

# **Communication Systems**

## **Appunti**

Se un segnale è REALE, vale sempre la SIMMETRIA HERMITIANA

27/03

$$M(-f) = M^*(f)$$

$$M(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

$$[M(f)]^* = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-j2\pi ft} dt \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} m^*(t) e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{j2\pi ft} dt = M(-f)$$

Vale per ipotesi

## FM

$m_g$  = modulation index  $\rightarrow$  messaggio è  $M_g$  messaggio è il numero di coefficienti necessari per rappresentare l'envelope complessa

$$B_{FM} = 2(1 + m_g) B = 2(4f + B)$$

numero d'appr. Distanza  $\Delta$

LA BANDA DEL SEGNALE viene in base a questi index

$> m_g \rightarrow > B_{FM}$  (frequency)  $\rightarrow$  < power required  $\rightarrow$  A differenza di DSB e QAM ha il trade-off tra frequenza e energia

$$m_g = \frac{Af}{B} \quad 15 \text{ kHz}$$

15 kHz high quality audio

$$B_{FM} \approx 180 \text{ kHz}$$

INVILUPPO COMPLESSO =  
segnale porta banda rappresentata in banda

## FREQUENCY MODULATION (FM)

$m(t)$  = messaggio da trasmettere  $\rightarrow$  il segnale trasmetto sarà  $s_{FM}$

Nell FM il messaggio viene inserito nella FASE del segnale

$$s_{FM}(t) = A_c \cos \left( 2\pi f_c t + 2\pi k_g \int_m(\tau) d\tau \right)$$

Quindi quale la fase è:

$$\phi(t) = 2\pi \left( f_c t + 2\pi k_g \int_m(\tau) d\tau \right)$$

## INVILUPPO COMPLESSO

## PRO

- INVILUPPO COSTANTE nella modulazione
- È possibile trovare sempre il giusto trade-off tra efficienze spettrale ed energetica
- I segnali radio di banda 15 kHz possono essere modulati fino a 200 kHz

Freq:  $\frac{\text{veloc. luce}}{\text{lungh. onda}} \rightarrow f = \frac{c}{\lambda}$

la dimensione dell'antenna deve essere proporzionale alla lunghezza d'onda

Quindi per BASSE FREQUENZE Dovrà una LUNGHEZZA D'ONDA nello ordine dei Km e L'ANTENNA dovrà essere MOLTO ALTA.

FM  $\rightarrow [88 \text{ MHz} - 108 \text{ MHz}]$  ordine di MHz

TELEFONI  $\rightarrow [900, 1800, 2200 \text{ MHz}]$  ordine di GHz

WIFI  $\rightarrow [2,4 \text{ GHz}, 5 \text{ GHz}]$  ordine di GHz

Nelle comunicazioni i due valori più importanti sono:

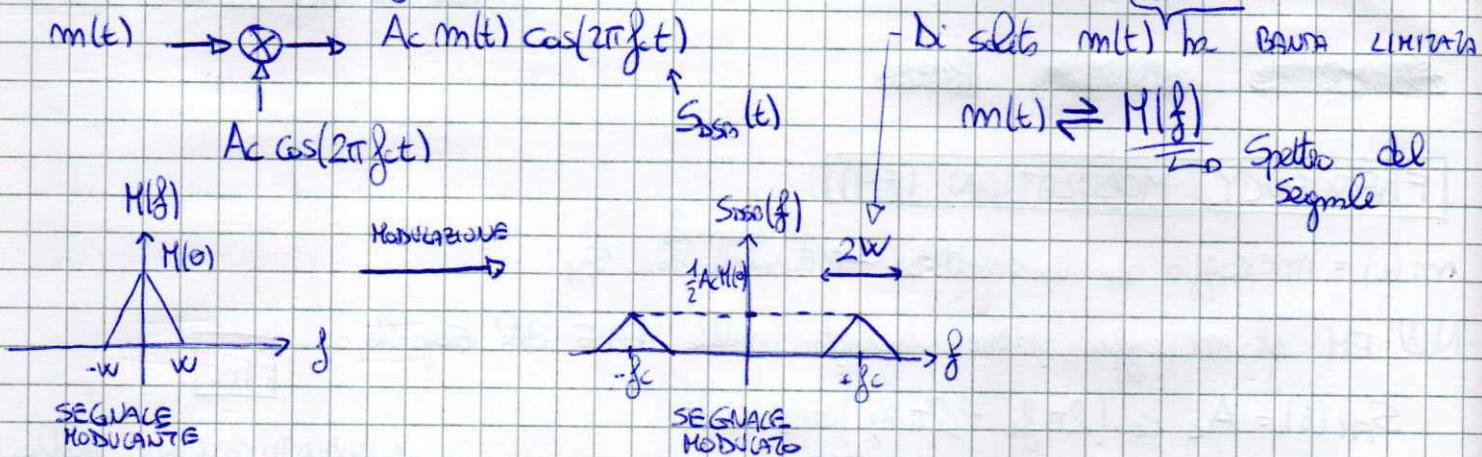
- OCCUPAZIONE DELLA BANDA (efficienza spettrale)
- CONSUMO ENERGETICO (efficienza energetica)

### COMUNICAZIONI ANALOGICHE

Il sistema di trasmissione più semplice è:

**AM-DSB** (Amplitude Modulation - Dual Side Band)

Ho un segnale  $m(t)$  [Modulating Signal] che moltiplico per un coseno di oscillazione ad una frequenza  $f_c$  detta CARRIER-FREQUENCY



BANDA LIMITATA  $\rightarrow$  ENERGIA INFINTA

BANDA ILLIMITATA  $\rightarrow$  ENERGIA FINITA

Studiando il coseno ho che:  $\cos(2\pi fct) \Rightarrow \frac{1}{2} \delta(f-f_c) + \frac{1}{2} \delta(f+f_c)$

Ricordando che  $a(t)b(t) \Rightarrow A(f) \otimes B(f)$  ho che:

$$S_{\text{mod}}(f) = A_c M(f) \otimes \left[ \frac{1}{2} \delta(f-f_c) + \frac{1}{2} \delta(f+f_c) \right] = \frac{1}{2} A_c M(f-f_c) + \frac{1}{2} A_c M(f+f_c)$$

Semplicemente traslo il segnale nelle frequenze  $f_c$ .

Trasformare un segnale in una frequenza diversa da  $\omega$  è necessario nelle trasmissioni per 2 motivi:

- ① Per non interferire con altri segnali
- ② A frequenza  $\phi$  non ci sono bisogni di un'antenna unica.

I segnali FISICI sono REALI. Per tutti i segnali REALI vale sempre la SIMMETRIA HERMITIANA. Infatti il segnale modulato risulta simmetrico in frequenze.

$$\text{SIMMETRIA HERMITIANA} \Rightarrow M(-f) = M^*(f)$$

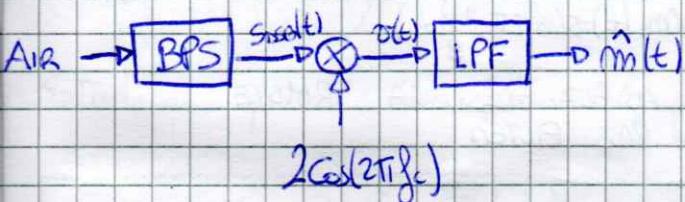
### DIMOSTRAZIONE

$$M(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{j2\pi ft} dt$$

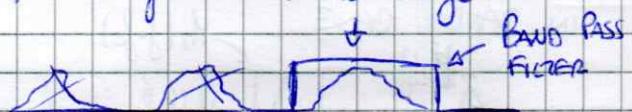
$$M^*(f) = \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{-j2\pi ft} \right]^* = \int_{-\infty}^{+\infty} m^*(t) e^{j2\pi ft} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} m(t) e^{j2\pi ft} dt = M(f)$$

sostituisco con  $(-t)$  per ricavare la simm. di Fourier

Come RECUPERO il SEGNALE MODULANTE?



In così ho tanti segnali e tante frequenze diverse, devo estrarre solo il mio segnale trasmesso in fc

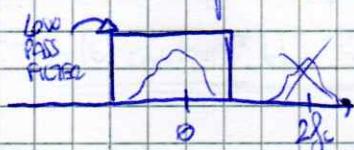


- ① Il BAND PASS FILTER rimuove tutti i segnali non in fc che interferiscono con il mio in fc. (Il mio segnale in onda ha componente simmetrica NEGATIVA).
- ② Traslo il segnale già fatto a ~~una~~ frequenza  $\phi$  (con un coseno)  $\cos \phi = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\phi)$   
 $v(t) = S_{BPS}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_c t) = [A_m(t) \cos(2\pi f_c t)] \cdot 2 \cos(2\pi f_c t) =$   
 $= 2A_m(t) \frac{1}{2} [1 + \cos(4\pi f_c t)] = A_m(t) + A_m(t) \cos(4\pi f_c t)$

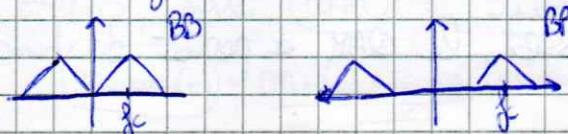
$$\cos 2\cos(\phi) = \frac{1}{2} [\cos(2\phi) + \cos(0)]$$

COMPONENTE KARINA AD ALTA FREQUENZA  $(2f_c)$   
 $(2\pi f_c)^2$

- ③ Rimuovo la componente ad alta frequenza  $2f_c$  attraverso un Low Pass Filter

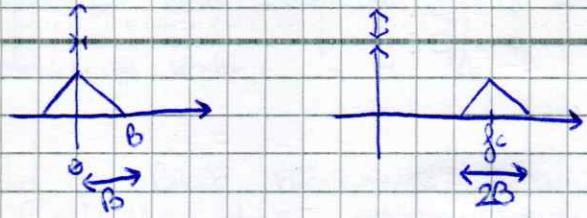


Come distinguo se ho BB o BP? Se  $f_c \leq B$  è BB



Nella DSB Gaslomb il segnale ha la banda necessaria  $\Delta f$

30/63



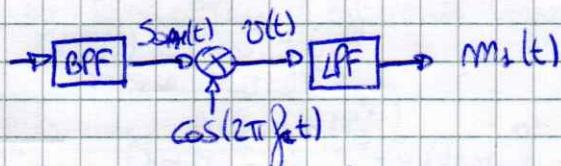
$f_c$   
Banda da portare

## QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

Sfrutta le caratteristiche secondo cui seno e coseno sono ortogonali. Quindi modulando un segnale con il seno ed uno con il coseno posso trasmetterli entrambi contemporaneamente senza che interferiscono tra loro.

$$S(t) = A_m M_1(t) \cos(2\pi f_c t) - A_m M_2(t) \sin(2\pi f_c t)$$

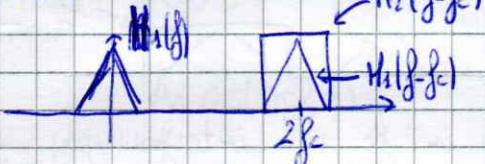
Applicando lo stesso ricettore della DSB altemp:



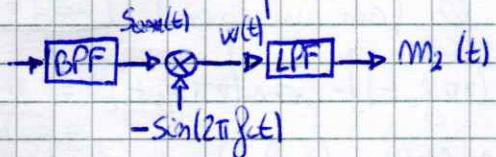
$$\begin{aligned} v(t) &= S_{\text{QAM}}(t) \cos(2\pi f_c t) = A_m M_1(t) \cos^2(2\pi f_c t) - A_m M_2(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) : \\ &= A_m M_1(t) \frac{1}{2} (1 + \cos 2\pi 2f_c t) - \frac{1}{2} A_m M_2(t) \sin(2\pi 2f_c t) : \\ &= \underline{\frac{A_m M_1(t)}{2}} + \frac{A_m M_1(t) \cos(2\pi f_c t)}{2} - \frac{A_m M_2(t) \sin(2\pi f_c t)}{2} \end{aligned}$$

UNICA COMPONENTE  
IN BANDA BASE

COMPONENTI AD ALTA FREQUENZA RIMOSSE  
DAL LOW PASS FILTER



Alllo stesso modo posso ottenere il segnale  $M_2(t)$ :



$$\sin^2 2 = \frac{1}{2} (1 - \cos 22)$$

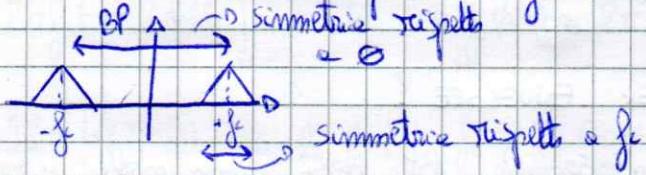
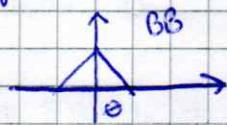
$$\begin{aligned} v(t) &= -A_m M_1(t) \cos(2\pi f_c t) \sin(2\pi f_c t) + A_m M_2(t) \sin^2(2\pi f_c t) = \\ &= -\frac{A_m M_1(t) \sin(2\pi 2f_c t)}{2} + \underline{\frac{A_m M_2(t)}{2}} - \frac{A_m M_2(t) \cos(2\pi 2f_c t)}{2} \end{aligned}$$

COMPONENTE  
IN BANDA BASE

Tutto questo vale se RICEVITORE e TRASMETTORE sono sincronizzati alla stessa frequenza. Nelle realtà questi non è possibile e abbiamo la presenza di CROSS-CHANNEL INTERFERENCE, da' nulla DSB non è mai presente.

Di contro però abbiamo che rispetto alla DSB, la QAM è capace di trasmettere due segnali invece di un solo.

La modulazione DSB è molto semplice. Giò che otteniamo è il segnale in banda base (tutto quindi simmetrico rispetto allo 0), traslato in fc. Essendo il segnale sempre reale dovrà sempre rimanere simmetrico rispetto a  $f=0$ , ma avendo un simile segnale traslato dovrà rimanere simmetrico anche rispetto a fc.

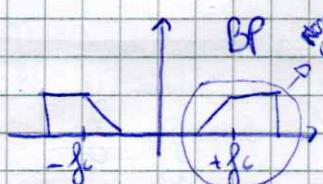


Questo ci permette di avere una chiara visione dello spettro occupato in BP osservando direttamente il segnale in BB.

Nelle QAM questi non avviene:

$$S_{QAM}(f) = M_1(f) \otimes \left[ \frac{1}{2} S(f-f_c) + \frac{1}{2} S(f+f_c) \right] + M_2(f) \otimes \left[ \frac{j}{2} S(f-f_c) - \frac{j}{2} S(f+f_c) \right]$$

Giò che ottengo è una ~~segna~~ composizione di segnali, simmetrica rispetto a 0 in quanto reale, ma non simmetrica rispetto a fc.



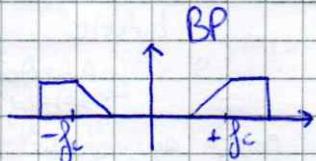
Questo vuol dire che non possiamo immaginare  $S_{QAM}$  come un segnale reale traslato in fc, in quanto non esiste segnale REALE in BANDA BASSA EQUIVALENTE.

Studieremo quindi lo spettro è più completo.

### COMPLEX ENVELOPE (di un segnale passa banda)

Giò che voglio fare è descrivere il segnale in BP come se fosse un segnale in BB traslato, ovvero quei nella realtà non esiste in quanto non simmetrico rispetto a fc. Questo segnale in BB è il<sup>o</sup> COMPLEX ENVELOPE  $\tilde{s}(t)$  del segnale  $S_B(t)$ .

Esempio



Puoi estrarre fatto per tutti i segnali BP, e puoi estrarre un segnale completo

Risolvendo  $s(t) = \operatorname{Re}\{\tilde{s}(t) e^{j2\pi f_c t}\}$  ho che  $\tilde{s}(t) = S_I(t) + j S_Q(t)$  da cui ho:

$$\begin{aligned} \tilde{s}(t) &= \operatorname{Re}\{(S_I(t) + j S_Q(t))(\cos(2\pi f_c t) + j \sin(2\pi f_c t)\} = \operatorname{Re}\{S_I(t)[\cos(2\pi f_c t) + j \cancel{\sin(2\pi f_c t)}] + S_Q(t)[\dots]\} = \\ &= \underline{S_I(t) \cos(2\pi f_c t) - S_Q(t) \sin(2\pi f_c t)} \end{aligned}$$

Quindi per studiare un tipo di modulazione reale e reale come calcolare  $S_I(t)$  e  $S_Q(t)$ .

Per esempio, nella QAM ho  $S_I(t) = M_1(t)$  e  $S_Q(t) = M_2(t)$  ovvero:

$$\tilde{s}_{QAM}(t) = \underline{M_1(t) + j M_2(t)} \rightarrow \text{Segnale traslato in BB.}$$

Nel caso della DSB Im:

$$S_{DSB}(t) = Ac \cos(\omega_m t) \cos(2\pi f_c t) \rightarrow \tilde{S}_{DSB}(t) = Ac m(t)$$

$\hookrightarrow S_I(t) = Ac m(t)$

$\hookrightarrow \text{L} \tilde{S}_{DSB}(t) = \text{Re} \{ \tilde{S}_{DSB}(t) e^{j2\pi f_c t} \} = Ac(M(t) \cos(2\pi f_c t))$

$\hookrightarrow S_Q(t) = \emptyset \rightarrow \text{NON HA FASE IMAGINARIA}$

Perché calcolo il COMPLEX ENVELOPE?

Se voglio studiare un segnale BP deve campionarlo, e per farlo in modo corretto devo rispettare il CRITERIO DI NYQUIST per cui la frequenza di CAMPIONAMENTO  $f_s > 2(f_c + B)$ . Se non in BP non bisogna di un  $f_s$  molto alto, quindi difficile e costoso.

Se studio il COMPLEX ENVELOPE posso far tutto in BB e poi traslare il tutto con:

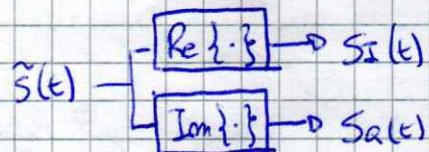
$$S(t) = \text{Re} \{ \tilde{S}(t) e^{j2\pi f_c t} \}$$

Quindi perché a me mi interessa  $f_c$ , che più vicina, a me interessa la stabilità del segnale risultante dalla modulazione.

ES QAM

$$\boxed{\text{SIGNAL SOURCE}} \rightarrow \tilde{S}_{QAM}(t) = S_I(t) + j S_Q(t)$$

$M_1(t)$        $M_2(t)$



Ho ottenuto un'estrazione più semplice che non considera la specifica  $f_c$ .

FM (Frequency Modulation)  $\rightarrow$  Moduliamo la FASE del segnale trasmesso in base all'ampiezza della portante (segnale da trasmettere)

Nella DSB e nella QAM l'informazione è trasportata mediante MODULO del segnale trasmesso.

Nella modulazione FM invece è trasportata dalla FASE del segnale trasmesso.

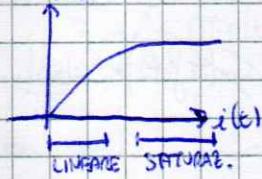
$$S_{FM}(t) = Ac \cos(2\pi f_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau)$$

$\phi(t) = 2\pi (f_c t + 2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau)$

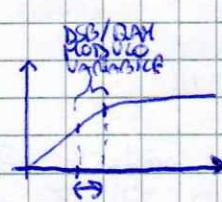
$\hookrightarrow \tilde{S}_{FM}(t) = Ac e^{j2\pi K_f \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau}$  per le uguaglianze

$\hookrightarrow \text{DESIGN PARAMETER: permette di decidere l'occupazione delle bande}$

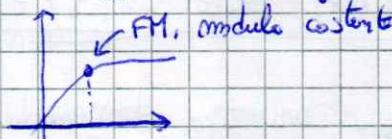
Il fatto che il Modulo  $m(t)$  dipende dal segnale da trasmettere porta ad avere un CONSTANT ENVELOPE MODULATION, che permette a sua volta l'utilizzo di amplificatori semplici.



In massima efficienza si ottiene poco prima della saturazione:



$\hat{A}(t) = \underline{Ai(t)}$  o modulo segnale



La trasmissione avviene così:



Un valore necessario allo studio di questa modulazione è la FREQUENCY DEVIATION:

$$f_d(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Phi(t) - f_c = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \tilde{\Phi}(t) = \underline{\underline{\text{Kg m(t)}}}$$

$\frac{d}{dt} \text{fase} = \frac{\text{frequenza}}{\text{istantanea}}$

Si ottiene da:  $\Phi(t) = 2\pi f_c t + 2\pi \text{Kg} \int_{-\infty}^t m(\tau) d\tau \rightarrow \frac{d}{dt} \Phi(t) = 2\pi \text{Kg m(t)} + 2\pi f_c$

$$\rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi} 2\pi f_c + \frac{1}{2\pi} 2\pi \text{Kg m(t)} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \Phi(t) - f_c = \underline{\underline{\text{Kg m(t)}}}$$

Hi indica quanto la frequenza istantanea varia rispetto alla  $f_c$ . Il MASSIMO valore che può raggiungere è detta MAXIMUM FREQUENCY DEVIATION  $\Delta f$ :

$$(\Delta f) = \max \{ |f_d(t)| \} = \text{Kg} \max \{ |m(t)| \} \rightarrow [\text{Non c'è nulla con lo spettro}]$$

Da questi otteniamo il MODULATION INDEX ( $m_f$ ) =  $\frac{\Delta f}{B_m} \rightarrow$  MASSIMA VARIAZIONE  $\rightarrow$  più varia l'ampiezza del segnale modulato.

Questi due valori sono correlati (più  $m_f(t)$  varia, più questi aumentano), ma sono ~~due~~ valori e concetti differenti.

01/10

Nella modulazione FM diventa più difficile capire qual'è la banda che si andrà ad occupare, quindi va approssimata. Prendo per esempio come segnale da iniziare un costante:

$$m(t) = V_m \cos(2\pi f_m t)$$

Il segnale modulato sarà:

$$S_{FM}(t) = A_c \cos \left( 2\pi f_c t + 2\pi \text{Kg} \int_{-\infty}^t V_m \cos(2\pi f_m \tau) d\tau \right) = A_c \cos \left( 2\pi f_c t + 2\pi \text{Kg} \frac{V_m}{2\pi f_m} \sin(2\pi f_m t) \right) = A_c \cos(2\pi f_c t + m_f \sin(2\pi f_m t))$$

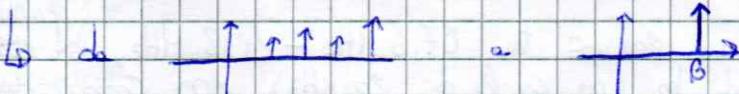
Il COMPLEX ENVELOPE sarà:

$$\tilde{S}_{FM}(t) = A_c e^{j m_f \sin(2\pi f_m t)} \rightarrow \text{È PERIODICO IN } t \quad \tilde{S}(t) = \tilde{S}(t+T)$$

$$\frac{\text{Kg} V_m}{f_m} \rightarrow \Delta f \sim \frac{\Delta f \cdot m_f}{B_m}$$

$$\frac{f_c}{f_m} \rightarrow \text{Bandas DEL COSENZO} \sim B_m$$

Ciò che faccio è concentrare tutta l'ENERGIA alle massime frequenze. In questo modo tra tutte le componenti che compongono lo SPECTRUM del mio segnale  $\tilde{S}_{FM}(t)$  rimanendo solo quella a frequenza maggiore, che quindi sarà per me un UPPER BOUND delle BANDA OCCUPATA.



$$\text{Ricordando che } \tilde{S}(t) = \sum_n S_n e^{j m_f n t} \quad \text{TSF è periodico} \Leftrightarrow$$

(Quindi il primo passo è studiare i COEFFICIENTI del COMPLEX ENVELOPE ( $S_n$ ):

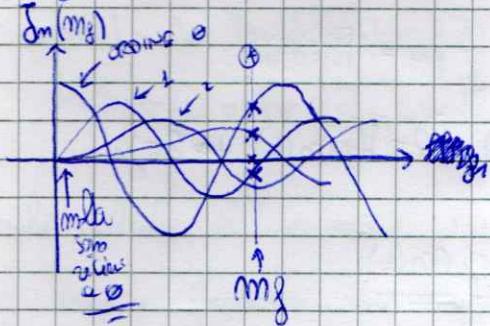
$$\tilde{S}_{FM}(t) = \sum_n S_n e^{j m_f n t} = A_c \sum_n J_n(m_f) e^{j m_f n t}$$

$$\tilde{S}_{FM}(t+T_0) = A_c e^{j m_f \sin(2\pi f_m t + T_0)} = A_c e^{j m_f (f_m t + 2\pi)} = \tilde{S}_{FM}(t)$$

$$\begin{aligned} & \text{ordine } n \\ & \text{nello punto } M_f \end{aligned}$$

I coefficienti vengono descritti da una BESSEL FUNCTION di ordine  $n$  variazione del MODULATION INDEX  $m_f$ .

