHE C'È TRA TRASMETTORE E RICEVITORE

- TRASMISSIONI CIVELLO "TERRA":

- 10 - 100 Km DISTANZA DI TRASMISSIONE
- $f < 2 \text{ MHz}$
- LA SUPERFICIE TERRESTRE AGISCE DA "CONDUTTORE"

- TRASMISSIONI CIVELLO "CIELO":

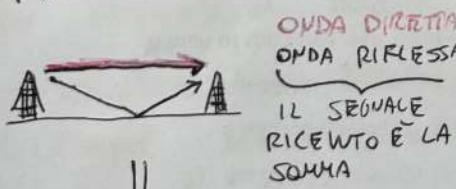


- $f \approx 10 \text{ MHz}$

- LA IONOSFERA FUNGE DA SPECCHIO E RIFLETTE I SEGNALI SULLA TERRA
- SI POSSONO COPRIRE LUNGHE DISTANZE

LA FUNZIONE SPECCHIO

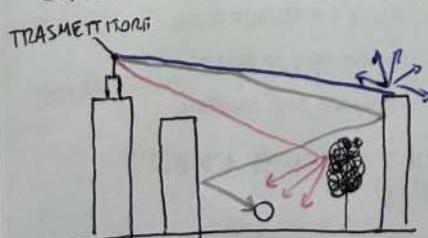
- TRASMISSIONI CIVELLO "SPAZIO":



- $f > 30 \text{ MHz}$

- PROPAGAZIONE A "LINEA DI VISTA"
- $> f \Rightarrow >$ ATTENZIONE ALLA PROPAGAZIONE

"SPACE WAVE" È IL PIÙ IMPORTANTE ($30 \text{ MHz} - 30 \text{ GHz}$)



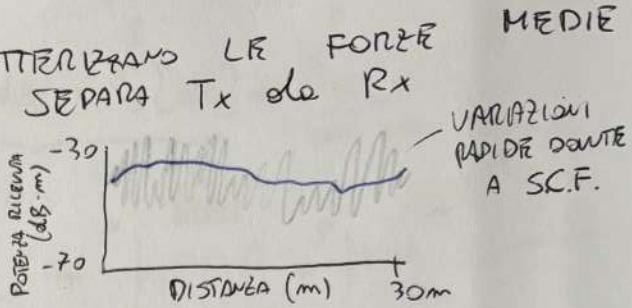
RIFLESSIONE
DIFFRAZIONE
DISPERSIONE

I FENOMENI DI PROPAGAZIONE SI POSSONO RIASSUMERE IN:
 - LARGE SCALE FADING
 - SMALL " "

LARGE SCALE FADING

SONO TUTTI QUEI MODELLI CHE CARATTERIZZANO LE FORZE MEDIE DEI SEGNALI NELLA DISTANZA CHE SEPARA Tx da Rx

$$LSF = \underbrace{\text{PATH LOSS} + \text{SHADOWING}}_{\substack{\text{E UNA SORTA DI COSTANTE MOLTIPLICATIVA} \\ \ll 1 \text{ CHE MODELLA L'ATTENUAZIONE}}}$$



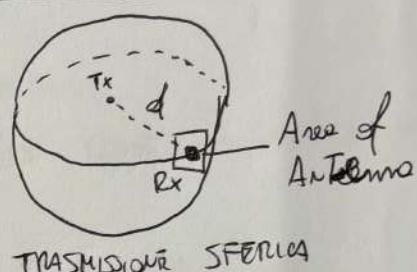
FISICA DELLA PROPAGAZIONE DEL SEGNALE WIRELESS

$$\text{POTENZA RICEVUTA} = \text{POTENZA TRASMESSA} \cdot \frac{A}{4\pi d^2} \quad \begin{matrix} A \\ \text{SUPERFICIE DELLA SFERA} \end{matrix}$$

$$\text{ESEMPIO: } A = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \quad \lambda = 0.1 \text{ m (3 GHz)}$$

$$d = 1 \text{ m} \rightarrow 0.006 \% \text{ P RICEVUTA}$$

$$d = 10 \text{ m} \rightarrow 0.00006 \% \text{ " " }$$



TRANSMISSIONE SFERICA

• PATH-LOSS

CONSIDERANDO SOLO LA PATHLOSS, LA MEDIA DELLA POTENZA DEL SEGNALE RICEVUTA:

$$P_{Rx} \propto P_{Tx} \Gamma(f_0, d_0) \left(\frac{d_0}{d} \right)^n \quad \begin{matrix} \text{"MEAN FIELD TERM"} \\ \text{DISTANZA Tx-Rx } [\gamma] \end{matrix}$$

$$\text{PATH-LOSS: } A_{PL} = \frac{P_{Tx}}{P_{Rx}} = \Gamma(f_0, d_0) \left(\frac{d_0}{d} \right)^n$$

A PIÙ ALTE FREQUENZE (GHz)
LE Onde sono così sottili
CHE LE MOLECULE DELL'ARIA
NE ATTENUANO LA POTENZA

$\left(\frac{\lambda}{4\pi d_0} \right)^2$ $\begin{matrix} \text{SI} \\ \text{DIPENDE DALL'AMBIENTE} \end{matrix}$
è una ATTENUAZIONE
DONATA ALLO SPAZIO APERTO

$d_0 \rightarrow$ è una distanza specifica
alla quale è minima
la "perdita di potenza"

COPERTURA: AMPIO TERRITORIO COPERTO [BASSA FREQ.]
VS CAPACITÀ: BANDA DISPONIBILE [ALTE FREQ.]

• SHADOWING

STESSA DISTANZA DA Tx ALLORA STESSA PATHLOSS? NON PROPRIO!

$\Delta \rightarrow *$ CI POSSONO ESSERE VARIAZIONI RANDOM DELLA MEDIA ATTENUAZIONE

SHADOWING: A_s è R.V. LOG-NORMAL DISTRIBUITA, $\mu=0, \sigma_s [\text{dB}]$

$$\text{PDF: } p(A_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_s} e^{-\frac{A_s^2}{2\sigma_s^2}}$$

\downarrow
A CAUSA DI
OSTACOLI AD
ESTERNO

POTENZA RICEVUTA

$$P_{Rx} [\text{dB} \cdot \text{m}] = P_{Tx} [\text{dB} \cdot \text{m}] + \underbrace{A_{PL} [\text{dB}] + A_s [\text{dB}]}_{\substack{\text{DETERMINISTICA} \\ \text{R.V.}}} + A_{SS} [\text{dB}]$$

FLUTTA RAPIDAMENTE CON LA DISTANZA
SMALL SCALE RADING

$\log\left(\frac{P_{Rx}}{P_{Tx}}\right)$ ↗ DISTANZA

A_{LS}

SMALL SCALE FADING

IL CANALE DI PROPAGAZIONE PUÒ ESSERE MODULATO COME UN FILTRO LTI

$$y(t) = s(t) \otimes h(t)$$

→ RISPOSTA IMPULSIVA DEL CANALE

→ DOVUTA SOLO ALLO SMALL SCALE RADING

S.S.F.: MISURA LE VARIAZIONI

DELLA POTENZA Istantanea RICEVUTA

$$y(t) = A_{LS} \sum_{l=0}^{N_c-1} \alpha_l e^{j\phi_l} s(t - \tau_l)$$

L'ATTENUAZIONE L'RITARDO

LARGE SCALE

MODELLO DELL'INVILUPPO COMPLESSO
detto "MULTI PATH" GRANDE

$- \alpha_l, \phi_l$ non R.V. $\Rightarrow \phi_l = 2\pi f_c \Delta t$ ANCHE SE
- τ_l DETERMINISTICO $\Rightarrow \tau_l = \frac{\text{SPAZIO}}{C}$ PICCOLO UNA SUA VARIAZIONE CAUSA VARIAZIONE NON TRASCURABILE DI ϕ_l

$$p(\alpha_l) = f_A(\alpha_l) = \begin{cases} \frac{\alpha_l}{\sigma^2} e^{-\frac{\alpha_l^2}{2\sigma^2}} & \alpha_l \geq 0 \\ 0 & \alpha_l < 0 \end{cases}$$

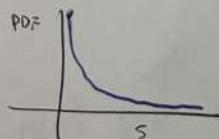
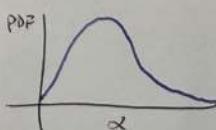
$$p(s) = f_s(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{s}{2\sigma^2}} & s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$$

DISTRIBUZIONE RAYLEIGH :

POTENZA DEL CANALE : $s = \alpha^2$

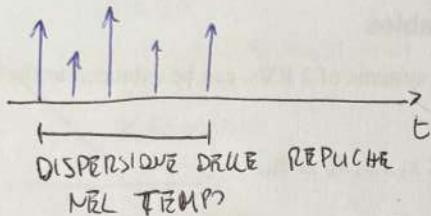
$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$\text{PDF}(\phi_l) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & 0 \leq \phi_l \leq 2\pi \\ 0 & \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$



MULTIPATH CHANNEL

LE VARIETÀ DI REPliche POSSONO INTERFERIRE TRA loro CREAMO ISI



$$x(m) = x(t) \Big|_{t=mt} = \sum_k c_{m-k} g(kT) = c_m g(0) + \underbrace{\sum_{k \neq m} c_{m-k} g(kT)}_{\text{ABBIAMO COMUNQUE ISI PERCHÉ NON CONTROLLIAMO } T}$$

SE IL T È PICCOLO

↓
CONSIDERIAMO LE REPliche SOVRAPPONTE E NON ABBIAMO PROBLEMI

$$x(t) = \sum_i c_i g(t-iT)$$

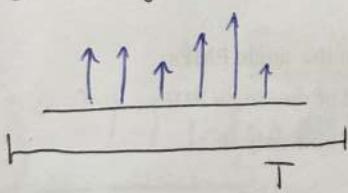
$$g(t) = f_T \otimes h(t) \otimes g_R(t)$$

$$f(t) = \sum_{l=0}^{M-1} \alpha_l e^{j2\pi l t} f_R(t - \tau_l)$$

$f_R(t) = f_T(t) \otimes g_R(t)$
SCELTI IN MODO TALE CHE SODDISFANO PYQUIST

DELAY SPREAD

Σ DELAY SPREAD: MISURA LA DISPERSONE DELLE REPliche NEL TEMPO

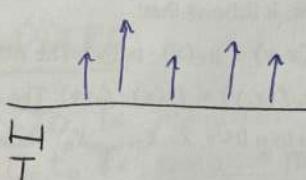


CANALE "FLAT FADING":

$\sigma_c \ll T$ SYMBOL TIME

SOLO UN PATH

$$H(f) = \sum_{l=0}^{M-1} \alpha_l e^{j2\pi l f} e^{-j2\pi f \tau_l}$$



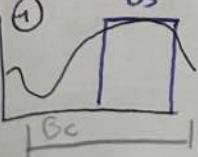
CANALE "MULTIPATH":

$\sigma_c > T$ LE REPliche INTERFERISCONO

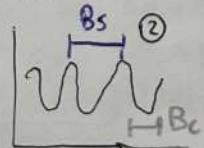
COHERENCE BANDWIDTH

È L'INTERVALLO FREQUENZIALE NEL QUALE $H(f)$ PUÒ ESSERE COSTANTE:

① B_s



② B_c



$$B_c = \frac{1}{5\sigma_c} \Rightarrow \begin{cases} ① \sigma_c \ll T \rightarrow B_c > B_s \text{ FLAT} \\ ② \sigma_c > T \rightarrow B_c < B_s \text{ MULTIPATH} \end{cases}$$

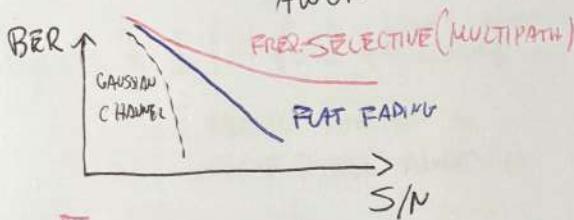
IL CANALE AGISCE COME UN FILTRO CHE DISTORCE IL SEGNALE

FLAT FADING CHANNEL / MULTIPATH / GAUSSIAN ON BER

$$\bullet \quad X(m) = C_m + n(m)$$

AWGN

$h(t) = \delta(t)$ COSTANTE NEL TEMPO
CANALE GAUSSIANO



$$\bullet \quad X(m) = g(0)c_m + \sum_{k \neq 0} g(kt)c_{m-k} + n(m)$$

ISI

$$\bullet \quad X(m) = \alpha c_m + n(m)$$

ATTENZIONE
DISTRIBUITA RAYLEIGH

$$E\{\alpha^2\} = 1$$

NON HA ISI MA PER AVERE LA STESSA BER NECESSITA DI PIÙ ENERGIA

PEGGIOR CASO POSSIBILE

CANALE TEMPO-VARIANTE

$$h(t, \tau) = A_{LS} \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l(t) e^{j\phi_l(t)} \delta(\tau - \tau_l)$$

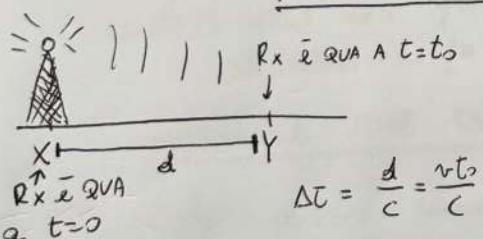
CAMBIANO VELOCEMENTE, PIÙ DEL L.S. E τ_l

TEMPO ASSOLUTO TEMPO RELATIVO
TRA ISTANTE DI TRASMISSIONE E RICEZIONE

QUANDO FARDO LA CONVOLUZIONE
PERÒ LI CONSIDERO FISSI

PICCOLO PERCHÉ I SEGNALI SI MUOVONO ALLA VELOCITÀ DELLA LUCE

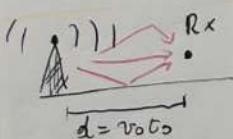
EFFETTO DOPPLER



$$\begin{aligned} t=0 \quad & \text{TRASMETTE: } s(t) = \sin(2\pi f_c t) \\ t=t_0 \quad & \text{TRASMETTE: } s(t_0) = \sin(2\pi f_c t_0) \\ t=t_0 \quad & \text{RICEVE: } y_r(t_0) = \sin(2\pi f_c (t_0 - \Delta t)) = \\ & = \sin(2\pi f_c t_0 - f_c \frac{v}{c} t_0) = \\ & = \sin(2\pi (f_c - f_c \frac{v}{c}) t_0) \\ f_D & = -\frac{v}{\lambda} \end{aligned}$$