La funzione di BASSEL (non ha form chiusa, è tabellata) in questi form



Per ogni punto  $m_f$  ha infiniti  $J_m$ , ma solo alcuni sono abbastanza maggiori di 0 da essere significativi. Più  $|m_f|$  è ALTO, più  $|J_m|$  SIGNIFICATIVI ha.

↳ Ora le Nove di fuori

Studio il segnale  $S_{FH}(t)$  a partire dal suo COMPLEX ENVELOPE:

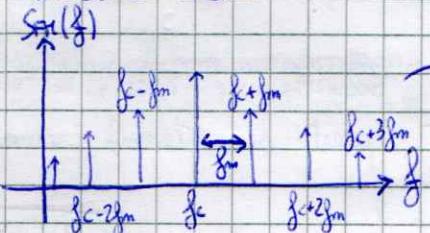
$$S_{FH}(t) = \operatorname{Re} \left\{ \tilde{S}_{FH}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} = A_c \sum_m J_m(m_f) \cos(2\pi(f_c + m_f m)t)$$

SERIE DI FOURIER

dove delle delta

DIPENDONO DA  $J_m$

Il modulo sarà:



→ Ho infiniti componenti ma solo poche sono SIGNIFICATIVE. In questi casi  $J_m(m_f)$  ha 3 COMPONENTI significative, quindi Sembra che le componenti distanti  $m_f m$  lo spettro excepto siano circa:

$$B_{FH} \approx 6 \Delta f$$

$\rightarrow m_f >$  componenti bandi  
 $>$  bande

Riassumendo, in generale un APPROXIMAZIONE EFFICACE è quella di affermare, secondo cui:

$$B_{FH} \approx 2(1 + m_f) \Delta f = 2(1 + \frac{\Delta f}{B_{FH}}) B = 2(\Delta f + B)$$

Maggior è,

Maggior è  $m_f$   
è  $\Delta f$  la comp. bandi

Bandi segnali  
di trasmettore  
(frequenze)  
(frequenze)

→ Ho circa il 50% dell'energia  
(componenti significativi della BASSEL)

Se ho lo stesso SEGNALE di banda B, modificando  $m_f$  cambia lo SPETTRO OCCUPATO. MAGGIORE è  $m_f$ , MAGGIOR è la BANDA OCCUPATA, MINORE è l'ENERGIA necessaria a trasmettere.

A differenza di DSB e QAM ha diversi parametri e più possibilità di trovare un TRADE-OFF tra BANDA e CONSUMO ENERGETICO.

FH è nata per trasmettere audio ad alta qualità:

$$\begin{aligned} \text{High Quality Audio} &\quad \Delta f = 75 \text{ kHz} \\ &\quad B = 15 \text{ kHz} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} m_f = \frac{75}{15} = 5 \rightarrow \text{Indica scatti per la trasmissione} \\ \text{oltre le orecchie non sentono} \end{array} \right.$$

$$\rightarrow B_{FH} \approx 2 \cdot 6 \cdot 15 = 180 \text{ kHz}$$

Di solito la radio in Italia ha un RANGE tra 87,6 MHz - 108 MHz, quando circa 20 MHz, quindi ha (per comuni di 200 kHz), 100 canali differenti.

Il RICEVITORE deve entrare molti da  $\tilde{S}_{FH}(t) = A_c e^{j2\pi(f_c + m_f m)t}$

① Ottengo il Segnale da un PASS-BAND FILTER

$> m_f <$  potenze

② Estraggo la parte di  $\tilde{S}_{FH}(t)$

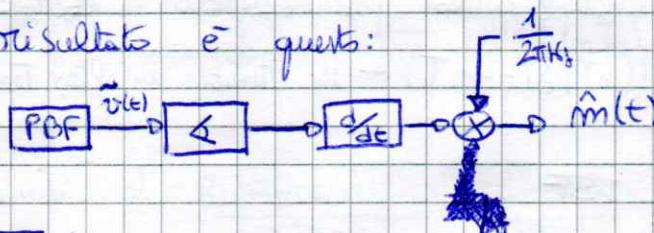
$$\left\langle \tilde{S}_{FH}(t) \right\rangle = 2\pi k_f \int_{-\infty}^{\infty} m(z) dz$$

③ Estraiamo m(t) dividendo la fase

$$\frac{d}{dt} \angle \tilde{S}_{\text{RF}}(t) = 2\pi \text{ Kg m}(t)$$

④ rimuovo il fattore  $2\pi$  per avere solo  $\dot{m}(t)$

Il risultato è questo:



## SDR (Software Defined Radio)

Per le comunicazioni radio esistono tanti standard diversi (utilizzano parametri diversi, ma lo stesso tipo di modulazione). Per ciascuno di essi neanche necessario avere HARDWARE DIFFERENTI, con specifici MODULATORI, DEMODULATORI, ecc.

Per evitare il sistema alla base lo stesso è possibile utilizzare un sistema modulare. L'ideale alla base della SDR è quello di avere dell'HARDWARE GENERICO che riceve il PASS-THROUGH SIGNAL. Successivamente questo viene digitalizzato e modulato demodulato e finisce SOFTWARE.

Così con un SINGOLO HARDWARE si possono gestire tante comunicazioni di servizi diversi. Ciò che è necessario è disporre di un RTL programmabile via software, che permetta di modificare ALGORITMI e FORMATI DI MODULAZIONE.

Un RTL permette di estrarre un I/Q SAMPLE contro il COMPLEX ENVELOPE delle ~~bande~~ scelta (INPHASE / QUADRATURE)  $m_I(t) + j m_Q(t)$

La prima parte del circuito RTL lavora in ANALOGICO. L'obiettivo è ricevere il segnale filtrato in  $f_{IF}$ :

$$S_{\text{RF}} = S_I(t) \cos(2\pi f_c t) - S_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

Ed estrarre il COMPLEX ENVELOPE

$$\tilde{S}_{\text{RF}}(t) = S_I(t) + j S_Q(t)$$

Per prima cosa è necessario AMPLIFICARE il segnale ricevuto. Poi più è alta la  $f_c$ , più l'amplificazione è complessa, quindi immediatamente si sposta il segnale ad una frequenza intermedia  $f_{IF}$  più bassa:

①  $f_c \rightarrow f_{IF}$

SEGNALE TRASFORMATO IN  $f_{IF}$

②  $f_{IF} \rightarrow BB$

Local oscillator  $f_{LO} = f_c - f_{IF}$

Questo viene fatto ~~con~~ moltiplicando  $S_{\text{RF}}(t)$  per  $2 \cos(2\pi f_{LO} t)$

$$S_{\text{RF}}(t) \cdot 2 \cos(2\pi f_{LO} t) = [S_I(t) \cos(2\pi f_c t) - S_Q(t) \sin(2\pi f_c t)] \cdot 2 \cos(2\pi (f_c - f_{IF}) t) =$$

$$= 2 S_I(t) \cos(2\pi f_c t) \cos(2\pi (f_c - f_{IF}) t) - 2 S_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \cos(2\pi (f_c - f_{IF}) t) =$$

$$= \cos(2\pi f_{IF} t) + \cos(2\pi (2f_c - f_{IF}) t) - \sin(2\pi f_{IF} t) - \sin(2\pi (2f_c - f_{IF}) t) \leftarrow \text{LOW PASS FILTERING}$$

③  $\rightarrow S_I(t) \cos(2\pi f_{IF} t) - S_Q(t) \sin(2\pi f_{IF} t)$  ~~BB~~ ④

Se voglio campionare un segnale devo utilizzare le PROPRIETÀ CAMPIONATRICE delle delta, secondo cui:

$$f(t) \delta(t) = f(0) \delta(t) \quad \text{e} \quad f(t) \delta(t-t_0) = f(t_0) \delta(t)$$

ALTEZZA  
DELLA DELTA (è un  
valore)

Quindi per campionare un segnale devo moltiplicarlo per un TRENO DI DELTA:

$$s(t) = \sum_m \delta(t - mT_0) \rightarrow f(t) \cdot s(t) = \sum_m f(mT_0) \delta(t - mT_0) \rightarrow \text{Ho ottenuto un altro trem.}$$

$s$  è periodico [ $s(t+T) = s(t)$ ]  $\rightarrow$  Calcolo la TSF

$$s(t) = \sum_n s_n e^{j2\pi n f_0 t} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} \rightarrow S_N = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} s(t) e^{-j2\pi n f_0 t} dt =$$

$$= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \sum_m \delta(t - mT_0) e^{-j2\pi n f_0 t} dt =$$

Ricordo che:

$$\int_a^b s(t-\tau) dt = \begin{cases} 1 & \tau \in [a, b] \\ 0 & \tau \notin [a, b] \end{cases} \rightarrow \text{Slo per } m=0 \rightarrow = \frac{1}{T_0} \quad (t=0)$$

$s(t-mT_0) \in \left[\frac{T_0}{2}; \frac{T_0}{2}\right]$

$$\text{Quindi } s(t) = \sum_n s_n e^{j2\pi n f_0 t} = \frac{1}{T_0} \sum_n e^{j2\pi n f_0 t} \Leftrightarrow \frac{1}{T_0} \sum_n s(f-nf_0)$$

Infatti ho:  $\sum_m s(t - mT_0) \hat{=} \frac{1}{T_0} \sum_n s(f - nf_0) \rightarrow$  De trem a trem

o SEGNALE CAMPIONATO

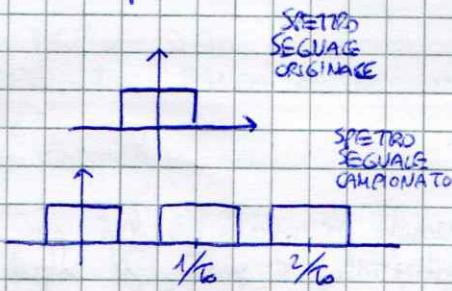
$$\text{Quindi } f[m] = f(mT_0) = f(t) \sum_m \delta(t - mT_0) \Leftrightarrow F(f) \otimes \frac{1}{T_0} \sum_n s(f - nf_0) = \frac{1}{T_0} \sum F(f - nf_0)$$

Ho ottenuto che il SPECTRO di un SEGNALE CAMPIONATO è PERIODICO con periodo pari al tempo di CAMPIONAMENTO.

ES

$$f(t) \Leftrightarrow F(f)$$

$$f[m] = f(mT_0)$$



### TEORIA DEL CAMPIONAMENTO

Affinché un segnale possa essere CAMPIONATO e RICOSTRUITO, deve avere una BANDA LIMITATA e la freq di campionamento deve essere  $f_s \geq 2B$  (band del segnale)

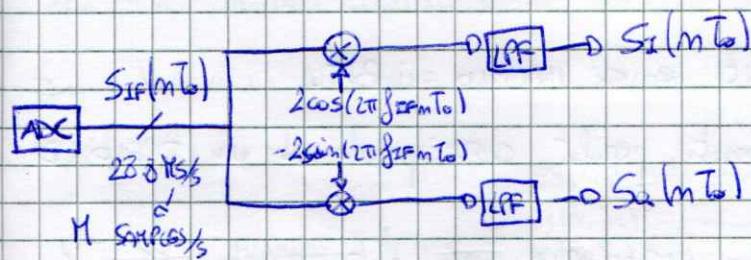
$\downarrow$   $\rightarrow f_{ADC}$

Nel RICEVITORE RTL-SDR la frequenza di campionamento è 14,4 MHz, quindi la BANDA NEL SEGNALE deve essere minore di 14,4 MHz (2B), nel motivo  $c_w \sim 5$  MHz.

Quindi anche se ora ho uno SPECTRO PERIODICO dovuto al campionamento, posso comunque ricostituire il segnale.

Il ricevitore campiona ( $f_{ADC}$ ) per passare in DIGITALE.

A questo punto dato il segnale digitale composto  $S_{IF}(mT_0)$  sono estratti le componenti in FASE e quella in QUADRATURA.



Essendo  $S_{IF}(mT_0)$  composto (digitale) anche sin e cos sono componenti sempre con:

$$T_0 = \frac{1}{f} = \frac{1}{f_{ADC}}$$

$$\text{Quindi } 2\cos(2\pi f_{IF} T_0) = 2 \cos\left(2\pi \frac{f_{IF}}{f_{ADC}} m\right)$$

Quindi il RICEVITORE RTL-SDR

- ① Estrarre il segnale ad ALTA FREQUENZA con un PBF.
- ② Traslo il segnale ad una FREQUENZA INTERMEDIA e lo AMPLIFICA.
- ③ Campionare il segnale per convertirlo in DIGITALE.
- ④ Estrarre FASE e QUADRATURA ottenendo il COMPLEX ENVELOPE (onda base).

A questo punto il COMPLEX ENVELOPE viene passato a MATLAB.

MATLAB a questo punto può implementare per esempio il RICEVITORE FM per estrarre il segnale del COMPLEX ENVELOPE.

• È più facile MEMORIZZARE le INFORMAZIONI ed è possibile CIFRARE, COMPRENDERE e PROCESSARE i Segnali rispetto all'ambiguo.

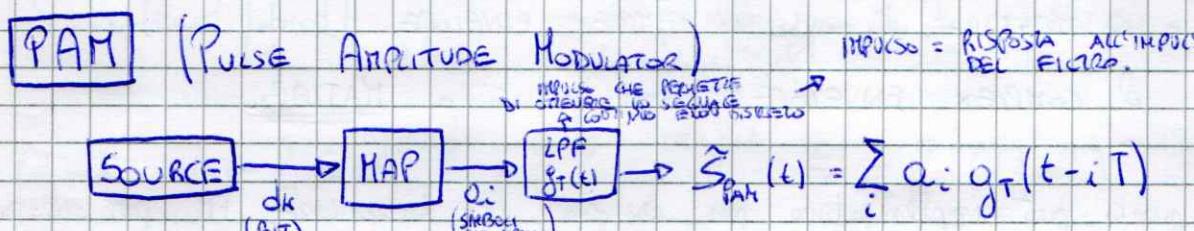
• Si campiona il SEGNALE, si codifica in bit e si INVIA i BIT.

Non possiamo inviare il segnale campionato, perché corrisponde ad un TRENO DI DELTA o BANDA INFINTA.

Un BIT TRASMESSO è una VARIABILE ALEATORIA che può essere 0 o 1 con pari probabilità. Questo vuol dire che il VALOR MEDIO è  $\frac{1}{2}$ . Questo non va bene, in quanto VM ≠ 0 indica energia aggiuntiva per la trasmissione, quindi energia finita a destra.

Quindi mppi i bit :  $(0) \rightarrow -\frac{1}{2}$  e  $(1) \rightarrow +\frac{1}{2}$  quindi  $E\{e_i\} = -1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0$

Usando lo stesso principio possiamo mappare per ogni segnale trasmesso più bit!!! (un simbolo corrisponde ad una combinazione di BIT)



A questo punto per trasmettere il SEGNALE applico una delle Modulazioni già vista, ovvero il PAM SIGNAL un segnale analogico in BB.

Per spostare il segnale alla frequenza fc applico lo stesso sistema del DSB:

$$S_{\text{pam}}(t) = \sum_i a_i g(t-iT) \cos(2\pi f_c t)$$

Quindi il COMPLEX ENVELOPE sarà :  $\tilde{S}_{\text{pam}}(t) = \sum_i a_i g(t-iT)$

Il SYMBOL MAPPER mappa m bit ad un SIMBOLO. La mia costellazione era  $M = 2^m$  simboli (ho delle combinazioni di m bit)

Più è GRANDE le COSTELLAZIONE PIÙ BIT sono mappati in un SINGOLO SIMBOLO. Quindi UNO MAGGIOR EFFICIENZA SPECIALE, ma un MAGGIOR ENERGIA necessaria alla trasmissione.



$T_0$  = tempo tra la trasmissione di 2 bit (TARPO DI BIT)

$$R_b = \frac{1}{T_0} \text{ Bit Rate}$$

$T > T_0$ , perché esistono 1 simbolo ogni m bit.  $\rightarrow T = \frac{m}{R_b} T_0 = \frac{\log_2 M}{R_b} T_0$

$$\text{Quindi } R = \frac{1}{T} = \frac{1}{\frac{m}{R_b} T_0} = \frac{1}{m} R_b$$

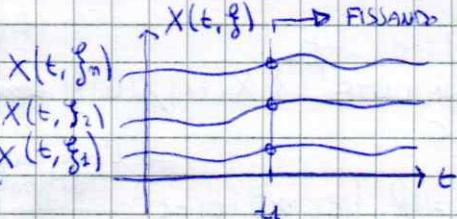
## STOCHASTIC PROCESS

È un processo per cui non conosco a priori la relazione matematica, ma lo conosco solo a livello statistico.

Sono VARIABILI ALEATORIE i cui VALORI POSSIBILI Sono FUNZIONI nel TEMPO

$X(t, \omega)$  → OUTCOME

FISSANDO  $\omega$  ho una  
FUNZIONE DEL TEMPO



UNA VARIABILE ALEATORIA con M POSSIBILI VALORI  
OSSERVAZIONI

Quindi una VARIABILE ALEATORIA è il risultato di uno STOCHASTIC PROCESS ad un tempo  $t$  prefissato.

Per studiare il PROCESSO STOCHASTICO si unisce la FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE:

$$F_{X(t_0)}(x) = P\{X(t_0) < x\}$$

$F(x_0)$  ← SE TUTTE LE SINGOLE SIANO SIMILI A QUESTA  $F(x_0) = P\{X(t_0) \leq x_0\}$

Da questo ottengo la DENSITÀ DI PROBABILITÀ:

$$f_{X(t_0)}(x) = \frac{d}{dx} F_{X(t_0)}(x)$$

Essendo processi e mm variabili, se cambio  $t_0$  cambiano  $F$  e  $f$ .

$$\underline{\underline{F_{X(t_0)X(t_1)}(x_1, x_2) = \Pr\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}}} \rightarrow \begin{array}{l} \text{LA MISURAZIONE IN } t_1 \text{ E } t_2 \text{ SONO} \\ \text{INDIPENDENTI} \end{array}$$

LA MISURAZIONE IN  $t_1$  E  $t_2$  SONO INDEPENDENTI, MA NON ANALIZZABILE IN MODO "JOINTLY"

Se le misurazioni  $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$  sono incostrette (non dipendono l'un l'altro) ho un processo aleatorio INDIPENDENTE, da cui ho:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{X(t_0)X(t_1)\dots X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\} \\ f_{X(t_0)X(t_1)\dots X(t_n)}(x_1, \dots, x_n) = f_{X(t_1)}(x_1) \dots f_{X(t_n)}(x_n) \end{array} \right.$$

### MEAN

$$\mu_{X(t_0)} = E\{X(t_0)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t_0)}(x) dx \quad \begin{array}{l} \text{dipende da } t_0 \\ \text{se discosto da } \sum x_i p(x_i) \end{array}$$

### AUTOCORRELATION FUNCTION

È la relazione tra le VARIABILI ALEATORIE ottenute compionendo  $X(t)$  in due diversi  $t_1$  e  $t_2$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2^* f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Se andip ho il prodotto delle  $f(x)$

## STATIONARITY

**1° ORDER** Le STATISTICHE di  $X(t_0)$  e  $X(t_0+c)$  sono uguali per ogni  $c$

$$\Leftrightarrow \mu_x(t_0) = \mu_x(t_0+c) = \mu_x$$

**2° ORDER** Le STATISTICHE CONGIUNTE  $\{X(t_1), X(t_2)\}$  <sup>tra</sup> sono uguali per ogni  $c$

$$\Leftrightarrow f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1, x_2) = f_X(x_1, x_2, t_2 - t_1) \quad \begin{matrix} \rightarrow \\ \text{l'auto-correlazione dipende dalla} \\ \text{differenza tra i due tempi.} \end{matrix}$$

Per verificare deve dimostrare che  $f_X(x_1, x_2) = f_X(x_1)$

WIDE-SENSE STATIONARITY (Si applica solo al 1° ordine) **[WSS]**

È una definizione meno stretta che vale solo:

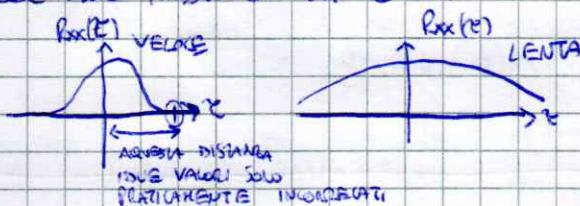
$$① E\{X(t)\} = \mu_x$$

? Soltanto ho bisogno solo di questo

$$② E\{X(t_1)X(t_2)\} = R_{xx}(t_2 - t_1)$$

$$R_{xx}(0) = R_{xx}(t_2 - t_1) \Big|_{t_1=t_2} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{MASSIMO DI} \\ R_{xx}(t_1, t_2) \rightarrow \text{la correlazione tra un processo in te} \\ \text{e se stesso è la massima POSSIBILE, ovviamente} \end{matrix}$$

Più il valore di  $t_0$   $X(t_0)$  cambia, più l'autocorrelazione si allontana velocemente dal suo massimo in 0



$$R_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) x^2 dx = \begin{matrix} \text{M PESATO} \\ \text{DALLA DENSITÀ} \\ \text{DI PROBABILITÀ} \end{matrix} \rightarrow \text{POTENZA } \star$$

**Power Spectral Density** (Come la POTENZA è distribuita tra le frequenze)

Per un processo WSS ho che  $S_{xx}$  descrive la DENSITÀ SPECIALE DI POTENZA:

$$S_{xx}(f) = F\{R_{xx}(z)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(z) e^{-j2\pi fz} dz$$

Da cui posso calcolare la POTENZA del processo  $X(t)$ :

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{xx}(f) df$$

## PAM POWER SPECTRAL DENSITY

I segnali PAM sono PROCESSI STOCHASTICI in quanto i simboli che trasmettono l'informazione sono fatti in modo tale da essere TEMPO-DISSETO, STATO-DISSETO, STAZIONARI e INDEPEN-

La POWER SPECTRAL DENSITY è:

$$S_s(f) = \frac{1}{T} S_a(f) |G_T(f)|^2$$

+ SIMBOLI  
PROCESS

RISPOSTA IN  
FREQUENZA  
DEL FILTRO

per  $s(t) = \sum_i a_i g_T(t-iT)$

$S_a(f)$  si calcola come la Trasformata di Fourier dell'autocorrelazione  $R_a(m)$  di  $a_i$

$$R_a(m) = E\{a_i a_{i+m}\} = \begin{cases} E\{a_i^2\} = A & m = 0 \rightarrow \text{stesso simbolo} \\ (E\{a_i\})^2 = \mu^2 & m \neq 0 \rightarrow \text{ESISTE} \underset{\text{INDIP.}}{\text{E}}[a_i, a_{i+m}] = E\{a_i\} E\{a_i\} = E\{a_i\} \end{cases}$$

Se i simboli hanno  $\mu = 0 \rightarrow$  diventano tutti  $\phi$

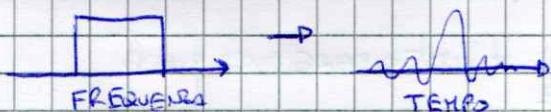
$$\text{In: } R_a(m) = E\{a_i a_{i+m}\} = A \delta[m] \Leftrightarrow S_a(f) = A \quad (\text{costante} \rightarrow \text{BIANCO})$$

Quindi:  $(S_s(f)) = \frac{1}{T} S_a(f) |G_T(f)|^2 = \frac{A}{T} |G_T(f)|^2 \rightarrow$  La BANDA dipende dal FILTRO che sto usando.

## PAM TRASMIT FILTER

Dove essere quanto più compatto possibile.

ES RECTANGULAR PULSE

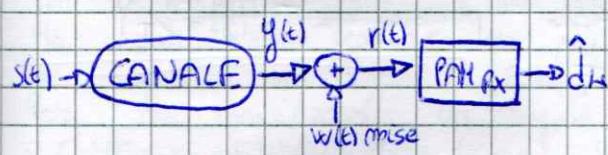


Ogni simbolo ha durata infinita,  $\rightarrow$  MALE quindi interferenze tra loro

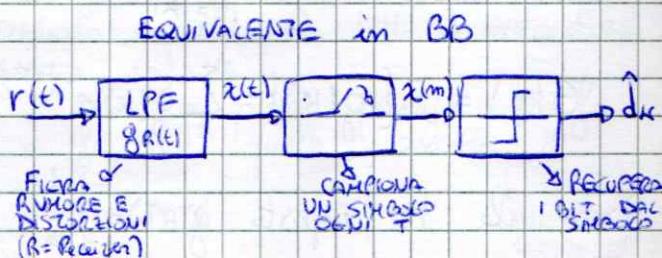
Lo ISI ~~effetto~~ <sup>causa</sup> (INTER-SYMBOL INTERFERENCE)

Al contrario vorrei un'INFINITA banda necessaria, il che è impossibile.  
Ho bisogno di una VIA DI MEZZO.