SEGNALE RICEVUTO A X: buzz
" " " A Y: buzz
 Δt : RITARDO DI PROPAGAZIONE

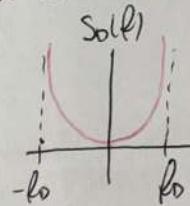
SPETTRO DOPPLER



- PIÙ REPliche ARRIVANO A DIFFERENTI ANGOLATURE, QUESTO È CHIAMATO "DOPPLER SPREAD"
- IL SEGNALE RICEVUTO È MODELLOATO COME UN PROCESSO STOCHASTICO DEFINITO DALL'AUTOCORRELAZIONE E DS.D.P.
- IL CANALE TEMPO VARIANTE È MODULATO DA "JAMES' DOPPLER SPECTRUM"

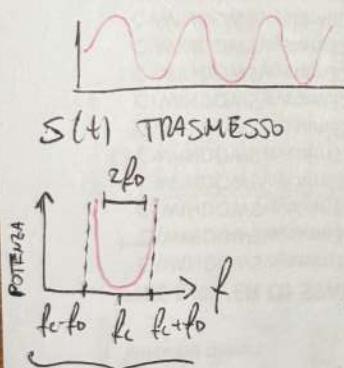
$$S_0(f) = \frac{1}{\pi f_D} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_D} \right)^2} \right)^{-1}$$

è la DSOP di un CANALE
TEMPO VARIANTE



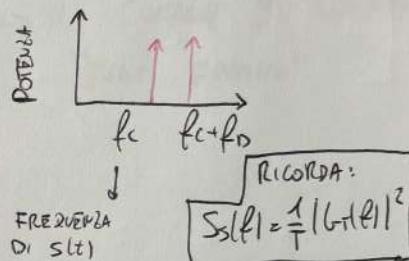
$$g(t) = S_0(2\pi f_D t) \Rightarrow S_0(f)$$

L'ESSENCE FUNCTION DI
ORDINE 0 DEL PRIMO TIPO



$$y(t) = \alpha(t) \sin(2\pi f_c t)$$

$$\Rightarrow S(f) = S_s(f) \otimes S_0(f) = S_0(f - f_c)$$



DALE'S DOPPLER SPECTRUM \Rightarrow LO SPECTRUM DEL SEGNALE VIENE AMPLIATO (A CAUSA DEL MOVIMENTO) DEL RICEVITORE

COME GIÀ DETTO, L'EFFETTO DELLA MOBILITÀ IN UN CANALE MULTIPATH RENDE IL CANALE TEMPO VARIANTE

$$\text{FREQUENCY FLAT} \Rightarrow y(t) = \alpha(t) e^{j\phi(t)} s(t - \tau)$$

$$\text{"SELECTIVE} \Rightarrow y(t) = \sum_{k=0}^{r_c-1} \alpha_k(t) e^{j\phi_k(t)} s(t - \tau_k)$$

COHERENCE TIME DEL CANALE

$T_c = \frac{1}{2f_D}$ è il tempo nel quale il canale può essere considerato COSTANTE

$$\text{COHERENCE DISTANCE: } d_c = \sqrt{T_c} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{f_D}} = \frac{\lambda}{2}$$

$T_c > T_s \Rightarrow$ NESSUN PROBLEMA $\rightarrow B_s \gg f_D$

L SYMBOL TIME BANDA DEL SEGNALE

DOPPLER SPREAD
TRASCURABILE
(SLOW FADING)

$T_c < T_s \rightarrow B_s \ll f_D$ NON TRASCURABILE
(FAST FADING)

MULTI-CARRIER SIGNALS

(SOLUZIONE AI PROBLEMI
DEL CANALE SELETTIVO
FADING)

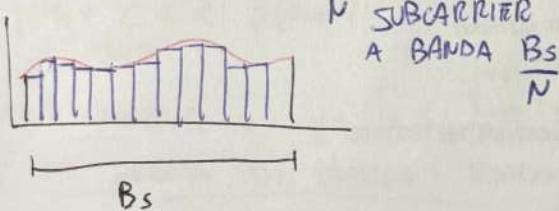
- SONO LA BASE FISICA DI LTE e 5G
- ROBUSTEZZA CONTRO IL MULTIPATH FADING

NON SI TRASMETTE PIÙ L'INTERO SEGNALE A B_s BANDA \rightarrow N STREAM MULTICARRIER PARALLELE A BANDA $\frac{B_s}{N}$

$B_s > B_c \rightarrow$ FREQUENCY SELECTIVE CHANNEL



MA NOI TRASMETTIAMO A $\frac{B_s}{N} < B_c \Rightarrow$ IL CANALE SI CONSIDERA "FLAT FADING"



$$h_{eq}(t) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l) s(t - lT_s) \quad \text{RISPOSTA IMPULSIVA RICAMPIONATA A INTERVALLI MULTIPLO DEL SYMBOL TIME } T_s$$

$$y(t) = \sum_{m=0}^{M-1} \alpha_m e^{j\phi_m} s(t - \tau_m) = \sum_{l=0}^{L-1} \underbrace{h(l)}_{\text{IL CANALE È CHIAMATO "TAPPED DELAY LINE" E IN HA 1 SAMPLE DEL CANALE OGNI}} s(t - lT_s)$$

$T_s, B_s = \frac{1}{T_s}$

$$y(k) = h(0)s(k) + \underbrace{\sum_{l=1}^{L-1} h(l)s(k-l)}_{\text{ISI CAUSATA DAL MULTIPATH}}$$

CONSIDERIAMO UN BLOCCO DI N CAMPIONI: $[s(0), s(1), \dots, s(N-1)]$

Dopo il passaggio attraverso il canale: $y(k) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l)s(k-l) =$

$\boxed{s(i) \quad i < 0 \quad \text{NON È DEFINITO}} \\ \text{PERCHÉ LAVORIAMO CON UN BLOCCO DI } N$

$$\begin{aligned} y(0) &= h(0)s(0) \\ y(1) &= h(0)s(1) + h(1)s(0) \end{aligned}$$

$$y(N-1) = h(0)s(N-1) + h(1)s(N-2) + \dots + h(L-1)s(N-L)$$

$$y = Hs$$

$N \times 1 \quad N \times N \quad N \times 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y(0) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & \dots & 0 \\ h(1) & h(0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h(L-1) & h(L-2) & \dots & h(0) \\ 0 & 0 & \dots & h(1)h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ \vdots \\ s(N-1) \end{bmatrix}$$

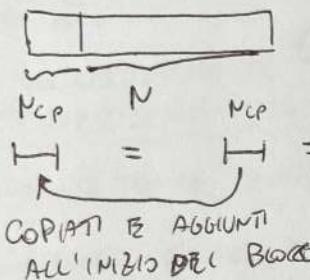
GLI ELEMENTI DI H SULLE DIAGONALI SONO TUTTI UGUALI.