## PAM RECEIVER



com il  
RICEVITORE:

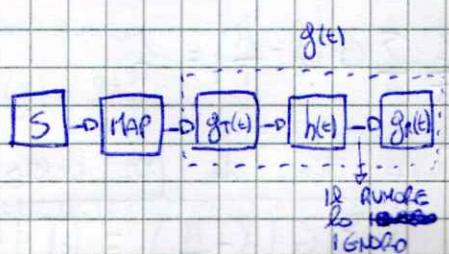


Portando del FILTER:

$$r(t) = s(t) \otimes h(t) + w(t)$$

$$x(t) = r(t) \otimes g_R(t) = s(t) \otimes h(t) \otimes g_R(t) + w(t) \otimes g_R(t)$$

$$\text{Definisco } g(t) = g_T(t) \otimes h(t) \otimes g_R(t)$$



A questo punto ho:  $m(t) = w(t) \otimes g_a(t)$

Da cui ottengo:

$$x(t) = \sum_i a_i g(t-iT) + m(t) \quad [\text{segnale in uscita del FILTRO RICEVITORE}]$$

A questo punto  $x(t)$  viene CAMPIONATO:

$$x(m) = x(t)|_{t=mT} = \sum_i a_i g(mT-iT) + m(mT) = \sum_i a_i g((m-i)T) + m(mT) =$$

Io SIAVO  
A TEMPO m

TRA GLI  
INFINITI SIMBOLI  
INTERESSA SOLO QUELLO  
RELATIVO A m

INFORMAZIONE  
CHE MI INTERESSA

$$= \sum_k a_{m-k} g(kT) + m(mT) \rightarrow \text{Questi sono i SIMBOLI che il RICEVITORE ha ottenuto}$$

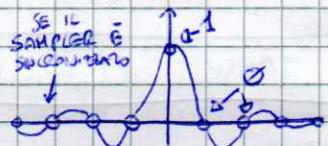
$$= \underbrace{a_m g(0)}_{\text{INFORMAZIONE}} + \underbrace{\sum_{k \neq 0} a_k g(kT)}_{\text{LO INTERFERENZE (ISI)}} + m(mT) \rightarrow \text{Voglio progettare il sistema in modo tale che } g(kT) \text{ sia il più basso possibile}$$

Approssimando le distorsioni del canale  $h(t) \approx \delta(t)$  ho  $g(t) = g_a(t) \otimes g_r(t)$

Se ho tutti i  $g(kT) = 0 \quad \forall k \neq 0$  avrei  $x(m) = a_m g(0) + m(mT) \rightarrow \underline{\text{No ISI}}$

Voglio quindi:

$$g(kT) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{ES} \\ \text{una sinc} \rightarrow \\ \text{Campionato} \\ \text{ogni T} \end{array}$$



Quindi con le giuste condizioni (critерio di Nyquist) ho:

$$x(m) = \underbrace{a_m}_{\text{DECISION VARIABLE}} + m(mT) \rightarrow \text{dove campiono } x(m) \text{ e DECIDERE a quale simbolo corrisponde}$$

### CRITERIO DI NYQUIST IN FREQUENZA

Se CAMPIO nel TEMPO ho PERIODICITÀ in FREQUENZA (e viceversa)

Voglio studiare  $g(t)|_{t=mT}$  (filtrati campionati in successione  $\rightarrow$  Periodico in FREQ)

$$G(f) = F\{g(t)\} = \sum_k g(k) e^{-j2\pi fkT} = \frac{1}{T} \sum_k G\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad \begin{array}{l} \text{SOMMA} \\ \text{FILTRI} \end{array} \text{ del periodo ogni T} \quad (f_s = 1/T)$$

Dato che ho imposto  $g(kT) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$  ho una DCTA di KRONERIKER nel tempo che in freq. duraente 1

Quindi:

$$\frac{1}{T} \sum_k G\left(f - \frac{k}{T}\right) = 1$$

$\uparrow$  CRITERIO  
NEL TEMPO

Potro dire che per avere No ISI in FREQUENZA deve valere:

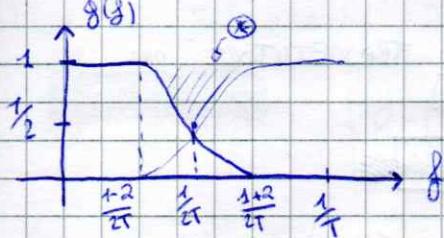
$$\left[ \sum_k G\left(f - \frac{k}{T}\right) = T \right] \leftarrow \begin{array}{l} \text{CRITERIO} \\ \text{IN FREQUENZA} \end{array}$$

$\sum_k G\left(\frac{k}{T}\right)$

TRIANGOLARE e RECT sono delle possibili soluzioni. La migliore (probabilmente) però è il RAISED COSINE, che permette di avere un buon TRADE-OFF

## RAISED COSINE

Il suo SPECTRO è il seguente:



$$\lim_{f \rightarrow 0} g(f) = \frac{1-2}{2\pi} \text{ vale } 1,$$

$$\text{in } f = \frac{1}{2\pi} \text{ vale } \frac{1}{2},$$

$$\text{in } f = \frac{1+2}{2\pi} \text{ vale } 0$$

④ RISPETTA Nyquist IN FREQUENZA

In BB la banda è  $B = \frac{1+2}{2\pi}$

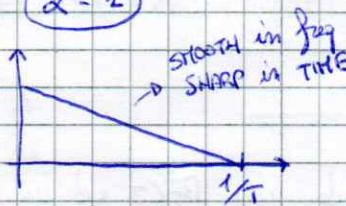
2 è un valore che può essere modificato → posso scegliere la BANDA [TUNABLE]  
Inoltre dei valori particolari ho:

$2 = 0$



MINIMUM BANDWIDTH FILTER

$2 = 1$



Più di così non posso andare,  
anzi ALIASING → non posso ricevere  
il simbolo originale.

anzè della RECT, quindi  
SINC in TSUB

Quindi un buon TRASMETTORE e RICEVITORE deve rispettare Nyquist ho No ISI quindi:

$$x(m) = a_m + n(mT)$$

La scelta di questi componenti influenza anche sulla POTENZA DEL RUMORE? Si,  
voglio MINIMIZZARLO.

Ricordo che un SEGNALE PASSA-BANDA è un segnale la cui ENERGIA è concentrata  
intorno ad una frequenza  $f_c$

Per il RUMORE BIANCO non vale lo stesso, essendo costante in tutte le FREQUENZE.  
Ma questo nella realtà non è vero, anzi energia infinita.

Se applico un PBF il RUMORE viene ridotto solo a quello presente in  $f_c$ .  
Posso ora considerarlo un segnale PIATTO intorno a  $f_c$ , dal quale calcolo il  
COMPLEX ENVELOPE (come sempre).

6)  $w(t) = w_I(t) + jw_Q(t)$  processo STAZIONARIO con

con  $w_I(t) = w_Q(t) = N_0$  indipendenti.

$\mu_w = 0$

$S_w(f) = 2N_0$   
GAUSSIANO BIANCO

NON PIÙ  
BIANCO MA  
CORROTTO

Nella realtà  $S_w(f) = \frac{N_0}{2}$ , nel COMPLEX ENVELOPE  $S_w(f) = 2N_0$

Ritornando al RICEVITORE PAM ho  $m(t) = M_I(t) + jM_Q(t) = g_R(f) \otimes w(t)$

$S_{m_I} = S_{m_Q} = 2N_0 |g_R(f)|^2 \quad \mu_m = 0$   
GAUSSIANO BIANCO

$S_m(f) = S_w(f) |g_R(f)|^2 = 2N_0 |g_R(f)|^2$

In generale ho:  $S_{\text{m}}(f) = S_{\text{w}}(f) |G_{\text{R}}(f)|^2$

Quindi se ho che  $S_{\text{m}}(f) = 2N_0 |G_{\text{R}}(f)|^2$  ho un RUMORE COLORATO la cui forma dipende dalla PESO DEL FILTRO AL QUADRATO.

Quello che vogliamo è fare in modo che  $|G_{\text{R}}(f)|^2$  diminuisca il più possibile il valore di  $M(t)$  senza intaccare i simboli da ricevere ed amplificati.

L'ideale sarebbe scegliere avere un ricevitore ideale di TRASMETTORE per MASSIMIZZARE l'SNR / MINIMIZZARE le potenze di  $M(mT)$

$$g_T(t) = g_T(-t) \Leftrightarrow G_T(f) = G_T^*(f) \quad \boxed{\text{MATCHED FILTER}}$$

Seiamente  $g_T(t)$  è SIMMETRICO rispetto l'origine, quindi  $\underline{g_T(t) = g_T(t)}$

### BANDA PAM

A questo punto voglio fare in modo che:

$$\begin{aligned} g(t) &= g_T(t) \otimes g_R(t) = \overset{\text{RAISED}}{\underset{\text{COSINE}}{\text{RAISED}}} \\ g_R(t) &= G_T(f) G_R(f) = \end{aligned}$$

18/11

Im frequeze posso ottenerlo moltiplicando un RECT ed un RAISED COSINE. Il problema è che  $G_T(f)$  e  $G_R(f)$  non sono MATCHED FILTER, quindi min MASSIMIZZO il SIGNAL TO NOISE RATIO.

Una buona soluzione è:  $\overset{\text{Root Raised}}{\underset{\text{Cosine}}{\text{Root Raised}}} \text{ ovvero un RAISED COSINE}$

$$G_R(f) = G_T(f) = H_{\text{RC}}(f, 2)$$

Quindi ho:

$$\textcircled{1} \quad G_R(f) = G_T(f) \rightarrow \text{MATCHED FILTER} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{2} \quad G_T(f) = [H_{\text{RC}}(f, 2)]^2 = [\sqrt{H_{\text{RC}}(f, 2)}]^2 = H_{\text{RC}}(f, 2) \rightarrow \text{RAISED COSINE} \quad \checkmark$$

L'utilizzo del RRC è utile anche nel calcolo delle  $S_{\text{s}}(f)$ , infatti se i simboli procedono ~~con~~ VACUE MEDIO NUOVO ho:

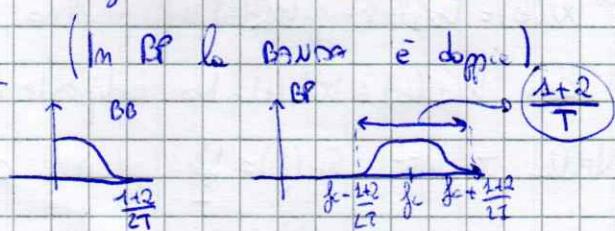
$$S_{\text{s}}(f) = \frac{1}{T} S_{\text{w}}(f) |G_T(f)|^2 = \frac{A}{T} |H_{\text{RC}}(f, 2)|^2 = \frac{A}{T} |H_{\text{RC}}(f, 2)| = \frac{A}{T} H_{\text{RC}}(f, 2)$$

La BANDA del COMPLEX ENVELOPE è:

$$B_{\text{PAM}}^{(\text{eo})} = \frac{1+2}{2T} = \frac{1+2}{2} \cdot \frac{1}{\log_2 M T_b} = \frac{1+2}{2 \log_2 M} R_b$$

$\left\{ \begin{array}{l} T = m T_b \\ m = \log_2 M \end{array} \right.$

La banda è dello stesso ordine ~~di~~ di grandezza del BITRATE



ES

$$\begin{aligned} R_b &= 1 \text{ Mb/s} \\ M &= 16 \\ 2 &= 0,5 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} B = \frac{10^6}{2 \log_2 16} = 0,375 \text{ MHz} \end{array} \right.$$

MAGGIORÉ è il BITRATE,  
MAGGIORÉ è la BANDA OCCUPATA

## POWER PAM

Power Spectral Density  $\rightarrow P = \int_{-\infty}^{\infty} \text{P.S.D.}(f) df$   $[P/\text{Hz}] = [P\text{T}] = \text{Energia}$

$$P_s^{(PB)} = \int_{-\infty}^{\infty} S_s(f) df = \frac{A}{T} \int_{-\infty}^{\infty} |G_T(f)|^2 df = \frac{A}{T} \int_{-\infty}^{\infty} H_{RC}(f, \omega) df = \star$$

Ho che:  $\mathcal{R}_C(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_C(f, \omega) e^{j2\pi f t} df$  quindi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_C(f, \omega) df = \left[ R_C(f, \omega) e^{j2\pi f t} \right]_{t=0} = \mathcal{R}_C(0, \omega) = \underset{\substack{\text{PARTE REALE} \\ \text{N RUISEZ}}}{1}$$

$$\star = \frac{A}{T} \mathcal{R}_C(0, \omega) = \frac{A}{T} \text{ POTENZA DEL COMPLEX ENVELOPE}$$

Ricordando che  $S^{(PB)}(t) = s(t) \cos(2\pi f_c t) \rightarrow$  la potenza equivalente è moltiplicare per  $\frac{1}{2}$

Quindi:  $\text{op} \rightarrow P_s = \frac{1}{2} P_s^{(PB)} = \frac{A}{2T}$

Quanto vale A? Dov'è viene?

$$S_s(f) = \frac{1}{T} S_a(f) |G_T(f)|^2 \leftarrow S_a(f) \hat{=} R_a(m) \leftarrow R_a(m) = \underline{A} s(m) \leftarrow A = E\{a_i^2\}$$

$$A = E\{a_i^2\} = \sum_{i=0}^{M-1} p\{a_i\} a_i^2 \rightarrow \text{Dipende da } M \text{ (Dimensione della COSTELLAZIONE)}$$

In particolare ho: Energia Media per trasmettere un simbolo

$$\underline{A} = \frac{M^2 - 1}{3} \quad \text{Quindi: } \underline{E_s} = P_s T = \frac{A}{2T} T = \frac{M^2 - 1}{3} \cdot \frac{1}{2T} \cdot T = \frac{M^2 - 1}{6}$$

In CONCLUSIONE per avere una BANDA CONTENUTA deve avere una COSTELLAZIONE molto GRANDE. Ma al crescere LINEARMENTE delle dimensioni delle costellazioni, l'energia media per trasmettere un simbolo cresce QUADRATICAMENTE.

Se un PROCESSO è STAZIONARIO può essere descritto dalla sua PSD.  
Voglio studiare il rumore additivo  $m(m)$  presente in  $x(m)$

Risulta che  $m(t) = w(t) \otimes g_r(t)$   $\rightarrow$  Anche  $m(t)$  sarà zero MEAN  
 ↑  
 zero  
 MEAN  
 DETERMINISTICO

$$\text{In frequenza ho } N(f) = W(f) G_r(f)$$

E' DIPENDENTE DALLA RISPOSTA IN FREQUENZA DEL FILTRO

Quindi anche se  $w(t)$  è bianco (PSD costante su tutto la frequenza),  $m(t)$  sarà colorato

$\rightarrow$  Essendo GAUSSIANE rispetto  $\mu_m$  e  $\sigma_m^2 \rightarrow$   $N(\mu_m, \sigma_m^2)$

Voglio calcolare ora la varianza del rumore  $m(t)$ :

$$\sigma_m^2 = E\{(m - \mu_m)^2\} \stackrel{\mu_m=0}{=} E\{m^2\} \leftarrow \begin{array}{l} \text{MEAN SQUARE, nelle nostre condizioni} \\ \text{e la POTENZA} \end{array}$$

Quindi divento:

FONDAMENTALE

RRC  $\rightarrow 1$

$$\sigma_m^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_m(f) df = \int_{-\infty}^{+\infty} S_w(f) |G_r(f)|^2 df = 2N_0 \int_{-\infty}^{+\infty} |G_r(f)|^2 df = \underline{2N_0}$$

Ricordando poi che  ~~$m(m) = m_I(m) + j m_Q(m)$~~   $m(m) = m_I(m) + j m_Q(m)$  con  $m_I, m_Q$  INDEPENDENTI ed EQUIVALENTE ottempo che:

$$\sigma_m^2 = \sigma_{m_I}^2 = \sigma_{m_Q}^2 = \underline{N_0}$$

Da non confondersi

$$\begin{cases} \text{Sono così} \\ \text{diverse!!!} \end{cases} \begin{cases} S_w(f) = 2N_0 \\ \sigma_m^2 = 2N_0 \end{cases}$$

### DECISION STRATEGY

A questo punto ho  $x(m) = Q_m + m(m)$  in ingresso al DECISORE.

Dovrò decidere MAXANDO la CONDITION PROBABILITY ovvero DATO  $x(m)$ , qual'è  $Q_m$  con probabilità più alta?

$$\hat{Q}_m = \arg \max_{a^{(i)} \in A} p(a^{(i)} | x_m) \quad [\text{osservato } x_m \text{ qual'è la probabilità che sia } Q_m]$$

Questa probabilità è difficile da calcolare. Se ho simboli EQUIPROBABILI ho quest'approssimazione:

$$p(a^{(i)} | x_m) \approx p(x_m | a^{(i)}) \rightarrow \text{molto più semplice}$$

Questo è il MAXIMUM LIKELIHOOD DECISION.

## PAM DECISION STRATEGY

La PAM usa segnali reali  $\rightarrow$  trasmette solo nella componente in FASE  $\rightarrow$  anche il CARRIER ENVELOPE È REALE.

$$a^{(i)} = i\text{-esimo simbolo}$$

$a_m$  = simbolo nel istante  $m$

$\rightarrow$  GAUSSIANO

Arendo  $x(m) = a_m + n(m)$  con  $n(m) \sim N(0, \sigma^2)$  ottengo (rendo om. deterministica)

$(x(m)) \in N(a^{(i)}, \sigma^2) \rightarrow$  Gaussiano ma con MEDIA SHIFTATA ( $\delta^{(m)} \neq 0$ ) perché consideriamo il carrier ENVELOPE ho

$\delta_i^2 = \delta_N^2 = \sigma^2$ , ma nella p.m.h solo la f.d.)

Dove calcolare quindi la PROBABILITÀ di una GAUSSIANA:

$$\rightarrow P(x(m) | a_m = a^{(i)}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x(m)-a^{(i)})^2}{2\sigma^2}}$$

→ COSTANTE  
INIZIALE

→ MIGRAZIONE  
DECRESCENTE → EQUIVALE A  
MINIMIZZARE  
L'ARGOMENTO  
DELL'ESPOENZIALE

Ho ottenuto:

$$\hat{a}_m = \arg \min_{a^{(i)}} \frac{(x(m) - a^{(i)})^2}{\sigma^2} = \arg \min_{a^{(i)}} |x(m) - a^{(i)}|$$

EUCLIDIAN  
DISTANCE

Il processo filtri è:

OPTIMAX  $\xrightarrow{\text{symbol equip.}} \text{MAXIMUM LIKELIHOOD} \xrightarrow{\text{MINIMUM DISTANCE}} \text{MINIMUM DISTANCE STRATEGY}$

ES (2-PAM)

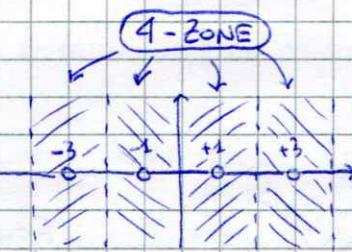
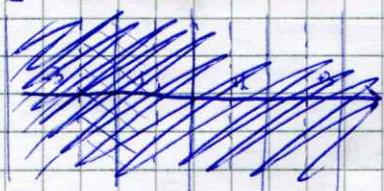
$$M=2 \rightarrow a^{(0)} = -1 \quad x(m) = 0,5 \\ a^{(1)} = +1$$

$$\circ d(x(m), a^{(0)}) = |0,5 - (-1)| = 1,5$$

$$\circ d(x(m), a^{(1)}) = |0,5 - 1| = 0,5 \rightarrow \text{Distance Minima} \rightarrow \text{ho ricevuto } \hat{a}_m = 1$$

Cioè quindi il DECISORE implementa è un SISTEMA A SOGLIE dove ho trenta ZONE in cui ogni ZONA rappresenta la vicinanza ad un punto specifico

ES (4-PAM)



È chiaro che rendendo  $x(m) = a_m + n(m)$  se  $n(m)$  è abbastanza elevata da superare le soglie di decisione di  $a_m$  commetto un errore!



## PAM ERROR PROBABILITY

È la probabilità di "SUPERARE LA CORRETA SOGLIA DI DECISIONE".  
Quindi la probabilità di sbagliare la decisione dell'i-esimo simbolo sarà:

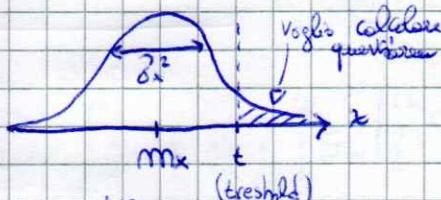
$$P(e | \alpha^{(i)})$$

La probabilità d'errore totale è la media delle singole probabilità:

$$P_e = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} P(e | \alpha^{(i)}) = \lim_{N^{(i)} \rightarrow \infty} \frac{N^{(i)}}{N^{(i)}} \rightarrow \text{(nella pratica si fanno tante misurazioni, confrontando trasmettente e ricevitore)}$$

Per amplizzare queste probabilità si usa la Q-FUNCTION

La Q-FUNCTION serve per calcolare l'integrale della coda di una GAUSSIANA:  
(probabilità che  $x$  sia maggiore di un segnale  $t$ )



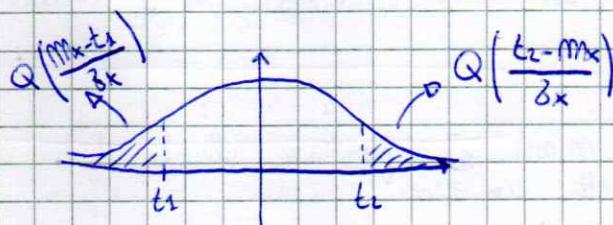
Dopo quindi calcolare la probabilità:  $P(x > t)$

$$\begin{aligned} P(x > t) &= \int_t^{+\infty} \text{pdf}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_x} \int_t^{+\infty} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}} dx \stackrel{y = \frac{x-m_x}{\sigma_x}}{=} \int_{\frac{t-m_x}{\sigma_x}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sigma_x} \int_{\frac{t-m_x}{\sigma_x}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{t-m_x}{\sigma_x}}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = Q\left(\frac{t-m_x}{\sigma_x}\right) \end{aligned}$$

## PROPRIETÀ

- ① Se  $x = -\infty$   $Q(x) = 1$  (integrale di tutta la PDF)
- ② Se  $x = \phi$   $Q(x) = \frac{1}{2}$  (metà PDF)
- ③ Se  $x = +\infty$   $Q(x) = 0$
- ④  $Q(-x) = 1 - Q(x)$

Quindi



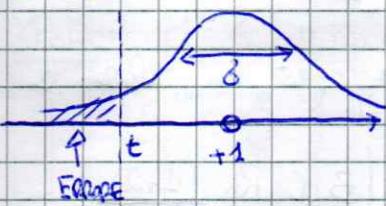
Formula generale

$$Q\left(\frac{d(t_i, m_x)}{\sigma_x}\right) \quad \text{con } d = \text{DISTANZA ESCLUSIVA}$$

Nelle PAM l'errore  $m(m)$  che considero è GAUSSIANO, ovvero le sue PDF è una GAUSSIANA, quindi posso sfruttare le Q-FUNCTION.