CYCCLIC EXTENSION

$$\bar{s} = [s(N-N_{CP}), \dots, s(N-1), s(0), \dots, s(N-1)]$$

$N + N_{CP}$ CAMPIONI

$$N_{CP} > L$$



$$y(n) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l) \bar{s}(n-l)$$

OGNI RIGA PUÒ ESSERE OTTENUTA DALL'ALTRA SHIFITANDO
DIAGONALI SEMPRE UGUALI, OGNI RIGA ORA CONTIENE TUTTI
GLI ELEMENTI DI h

NUOVA MATRICE: $y = \bar{H} s$
 C'È UNA PENDITA DI ENERGIA: BLOCCHI DI N SAMPLE, ME TRANSMETTO $N + N_{CP}$

$\bar{H} = F^H H F$: MODO PER DIAGONALIZZARE

MATRICE TRASFORMATO: $[F]_{k,m} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j \frac{2\pi k m}{N}}$

DI FOURIER

$$[H]_{m,n} = H(m) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l) e^{-j \frac{2\pi l m}{N}}$$

F È UNITARIA: $F^H F = F F^H = I_N$

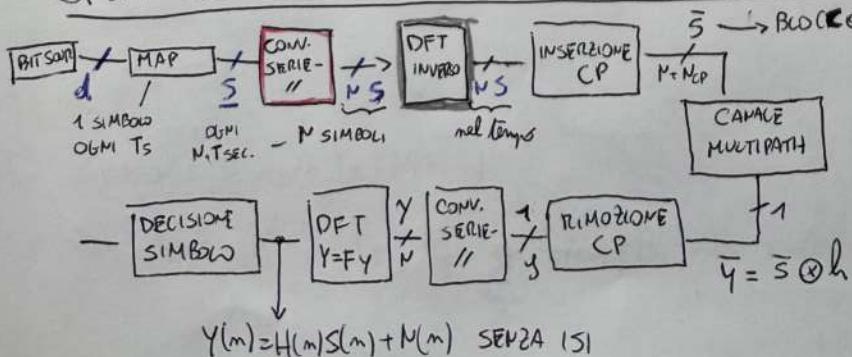
m-ESIMO ELEMENTO
CUNTO LA DIAGONALE

$$Y = F Y, S = F S \Rightarrow Y = F Y = F \bar{H} S = F F^H H F S = H S$$

DATO CHE H È DIAGONALE IL SEGNALE RICEVUTO SUL SUBCARRIER m
DIPENDE SOLO DA QUELLO INVIAZO SULLO STESSO SUBCARRIER

$$Y(m) = H(m) S(m) \Rightarrow \text{NO ISI} \text{ NEL DOMINIO DELLA FREQUENZA}$$

OFDM RICETRASMETTITORE IN BANDA BASE



BLOCKO DI CAMPIONI CON PREFFISSO CIClico
COLLEZIONA N SIMBOLI CONSECUTIVI IN UN VETTORE $S = [s(0), \dots, s(N-1)]$

$$S = F^H S$$

INTERPRETAZIONE OFDM

$$s(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} s(m) e^{\frac{j2\pi mk}{N}}, k = 0, \dots, N-1$$

GRAZIE ALL'ORTOGONALITÀ I SIMBOI
NON INTERFERISCONO TRA CORPO
[ORTOGONALITÀ TRA LE SINUSOIDI]

$m=0 \Rightarrow$ SEGNALE COSTANTE

$$m=1 = \frac{1}{\sqrt{N}} s(1) e^{\frac{j2\pi k}{N}} \quad 1 \text{ CICLO SU } N \text{ CAMPIONI}$$

$$m=2 = \frac{1}{\sqrt{N}} s(2) e^{\frac{j2\pi k}{N}} \quad 2 \text{ CICLI SU } N \text{ CAMPIONI}$$

$$\sqrt{N} s_m(k) = s(m) e^{\frac{j2\pi mk}{N}} = s(m) e^{\frac{j2\pi m k T_s}{B_s}} =$$

K-ESIMO SAMPLE

M-ESIMO SUBCARRIER

BANDA DI OGNI SIMBOL

$t=kT_s$

SINUSOIDI CAMPIONATE A kT_s

$$Y_m(k) = s(m) H(m) e^{\frac{j2\pi m k T_s}{B_s}}$$

SEGNAL RICEVUTO SULL' M-ESIMO SUBCARRIER

SIMBOLO m FREQUENZA

ESPOENZIALE COMPLESSO CHE OSCILLA A $m\Delta f$ PER LA DURATA DI $M + M_{CP}$ SAMPLE

L'INSERZIONE DEL CP RENDRÀ IL CANALE "FLAT" PER OGNI SUBCARRIER

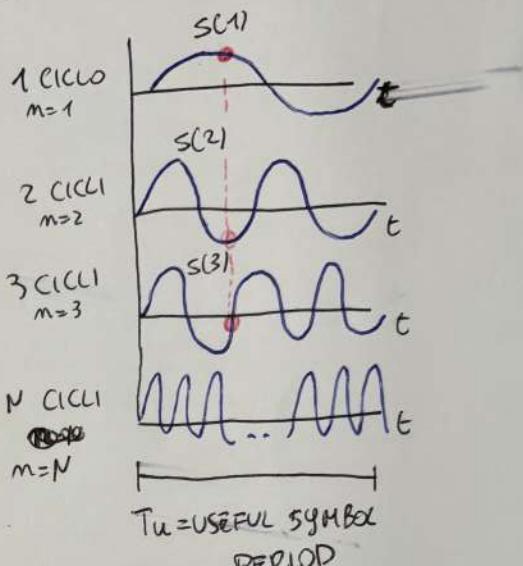
DSBPSK di un segnale OFDM è la somma di N simboli, uno per ogni subcarrier, le sinc sono ortogonali

$$B_{OFDM} \approx N \cdot \frac{1}{M T_s} = \frac{1}{T_s}$$

SIMBOL DURATION: $T_{OFDM} = T_s (M + M_{CP})$

SCEGLIENDO BENE M : $T_s < \sigma_c \ll T_{OFDM}, B_s > B_c \gg \Delta f$

SUMMA DI DIFFERENTI SINUSOIDI

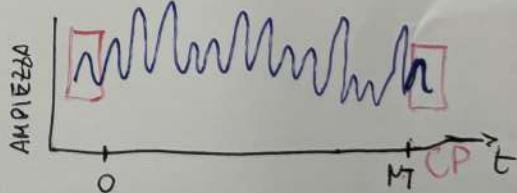


COMBINAZIONE LINEARE
DI QUESTI SIMBOLI
[$s(0), \dots, s(N-1)$]

IN B_s TRASMETTIAMO N SIMBOLI

$$B_s = \frac{1}{T_s} \quad \begin{cases} \text{BANDA OCCUPATA} \\ \text{DAL SEGNALE OFDM} \end{cases}$$

SAMPLING TIME



RESO SONO SINUSOIDI SOMMATE INSIEME, POSSO SEPARARLE QUANDO VOGLIO PERCHÉ OGNI SEGNALE È TRASMESSO AD UNA FREQUENZA DIVERSA [$\cdot e^{j\omega t}$...]