Possiamo applicare questa funzione di calcolo della probabilità d'errore nella PAM

Es (2-PAM)



$t = 0$  SOGLIA DI DECISIONE

$$\text{Per il simbolo } a^{(i)} = 1 \text{ ho } P(e | a^{(i)} = 1) = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

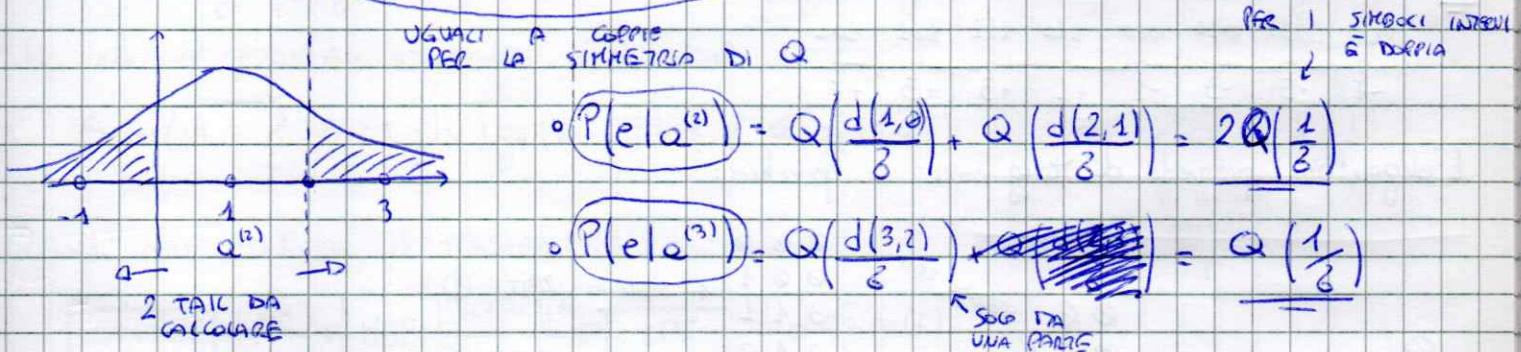
$$\text{Essendo simmetrica circa } t=0 \text{ ho } P(e | a^{(i)} = -1) = Q\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

Quindi:

$$P(e) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{M-1} P(e | a^{(i)}) = \frac{1}{2} \left[ Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Q\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) \right] = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Es (4-PAM)

$$P(e) = \frac{1}{4} \left[ P(e | a^{(0)}) + P(e | a^{(1)}) + P(e | a^{(2)}) + P(e | a^{(3)}) \right] = \frac{1}{2} \left[ P(e | a^{(0)}) + P(e | a^{(3)}) \right]$$



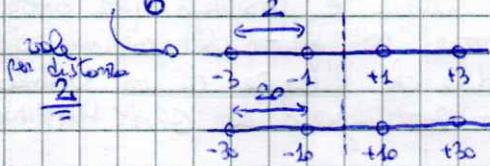
$$P(e | a^{(2)}) = Q\left(\frac{d(1,0)}{\sqrt{2}}\right) + Q\left(\frac{d(2,1)}{\sqrt{2}}\right) = 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P(e | a^{(3)}) = Q\left(\frac{d(3,2)}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{SOG DA UNA PARTE} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{Quindi: } P(e) = \frac{1}{2} \left[ 2Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right] = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Ho ottenuto lo Pe in funzione di  $\delta$ . Quello che voglio però è Pe in funzione del SIGNAL-TO-NOISE RATIO, ovvero in funzione di  $E_s$  (energia per trasmettere un simbolo) e  $N_0$  (potenza del rumore)

$$E_s = \frac{M^2 - 1}{6} \quad (\text{dipende dalla costellazione, in particolare dalla distanza tra due simboli})$$



Avrei bisogno di un'energia dieci volte maggiore  
 $E_s = \frac{M^2 - 1}{6}$  non vale più, cambia anche il valore di  $Q$

Trovando  $\alpha$  da  $E_s$ :

$$E_s = \frac{2^2 - 1}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{per } E_s/N_0 \text{ (SNR)}$$

$$2\text{-PAM } Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{con } \rightarrow E_s = \frac{4-1}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \textcircled{1} = 2E_s \quad \left\{ \textcircled{2} = Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{2E_s}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{1}{2E_s}}\right) \right.$$

4) (se lo faccio in più, scendo nella PAM)

$$4\text{-PAM } \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\text{con } \rightarrow E_s = \frac{16-1}{6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \quad \left\{ \textcircled{1} = \frac{2}{5} E_s \quad \textcircled{2} = \frac{3}{2} Q\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{1}{2E_s}}\right) = \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2E_s}{5N_0}}\right) \right.$$

Per componere 2-PAM e 4-PAM devo componere gli argomenti delle Q-FUNZIONI  
12 3/4 infatti non è significativo evitando Q exp. decr.

Quindi ho **2-PAM**  $\frac{2E_s}{N_0}$  e **4-PAM**  $\frac{2E_s}{5N_0}$ . Per confrontarli mi metto

$$Q^{2E_s} = Q^{4E_s}$$

nelle condizioni di avere pari errore quindi la 4-PAM avrà un valore di ENERGIA 5 volte MAGGIORRE della 2-PAM.

Quindi ho dimostrato che aumentando M ho banda inferiore ( $B \propto R_b \frac{(1+2)}{\log_2 M}$ ) ma allo stesso tempo ho un costo MAGGIORe nel SNR.

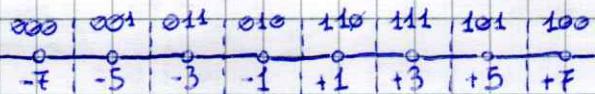
Questo controllo in realtà non è errato perché nella 2-PAM trasporto  $\frac{1}{2}$  bit/simbolo, nella 4-PAM ne trasporti 2.

## GRAY MAPPING

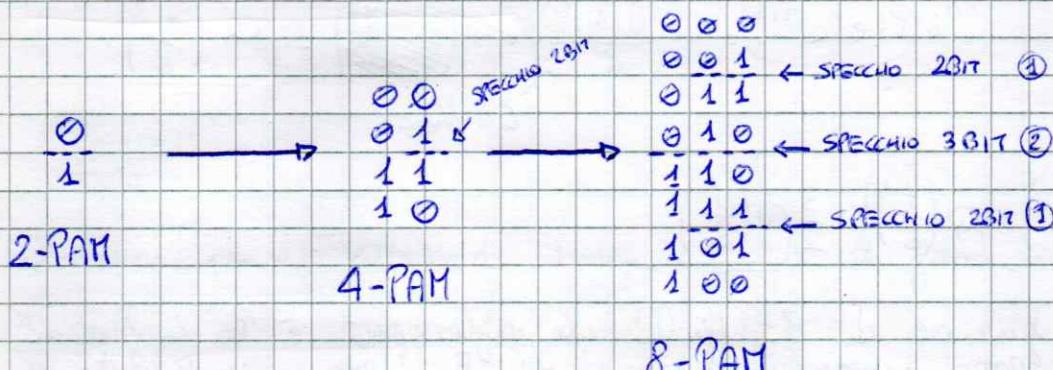
28/10

Come MAPPO ogni SIMBOLO della costellazione ad una SEQUENZA DI BIT?  
Nel gray mapping tra un simbolo ed un altro non solo un bit.

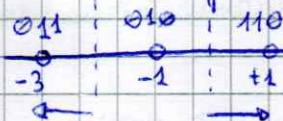
ES 8-PAM



L'algoritmo prevede di ragionare a specchio:



Il motivo di questa scelta è il seguente:



Se devo ricevere -1 e il mio sistema è progettato per avere un buon SNR, un eventuale errore mi farà al massimo ricevere 0 +1 o -3. Questo vuol dire che l'errore di un simbolo comporterà l'errore di UN SOLO BIT, grazie al GRAY MAPPING.

## PAM Bit Error Probability

Ho già calcolato  $P_e^{(b)}$ , voglio calcolare  $P_e^{(b)}$

Ricordo che  $E_b = \frac{E_s}{\log_2 M}$

$$P_e^{(b)} = \lim_{N^{(b)} \rightarrow \infty} \frac{N_e^{(b)}}{N^{(b)}}$$

# bit ricevuti  
# bit esistenti

$$\lim_{N^{(b)} \rightarrow \infty} \frac{N_e^{(b)}}{\log_2 M N^{(b)}} = \frac{1}{\log_2 M} \lim_{N^{(b)} \rightarrow \infty} \frac{N_e^{(b)}}{N^{(b)}} = \frac{1}{\log_2 M} P_e^{(b)}$$

Se ho ricevuto K simboli sbagliati allora avrò K bit sbagliati.

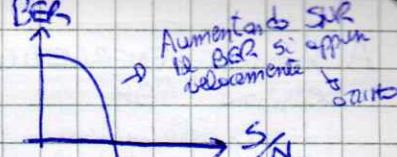
$$\frac{N_e^{(b)}}{N^{(b)}} \approx \frac{N_e^{(b)}}{N_e^{(b)}}$$

# bit sbagliati esistenti

# bit sbagliati esistenti

2-PAM  $M=2 \rightarrow m = \log_2 2 = 1 \text{ bit simbolo} \rightarrow E_b = E_s$

$$P_e^{(b)} = \frac{1}{\log_2 M} P_e^{(s)} = Q\left(\sqrt{\frac{2E_b}{N_0}}\right)$$



4-PAM  $M=4 \rightarrow m = \log_2 4 = 2 \text{ bit simbolo} \rightarrow E_b = \frac{1}{2} E_s \text{ e } P_e^{(b)} = \frac{1}{2} P_e^{(s)}$

$$P_e^{(b)} = \frac{1}{2} P_e^{(s)} = \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} Q\left(\sqrt{\frac{2}{5N_0}}\right) \right] = \frac{3}{4} Q\left(\sqrt{\frac{4E_b}{5N_0}}\right)$$

→ PAM con  
GAUSSIANO  
PIATTO  
 $h=0$

## QAM (Quadrature Amplitude Modulation)

QAM prevede di utilizzare 2 PAM ortogonali tra loro. Quindi nella stessa trasmissione può trasmettere insieme 2 segnali:

$m_{I(t)}$  in FASE e  $m_{Q(t)}$  in QUADRATURA

Ricordando dalle PAM la struttura di questi due segnali:

$$m_{I(t)} = \sum_i a_i g_I(t-iT) \quad \text{e} \quad m_{Q(t)} = \sum_i b_i g_Q(t-iT)$$

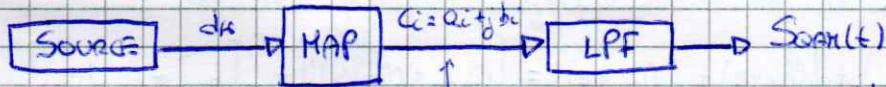
Ho che il COMPLEX ENVELOPE della QAM è:

$$S_{QAM}(t) = \sum_i (a_i + j b_i) g_I(t-iT) = \sum_i c_i g_I(t-iT) \quad \text{con} \quad c_i = a_i + j b_i$$

SIMBOLI INDEPENDENTI  
TRASMESSI IN CONTAZIONE

in un  
simbolo  
completo

Quindi posso costruire il TRASMITTORE così:



Uguale alla PAM tranne per l'uso di simboli complessi

In realtà il MAPPER dovrebbe generare separatamente  $a_i$  e  $b_i$  (che viene moltiplicato per  $j$  per andare in quadratura) e poi sommati.

## SIMBOLI QAM

La QAM è la COMBINAZIONE ORTOGONALE di 2 PAM, quindi  $M_{QAM} = M_{PAM}^2$

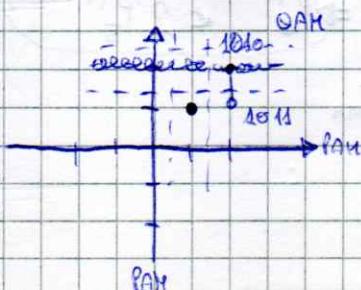
bit da trasmettere per simbolo

$$m = 1 \rightarrow 2-2PAM \rightarrow 4QAM \quad M_{QAM} = 2$$

$$m = 2 \rightarrow 2-4PAM \rightarrow 16QAM \quad M_{QAM} = 4$$

$$m = 3 \rightarrow 2-8PAM \rightarrow 64QAM \quad M_{QAM} = 6$$

Rispetto ad un 2 PAM  
separato ha il doppio per  $m$



Se nelle 2-PAM ortogonali rispetto il GRAY MAPPING,  
anche le QAM risultano le rispettive per punti ortogonali.  
(VERTICALE o ORIZZONTALE, non DIAGONALE)

A livello ENERGETICO la QAM è molti più efficiente della corrispondente versione PAM.

$$P = \int_{-\infty}^{\infty} S_S(f) df \rightarrow S_S(f) = \frac{A}{T} |G_F(f)|^2$$

rispetto alla PAM rischia solo A (forse per tenere un simbolo)

• Una 16-QAM si ottiene con 2 4-PAM che necessitano richiedono meno ENERGIA di una singola 16-PAM.

Ricordando che  $C_m = a_m + j b_m$  ho:

$$A^{(QAM)} = E\{C_m C_m^*\} = E\{|C_m|^2\} = E\{a_m^2 + b_m^2\} = E\{a_m^2\} + E\{b_m^2\} = 2 \frac{M_{PAM}-1}{3} = 2 \frac{M_{QAM}-1}{3}$$

Da questi ottempo l'energia per simbolo:

$$E_s = \frac{A}{2} = \frac{M_{QAM}-1}{3}$$

doppio rispetto PAM

$E_s$  (II)

$$A^{(16-PAM)} = \frac{256-1}{3} = \frac{85}{3}$$

) molto meno.

$$A^{(16-QAM)} = 2 \frac{16-1}{3} = \frac{10}{3}$$

### QAM ERROR PROBABILITY

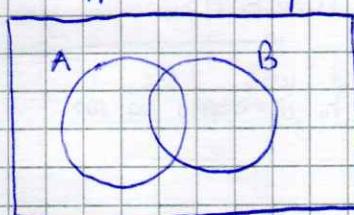
Il simboli ricevuti sono:

$$x(m) = c_m + m(m) = (a_m + j b_m) + (m_I(m) + j m_Q(m)) = [a_m + m_I(m)] + j [b_m + m_Q(m)]$$

A differenza delle PAM non posso più ignorare la componente in QUADRATURA del rumore, che comunque avendo GAUSSIANO è INDEPENDENTE e INCORRELATA rispetto alle componenti in FASE.

Dove calcolare  $E^{(i)} = \{ \text{errore} | c^{(i)} \} = \{ \text{errore} | a^{(i)} \} \text{ AND } \{ \text{errore} | b^{(i)} \}$

Possò rappresentare quest'errore attraverso degli insiemi:



$$A = \{ \text{errore} | a_i \}$$

$$B = \{ \text{errore} | b_i \}$$

$$E^{(i)} = A \cup B - (A \cap B) \leq A - B$$

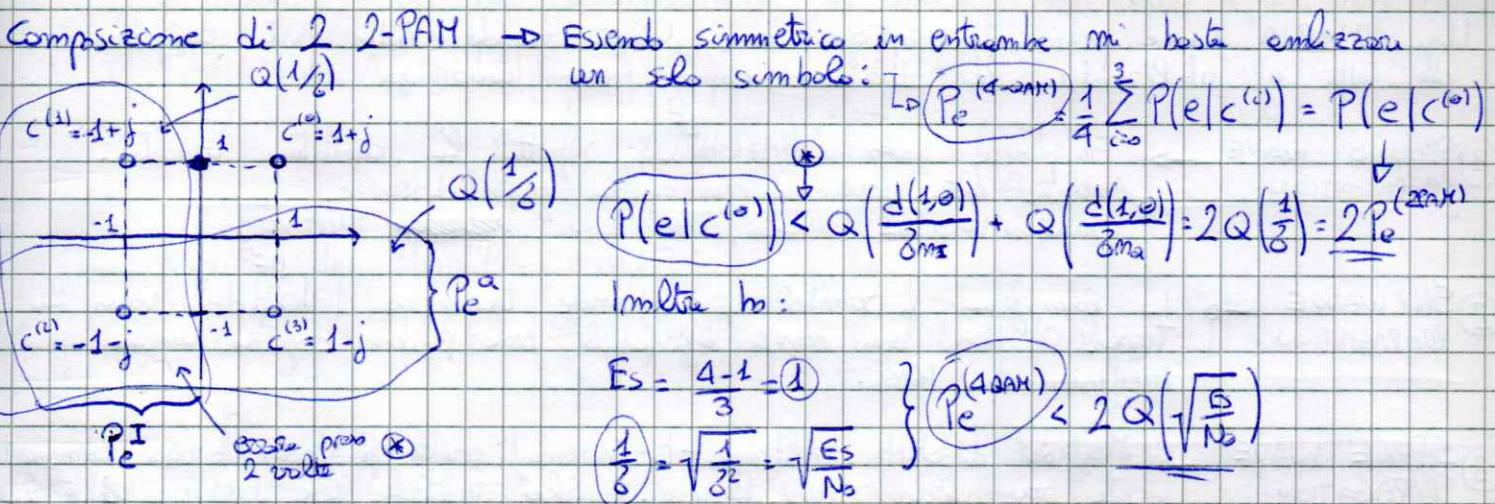
UPPER BOUND  
perché due volte

Quindi ho:

$$E^{(i)} = E_I^{(i)} \cup E_Q^{(i)} \rightarrow P(e|c^{(i)}) = P\{E^{(i)}\} \leq P\{E_I^{(i)}\} + P\{E_Q^{(i)}\} \Rightarrow P_e^{(QAM)} \leq 2 P_e^{(4PAM)}$$

con  $M_{PAM} = \sqrt{M_{QAM}}$

## FS (4-QAM)



## QAM BIT ERROR PROBABILITY

In una M-QAM il numero di bit trasmessi è pari al numero di bit trasmessi nel canale in FASE, più il numero di quelli trasmessi in QUADRATURA. Questi equivalgono quindi al doppio dei bit trasmessi da una 2<sup>nd</sup>-PAM, in quanto i due canali Fase e Quadratura sono due 2<sup>nd</sup>-PAM.

$$m_{\text{QAM}} = \log_2 M = 2 \log_2 \sqrt{M}$$

Calcolo ora la probabilità d'errore sul bit:

$$P_e^{(M\text{-QAM})} = \lim_{N^{(b)} \rightarrow \infty} \frac{N_e^{(b)}}{N^{(b)}} \underset{\substack{\text{GRAY} \\ \text{MAPPING}}}{\approx} \lim_{N^{(b)} \rightarrow \infty} \frac{N_e^{(b)}}{\log_2 M N^{(b)}} = \lim_{N^{(b)} \rightarrow \infty} \frac{N_e^{(b)}}{N^{(b)}} \cdot \frac{1}{\log_2 M} = \frac{1}{\log_2 M} P_e^{(2\text{-PAM})}$$

$$\text{Ricordando poi che: } \log_2 M = 2 \log_2 \sqrt{M} \quad \text{ho:}$$

$$P_e^{(M\text{-QAM})} < 2 P_e^{(2\text{-PAM})}$$

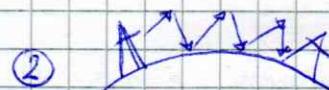
$$P_e^{(M\text{-QAM})} = \frac{1}{2 \log_2 \sqrt{M}} \cdot 2 P_e^{(2\text{-PAM})} = P_e^{(2\text{-PAM})}$$

Pecce sul  
BIT PAM

Grazie mi fa capire che una M-QAM ha le stesse probabilità d'errore sul bit di una 2<sup>nd</sup>-PAM, quindi posso RADDOPPIARE i bit trasmessi per simbolo lasciando invariati il SNR!

Usa l'ARIA come pezzo di propagazione. Questo rende tutto più complesso dato che tutti gli utilizzatori la utilizzano come MEZZO CONDIVISO.

- ① GROUND WAVE → Frequenze sotto 2 MHz (basso), sfrutta la curvatura terrestre.  
PROPAGATION Antenne alte, rare nello spazio per coprire grandi distanze.  
(SINCRONIZZAZIONE orologi, APPLICAZIONI ~~MILITARI~~ MILITARI)
- ② SKY WAVE → La ionosfera fa rimbombare le onde trasmesse (HF) verso la Terra. Non sono molto affidabili, ma possono coprire anche qualche miglio di Km.
- ③ SPACE WAVE → Megliori di 30 MHz. Antenna-to-Antenna: diretta per diretta oppure composta da rimbombi sul terreno. Solo qualche Km (maggiormente 1 è la frequenza minima è la distanza)



Le comunicazioni WIRELESS principalmente usano le SPACE WAVE in quanto i servizi MOBILI sono nell'ordine di 30 MHz - 30 GHz.

I principali meccanismi di PROPAGAZIONE sono:

- RIFLESSIONE, quando un segnale collide con un oggetto molto largo può rifuggire allontanandosi (refrazione), sia rimbombare con un angolo diverso.
- DIFFRAZIONE, quando un segnale viene bloccato da oggetti con l'ARGOMENTO che lo fanno propagare in più direzioni.
- SCATTERING, quando il segnale rimbomba su oggetti piccoli con la superficie ruvide.

Dobbiamo poi considerare due diverse attenuazioni:

• **LARGE SCALE FADING**, rappresenta la potenza necessaria a propagare il segnale tra Rx e Tx, nel maggior di 1 m.

PATH - LOSS

SHADOWING

### PATH-LOSS (Ap)

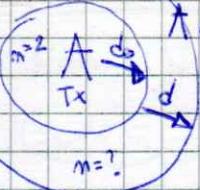
È un valore che determina l'attenuazione che il SEGNALE RICEVUTO ha subito rispetto al SEGNALE TRASMESSO.

$$P_{Rx} = P_{Tx} \cdot A_{Pl}$$

↳ Scalo LINEARE:  $A_{Pl} = P_{Rx}/P_{Tx}$

↳ Scalo LOGARITMICO:  $(A_{Pl})_{dB} = (P_{Rx})_{dB} - (P_{Tx})_{dB}$  [Se  $A_{Pl}$  è espresso come NEGATIVO, si è positivo in Tx-Rx]

Per studiare  $A_{Pl}$  considero tra il Tx e il Rx due AREE, una di rientrante ( $d_1, f_1$ ) dove non ci sono ostacoli e una ( $d_2$ ) dove ci sono ostacoli che modificano la propagazione.



In base all'area considero  $m$  (Path Loss Exponent) diversi.  
 Nell'area di riferimento ho  $m = 2$ , nell'altra dipende dagli ostacoli.

$$A_{PL} = \Gamma^2(f_r, d_o) \left(\frac{d}{d_o}\right)^m$$

↓ NEAR FIELD

FACTOR DI ATTENUAZIONE  $\approx \left(\frac{d}{4\pi d_o}\right)^2$   
 (dipende dall'area di riferimento)

Per le proprietà dei logaritmi ho:

$$(A_{PL})_{dB} = 10 \log_{10} \left\{ \Gamma^2(f_r, d_o) \cdot \left(\frac{d}{d_o}\right)^m \right\} = \underbrace{\Gamma_{dB} + 10 \log_{10} \left(\frac{1}{d_o}\right)}_{\text{CONSTANT TERM}} + 10 \log_{10} \left(\frac{1}{d}\right)^m.$$

$$= I_0 - m 10 \log_{10} d$$

$\uparrow$  PL EXponent  $\uparrow$  DISTANCE  
 $\uparrow$  COSTANT TERM

$I_0$

→ PATH LOSS è DETERMINISTICO, denso  
comune solo  $d$ .

La FREQUENZA gioca un ruolo molto importante nel calcolo dell'attenuazione.  
 A  $f_r < 6$  GHz (2.5mm onde micrometriche) l'area a causa dell'~~ATTACCO~~ assorbita  
 da aria e ossigeno e vapore acqueo non più trascurabile diventa un LOW PASS  
 FILTER, attenuando di più il segnale. Diventa quindi necessaria una  
 POTENZA MAGGIORA.

Nella progettazione delle CELLE per i MOBILE SERVICES abbiamo quindi un TRADE-OFF.

"HF" → Maggiore spettro, Maggiore capacità  
 $(2600\text{GHz})$  → Bassa copertura

PERFETTO PER AREA  
CITTADINE SOVRACCOLATE

"LF" → Capacità bassa (3G x 2000-2600 GHz)  
 $(800\text{MHz})$  → Alta copertura

PERFETTO PER ZONE  
RURALI

## SHADOWING (As)

Essendo il PATH-loss deterministico se prendo 2 punti alla stessa distanza da Tx dovrà avere la stessa attenuazione.

Nella realtà non è vero in quanto ho la componente elettrica dovuta a tutti ciò che si interpone tra Tx e Rx.

Questa attenuazione elettrica As è LOG-NORMAL DISTRIBUTED, ovvero ha una PDF GAUSSIANA, ma esprimo in decibel.

$$p(As) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_s} e^{-\frac{As^2}{2\sigma_s^2}}$$

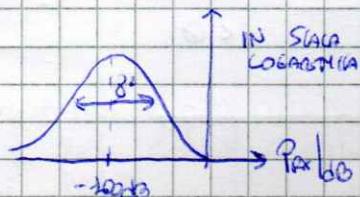
con  $\mu_s = 0$  (zero MEAN)  
 $\sigma_s, As$  in DECIBEL

Quindi sommando As e APL ho:

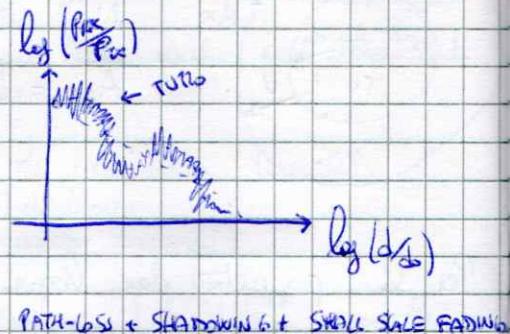
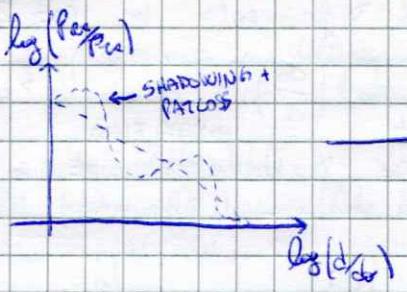
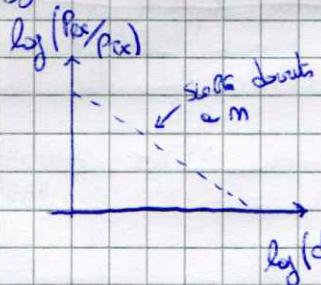
$$P_{Rx} = P_{Tx} \cdot A_{PL} \cdot As \quad \text{oppure} \quad P_{Rx|dB} = P_{Tx|dB} - A_{PL|dB} - As|dB$$

ES

Se ho  $P_{Tx} A_{PL} = -100$  dB, P<sub>Rx</sub> ha questa PDF:



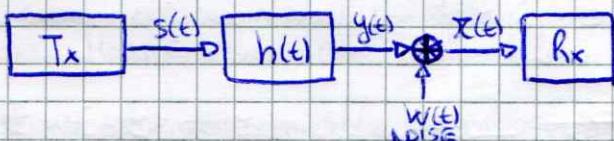
Effetti combinti:



## SMALL-SCALE FADING (SSF)

Il TX non riceverà una sola replica del segnale trasmesso. Questo infatti a causa di RIFLESSIONE / DIFFRAZIONE / SCATTERING si propagherà in più repliche, ognuna con le proprie ATTENUAZIONE, FASE e RITARDO. Il RICEVITORE riceverà in MEDIA un segnale attenuato in base al LARGE-SCALE FADING, ma nello specifico ha Norme di tutte le componenti dovute allo SSF.

Ricordando lo schema di un CANALE DI COMUNICAZIONE:



Ho che  $y(t) = s(t) \otimes h(t) \leftarrow$  Voglio descrivere le distorsioni del canale dovute a LSF e SSF (CANALE EQUIVALENTE IN BIB)

$$h(t) = A_{LS} \sum_{i=0}^{N-1} 2_i e^{j\phi_i} s(t - \tau_i)$$

PATH LOSS  
+ SHADOWING      ATTENUAZIONE      RITARDO

$N$  = COMPONENTI DOVUTE A DIFFRAZIONE / SCATTERING  
 $i$  =  $i$ -esima componente

Quindi il COMPLEX ENVELOPE del segnale distorto dal canale sarà:

$$y(t) = s(t) \otimes h(t) = A_{LS} \sum_{i=0}^{N-1} 2_i e^{j\phi_i} s(t - \tau_i)$$

REPliche ATTENUATE, SFASATE E RITARDATE  
DEL SEGNALE

Gli effetti del canale sono ALEATORI:

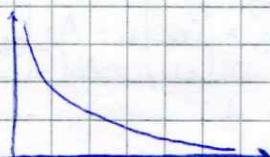
$$2_i e^{j\phi_i} = x_i + j y_i \quad \text{con } x_i, y_i \text{ IID } \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Da questi ottempo che:

$$2_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2} \in \text{Rayleigh Distribution} \rightarrow p(2) =$$

La distribuzione della POTENZA  $S = 2^2$   
è ESPOENZIALE

$$p(s) = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{s}{2\sigma^2}} & s \geq 0 \\ 0 & s < 0 \end{cases}$$



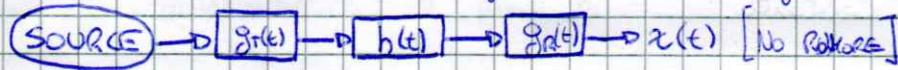
$$p(2) = \begin{cases} \frac{2}{3\sigma^2} e^{-\frac{2^2}{2\sigma^2}} & 2 \geq 0 \\ 0 & 2 < 0 \end{cases}$$

$$\frac{2^2}{3\sigma^2} = \frac{4}{3\sigma^2}$$



## MULTIPATH CHANNEL

Andiamoci a studiare il segnale ricevuto ignorando il rumore



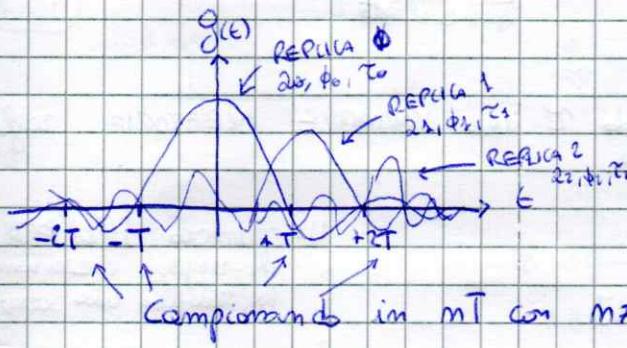
$$x(t) = \sum_{i=0}^m a_i g(t - iT) \quad \rightarrow \quad x(mT) = \sum_i a_i g(mT - iT) = \sum_k a_{mk} g(kT)$$

Il FILTRO EQUIVALENTE è:

DO PER SCARICO g(t)  
che rispetti Nyquist

$$\begin{aligned} g(t) &= g_T(t) \otimes h(t) \otimes g_R(t) = \underbrace{g_T(t) \otimes g_R(t)}_{\text{LINEARITA'}} \otimes h(t) = g_N(t) \otimes h(t) = \\ &= g_N(t) \otimes \sum_i a_i e^{j\phi_i} \delta(t - \tau_i) \stackrel{\text{LINEARITA'}}{=} \sum_i a_i e^{j\phi_i} [g_N(t) \otimes \delta(t - \tau_i)] \stackrel{\text{PROPR. CAMPIONATURA}}{=} \\ &= \sum_i a_i e^{j\phi_i} g_N(t - \tau_i) \end{aligned}$$

→ È ovvio che  $g(mT) \neq \delta[m]$  non rispetta Nyquist (ovvero ISI)



Una volta che il FILTRO in Rx ha ricevuto  $x(t)$  questo viene CAMPIONATO per andare in ingresso al DECISORE. Ignorando il rumore ho:

9/11

$$x(mT) = \sum_k c_{mk} g(kT) = c_m g(0) + \sum_{k \neq m} c_{mk} g(kT)$$

con

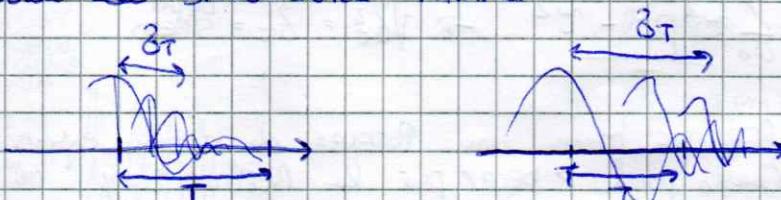
$$g(kT) = g(t)|_{t=kT} = \sum_{i=0}^{N-1} a_i e^{j\phi_i} g_N(kT - \tau_i)$$

[severa AWGN la corruzione di ISI non va a 0]

Nel canale MULTIPATH quindi ho una componente di ISI (causata dallo SMALL-SCALE FADING) non indifferente. In questi casi aumentare l'SNR non funziona in quanto dà maggiore energia ai simboli, da maggiore energia a  $C_{mk}$  (KCCV) quindi anche alla componente di ISI.

## DELAY SPREAD ( $\beta_T$ )

Indica la massima distanza tra le componenti relative ad un singolo simbolo dovute allo small-scale fading



È chiaro che se  $\beta_T \ll T$  le componenti sono RAVVICINATE e posso considerarle una banda. Se invece  $\beta_T \gg T$  altre alcune componenti interferiscono con le componenti del simbolo successivo in modo non indifferente, diventando difficile da gestire.

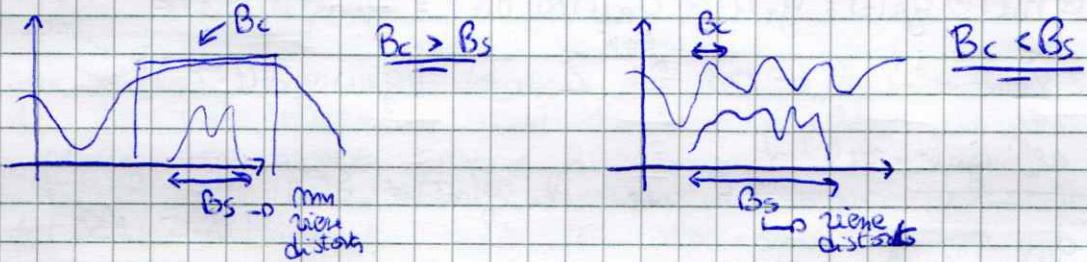
## COHERENCE BANDWIDTH ( $B_c$ )

È descritto come l'intervallo di frequenza entro cui la risposta in frequenza del canale è considerabile costante.

$$B_c \approx \frac{1}{5\pi}$$

È chiaro che se  $B_c > B_s$  il segnale non verrà distorto quindi sarà come avere  $\delta T \gg T$ .

Al contrario se  $B_c < B_s$  il canale farà paura solo alcune frequenze, distorcendo il segnale ~~ma~~ verrà distorto (come  $\delta T > T$ ).



Cioè che vogliamo fare è studiare  $\Sigma$ . Essendo  $\Sigma$  una VARIABILE ALEATORIA vogliamo minimizzare il VALORE MEDIO e la VARIANZA.

$$\bar{\Sigma} = E\{\Sigma\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma \text{ pdf}(\Sigma) \approx \sum_{i=0}^{N-1} \frac{\Delta_i^2}{\sum \Delta_i^2} \Sigma_i$$

ES:  $\Sigma$  è discreto, lo approssimo

$N$  = numero delle PATH/COMPONENTI  
che raggiungono e contribuiscono al Rx, relative alla stessa righe.

In pratica ho che  $\frac{\Delta_i^2}{\sum \Delta_i^2} \approx p_i \rightarrow$  Quindi  $\Sigma$  come una VA DISCRETA quindi  $p_i$  è la PMF dell'i-esima COMPONENTE.

$\Delta_i^2$  = POTENZA COMPARANTE ATTUALE

$\sum \Delta_i^2$  = POTENZA TOTALE DI TUTTE LE COMPONENTI

$\Delta_i^2$  è la POTENZA dell'i-esima componente, quindi POT i-esima è una buona approssimazione della probabilità di trovare l'i-esima componente.

$$E\{\Sigma\} = \sum_{i=0}^{N-1} \Sigma_i p_i$$

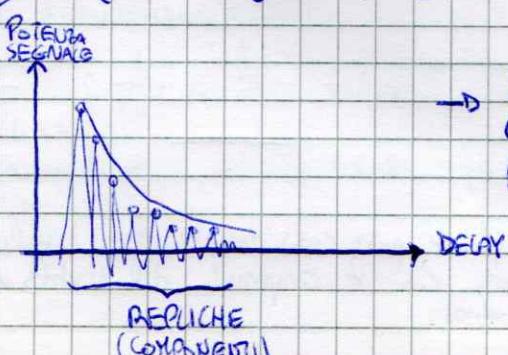
ovvero ogni delay di ogni

Quindi in questa approssimazione componente è pensata delle proprie probabilità.

Questi però possono avere anche un DELAY ENORME, ma se mi la potenza di quella componente è TRASCURIBILE è inutile che compare nel calcolo del VALORE MEDIO e poi perciò di una componente con alte potenze e bassi delay.

Per quanto riguarda la VARIANZA:

$$\sigma_\Sigma^2 = E\{(\Sigma - \bar{\Sigma})^2\} = E\{\Sigma^2\} - \bar{\Sigma}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \Sigma_i^2 p_i - \bar{\Sigma}^2 \rightarrow \sqrt{\sigma_\Sigma^2} = \sigma_c = \text{DELAY SPREAD}$$



→ Le REPLICHE hanno una POTENZA che decresce esponenzialmente. Questo perché il DELAY più le REPLICHE viaggia nell'aria più viene attenuata.

È chiaro che se la mia  $f_c$  è più alta, il DECADIMENTO ESponentiale delle molte più veloci, in quanto l'attenuazione dovuta al canale (ATTRAVERSO ACCIAIO, OZIGENO per onde millimetriche) è maggiore.

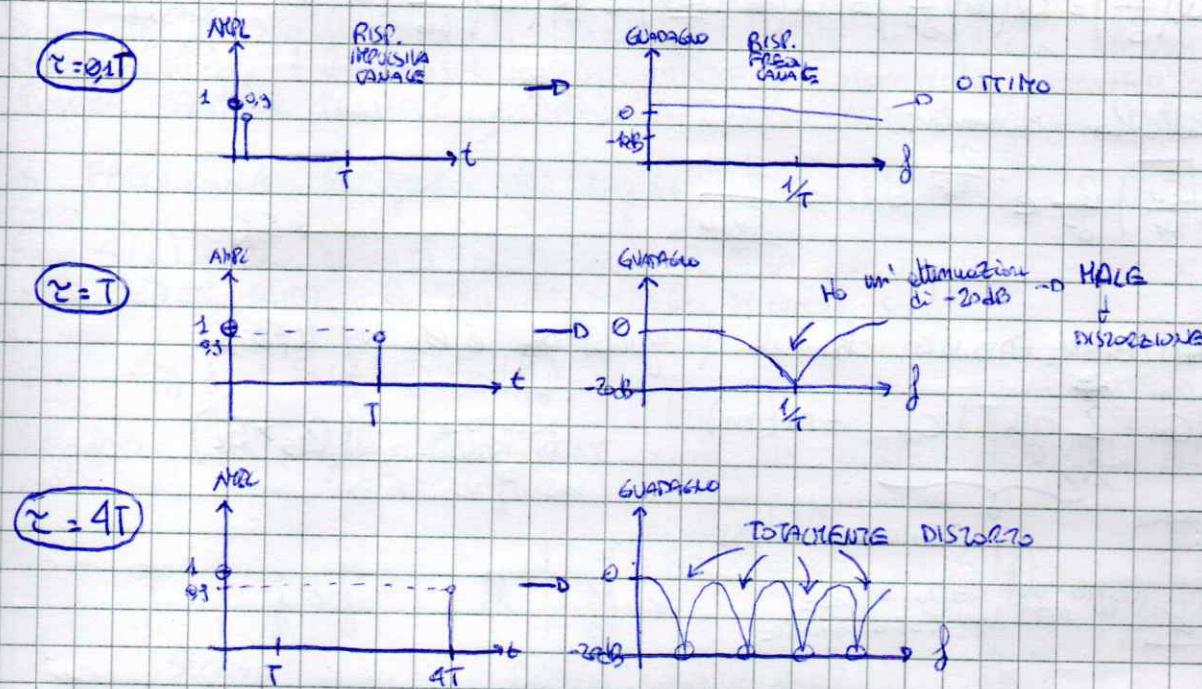
ES A New York (caso limite)  $\tau_0 \approx 4\text{ps}$  quindi  $B_c \approx \frac{1}{5.4 \cdot 10^{-6}} \approx 50\text{kHz}$ .

Per poter ignorare l'ISI dovrei trasmettere a 10 Gbps

ES CANALE TWO-PATH (due riflessi)

$$h(t) = \alpha_1 s(t) + \alpha_2 s(t-\tau)$$

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, 3, \tau_1 = 0, \tau_2 = \tau$$



Aumentando  
il BIT RATE  
lo stesso  
canale ha  
pessime  
performance

Confrontiamo

che il BIT ERROR RATE di uno 2PAM su 3 combi diversi:

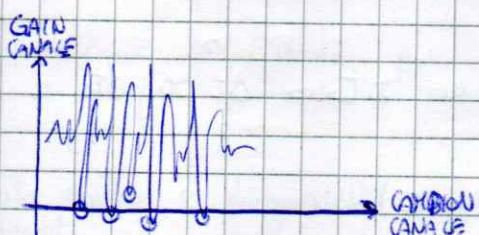
① ADDITIVE WHITE GAUSSIAN Noise channel  $\rightarrow h(t) = \delta(t) \rightarrow H(f) = 1 = \text{costante}$

$$x(m) = Cm + n(m)$$

$$\xrightarrow{\text{BER}} S/N$$

② FLAT RAYLEIGH FADING channel (flat  $\rightarrow B_c > B_s$ )

$x(m) = \alpha (Cm + n(m)) \rightarrow$  con le VARIABILI AUGMENTATE che rappresentano l'attenuazione dovuta al canale



$$\ln \text{de } x(m) = \alpha e^{j\phi} + n(m) \rightarrow \text{Q(m) rim} \rightarrow \text{più 1}$$

$$x(m) e^{-j\phi} = \alpha Qm + N(m) e^{-j\phi} = \alpha Qm + N'(m)$$

$\uparrow$  HO ELIMINATO LA FASE

$$\text{Q(m) non passa invece attraverso} \rightarrow \frac{1}{2\alpha} x(m) = Qm + \frac{N(m)}{2\alpha} = Qm + N''(m)$$

Inoltre mentre  $m'(t)$  è semplicemente RUOTATO rispetto a  $m(m)$ ,  $m''(t)$  è pari ad  $m(t)$  AMPLIFICATO, in quanto  $\alpha$  è un ATTENZIONE ( $\alpha < 1$ )

Quindi  $\rightarrow \alpha(m + m'(m)) \rightarrow$  SEGNALE ATTENUATO

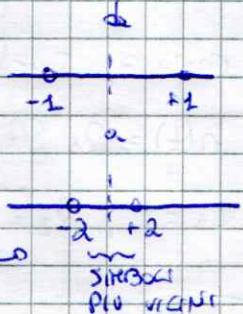
$(m + \frac{m(m)}{\alpha}) \rightarrow$  RUMORE AMPLIFICATO

} Difficile riduzione entrobito

Studio Pe a livello PROBABILISTICO, quando  $\alpha$  una VA di cui comincia la DISTRIBUZIONE

$$Pe^{(b)} = \int_0^{\infty} P(e | \alpha) p(\alpha) d\alpha \xrightarrow[2PAK]{\text{Roughly Distribution}} \frac{\alpha}{S^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2S^2}}$$

$$P(e | \alpha) \downarrow Q\left(\frac{\alpha}{S}\right) = Q\left(\alpha \sqrt{\frac{1}{S^2}}\right) \xrightarrow[S/N \text{ const.}]{\text{Simplifying}} Q\left(\alpha \sqrt{\frac{2E_s}{N_0}}\right) \approx Q\left(2\alpha \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right)$$



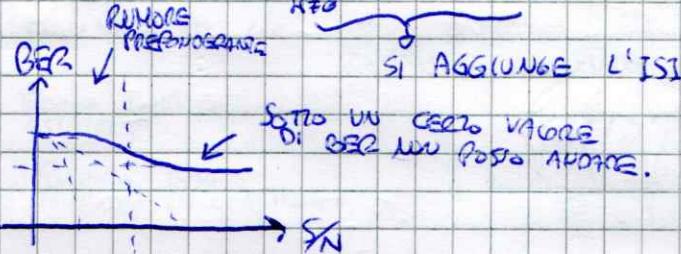
Quindi il calcolo diretto:

$$Pe^{(b)} = \int_0^{\infty} Q\left(2\alpha \sqrt{\frac{E_s}{N_0}}\right) \frac{d\alpha}{S^2} e^{-\frac{\alpha^2}{2S^2}} d\alpha \approx \frac{1}{E_s/N_0}$$



### ③ MULTIPATH RAYLEIGH FADING channel ( $g(kT)$ non è 0 per $k \neq 0$ )

$$x(m) = g_0 c_m + \sum_{k \neq 0} g(kT) c_{m+k} + m(m)$$



SELEZIONE DI FREQUENZA ( $B_s > B_c$ )

Oltre al MULTIPATH CHANNEL nelle comunicazioni WIRELESS è necessario studiare il TIME VARYING CHANNEL ovvero la variazione di AMPIZZA e FASE allo scorrere del tempo.

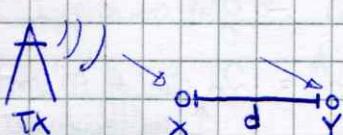
11/11

$$h(t, \tau) = A_s \sum_{i=0}^{N_{ch}} a_i(t) e^{j\phi_i(t)} s(\tau - \tau_i)$$

LEGGI SUL  
TEMPO COSTANTE

DIPENDENZA DAL TEMPO NELLA SMALL SCALE FADING

Generalmente i DISPOSITIVI WIRELESS sono in continuo movimento, questo comporta problemi di ritardo

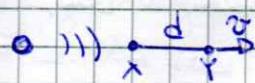


Il ricevitore riceverà da Y con un ritardo  $\Delta t$  rispetto a X  
dovuto alla distanza:

$$\Delta \tau = \frac{d}{c} \text{ con } C = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s (LCE)}$$

Quindi se X riceve  $y(t) = \sin(2\pi f_c t)$  Y riceverà  $y(t) = \sin(2\pi f_c (t - dt/c))$

Questo modello in particolare vale se la velocità e distanza nulla sono rette.



$$\text{quindi } d = vt \quad \Delta z = \frac{d}{c} = \frac{vt}{c}$$

$$y(t) = \sin(2\pi f_c t - 2\pi f_c \Delta z) = \sin(2\pi (f_c - \frac{v f_c}{c}) t)$$

$\rightarrow$  doppler shift

Il SEGNALE a causa del DOPPLER SHIFT non manda che ci si allontana dal TX avrà una frequenza sempre maggiore.

Nel caso di FADING CHANNEL l'Rx in movimento riceverà più repliche, ciascuna effette in modo diverso dal DOPPLER SHIFT.

Ogni replica avrà un DOPPLER SHIFT pari a  $f_c - \frac{v f_c}{c}$  con

di solito si considera che tutte le repliche hanno la stessa energia (UNIFORM SCATTERING).

Dato che il segnale ricevuto (risultante da tutte le repliche che non cominciano) non è deterministico, lo considero un PROCESSO STOCHASTICO, caratterizzato dalla POWER SPECTRAL DENSITY e dell'AUTO CORRELAZIONE. Lo chiamiamo

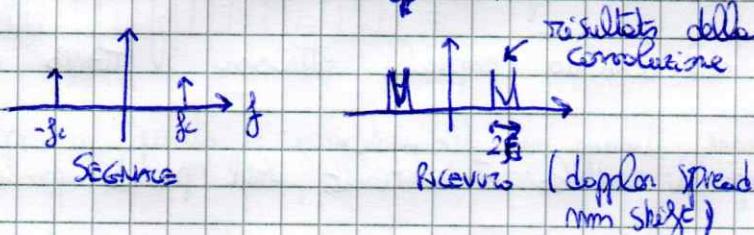
In FREQUENZA lo spettro del segnale viene allargato.

Se  $S_s(f)$  è la DENSITÀ SPECIALE DI POTENZA del segnale trasmesso e  $S_d(f)$  è l'effetto del DOPPLER SHIFT ha densità spettrale ricevuta zero:

$$S_r(f) = S_s(f) \otimes S_d(f)$$

DENSITÀ SPECIALE DI POTENZA DEL TIME VARYING CHANNEL

Se invio un segnale SINGLE TONE come un coseno il risultato non ha una più della



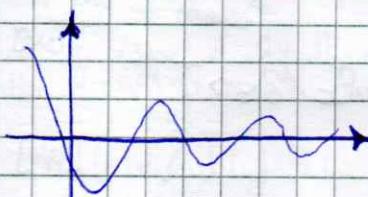
$$S_r(f) = \frac{1}{\pi f_d \sqrt{1 - (\frac{f}{f_d})^2}}$$

DOPPLER SPECTRUM

$f_d$  → frequenza Doppler  
 $f_d = \frac{v f_c}{c}$

Dato che stiamo studiando le VARIAZIONI NEL TEMPO contiene pulsazioni nel dominio del tempo, quindi della DENSITÀ SPECIALE DI POTENZA dell'AUTOCORRELAZIONE

L'autocorrelazione del doppler spread è  $\rho(t) = J_0(2\pi f_d t) \rightarrow$  Bessel di ordine 0 (PLOTATKE, ma non ha forma chiara)



$$\text{Nota che per } x = \frac{1}{2} \rightarrow J_0(2\pi f_d t) \approx 0$$

Se l'AUTOCORRELAZIONE è 0 vuol dire che il campo in due istanti temporali diversi assume valori STATISTICAMENTE INDEPENDENTI

Quindi è incorrelato per  $f_d T_c = \frac{1}{2} \rightarrow T_c = \frac{1}{2 f_d}$  questo è il **TEMPO DI CORRENZA**

Questo valore è fondamentale in quanto il campo in  $a(t)$  e in  $a(t+T_c)$  avrà un comportamento completamente diverso. All'interno di  $T_c$  invece possiamo dire che ha un comportamento COSTANTE (approssimativamente)

Nota inoltre che:  $f_d = \frac{\omega_d}{c}$

$$T_c = \frac{1}{2f_d} = \frac{c}{2\omega_d}$$

più RX è veloce / più la frequenza di trasmissione è alta,  
più basso è il mio  $T_c$ .

Lo stesso ragionamento posso farlo intemminci di DISTANZA:

$$d_c = v T_c = v \frac{c}{2\omega_d} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{f_d} = \frac{\lambda}{2} \rightarrow \boxed{\text{SPAZIAL COHERENCE}}$$



A questa distanza le ANTENNE producono **REPliche INCORRELATE** (fondamentale nella trasmissione mobile). Quindi più è alta  $f_d$ , minore è  $\lambda$  e più antenne posso usare in un'area.