B_s [BANDA PER OGNI SUBCARRIER]

DECISIONE DEL SIMBOLO AL RICEVITORE OFDM

$$r(n) = s(n) + n(n)$$

↓

SEGNALE
RICEVUTO

OUTPUT
ORARIO → $R = Fr = Fs + Fm = Y + N = HS + N$

FOURIER
TRANSFORM

$\underbrace{R(m)}_{\substack{\text{SEGNALE SUL} \\ \text{SUBCARRIER } m}} = H(m) S(m) + N(m) \quad m=0, \dots, M-1$

STATISTICHE DEL RUMORE NELLA OFDM

$$n(n) \in \mathcal{N}(0, 2N_0) \leftrightarrow N(m) \in \mathcal{N}(0, 2N_0) \quad E\{N\} = E\{Fm\} = FE\{m\} = 0$$

↓
GAUSSIANO

$$R_N = E\{NN^H\} = F E\{mm^H\} F^H = 2N_0 I_M$$

L'MATRICE DI AUTOCORRELAZIONE

$$H(m) = \alpha(m) e^{j\phi(m)}$$

L'GUADAGNO COMPLESSO DI CANALE

DECISION VARIABLE

$$X(m) = \frac{R(m)}{H(m)} = S(m) + \frac{N(m)e^{-j\phi(m)}}{\alpha(m)} = S(m) + N'(m)$$

$$N'(m) \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{2N_0}{\alpha^2(m)}\right)$$

PROBABILITÀ DI ERRORE:

$$P(e) = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^{M-1} Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{N_0} \alpha^2(m)}\right)$$

4-QAM, DIPENDE DAL TIPO DI MODULAZIONE
E DALLA VARIANZA DEL RUMORE

DIVERSITY TECHNIQUES FOR WIRELESS COMMUNICATIONS

OFDM COMBATE IL "MULTI PATH FADING"
 "SLOW FLAT RAYLEIGH FADING" È ANCORA UN PROBLEMA → SI COMBATE CON LA "DIVERSITY"

è la possibilità di migliorare l'affidabilità di un canale meneggi
 permettendo in 2 o più canali con differenti caratteristiche

CI SARA' MENO "ERROR RATE"

TIPOLOGIE DI DIVERSITY

T.D. → trasmisore ha più slot di tempo tramite CODIFICA
 DI CANALE + INTERLEAVING

F.D. → trasmisore ha diverse a diverse frequenze

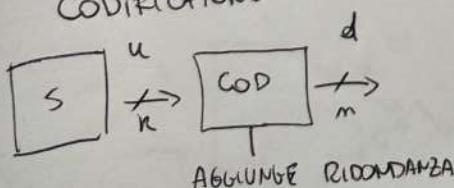
S.D. → trasmisore e ricezione con antenne diverse

TIME DIVERSITY

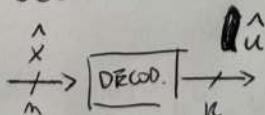
CODING: introduzione di RIDONDANZA per RICOGNOSCERE ERRORE AL RICEVITORE
 MISURATA CON: $R = \frac{k}{m} < 1$ MIGLIORARE LA BER

A Blocco / CONVOLZIONALI I CODICI LINEARI SONO I PIÙ USATI → lavorano in GF(2) = {0, 1}
 $"+" = XOR$
 $"\times" = AND$

CODIFICATORE:



DECODIFICATORE:



CODICI A BLOCCO

d BIT DI PARITÀ FORMA SISTEMATICA

G MATRICE GENERATRICE $\Rightarrow d = u$

K BIT $\rightarrow 2^k$ PAROLE DI CODICE

Il ricevitore sollela il controllo di parità con lo stesso dispositivo inviato al ricevitore. Se c'è MATCHING allora non ci sono errori, altrimenti viene richiesta la RITRASMISSIONE.

ESEMPIO → BIT DI PARITÀ (1 se la parola contiene un numero dispari di "1")
(0 1 1 1 1 1 1 1 pari 1 1)

Venne riconosciuto solo un numero pari di errori

DATA RETRANSMISSION

ACK → RECEZIONE CORRETTA
NAK → " ERRORE

Dopo T_{ARQ} il trasmettitore
 rimanda i dati, $T_{ARQ} > T_c$
 ↓
 Il nuovo invio sarà su un canale
 diverso

CAPACITÀ DI CANALE

$$C = B \log_2(1 + SNR) \quad b/s$$

└ BANDA DEL CANAL

Una trasmissione con $R \leq C$ è un arbitrio se è possibile in più trovare un codice con $P_e < \epsilon$

CODICI CONVOLUZIONALI

- NON SISTEMATICI
 - IL TRASMETTITORE MANDA SOLO I BIT DI PARITÀ
 - I BIT DI PARITÀ SONO CALCOLATI CON UNA "SLIDING WINDOW"

MEMORIA: $L \rightarrow$ NUMERO DI PAROLE DI K BIT CHE INFUENZANO M BIT DI USCITA

OUTPUT dipende da: $-u^{(i)}$ $\xrightarrow{(i-L+1)} \text{CORRENTE}$
 $-u^{(i-1)}$ \dots $\text{G}_{L-1} \text{ PRECEDENTI}$

05c

INPUT
CORRENTE
L1 PRECEDENTI

$$- u^{(i)} \quad - u^{(i-1)} \quad \dots \quad u^{(i-L+1)}$$

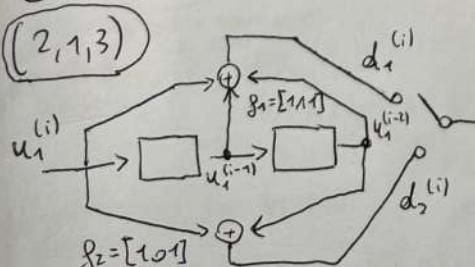
$d_1^{(i)} = \sum_{l=0}^{L-1} g_1(l) \cdot u^{(i-l)}, \quad d_2^{(i)} = \sum_{l=0}^{L-1} g_2(l) \cdot u^{(i-l)}$

CONVOLUZIONE
(N GF(2))

INPUT
PASSATI
[MEMORIA]

STATO DEL SISTEMA

ESEMPIO:



$$\left\{ d_1^{(i)} = u^{(i)} + u^{(i-1)} + u^{(i-2)} \quad \right\} m=2$$

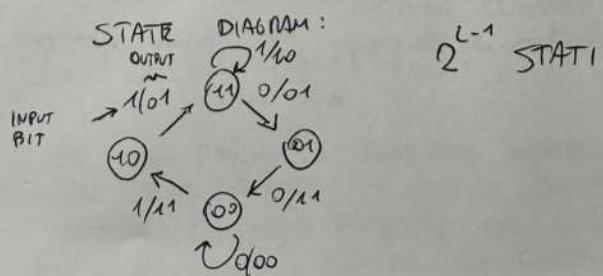
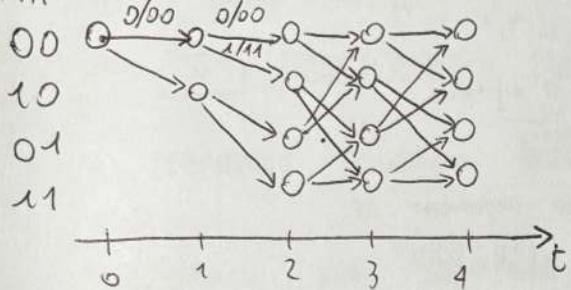