Se invece di un segnale singolo torno uno un segnale con stellato  $B_s$  dipende dalla spettro in sé.

Soltamente  $f_d$  è nell'ordine delle centinaia di Hz, mentre i Neghelli WIRELESS sono nell'ordine dei GHz. Quindi in scala  $S(f)$  appare come un delta

$$\int M \approx \int \uparrow \rightarrow \text{può essere ignorato l'effetto del Doppler spread}$$

- Quindi se  $B_s \gg f_d$  posso ignorare l'effetto del **DOPPLER SPREAD**, e non nel caso di Slow FADING
- Se invece ho  $B_s < f_d$  il neghile ricevuto verrà distorto perché del doppler spread che genera un BER indubbiamente e problemi di sincronizzazione.

Lo stesso ragionamento posso farlo nel dominio temporale attraverso il TEMPO DI SIMBOLI  $T$

- Slow FADING per  $T_c > T$ , il tempo di simbolo è contenuto nel periodo in cui il canale è costante
- Fast FADING durante il ~~tempo~~ tempo di simbolo il canale varia  $T_c < T$ .

Quindi in un canale wireless abbiamo due principali fenomeni da tenere in considerazione nello **SMALL SCALE FADING**

① MULTIPATH SPREAD  $\rightarrow$  Flat FADING, se  $B_s < B_c / \beta_c < T$   
 $\rightarrow$  Frequency Selective FADING, se  $B_s > B_c / \beta_c > T$  [OK]

② DOPPLER SPREAD  $\rightarrow$  Slow FADING, se  $B_s \gg f_d / T_c > T$   
 $\rightarrow$  Fast FADING, se  $B_s < f_d / T_c < T$  [OK]

Tra i due quello peggiore è ①, in quanto di solito si avrà  $B_s \gg f_d$ ; infatti la situazione più comune prevede:

- $\beta_c < T_c$
- $B_c > f_d$

Spero di evitare nel  $T_c$  diminuendo  $v$ . Per esempio gli intgrali degli orari sempre collegati non è facile, ma ci stellati, per diminuire la velocità della linea.

## MULTI-CARRIER SIGNALS

Le varie tecnologie WIRELESS hanno da sempre implementato dei sistemi per risolvere il problema del MULTIPATH.

- 2G, utilizza degli EQUALIZZATORI per ottenere un segnale in uscita pulito:

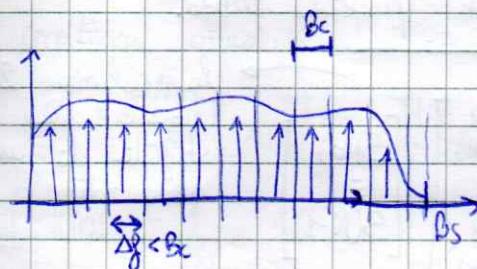


- 3G, utilizza il CSMA.

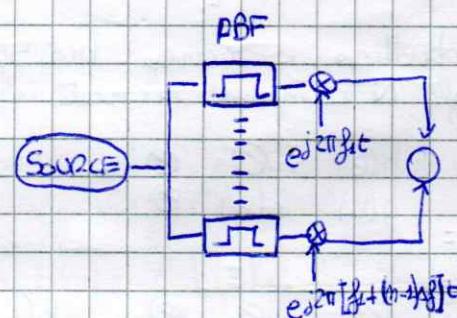
- 4G, 5G, ecc... utilizzano il MULTI-CARRIER MODULATION

La modulazione multi-carrier è robusta al MULTIPATH FADING, ha un'alta EFFICIENZA SPECTRALE e permette di allocare le RISORSE in modo FLESSIBILE, assegnando dinamicamente agli utenti le risorse radio.

Le basi della modulazione partono da un segnale con banda  $B_s > B_c$ , quindi soggetto al MULTIPATH FADING. Per dissolvere si divide il segnale in tanti segnali minori di banda  $B_s' < B_c$ , in modo tale che abbiano FLAT FADING. Questi poi vengono inviati parallelamente.



Schemi concettuali

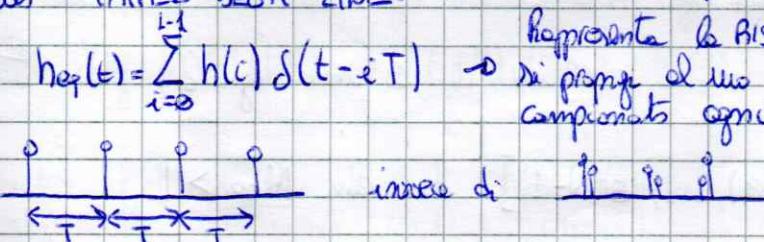


Nelle pratiche questi è irrealizzabile, in quanto se dobbiamo dividere il segnale in  $n$  segnali avremo bisogno di  $n$  BPF,  $n$  modulatori (ma tutti attivi), ecc...

Nelle pratiche si usa un sistema diverso. Un multi-path channel può essere schematicizzato in questo modo:

$$h(t) = A_s \sum_{i=0}^{N_s-1} a_i e^{j\phi_i} s(t - \tau_i)$$

Così che facciamo è sfruttare l'egualianza tra questo modello ed un modello equivalente, detto TAPPED DELAY LINE:



Rappresenta la RISPOSTA IMPULSIVA del canale quando un segnale si propaga al suo interno con un simbolo di tempo di simbolo  $T$ , compionato ogni  $T$

Il risultato è che il COMPLEX ENVELOPE del segnale ricevuto rimane lo stesso in entrambi i modelli:

$$y(t) = \sum_{m=0}^{N_s-1} a_m e^{j\phi_m} s(t - \tau_m) = \sum_{i=0}^{L-1} h(i) s(t - iT)$$

Il problema che vogliamo risolvere è che un CANALE FREQUENCY SELECTING in presenza di ISI distingue il segnale che vogliamo trasmettere.

$$y(k) = \underbrace{h(0)s(k)}_{\text{SIMBOLO TRASMESSO}} + \sum_{l=1}^{L-1} h(l)s(k-l)$$

L = MEMORY OF CHANNEL, numero di simboli possibili che interferiscono col mio simbolo attuale.

Possiamo considerare un blocco di N campioni:

$$s = [s(0), \dots, s(N-1)]$$

In RICEZIONE i CAMPIONI RICEVUTI saranno:

$$y(k) = h(0)s(N-1) + \dots + h(L-1)s(N-L) = \sum_{l=1}^{L-1} h(l)s(N-l)$$

Quindi i CAMPIONI ricevuti saranno:

$$y(0) = h(0)s(0) \rightarrow \text{non ho anche } s(-1), s(-2)$$

$$y(1) = h(0)s(1) + \underbrace{[h(1)s(0)]}_{\text{ISI}}$$

$$\vdots$$

$$y(N-1) = h(0)s(N-1) + [h(1)s(N-2) + \dots + h(L-1)s(N-L)]$$

Ho escluso il contributo nell'ISI dei simboli al di fuori del blocco.

Inoltre s(m) ha m indicati negativi, sarebbe esterni al blocco.

Il mio obiettivo è ricevere  $h(0)s(k)$  senza ISI, in qualche modo.

Riscrivo gli N campioni ricevuti in forma MATRICIALE:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ h(1) & h(0) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & h(L-1) & \dots & h(1) & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ s(1) \\ \vdots \\ s(N-1) \end{bmatrix}$$

↑ INIZIO MEMORY OF CHANNEL

→ la colonna 2 è uguale alla 1 ma shiftata di uno verso destra

Ora  $y = Hs$

La matrice ottenuta è detta di Toeplitz e ha come caratteristiche:

- ①  $h(0)$  sulla DIAGONALE PRINCIPALE  $h(1)$  su quella sotto ecc...
- ②  $0$  sulle diagonali sopra la principale.

A questi punti applico una CYCLIC EXTENSION, ovvero prendo gli ultimi  $N_{cp}$  campioni del blocco  $s$  e li inserisco all'inizio, creando una struttura circolare.

Irgli i primi  $N_{cp}$  campioni e gli ultimi campioni di  $s$  sono uguali. Ho ottenuto quindi un nuovo blocco:

$$\bar{s} = [s(N-N_{cp}-1), \dots, s(N-1), s(0), \dots, s(N-1)] \quad \text{con } \underline{N_{cp} > L}$$

Ora ho anche degli INDICI NEGATIVI:

$$\bar{s}(-1) = s(N-1)$$

⋮

$$\bar{s}(-N_{cp}) = s(N-N_{cp}-1)$$

→ Trasmetto questo blocco e composto da 0. Perdo POTENZA e EFFICIENZA spettrale perché ricevo N valori, ma ho un totale  $N_{cp} + N$ .

Quindi trasmettendo questo nuovo blocco ottempo che i campioni ricevuti saranno:

$$y(k) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l) s(k-l)$$

ovvero:

$$y(0) = h(0) s(0) + [h(1) s(N-1) + \dots + h(L-1) s(N-L+1)]$$

$$y(1) = h(0) s(1) + [h(1) s(0) + \dots + h(L-1) s(N-L+2)]$$

ISI

$$y(N-1) = h(0) s(N-1) + [h(1) s(N-2) + \dots + h(L-1) s(N-L)]$$

CIRCULANT MATRIX

In questa forma MATRICIALE diversa:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ \vdots \\ y(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(0) & \dots & -h(L) & h(1) & h(0) \\ h(1) & h(0) & \vdots & h(L) & h(1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h(L-1) & h(0) & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & h(L-1) & \dots & h(1) & h(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s(0) \\ \vdots \\ s(N-1) \end{bmatrix}$$

→ ogni colonna è ancora shiftata di uno verso il basso rispetto alla precedente, ma con l'EFFETTO PACMAN.

Sulla DIAGONALE PRINCIPALE ho ancora  $h(0)$ . La matrice ottenuta è  $\bar{H}S$

$$y = \bar{H}S$$

La matrice ottenuta ha una serie di proprietà:

①  $\bar{H}S = F^H H F$ , dove  $H$  è una MATRICE DIAGONALE ed  $F$  è una MATRICE UNITARIA che rappresenta la DISCRETE FOURIER TRANSFORM MATRIX ovvero:

$$[F](k)(m) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-j \frac{2\pi k m}{N}}$$

e  $[H](m)(n) = H(m) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l) e^{-j \frac{2\pi l m}{N}}$  (o altrove)

② Inoltre  $F$  è unitaria, ovvero:

$$F^H F = F F^H = I_N$$

$F^H$  = TRASPOSTA HERMITIANA

Essendo  $F$  la matrice della TRASFORMATA DI FOURIER ho che

$$F \cdot S = S \quad \text{ovvero la TRASFORMATA DI FOURIER del blocco } s$$

$$F \cdot y = Y \quad \text{ovvero la TRASFORMATA DI FOURIER del blocco } y$$

Ora ricordando che  $y = \bar{H}S$  e  $Y = Fy$  ho

$$Y = F(F^H H F)S = (\underbrace{F F^H}_{I}) H \underbrace{(S)}_{S} = HS \rightarrow Y = HS$$

Essendo  $H$  diagonale ho che ogni elemento di  $S$  viene moltiplicato solo per il suo corrispondente elemento in  $H$ , ovvero:

$$Y(n) = H(n) S(n)$$

Questi risultati è IMPORTANISSIMO in quanto a differenze del dominio temporale, in FREQUENZA ho ASSENZA di ISI, in quanto il simbolo  $Y(m)$  dipende solo da  $S(m)$ , non trasporta informazioni da altri simboli.

in frequenza.

Ho che:

$$S(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} s(k) e^{-j \frac{2\pi k n}{N}}$$

↑ FREQUENZA

$$e \quad s(k) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} S(n) e^{j \frac{2\pi k n}{N}} = F^H S$$

↑ TEMPO

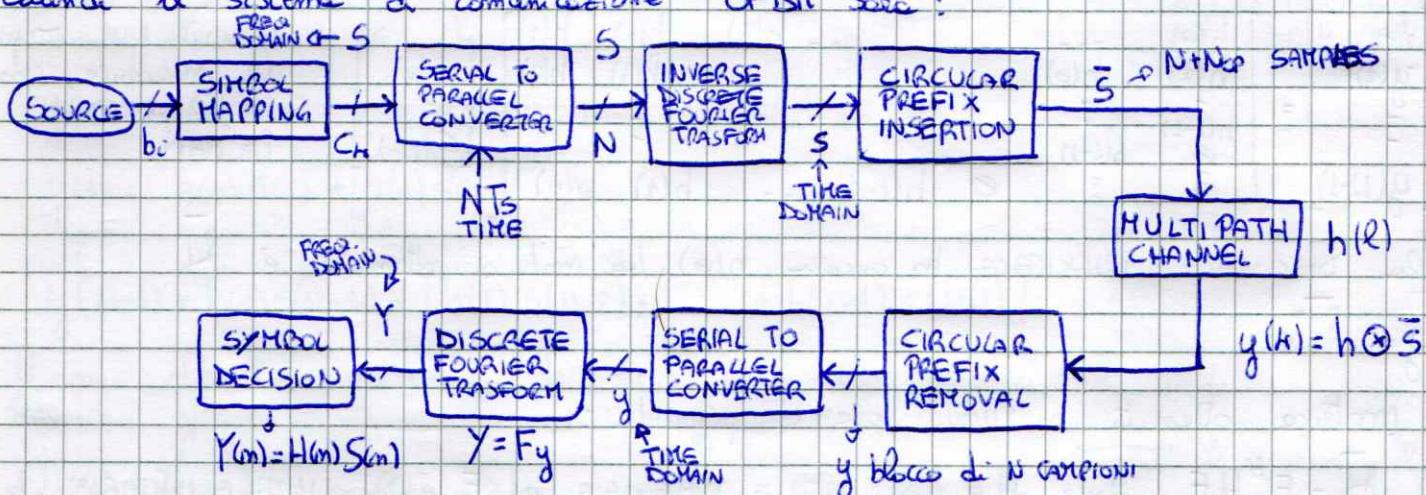
→ Consiste nel moltiplicare il blocco di N simboli per una matrice, per ottenere il blocco m in frequenza.

Quindi con questi sistemi hanno che:

- ① Modellizzare il CANALE come  $h(t) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l) \delta(t - lT)$ , con  $L = HORIZ OF CHANNEL$ .
- ② L'utilizzo di un blocco di N simboli.
- ③ L'applicazione di una CYCLIC EXTENTION al blocco di Nce simboli, con  $Nce > L$ .

Non riuscito ad ottenere in FREQUENZA l'entità totale di ISI.

Quindi il sistema di comunicazione OFDM sarà:



L'idea è che SOURCE e SYMBOL MAPPER generano i simboli in FREQUENZA con un tempo di simbolo  $T_s$ .

Il convertitore invece ACCUMULA N simboli e li invia in parallelo ogni  $N \cdot T_s$ .

Vengono quindi inviati blocchi di N simboli alla volta.

Successivamente passa nel DOMINIO DEL TEMPO e aggiunge gli  $Nce$  simboli per implementare il CIRCULAR PREFIX, ottenendo  $S$ .

A questo punto invia il segnale nel CANALE MULTIPATH →  $y = h \otimes S$ .

Lat RICEVITORE ha che vengono riportati i SIMBOLI eccozini ( $Nce$  INIZIALI), ottenendo il blocco dei campioni, i quali ritornano in FREQUENZA compiendo  $Y = HS$ . Quindi il DECISORE riceverà i simboli  $Y(m) = H(m) S(m)$  SENZA ISI.

È chiaro che il contro principio di questo sistema è che serve ENERGIA, BANDA e COMPLESSITÀ per trasmettere  $Nce$  simboli in più che non trasmettono messun' informazione.

Inoltre  $H(m)$  è un CANALE → che soffre di FADING. Però dato che non abbiamo ISI possiamo usare più ENERGIA in tra transizione per aumentare il SNR, e differenze delle PATH nel MULTIPATH che ha un BEE fisso.

Ho:

- $B_s$  = banda del regime OFDM
- $T_s$  = tempo di simbolo → Considero l'estremo  $T_s = 1/B_s$
- Il tempo del simbolo OFDM è  $T_{OFDM} = T_s(N + Nce)$

Questo sistema infatti ha un tempo di simbolo più lento [ $T_s(N+N_c)$ ], ma per trasmettere  $N$  simboli (EFFETTIVI) tutti in PARALLELO, ha diverse SUB CARRIER FREQUENCIES, contenute nello spettro  $B_s$ .

Ora viene la BANDA occupata ed approssimazione di essa è  $\Delta f = B_s N$

E' chiaro quindi che tutto dipende dalla dimensione del Blocco  $N$ .

Inoltre MAGGIORE è  $N$ , MAGGIORI sono i TOTALE (da cui dipende quindi il BITRATE delle mie trasmissioni), e MAGGIORI sono le quantità di simboli in PARALLELO da inviare.

Vediamo il migliore compromesso tra BITRATE e BER scegliendo  $N$  in modo che:

- $T_{OFDM} \gg \delta_T$  (portando da  $T_s < \delta_T$ )  $\Rightarrow$  Portando da un FREQ. SELETTIVO CHANNEL ho ottenuto tanti SUBCHANNEL, tutti FLAT FADING, che è l'idea alla base del CARRIER SENSE.
- $\Delta f \ll B_c$  (portando da  $B_s > B_c$ )

A livello fisico ho:

$$s(k) = \sum_{m=0}^{N-1} S(m) e^{j \frac{2\pi m k}{N}}$$

con  $k \in [0, N-1]$  e  $m = \#$  Sub-carrier frequency dove  $k$  è stato trasmesso

uno dei  
simboli trasmessi  
nel blocco

Ricordo che nel nostro caso  $T_s = \frac{1}{B_s} \Rightarrow T_B = 1$  da cui ottengo

$$S(m) e^{j 2\pi m (B_s) k T} = S(m) e^{j 2\pi (N) k T} = S(m) e^{j 2\pi \Delta f k T} = S(m) e^{j 2\pi f c k T} \Big|_{k=kT}$$

SPECIE  
PER LA FREQ

Nel totale quindi ho che  $s(k) = \sum_{m=0}^{N-1} S(m) e^{j 2\pi f c k T}$ , ovvero che il segnale è somma delle  $S(m)$  moltiplicate per un'esponentiale complessa esponenziale di cui alle frequenze  $m \Delta f$  per la durata di  $N$  campioni + piccola prefissata.

Quindi il simbolo OFDM si ottiene moltiplicando ogni simbolo  $S(m)$  per una delle SUB CARRIER FREQUENCY disponibili nello spettro, e poi viene fatta la SOMMA.

$T$  è quindi il minimo comune multiplo del periodo di tutte le SUB CARRIER FREQUENCY ed avendo l'ingresso periodico per COSTRUZIONE lo sarebbe anche l'output:

$$y_m(t) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l) s_m(t-lT) = S(m) \sum_{l=0}^{L-1} h(l) e^{-j 2\pi m \Delta f (t-lT)} \leftarrow \text{PERIODICO} \rightarrow \begin{matrix} \text{ne ricevo una per} \\ \text{SUB CARRIER FREQUENCY} \end{matrix}$$

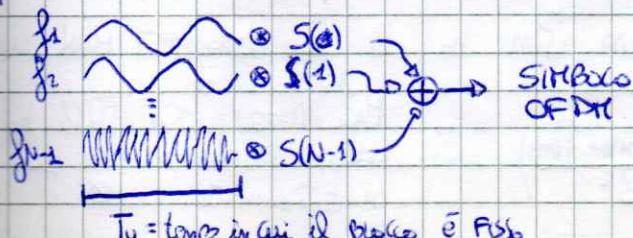
conv. DISCR.

Im un Blocco OFDM il segnale ricevuto sull' $m$ -esima SUB CARRIER FREQUENCY dipende solo da  $S(m)$ , ovvero solo dall' $m$ -esimo elemento del blocco.

Dati che per tutta la durata del blocco  $T_{OFDM}$  il simbolo su un SUB CARRIER FREQUENCY è costante, è come se avessi l'ESPOENZIALE  $\text{rect}(NTt)$ , in ogni sub canale.

Quindi la POWER SPECTRAL DENSITY di un segnale OFDM è la somma di  $N$  SINC, una per ogni SUB CARRIER FREQUENCY.

Tutte queste funzioni perché le SINC e le SUB CARRIER FREQUENCY sono ORTOGONALI, quindi non INTERFERISCONO tra loro  $\rightarrow$  OFDM = ORTHOGONAL FREQUENCY DIVISION MULTIPLEXING.



Tante sinc in freq de mn causano ISI

Immagini di un simbolo ogni  $T$  ha tutti i simboli di durata  $NT$  in parallelo, perché moltiplicati e esponentiali su tutti i ortogonali.

Il segnale ricevuto senza considerare l'errore è:

$$y(k) = \sum_{l=0}^{L-1} h(l) s(k-l) \Rightarrow Y(m) = H(m) S(m) \quad \text{con } m \text{ l'index SUBCARRIER FREQUENCY}$$

Nella realtà nel tempo ricevo un segnale che presenta del RUMORE:

$$r(k) = y(k) + n(k) \quad \text{con } n \text{ rumore GAUSSIANO (o MEAN) } \in \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

In frequenza ho:

$$R(m) = Y(m) + N(m) \quad \text{con } \begin{cases} R = Fr \\ Y = Fy \\ N = Fn \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{E} \text{endo } F \text{un'operazione lineare, } N \text{ in frequenza} \\ \text{è comunque GAUSSIANO. In particolare è} \\ \text{il vettore delle variabili aleatorie } N(m) \end{array}$$

Quanto valgono V.M e AUTOCORRELATIONS di  $N$ ?

$$\mathbb{E}\{N\} = \mathbb{E}\{Fn\} = F \mathbb{E}\{n\} = F\phi = 0$$

AUTOCORRELATION  
NEL TEMPO

$$\mathbb{E}\{n(t)n(t+\tau)\} = \sigma^2 \text{ se } \tau = 0$$

$$R_N = \mathbb{E}\{NN^H\} = \mathbb{E}\{Fn n^H F^H\} = F \mathbb{E}\{nn^H\} F^H = FR_m F^H = \sigma^2 F I_n F^H = \sigma^2 I_n$$

Essendo nel TEMPO i campioni del RUMORE INCORRELATI, la matrice di autocorrelazione  $R_m$  è diversa da 0 solo NELLA diagonale (ogni campione è correlato con se stesso)

Quindi il rumore in FREQUENZA è 0 MEAN e ha  $R_N$  diagonale per ogni delle  $m$  SUBCARRIER FREQUENCY.

Quindi in FREQUENZA ho:

$$R(m) = H(m) S(m) + N(m) \rightarrow X(m) = \underbrace{\frac{R(m)}{N(m)}}_{X(m)} = S(m) + \underbrace{\frac{N(m)}{H(m)}}_{N'(m)}$$

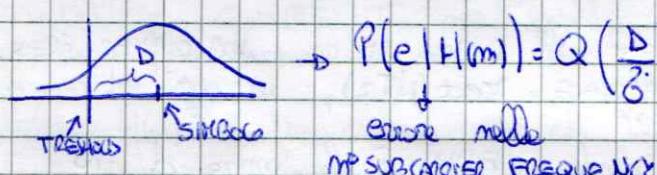
Essendo i campioni di RUMORE INCORRELATI in frequenza, posso calcolare separatamente la PLS d'errore nelle varie SUBCARRIER FRE.

La forma del simbolo da decodificare è simile a quella del CANALE AWGN nel tempo:

**AWGN TEMPO**  $x(m) = C_m + n(m)$

**MULTIPATH FREQUENZA**  $X(m) = S(m) + N'(m)$

Posso usare lo stesso calcolo dell'errore Probability:



$$P(e|H(m)) = Q\left(\frac{D}{\sigma}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{E_s}{A} \cdot \frac{|H(m)|^2}}\right)$$

errore nello SP SUBCARRIER FREQUENZA

$$\begin{array}{c} \downarrow \\ \text{GAUSSIAN NOISE} \\ \downarrow \\ \mathcal{N}(0, \frac{\sigma^2}{|H(m)|^2}) \end{array}$$

$$E\left[\frac{N(m) N(m)^H}{|H(m)|^2}\right]$$

La probabilità d'errore dipende quindi da  $H(m)$  ovvero dell'ampiezza del canale su quelle specifiche SUBCARRIER FREQUENCY.

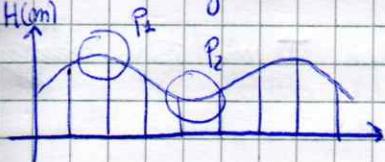
Inoltre dato la potenza del segnale trasmesso in  $m$   $P(m)$  ho che la CAPACITÀ MAX nel canale è:

$$C = \log_2 \left( 1 + \frac{S}{N} \right) = \log_2 \left( 1 + \frac{P(m)}{\sigma^2} \right) = \log_2 \left( 1 + \frac{|H(m)|^2 P(m)}{\sigma^2} \right)$$

MAX RATE per il quale ho ERROR PROBABILITY che va proporzionalmente a 0

## FREQUENCY DIVERSITY

Se ho il seguente canale:



In  $P_1$  ho che  $H(m)$  è abbastanza alto, quindi la ~~probabilità~~ <sup>probabilità</sup> è ~~alta~~ bassa <sup>alta</sup> posso usare un  $H$  ampio per ottenere una capacità molto alta.

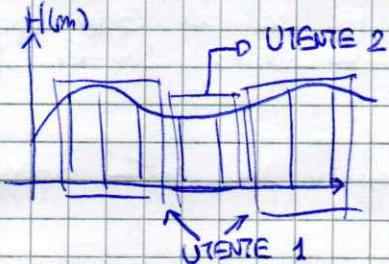
<sup>per</sup> COSTELLAZIONE

In  $P_2$  invece ho  $H(m)$  basso, quindi avrò un'alta probabilità errori. Sarò costretto ad usare  $H$  basso, ottenendo una capacità altrettanto bassa.

Questo è uno dei punti di forza del OFDM, ovvero le possibilità di selezionare per ogni SUB CARRIER FREQUENZA una modulazione differente.

## MULTI-USER

Potrei decidere anche di assegnare le subcarrier frequency in base all'utilizzo



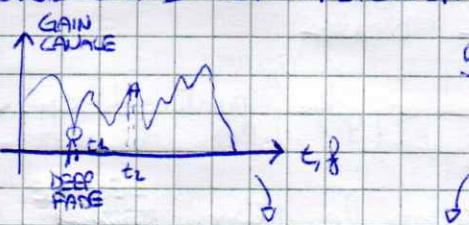
In questo modo posso sfruttare al meglio il mio spettro, parallelizzando gli utenti.

## DIVERSITY IN WIRELESS COMMUNICATION SYSTEMS

22/11

Altrettanto OFDM siamo in grado di trasmettere in esenza di ISI, ma per costituzione ha comunque del SIGNAL FADING.

Il mio canale ha quindi come AMPIEZZA un PROCESSO STOCHASTICO che segue la DISTRIBUZIONE DI RAYLEIGH



Scegliendo il tempo di simbolo  $T < T_c$  (tempo di coerenza) mi ottengo che per tutti  $T$  il canale rimane piatto, non varia la propria AMPIEZZA.

Tenendo conto di questi però in base all'ISTANTE in cui ricevo il segnale avrò GAIN diverso.

Per esempio se dal grafico ricevo in  $T_1$  avrò un GAIN benissimo da me chiamerò un BSF abb. Ricorrendo in  $T_2$  invece avrò un GAIN altissimo. Questo caratteristico è definito come CHANNEL DIVERSITY

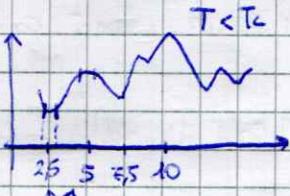
Cos'è la DIVERSITY può essere sfruttata:

- ① Nel TEMPO
- ② In FREQUENZA
- ③ Nella DISTANZA

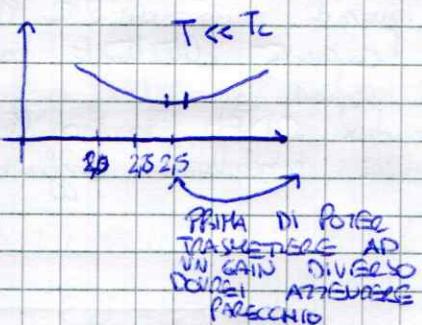
Portando del ~~TIME~~ TIME DIVERSITY ho che ritrasmettendo ripetutamente il segnale, ottengo più copie del segnale in ricezione. Se riesco a sfruttare il TIME DIVERSITY ogni campione avrà un CHANNEL GAIN DIVERSO, quindi posso utilizzare quello con il GAIN MAGGIOR (SNR maggiore).

Per ottenere un buon TIME DIVERSITY devo usare un  $T$  min troppo ~~piccolo~~ di  $T_c$ .

Esempio CANALE,  $T$  diverso



NON DEVO ATTENDERE TROPPO PER OBTENERE UN BUON GAIN



PRIMA DI POTER TRASMETTERE AD UN GAIN DIVERSO DOVETE ATTENDERE PIÙ DI TANTO

Quando  $T$  è troppo piccolo il canale in scalo rimane più "uniforme".

In FREQUENZA il concetto è lo stesso, semplicemente ho che il GAIN del CANALE cambia con la FREQUENZA. Quindi se ritrasmetto lo stesso segnale su FREQUENZE DIVERSE, l'effetto

Il più importante però è lo SPATIAL DIVERSITY, che a sua volta dipende dal TIME DIVERSITY.

Ricorda che:

$$f_d \propto v \quad \rightarrow T_c \propto \frac{1}{f_d} \propto \frac{1}{v} \quad T_c = \frac{1}{2f_d}$$

Ho che la COHERENCE DISTANCE, ovvero la distanza a partire dalla quale i simboli generati sono INCORRELATI è:

$$(d_c) = v T_c = v \cdot \frac{1}{2f_d} = v \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{f_d} = \frac{c}{2} \rightarrow \text{Non dipende dalle velocità, ma dalla LUNGHEZZA d'onda}$$

Quindi se nel raggio di un antenna mi sposto in due punti diversi a distanza  $d_c$ :



Ho che in questi due punti ricevo lo stesso ~~segnaletica~~ segnale, ma in due CANALI INCORRELATI. Quindi non devo ritrasmettere il segnale, ma ricevo lo stesso in punti diversi.

Questo concetto si sposa perfettamente con l'avanzamento tecnologico in quanto per ottenere maggiori ~~capacità~~, si usano CARRIER FREQUENCY  $f_c$  sempre maggiori.

Ma devo  $\propto 2 \propto \frac{1}{f_d}$  quindi incrementando  $f_c$ , la DISTANZA DI COHERENZA diventa sempre di più.

Nel caso del 5G che raggiunge le OME MILLIMETRI CHE è possibile avere anche 4 antenne nello stesso SMARTPHONE, tutte che ricevono CANALI con loro INCOOPERATI.

Quindi meglio è  $f_c$ , maggiore è la DIVERSITÀ che posso sfruttare.

## CHANNEL CODING

L'idea è quella di migliorare ERROR DETECTION e BER per i dati ricevuti inserendo della RIDONDANZA nei bit trasmessi. Tutto questo processo è eseguito dall'ENCODER.

Se ho  $k$  bit in INPUT all'encoder e  $m$  bit in OUTPUT ho che il GRS RATE  $R$ , ovvero il RATIO DI RIDONDANZA è:

$$R = \frac{k}{m} < 1$$

### ① BLOCK CODES

Questa tecnica utilizza l'ALGEBRA LINEARE applicata ai GF(2), ovvero nel GALOIS FIELD di 2 elementi  $\{0, 1\}$ .

Il CAMPO di GALOIS è un campo formato da un numero finito di elementi e chiuso rispetto alle operazioni di SOMMA e PRODOTTO.

$$GF(2) = \{0, 1\}$$

(XOR)	$\begin{array}{cc} 00 & 0 \\ 01 & 1 \\ 11 & 0 \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \hline 01 \end{array}$	<u>SOMMA</u>
	$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 1 \end{array}$	$\downarrow$	<u>CHIUSA</u>

(AND)	$\begin{array}{cc} 00 & 0 \\ 01 & 0 \\ 11 & 1 \end{array}$	$\begin{array}{c} + \\ \hline 01 \end{array}$	<u>+ commut.</u>
	$\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array}$	$\downarrow$	<u>PRODOTTO</u>

L'encoder eseguirà le seguenti operazioni:  $\rightarrow$  FORMA SISTEMATICA

$$u \xrightarrow[\text{k bit}]{\text{BLOCK CODEC}} d \quad \text{con } d = \boxed{\begin{array}{c|c} \text{INFO. DIGIT} & \text{Parity} \\ \hline k & m-k \end{array}} = [u | p]$$

Può essere descritta dalla MATRICE GENERATRICE  $G \rightarrow d = \underline{uG}$ . L'idea è che più PARITÀ aggiunge, più bit possono essere corretti senza rendere il SISTEMA illeggibile.

$$d = [u_1, \dots, u_k] \left[ \begin{array}{c|c} G_{1,1} & \dots & G_{m,1} \\ \hline \vdots & & \vdots \\ G_{1,k} & \dots & G_{m,k} \end{array} \right] \quad \begin{array}{l} \uparrow N \text{ rows} \\ \uparrow m \text{ columns} \end{array}$$

$G_{p,q} \in \{0, 1\} \quad p \in [1, k] \quad q \in [1, m]$

Di solito ho  $G [I_k | P]$   $\leftrightarrow$   $\begin{cases} \text{IDENTITY} \\ \text{PARTY} \end{cases}$

Il prodotto settoriale un:  $\begin{cases} \text{XOR} \rightarrow \text{SOMMA} \\ \text{AND} \rightarrow \text{PRODOTTO} \end{cases}$

## ERROR DETECTION CODING

È la tecnica più semplice e prevede di aggiungere un bit che rappresenta il NUMERO di 1 in una PAROLA di  $k$  bit.

- 1 DISPARI  $\rightarrow$  Parity = 1
  - 1 PARI  $\rightarrow$  Parity = 0
- $\rightarrow$  La parola in uscita  $d$  avrà sempre un numero PARI di 1

In ricezione se il numero di 1 è dispari, allora ho un errore.

$$\text{Ho che } G = [I_k | 1_k] \rightarrow d = [u | \sum_{i=1}^k u_i]$$

Il metodo è molto semplice, ma se il numero di bit corrotti (flippi) è PARI l'errore non viene rilevato, in quanto il numero di 1 rimane pari.

## DATA RETRANSMISSION

In generale ho che nella trasmissione il ricevitore manda un FEEDBACK al trasmettitore;

- ACK, il trasmettitore può passare al prossimo simbolo
- NACK, il trasmettitore deve ritrasmettere il simbolo (ARQ = Automatic Repeat Request)

Il tempo che passa tra la ricezione del simbolo errato e la RITRASMISSIONE è  $T_{ARQ} > T_C$  (tempo d'attesa del ~~trasmettitore~~ TRASMETTORE). Di solito ho che:

- ↳  $T_{ARQ}$  è tale da sfruttare il TIME DIVERSITY (pende in un GAIN migliore)
- ↳ Si combina di solito la RITRASMISSIONE con le trasmissioni del simbolo successivo per non perdere troppe performance.

## ERROR CORRECTION AND CHANNEL CAPACITY

Si usano tecniche più complesse per correggere l'ERRORE.

Secondo SHANNON ho che la capacità di canale è:

$$C = B \log_2(1 + SNR) \quad \% \rightarrow \text{vale per tutti i sistemi che mi permettono di misurare l'SNR.}$$

Il mio transmission rate  $R$  deve essere minore di questo  $C$ , affinché la mia trasmissione non fallisca.

## ES 16-QAM

$$B = 11 \text{ MHz} \rightarrow 40 \text{ Mb/s} \quad (\text{Rate del mio sistema})$$

$$R_s = \frac{1}{T} \propto B$$

Se SNR è tale che  $C < 40 \text{ Mb/s}$  la trasmissione fallisce

## REPETITION CODE

Invece di ~~inviare~~ inviare un bit simbolo lo ripeti più volte:

$$\underline{\text{ES}} \quad K=1, M=3 \quad (\text{il bit viene ripetuto 3 volte})$$

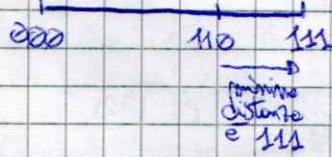
$$G = [1 \ 1 \ 1]$$

$$u = 0 \rightarrow d = [0 \& 1 \& 0 \& 1 \& 0 \& 1] = \underline{\underline{000}}$$

$$u = 1 \rightarrow d = [1 \& 1 \& 1 \& 1 \& 1 \& 1] = \underline{\underline{111}}$$

Vede il CITERIO di MAGGIORI NZ, se ricevo 011 decido 1, 100 decido 0, ecc.

La decisione viene fatta quindi in base alla MINIMA DISTANZA in bit tra 2 codici vicini  
(HAMMING DISTANCE)



$$\left\lfloor \frac{d_H - 1}{2} \right\rfloor : \text{ERROR CORRECTION CAPABILITY}$$

$$d_H - 1 : \text{ERROR DETECTION CAPABILITY}$$

## CONVOLUTIONAL CODES

Questo sistema prende delle INPUT WORDS di  $K$  bit, che genereranno un OUTPUT di  $M$  bit ( $M > K$ ).

Ogni OUTPUT min dipende solo dei  $K$  bit in input, ma anche degli ultimi  $L$  input elementi nel passato (sempre gruppi di  $K$  bit).

L quindi, detta CONSTRAINT LENGTH, è la MEMORIA DEL SISTEMA.

Il sistema è detto CONVOLUTIONAL in quanto i bit dell'output sono calcolati attraverso la CONVOLUZIONE fra il relativo bit dell'input attuale e quelli dei precedenti  $L-1$  input ricevuti nel passato.

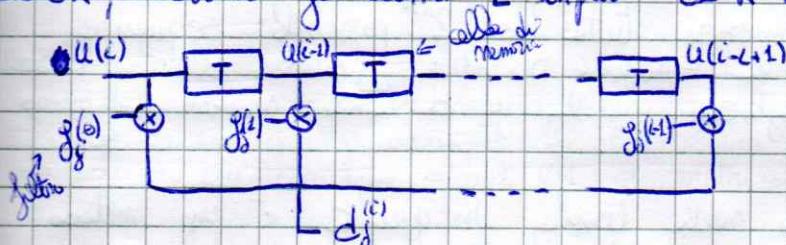
$$d_j^{(i)} = \sum_{k=0}^{L-1} g_j(k) u^{(i-k)} = g_{j0}(0) u^{(i)} + g_{j1}(1) u^{(i-1)} + g_{j2}(2) u^{(i-2)} \quad \text{con } \begin{cases} i \in [0, k-1] \\ j \in [0, m-1] \\ k \in [0, L-1] \end{cases}$$

→ Dato l' $i$ -esimo bit dell'input calcolo i  $j$  bit dell'output, andando fino a  $L-1$  bit di input nel passato.

→  $g_j$  è un vettore GENERATORE in GF(2), che quindi può valere 0 o 0 o 1 nelle sue  $L$  componenti.

## ENCODER ( $M, K, L$ )

L'encoder è formato da un insieme di FILTRI ~~mei~~ GF(2), le cui risposte impulsive rappresentano i VETTORI GENERATORI (lunghezza di  $m$  "0" e "1"). A questi più di ogni appena  $M(L-1)$  celle di memoria (ognuna da un bit) che contengono lo STATO del SISTEMA, avendo gli ultimi  $L$  input di  $K$  bit l'uno.



$$d_j^{(i)} = \sum_{k=0}^{L-1} g_j(k) u^{(i-k)} \leftarrow \text{convoluzione}$$

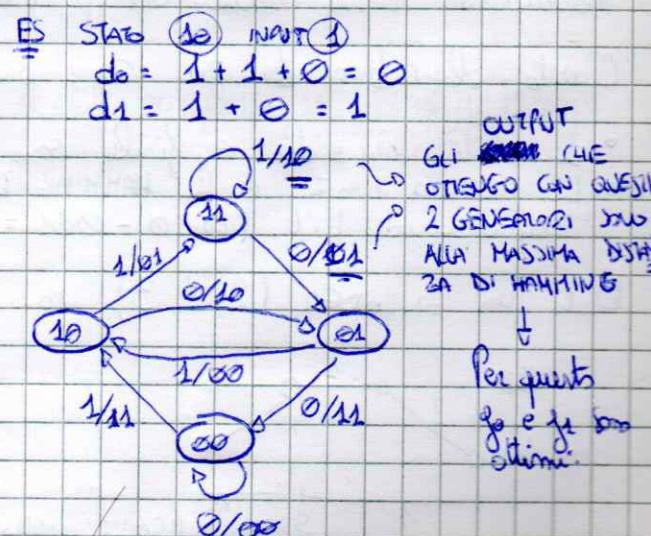
Essendo  $g_i(k) \rightarrow 0$  rappresentato o un CIRCUITO APERTO o un CIRCUITO CHIUSO.

## STATE REPRESENTATION

Se identifichiamo il contenuto delle celle come lo stato di un sistema, l'encoder può essere rappresentato da un FINITE STATE MACHINE, in cui l'output dipende dall'INPUT e dallo STATO.

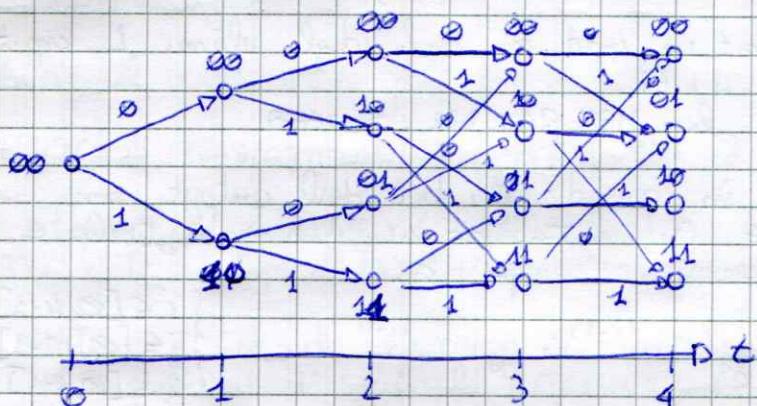
STATO	INPUT	NEXT STATE	OUTPUT
00	0	00	00
00	1	10	11
10	0	01	10
10	1	11	01
01	0	00	11
01	1	10	00
11	0	01	10
11	1	11	11

Encoder  $(2, 1, 3)$  con  $g_0=[111]$  e  $g_1=[101]$



Inoltre l'evoluzione nel tempo di un ENCODER può essere rappresentata dal TRELLIS DIAGRAM

Ammettiamo di partire dalla stato  $00$ , ovvero alla rete (sempre  $(2/1/3)$ )



### DECODER

~~Il decodificatore~~ A differenza del Block Codes, dove ho blocchi di bit, qui ho un flusso continuo di bit.

Se l'informazione da trasmettere è formata da  $N$  input messi di  $m$  bit, ho che i codificatori sono rappresentati da una stringa di  $Nm$  bit. Ogni INPUT implica incidenza nelle codifiche dei successivi  $m$  bit quindi è necessario effettuare la decodifica una volta ricevuta tutta la stringa di  $Nm$  bit.

~~Il decodificatore~~ quindi dovrà generare tutte le  $2^{Nm}$  possibili sequenze codificate, calcolare per ognuna la HAMMING DISTANCE (numero di bit diversi) rispetto alle stringhe ricevute e scegliere quella a distanza minima (prendendo così nel caso Error Correction).

Ovviamente questo è possibile solo nella teoria in quanto è un metodo di complessità ESPONENZIALE rispetto ai bit della sequenza da codificare.

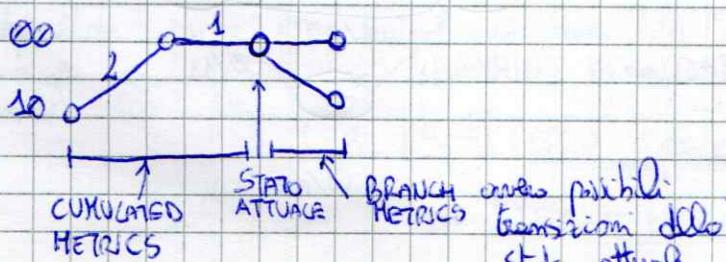
### ALGORITMO DI VITERBI (Error Correction)

Questo algoritmo permette di DECODIFICARE un CONVOLUTIONAL CODE con una complessità non esponenziale, emulando i possibili cammini fatti dall'ENCODER. Già che si è percorso in base alle sequenze ricevute il DIAGRAMMA DEL TRELLIS escludendo solte volte dei possibili CAMMINI.

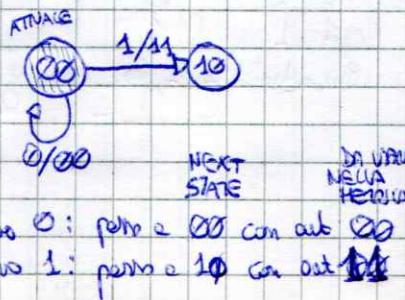
Questo algoritmo ha come principi:

- Lo stato iniziale e finale sono  $00$  (stato dell'ENCODER da emulare)
- La METRICA usata è la HAMMING DISTANCE, ovvero il numero di bit diversi tra due sequenze di bit. ( $010 - 011 = 1$  bit diverso)

Dato un ENCODER  $(2,1,3)$  ho che in un punto del diagramma:



del diagramma  
di stato

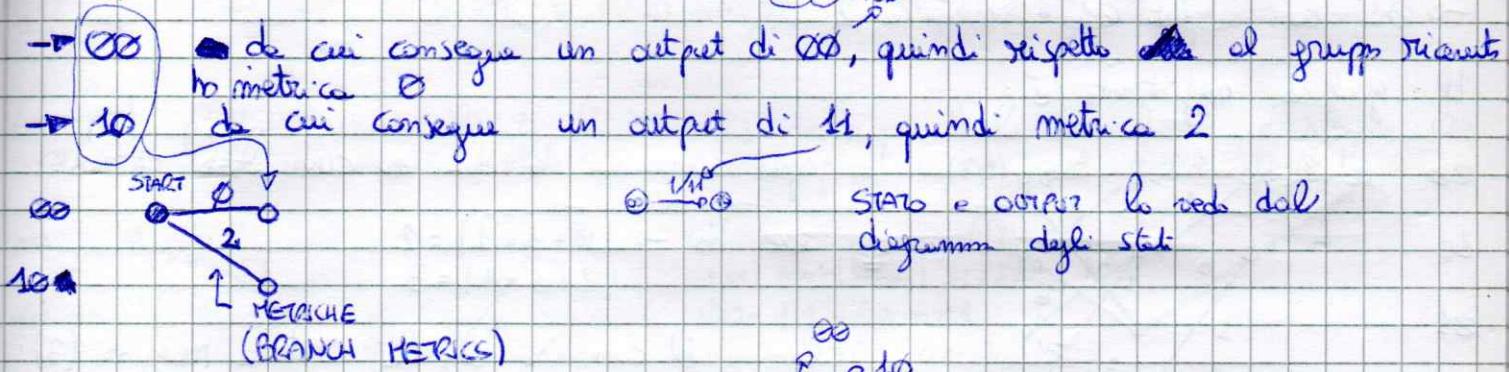


Ricevo 0: pongo 0/00 con out 00  
Ricevo 1: pongo 10 con out 10

## Esempio di funzionamento (2,1,3)

INVIATA : 00 10 10 11  
RICEVUTA : 00 10 10 11 [ ]  
ERRORE

- Si parte sempre da 00. Il primo gruppo ricevuto è 00. Dello stato 00 ho due possibili transizioni:



- A questo punto ricevo 10. Per i due stati delle quali mi ero fermato calcolo tutte le possibili transizioni, quindi 10 per il calcolo delle metriche.

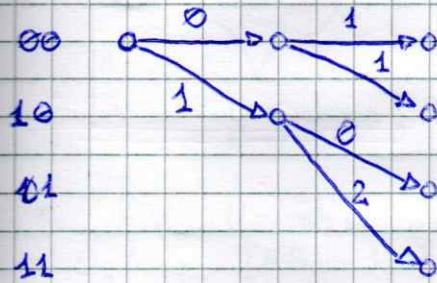
Per 00 ho:

- > 00 de cui consegue output 00 e metrica 1 (10,00 = 1 bit cambiato)
- > 10 de cui consegue output 11 e metrica 1

Per 10 ho:

- > 01 de cui consegue output 10 e metrica 0
- > 11 de cui consegue output 01 e metrica 2

Il DIAGRAMMA aggiornato ora è:



A questo punto tutti i possibili stati sono raggiunti. Del prossimo passo ogni stato verrà raggiunto da due cammini diversi, quindi per entrambi potrò calcolare le CUMULATED METRICS, ovvero le somme di tutte le METRICHE di quel cammino.