DIAGRAMMA A TRACCIO

STATI:



ESEMPIO: $(2,13)$ con $g_1 = [111]$ $g_2 = [101]$

DESCRIVE L'EVOLUZIONE NEL TEMPO
DEGLI STATI DEL CODIFICATORE
UN PERCORSO LUNGO IL TRACCIO
CORRISPONDE ALLA PAROLA CODIFICATA

NON TUTTE LE TRANSIZIONI
SONO POSSIBILI

↓
POSSIBILE AVERE UNA SEQUENZA
RICEVUTA CHE NON CORRISPONDE
A NESSUN PERCORSO
(VALE ANCHE PER LA DECODIFICA)

DECODIFICATORE

Sceglie tra le 2^{kN} possibili parole
codificate, quella che MINIMIZZA

la distanza di Hamming delle sequenze ricevute:

$$\hat{d} = \arg \min_{\tilde{d}} d_H(\tilde{d}, \hat{x})$$

↓
OUTPUT CORRETTO + PROBABILE

$$d_H(d, \hat{x}) = \sum_{j=1}^N d_H(\tilde{d}_j, \hat{x}_j)$$

↓
CALCOLARE TUTTE LE
IMPOSSIBILI

ALGORITMO DI VITERBI

LA COMPLICITÀ DIVENTA LINEARE (DA ESPONENZIALE) \Rightarrow MOLTI PERCORSI VENGONO SCARTATI

$$\tilde{d} \leftrightarrow \tilde{s}_0, \dots, \tilde{s}_N \leftrightarrow \begin{array}{l} \text{PERCORSO} \\ \text{SEQUENZA DI STATI} \end{array}$$

$$\tilde{d}_S = d_{\tilde{s}_{S-1} \rightarrow \tilde{s}_S}$$

↓
OUTPUT SPECIFICA
ALL'INTERVALLO
S-ESIMO

OUTPUT INDICATO
SU UN ARCO CHE COLLEGA
2 STATI $\xrightarrow{1/00}$

$$d_H(\tilde{d}, \hat{x}) = \sum_{j=1}^N d_H(\tilde{d}_{\tilde{s}_{j-1} \rightarrow \tilde{s}_j}, \hat{x}_j)$$

$$\sum_{j=1}^N \lambda_{\tilde{s}_{j-1}, \tilde{s}_j}$$

↓
METRICA DI RAMO

AD OGNI PASSO SE
VE SALVANO SOLO UN
NUMERO PARI AL NUMERO
DI STATI DEL CODIFICATORE

$$\Lambda_m = \sum_{j=1}^m \lambda_{\tilde{s}_{j-1} \rightarrow \tilde{s}_j}$$

METRICA CUMULATA: somma
periodica di metriche di ramo

L'ALGORITMO DI VITERBI

TROVA:

$$\Lambda_N = \sum_{j=1}^N \lambda_{\tilde{s}_{j-1} \rightarrow \tilde{s}_j} = d_H(\tilde{d}, \hat{x})$$

le sequenze di stati che
MINIMIZZA la METRICA CUMULATA \Rightarrow CHE SONO ARRIVATI IN QUELLO STATO CON
METRICA CUMULATA MAGGIORALE DI QUILA
MINIMA \Rightarrow ALLA FINE I PERCORSI CON QUELLA MINIMA
SARANNO MIGLIORI DI QUelli SCARTATI

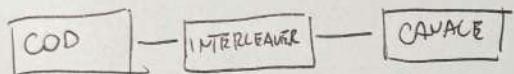
AD OGNI PASSO SI SCARTANO I PERCORSI
CHE SONO ARRIVATI IN QUELLO STATO CON
METRICA CUMULATA MAGGIORALE DI QUILA
MINIMA \Rightarrow ALLA FINE I PERCORSI CON QUELLA MINIMA
SARANNO MIGLIORI DI QUelli SCARTATI

INTERLEAVING

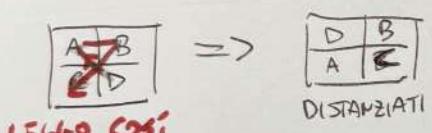
I CODICI CONVOLUZIONALI FUNZIONANO BENE CON CANALI MEMORYLESS → RICORDI ERRORI INDEPENDENTI E UNIFORMEMENTE DISTRIBUITI

"FADING CHANNELS" CAUSANO ERRORI IN SEQUENZA, NON INDEPENDENTI

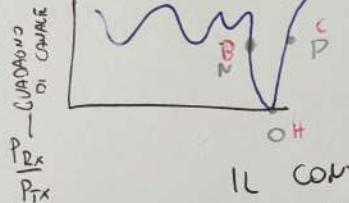
↓
L'INTERLEAVING FA SEMBRARE IL CANALE MEMORYLESS



ESEMPIO



{A,B,C,D} sequenza di BIT CODIFICATI



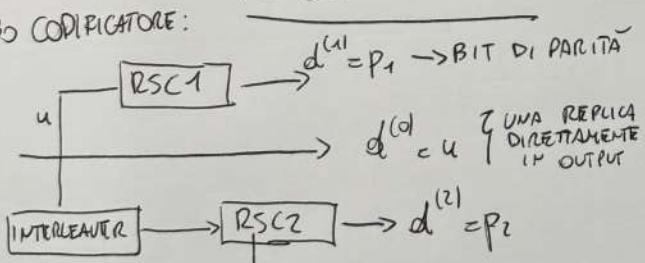
PRIMA DELL'INTERLEAVING
DOPO L'INTERLEAVING

IL CONTRARIO È FETTO
A RICEVITORE

INTRODUCE LATENZA → NECESSITA DELL'INTERO BLOCCO PRIMA DELLA CONVERSIONE

TURBO CODICI

TURBO CODIFICATORE:



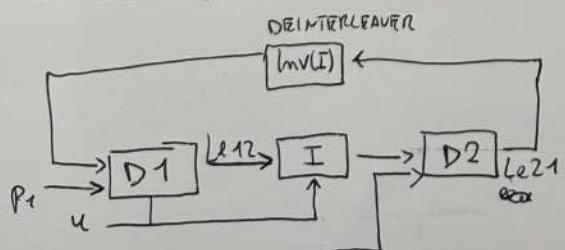
CODIFICATORE CONVOLUZIONALE

STREAM IN OUTPUT:

$$u + P_1 + P_2$$

LA BER DIMINUISCE AD Ogni ITERAZIONE: BER → - - - → NON CODIFICA
+ IL BLOCCO È LUNGO PIÙ
BER 1/2

TURBO DECODIFICATORE:



P2
P1
I
l12
l21
→ due decodificatori in
parallel informazioni sull'affidabilità,
all'output delle fine in ormai una somma
tra le 3 stringhe e viene decisa la stringa finale

- D1 inizia a decodificare il primo stream di DATI
- Le12 indice l'affidabilità della decisione
- I è l'INTERLEAVING delle AFFIDABILITÀ di secondo nido
- Le21 indica una affidabilità più forte
- INV(I) è il DE-INTERLEAVER che fornisce i simboli per il decodificatore

GUADAGNO DI
CANALE

FREQUENCY DIVERSITY

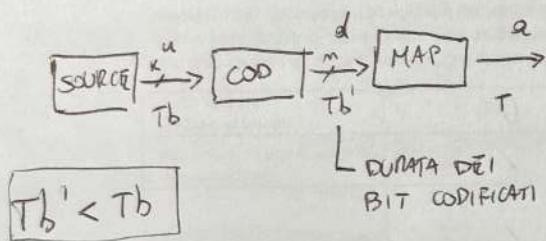
$$SNR = \frac{|H|^2 P}{\sigma^2} - \begin{matrix} \text{POTENZA} \\ \text{TRASMESSA} \\ \downarrow \\ \text{POTENZA DEL} \\ \text{RUMORE} \end{matrix}$$

$$\eta = \log_2 (1 + SNR) \Rightarrow C = B \cdot \eta$$

|
EFFICIENZA
SPESSIMALE

CAPACITÀ
DEL CANALE

long transmission range needs slow bit rate



$$KTb = mTb' \Rightarrow Rb = \frac{1}{Tb} = mR \frac{1}{T} = mR \cdot B$$

$$mTb' = T \Rightarrow T = m \frac{K}{m} Tb = m \cdot R \cdot Tb$$

SYMBOL
DURATION

$$Rb < C \Rightarrow mR \cancel{B} < B \log_2 (1 + SNR)$$

↓
dovendo negligerli per soddisfare
queste condizioni

PER IL TH. DI SHANNON

IN GENERALE CI È UNA ASSOCIAZIONE TRA L'SNR MISURATO E L'ORDINE DI MODULAZIONE E CODING RATE

LE TRASMISSIONI MULTICARRIER SUI "SELECTIVE CHANNELS" CAUSANO
SU CANALI PARALLELI CON DIVERSI GUADAGNI \Rightarrow DUNQUE SI PUÒ ADATTARE
IL RATE DI MODULAZIONE PER OGNI SOTOCANALE (e il coding rate)

in parola di "FREQUENCY DIVERSITY"

DISTRIBUZIONE OTTIMALE DELLA POTENZA

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{|H(m)|^2} \begin{matrix} \text{POTENZA} \\ \text{DEL RUMORE} \\ \downarrow \\ \text{GUADAGNO DI CANALE} \end{matrix}$$

Dove distribuire la potenza disponibile P_0 negli N canali per minimizzare il rate totale:

$$\left[\begin{array}{l} \max_P \sum_{m=1}^N \log_2 \left(1 + \frac{P_m}{\sigma_m^2} \right) \\ \bullet P_m \geq 0 \quad i=1, \dots, N \\ \bullet \sum_{m=1}^N P_m = P_0 \quad \text{BUDGET TOTALE DI POTENZA} \end{array} \right] \begin{matrix} \text{DVINCOLI} \\ \downarrow \end{matrix}$$

$$\text{SOLUZIONE OTTIMALE: } P_m^* = \max \{ 0, \mu_m - \sigma_m^2 \} = (\mu - \sigma_m^2)^+ \quad m=1, \dots, N$$

SE L'ARGOMENTO È NEGATIVO
SARÀ = 0

$$\sum_{m=1}^N (\mu - \sigma_m^2)^+ = P_0$$

L'DEVO SCEGLIERLO

METODO DI BISEZIONE

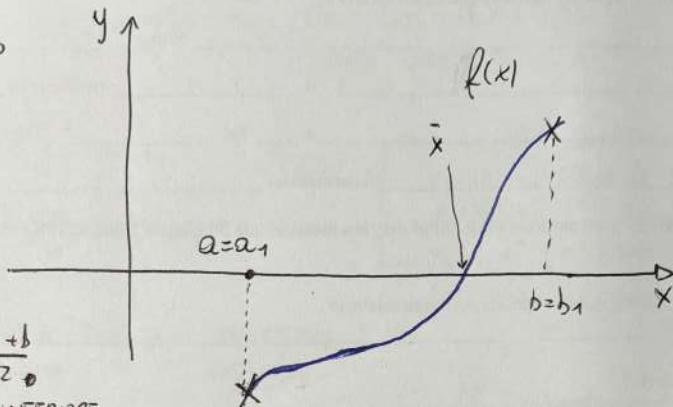
USATO PER TROVARE LE RADICI DI UNA FUNZIONE $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(\mu) = \sum_{n=1}^N (\mu - \sigma_n^2)^+ - P_0$$

PUNTI INIZIALI:

$$a_1 = 0 \Rightarrow f(0) = -P_0 < 0$$

$$b_1 = \frac{\sum \sigma_n^2 + P_0}{N} \Rightarrow f(b) \geq 0$$



METODO:

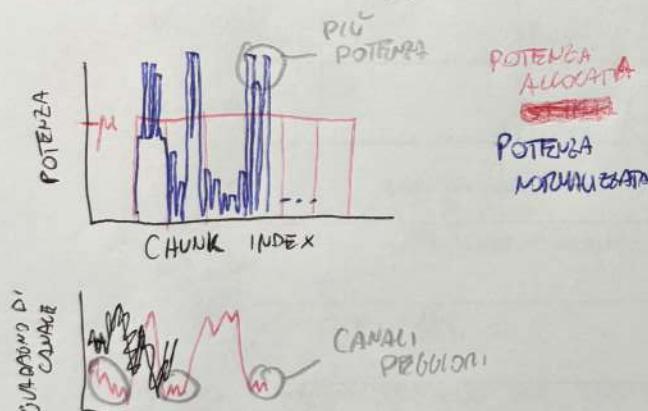
- AD OGNI PASSO SI CALCOLA $\frac{a+b}{2}$

- SE < 0 IL NUOVO ESTREMO INFERIORE

SARÀ $\frac{a+b}{2}$, SE POSITIVO È QUELLO SUPERIORE

- SE = 0 ABBIANO TROVATO $\bar{x} \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

- L'ALGORITMO TERMINA QUANDO $|f(c)|$ È ABBASTANZA PICCOLO E RITORNA C



I canali con maggiore qualità ricevono meno potenza, quelli con pessime qualità più potenza

SPATIAL DIVERSITY

L'USO DI ANTENNE MULTIPLE A TRASMETTITORE E RICEVITORE HA PORTATO A 2 GUADAGNI DIFFERENTI SPOSTA L'USO DI EXTRA-BANDA:

- ARRAY GAIN: è un guadagno di potenza, più il canale è isolato meglio sarà
- DIVERSITY GAIN: " " " " donato allo sfruttamento della diversità del canale speciale, è minima quando il canale speciale è INCORRELATO

donato ad antenne multiple

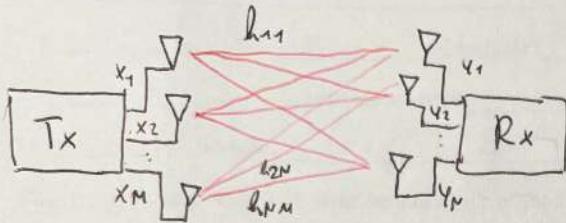
SE

$$d_C = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \text{CANALE INCORRELATO}$$

ALTI RATE DATI \Rightarrow ALTA BANDA \Rightarrow ALTA FREQUENZA \Rightarrow MINORE AREA PER AVERE ANTENNE MULTIPLE \Downarrow PICCOLA LUNGHEZZA D'onda \Rightarrow MINORE DISTANZA PER AVERE IL CANALE INCORRELATO

CANALE MIMO

MIMO = MULTIPLE INPUT MULTIPLE OUTPUT \Rightarrow DIA TRASMETTORE CHE RICEVITORE
USA MOLTEPLICI ANTENNE



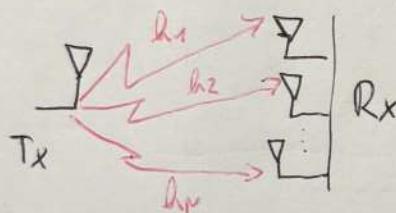
$h_{m,m}$ \Rightarrow m-ESIMA ANTENNA IN
RICEZIONE RICEVE DA m-ESIMA
ANTENNA IN TRANSMISSIONE
 \Rightarrow SCALARE CHE RAPPRESENTA IL
COLLEGAMENTO DI CANALE

CANALE:

$$H_2 \begin{bmatrix} h_{11} & \dots & h_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{N1} & \dots & h_{Nm} \end{bmatrix} \xrightarrow[N_T]{\quad} \quad$$

- RIGA PER OGNI TRASMETTORE
- COLONNA " " RICEVITORE

CANALE = FILTRO LTI CON RISPOSTA IMPULSIVA H



CANALE SIMO

$$\begin{aligned} M &= 1 \\ N &> 1 \\ x_i(m) &= h_i c_m + n_i(m) \\ &\quad | \\ &\quad \text{CANALE SPECIFICO} \end{aligned}$$

RICEVUTO
DALLA i-ESIMA ANTENNA

Si ricevono differenti
repliche delle stesse
segnale, combinate
insieme

$$z(m) = w_1 \cdot x_1(m) + \dots + w_N x_N(m)$$

SEGNALI RICEVUTI ALLE N ANTENNE
E COMBINATI INSIEME

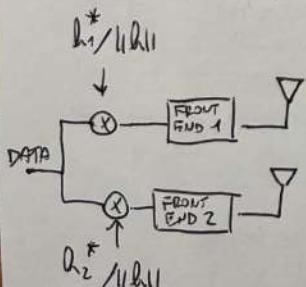
$$z(m) = \sum_{i=1}^N w_i \cdot h_i c_m + \sum_{i=1}^N w_i \cdot n_i(m)$$

I COEFFICIENTI COMBINATI SONO USATI PER MASSIMIZZARE L'SNR

$$E \left\{ \left| \sum_{i=1}^N w_i h_i c_m \right|^2 \right\} = \underbrace{\left| \sum_{i=1}^N w_i h_i \right|^2}_{\text{POTENZA DEL SEGNALE}} A$$

$$E \left\{ \left| \sum_{i=1}^N w_i n_i(m) \right|^2 \right\} = \underbrace{\sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma^2}_{\text{POTENZA DEL RUMORE}}$$

$$SNR = \frac{\text{P. SEGUN.}}{\text{P. RUM.}}$$



MAXIMAL RATIO COMBINING (MRC)

IL "PRECODING WEIGHT" OTTIMALE PER LA I-ESIMA TRANSMISSIONE
 $b_S = \frac{h_S^*}{\|h\|}$ con $\|h\| = \sqrt{\sum_{j=1}^N |h_j|^2}$ IN MODO
 CHE LA POTENZA TOTALE TRASMESSA NON CAMBI

AL RICEVITORE:

$$x(m) = \sum_{S=1}^N b_S h_S c_m + n(m) = \frac{\sum_{S=1}^N h_S h_S^*}{\|h\|^2} c_m + n(m) = \frac{\sum_{S=1}^N |h_S|^2}{\|h\|^2} c_m + n(m)$$

$$SNR = \frac{A}{\sigma^2} \frac{\|h\|^2}{\|h\|^2} \text{ GUADAGNO DI CANALE}$$

$\|h\|^2$ DIPENDE DAL NUMERO DI ANTENNE

COR PIÙ ANTENNE $\begin{cases} \text{CAMBIA LA DISTRIBUTIONE (DA CL DIVERSITY GAIN)} \\ \text{SHIFTA A DESTRA IL VALOR MEDIO (DA CL MEAN GAIN)} \end{cases}$

SPATIAL MULTIPLEXING

MIMO \rightarrow CANALE (N_R, N_T) MATRICE

LA TECNICA OTTIMALE È CHIAMA "SPATIAL MULTIPLEXING" BASATA SU "SINGULAR VALUE DECOMPOSITION" (SVD) DELLA MATRICE DI CANALE H

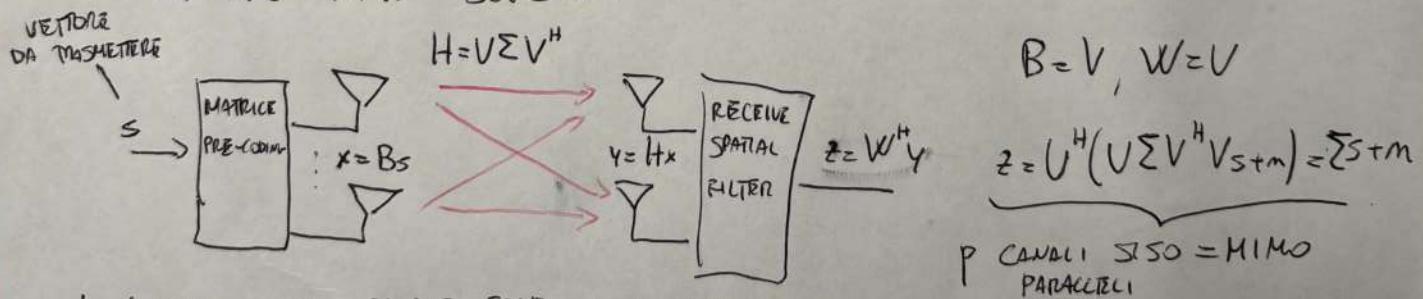
SVD + PRECODING WEIGHTS + COMBINING WEIGHTS \Rightarrow SI POSSONO CREARE UNA SERIE DI CANALI ORTHOGONALI
(al trasmittore) (al ricevitore)

con $N_R = N_T = N$ in meno N INDIPIENDI CANALI SPAZIALI

$A \in \mathbb{C}^{m \times n} \Rightarrow A = U \Sigma V^H$ dove $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$, $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ MATRICI UNITARIE
e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^{m \times n}$ MATRICE
DIAGONALE
CON $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p$ e $p = \text{rank}(A)$

In un sistema MIMO se il canale è obiettiva MULTIPATH, la
MATRICE DI CANALE ha MASSIMO RANK ed è: $p = \text{rank}(H) = \min(N_R, N_T)$

OPTIMAL MIMO SCHEME:



I GUADAGNI DI CANALE SONO I P SIMBOLI VALORI
DI UNA MATRICE H