- Il gruppo ricevuto ora è 10. Per ognuno dei 4 stati ricalcolo le BRANCH METRICS

Per 00 ho:

- > 00, con output 00 e metrica 1
- > 10, con output 11 e metrica 1

Per 10 ho:

- > 01, con output 10 e metrica 0
- > 11, con output 01 e metrica 2

Per 01 ho:

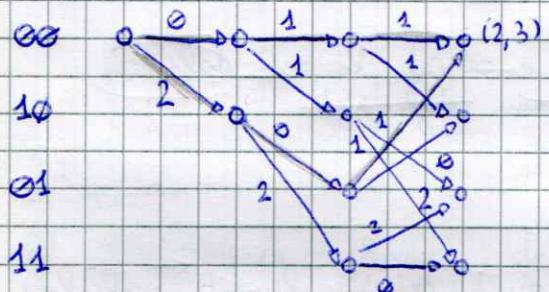
generatore ultimo

- 10, con output 00 e metrica 1
- 00, con output 11 e metrica 1

Per 11 ho:

- 11, con output 10 e metrica 0
- 01, con output 01 e metrica 2

Il grafico aggiornato è:

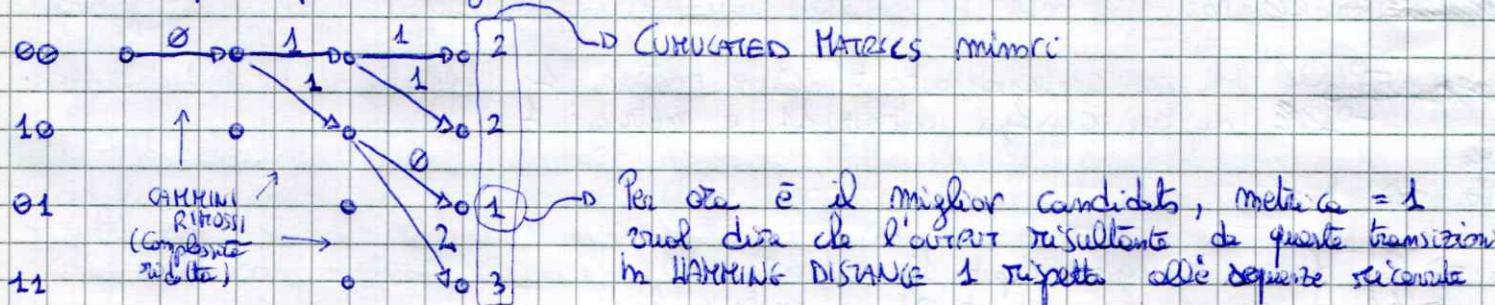


Per ogni cammino ho due CUMULATED MATRICES:

$$\begin{aligned} \text{Es } 00 \text{ ho } &\rightarrow (0+1+1) = 2 \\ &(2+0+1) = 3 \end{aligned}$$

Elimino il cammino con la metrica maggiore (3)

Facendo questi per tutti gli stati escludo 4 cammini inutili:



• L'ultimo gruppo ricevuto è 11. Faccio i soliti calcoli:

Per 00 ho:

- 00, con output 00 e metrica 2
- 10, con output 11 e metrica 0

Per 10 ho:

- 01, con output 10 e metrica 1
- 11, con output 01 e metrica 1

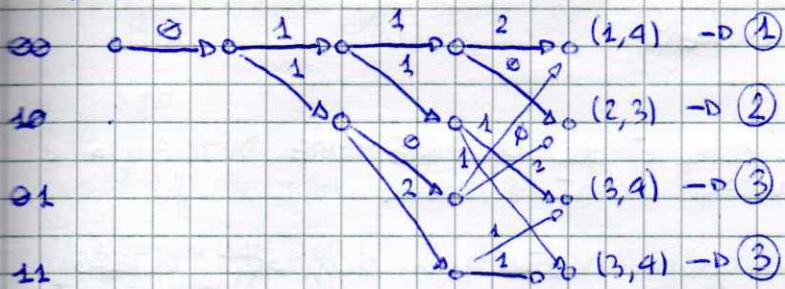
Per 01 ho:

- 00, con output 11 e metrica 0
- 10, con output 00 e metrica 2

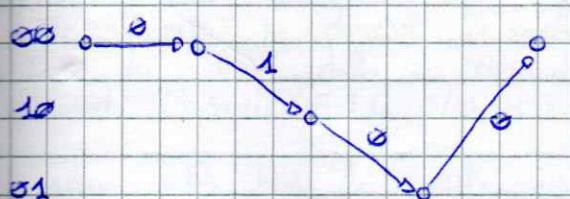
Per 11 ho:

- 01, con output 01 e metrica 1
- 10, con output 10 e metrica 1

Il grafico finale con le CUMULATED MATRICES è:



A questo punto essendo finita la trasmissione di uno stato finito è sempre 00. Quindi il cammino scelto è quello che porta a 00 con matrice finita 1:



Che corrisponde alle sequenze:

00-00-00000000000000000000

00-10-10-11

↓ Bit corretto

Ovvero la SEQUENZA CORRETTA inizia.

È chiaro che se la SEQUENZA RICEVUTA è uguale a quella TRASMESSA, la matrice finita sarà 0.

## INTERLEAVING

29/11

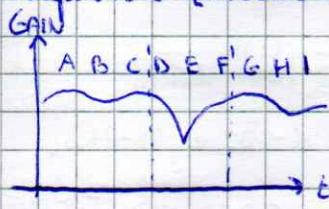
CONVOLUTIONAL CODES (e quindi VITERBI) sono stati creati per i canali che presentano un RUMORE GAUSSIANO, che quindi permette di avere CAPODIMENTI INCORRETTI e quindi è considerato MEMORYLESS.

Se invece prendiamo un CANALE con MULTIPATH e FADING ha:



Nel punto in cui ho il DEEP FADE il canale è perfettamente FREQUENCY SELECTIVE e comporterà una parte di segnale completamente corrotto. (Quello trasmesso nelle 4^5 subcarries interessa)

Se faccio la stessa analisi, ma nel tempo durante la trasmissione della sequenza [AB...HI] ho:



Ho un esempio di BURST ERROR, ovvero l'errore non è UNIFORMEMENTE DISTRIBUITO come sarebbe in un canale GAUSSIANO (non è concentrato nelle sole sequenze DFB linee di errore presenti a RANDOM)

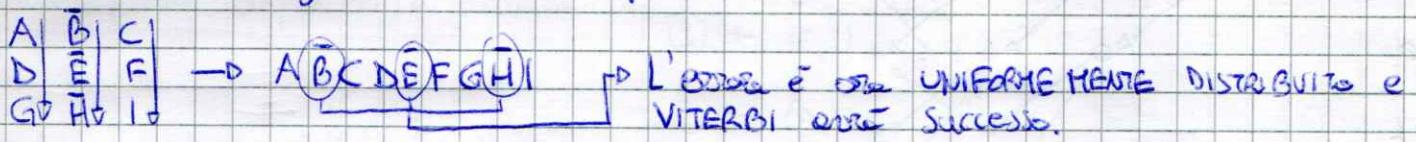
(Qui entra in gioco l'INTERLEAVING, che consiste nel MISCHIARE le sequenze prima delle trasmissioni in modo da uniformizzare l'errore).

ESEMPIO SCRIVO IN COLONNA E LEGGO IN RIGA

A	B	G
B	E	H
C	F	I

Il canale questa volta corrisponde  $[B E H] \rightarrow [B \bar{E} \bar{H}]$

Il ricevitore eseguirà la stessa operazione:

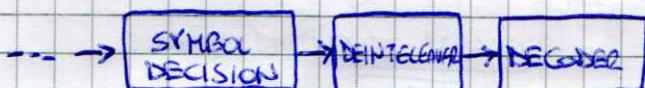


In generale 3 bit consecutivi errati possono mettere in difficoltà VITERBI, 3 distribuiti no.

Quindi in TRANSMISSIONE avrò:



e in RICEZIONE:



Il blocco di codice SYMBOl sulla quale viene effettuato l'INTERLEAVING ha dimensione fissa K (INTERLEAVING DEPTH).  
Maggiora è K, migliora sarà la distribuzione dei BURST ERROR, miglioreranno le prestazioni di ENCODER / DECODER.

Il TRADE-OFF è chiaramente la latenza.

Grazie CDFM in la latenza del DFT che ha bisogno di tutta la sequenza.  
A questo si aggiunge la latenza dell'ENCODER.  
A entrambi si aggiunge quella dell'INTERLEAVING, che richiede di attendere tutti i K symbol.

Quindi MAGGIORI sono K, maggiore sarà il DELAY, ma migliore sarà l'ERRORE CORREZIONE.

## TURBO CODES (Error Correction)

Finora abbiamo considerato efficacie le formule di SHANNON secondo cui la capacità massima di canale per cui il BER è esattamente a zero è:

$$C = B \log_2(1 + SNR)$$

In realtà questo prevede che il RATE  $R = \frac{K}{m \text{ symbol}}$  abbia K=0 e m=0.



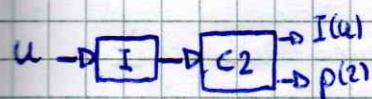
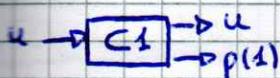
Essendo la dimensione massima dei CODES limitata (a causa delle complessità di ENCODING e DECODING) fisicamente non è possibile

Il TURBO CODES è il sistema che più si avvicina a questi andamenti, permettendo un bit ogni due ~~symbol~~ ad un SNR minimo di 0,5. In uscita dal codice di informazione

Quindi è un sistema di error correction che permette di ottimizzare molti i trasferimenti dati in presenza di bande limitate.

## ENCODER

L'encoding avviene attraverso due ENCODER in PARALLELO. Dato l'input  $u$ :



Il primo ENCODER calcola immediatamente la PARITÀ.  $R = \frac{1}{2}$

Il secondo ENCODER prima effettua l'INTERLEAVING e poi calcola la parità.  $R = \frac{1}{2}$

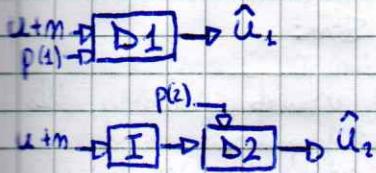
Chiaramente se dovesse trasmettere  $(u, I(u), p(1), p(2))$  avrei  $R = \frac{1}{4}$ , ma  $u$  e  $I(u)$  sono lo stesso dato e meno dell'interleaving (che però si produce). Quindi trasmetto  $(u, p(1), p(2))$  con un  $\underline{R = \frac{1}{3}}$ .

L'idea alla base di questo sistema è che le due parità rappresentino due REPliche INdIPENDENTI dello stesso dato SISTEMATICO  $u$ .

Quindi non nutro le DIVERGENTI DEL SISTEMA in quanto se il canale è FREQUENCY SELECTIVE in un punto dello spettro la parità delle parità che verrà corrotta corrisponde a diverse sezioni di  $u$ , quindi le due parità possono essere unite per CORREGGERSI A VICENDA.

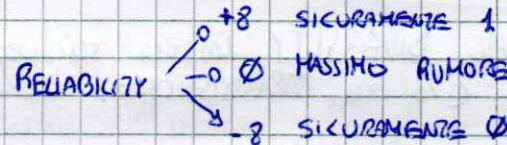
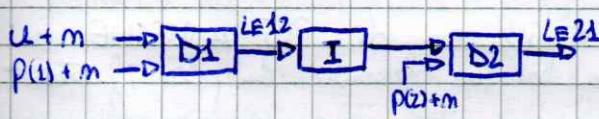
## DECODER

Il decodice ricava dal simbolo DECISION la sequenza  $(\hat{u}_1 + m, p(1) + m, p(2) + m)$ . Il metodo più semplice sarebbe il seguente.



Il DECODING viene fatto in parallelo come l'ENCODING. È chiaro che per il secondo decodice bisogna prima effettuare l'INTERLEAVING della sequenza dei bit di INFORMAZIONE.

Se però il CANALE era FREQUENCY selective è molto probabile che  $\hat{u}_1$  e  $\hat{u}_2$  siano distorti in più punti (grazie all'interleaving). Quindi è necessario usare un metodo di decoding. Per esempio:



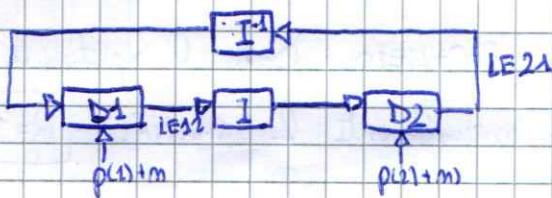
Questo sistema parte CAMPIONANDO la sequenza ricevuta assegnando ad ogni bit in base al rumore un valore da  $+8$  a  $-8$ . Questo valore è detto RELIABILITY.

Il 1° DECODER sfrutta la RELIABILITY di  $u+m$  e  $p(1)+m$  per calcolare LE12 ovvero la RELIABILITY di  $u$  (valore da ottenere dallo decodificatore).

A questi punti il 2° DECODER oltre alla RELIABILITY di  $p(2)+m$  prende in ingresso  $I(u+m)$ , ma un LE12. In questo modo se  $D_1$  è incerto su alcuni valori, magari  $D_2$  non lo è in questo  $p(2)$  è una replica INDEPENDENTE rispetto a  $p(1)$ .

Chiosamente se invece D2 è incerto su alcuni valori e causa di p(2)  
posteriori comunque da LE12, che sarà oggetto del ciclo in modo diverso.

A questo punto posso far RIPARTIRE L'ITERAZIONE:



Inoltre, applicando il DEINTERLEAVING a LE21 ottengo un nuovo valore di RELIABILITY che può essere letto da D1.

Quindi in questo modo ho che ad ogni ITERAZIONE il sistema sfrutta la DIVERSITÀ per generare un SET DI DATI completamente diverso dal precedente.

Di solito dopo un certo numero di iterazioni (da 4 a 10), i due DECODER concordano sul risultato. È chiaro che più iterazioni si fanno, più accurati sono il risultato.

Il nome TURBO deriva dal fatto che l'OUTPUT di un decoder viene utilizzato per ACCELERARE o MIGLIORARE l'input dell'ALTRO.

A questo punto quindi ho un TRADE-OFF:

- MAGGIOR NUMERO DI ITERAZIONI = MINOR BER = MAGGIOR LATENZA (DATI, VIDEO)
- MINOR NUMERO DI ITERAZIONI = MAGGIOR BER = MINOR LATENZA (Voce)

## SPATIAL DIVERSITY

Affidabilità

Q2/12

Due modi che ho per sfruttare la DIVERSITÀ DEL CANALE sono:

- ① TIME DIVERSITY = trasmette nel tempo lo stesso segnale, usando poi quello con GAIN migliore
- ② FREQUENCY DIVERSITY = trasmette su una banda migliore in modo da poter uscire quei canali con GAIN migliore.

In entrambi i casi ho o un spreco di tempo (ENERGIA) o uno spreco di banda (COSTO ELEVATO).

La SPATIAL DIVERSITY invece richiede solo l'utilizzo di PIÙ ANTENNE IN RICEZIONE e/o in TRASMISSIONE. In questi casi ho due fenomeni da poter sfruttare:

- ARRAY GAIN: Si applica se ho più antenne in ricezione e il segnale ricevuto in un singolo cammino verso il mio array di antenne. In questi casi i segnali ricevuti dalle antenne sono FORTEMENTE CORRELATI e ciò che faccio è direzionare le antenne in modo tale da minimizzare il GAIN. Questo processo è detto BEAM FORMING.
- DIVERSITY GAIN: Si applica quando le varie antenne ricevono dei SEGNALI FORTEMENTE INCORRELATI, quindi per esempio in presenza di un MULTIPATH CHANNEL. In questi casi posso sfruttare la DIVERSITÀ dei segnali per estinguere le ricezioni migliori possibili.

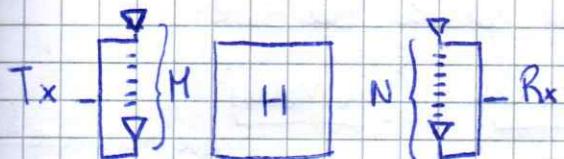
In entrambi i casi mi penso ad ottimizzare il SNR.

In generale due antenne che ricevono la stessa trasmissione riceveranno due segnali incorrelati se la loro distanza da è almeno:  $dc = \frac{\lambda}{2}$

Questo vuol dire che nelle moderne trasmissioni in 5G a 52 GHz ha  $\lambda \approx 6 \text{ mm}$  quindi nello stesso chip puoi mettere tante antenne a 3 mm di distanza, tutte che riceveranno un segnale incorrelato.

### CANALE MIMO

Un generico canale **MULTIPLE INPUT MULTIPLE OUTPUT** prevede l'utilizzo di **M ANTENNE in TRASMISSIONE** ed **N ANTENNE in RICEZIONE**



Il canale è descritto dalla matrice  $N \times M$   $H$  dove:

$h_{ij}$  è il canale tra il RICEVITORE  $i$  e il TRASMETTORE  $j$ .

Per i vari canali  $h_{ij}$  ho l'ipotesi di **NARROWBAND** (banda stretta) per cui ho che numero di essi è uno scalare (di solito compreso pochi considerando il **WAVE ENVELOPE**) e **PIATTO** (che mi posso riferire per esempio attraverso **OFDM**)

### CANALE SIMO

In questi canali (**SINGLE INPUT MULTIPLE OUTPUT**) ho 1 TRASMETTORE ed N RICEVITORI. Quindi devo sfruttare la DIVERSITÀ in RICEZIONE.

Ammettendo che i RICEVITORI Siano abbastanza lontani da ricevere segnali INCORRELATI ogni antenna riceverà:

$$x_i(m) = h_i c_m + m_i(m)$$

$$h_i = [h_{i1} | e^{j\phi_1}] \cdot e^{-j\phi_i}$$

COMPLEX ENVELOPES

CORREZIONE DI PAJE FATTA IN AUTOMATICO DAL RICEVITORE.

Dove i vari  $m_i(m)$  sono INCORRELATI in quanto si verifichino a causa del RUMORE TECNICO in punti diversi del circuito.  $c_m$  è la stessa replica per tutte le antenne e  $h_i$  è per ipotesi conosciuto (CHANNEL GAIN ESTIMATION).

In particolare  $m_i(m)$  ti rappresentano DIVERSE REALIZZAZIONI dello STESSO PROCESSO AVEZARIO, quindi hanno tutti lo MEAN e STESSA VARIANZA  $\sigma^2$ .

Dunque il segnale ricevuto sarà la composizione di tutti i singoli segnali:

$$z(m) = w_1 x_1(m) + \dots + w_N x_N(m)$$

Dove  $w_i$  è il COEFFICIENTE della  $i$ -ESIMA ANTENNA. Maggiore è  $w_i$ , maggiore sarà il peso del  $x_i(m)$  sul calcolo del SEGNALE TOTALE.

È chiaro che per OTTIMIZZARE il SNR, l'unico parametro su cui ho potere è proprio  $w_i$ .

Per esempio potrai scegliere  $w_i = \frac{1}{h_i}$ , avendo  $h_i$  conosciuto. Quindi:

$$z(m) = \frac{1}{h_1} x_1(m) + \dots + \frac{1}{h_N} x_N(m)$$

Il problema è che se ho un canale a molti elementi ( $h_i$  basso) ho che sia  $c_m$ , sia  $m_i(m)$  sempre AMPLIFICATI. Quindi non va bene.

Un altro esempio potrebbe essere quello di scegliere:

$$w_i = \begin{cases} 1 & i=m \\ 0 & i \neq m \end{cases} \quad \text{con } m = \arg \max(h_m)$$

In questo modo prendo solo l' $i$ -esimo canale con GAIN migliore. Così però si perde il CHANNEL DIVERSITY e "spesa"  $N-1$  trasmissioni.

### MAXIMAL RATIO COMBINING (MRC)

Per tenere il criterio di ottimalità parto dal calcolo del SINR:

$$Z(m) = \sum_{l=1}^N w_l x_l = \sum_{l=1}^N w_l (h_l c_m + m_e(m)) = \underbrace{\sum_{l=1}^N w_l h_l c_m}_{\substack{w_l \text{ deve minimizzare} \\ \text{il segnale}}} + \underbrace{\sum_{l=1}^N w_l m_e(m)}_{\substack{\text{Lo } w_l \text{ deve minimizzare} \\ \text{il rumore}}}$$

#### (ENERGIA SEGNALE)

$$E\left\{ \left| \sum_{l=1}^N w_l h_l c_m \right|^2 \right\} = \left( \sum_{l=1}^N w_l h_l \right)^2 E\{|c_m|^2\} = \left( \sum_{l=1}^N w_l h_l \right)^2 A$$

$w_l$  e  $h_l$  sono conosciuti:

e REALI (con la correzione  $\rightarrow$  No Values  
di FASE) li caccio del  
calcolo del VALOR MEDIO  $\rightarrow$   $c_m$  è fisso

ENERGIA  
DEL SINKO

Essendo Com uguale per tutte le REPliche  
ho ottenuto IL QUADRATO delle SOMME.

$m_i(m)$  sono diversi ma INCORRELATI, quindi  
 $E\{m_i(m)m_j(m)\} = 0 \quad \forall i \neq j$ . Quindi  
essendo i quadrati  $\neq 0$  ho una somma  
di QUADRATI

#### (ENERGIA RUMORE)

$$E\left\{ \left| \sum_{l=1}^N w_l m_e(m) \right|^2 \right\} = \sum_{l=1}^N w_l^2 E\{|m_e(m)|^2\} = \sum_{l=1}^N w_l^2 \sigma_e^2$$

$\sigma_e^2$  è uguale a  $\sigma^2 \rightarrow$  Stessa pratica  $N(\sigma, \sigma^2)$   
Lo fatto giusto

$$\frac{\left( \sum_{l=1}^N w_l h_l \right)^2}{\sum_{l=1}^N w_l \sigma_e^2} \frac{A}{\sigma^2}$$

Mentre per un AWGN ho  $\text{SNR} = \frac{A}{\sigma^2}$  in questo caso ho  $\text{SNR} =$

Per il criterio di ottimalità applico la DISUGUAGLIAZIONE di SWARTZ:

$$\left( \sum_{l=1}^N w_l h_l \right)^2 \leq \sum_{l=1}^N w_l^2 \sum_{l=1}^N h_l^2 \leftarrow \text{Un'egualianza mi farebbe ottenere}$$

$$\text{SNR: } \frac{\sum w_l^2 \sum h_l^2}{\sum w_l^2 \sigma_e^2} \frac{A}{\sigma^2} = \sum h_l^2 \frac{A}{\sigma^2} = \frac{A}{\sigma^2} \sum_{l=1}^N h_l^2 \xrightarrow{\text{direzionalmente}} \text{il GAIN incrementa}$$

Ovvero l'SNR cresce QUADRATICAMENTE al crescere dei singoli GAIN dei CANALI.

Ma per avere l'egualianza devo imporre  $w_l = h_l$   $\leftarrow$  Criterio di ottimalità (in cui le

In pratica è lo stesso concetto del MATCH FILTER, ma si ripete solo nel TEMPO, mentre più il GAIN è Alto, più sarà alto  $w_l$ , quindi più per ora  $x_l$  in  $Z(m)$ . Al contrario più il canale è ATTENUATO, meno importanza avrà quella replica.

$$\text{Inoltre: } Z(m) = \sum_{l=1}^N w_l h_l c_m + \sum_{l=1}^N w_l m_e(m) = \sum_{l=1}^N h_l^2 c_m + \sum_{l=1}^N w_l m_e(m)$$

$\rightarrow$  La variazione dell'ampiezza cresce QUADRATICAMENTE

## CANALE MISO

Nel caso del MULTIPLE INPUT SINGLE OUTPUT ho N TRASMETTORE ed 1 RICEVITORE. Qui la situazione cambia in quanto devo sfruttare la conoscenza di  $b_j$  sui CANALI per ottimizzare il SNR.

A differenza del SIMO però non posso usare dei coefficienti ( $b_j$ ) per simboli trasmessi diversi perché li uso in TRASMISSIONE, non Dopo AVERLI RICEVUTI. Infatti aumentano i coefficienti, che nel MISO sono  $b_j$ , dando ad uscita più POTENZA nella trasmissione del SIMBOLI.

Ho che ogni ANTENNA produce un SEGNALE  $y_j$ :

$$y_j(m) = b_j c_m \quad \text{con } b_j \text{ COEFFICIENTE dell'ANTENNA.}$$

Il ricevitore ottiene un segnale poi alla ~~com~~ COMPOSIZIONE LINEARE di tutti i simboli  $y_j$  che si trova "SOMMATA NELL'AZIA":

$$x(m) = h_1 y_1 + \dots + h_M y_M$$

Quindi il mio obiettivo è quello di MASSIMIZZARE il SNR, mantenendo un'ENERGIA per simbolo pari ad  $A$ .

Per fare ciò devo avere che  $\sum_{j=1}^M b_j = 1$ . I coefficienti quindi rappresentano il PESO che  $y_j$  avrà nella composizione di  $x(m)$  e dovrà essere calcolato in base alle conoscenze di  $b_j$ .

Per questi il processo è detto PRE-CODING

## MAXIMAL RATIO TRANSMIT COMBINING (MRC)

Anche in questo caso voglio sfruttare un sistema di MATCH FILTERING. Però il tutto deve essere Normalizzato in quanto  $\sum b_j = 1$

Il CRITERIO DI OTTIMALITÀ è  $b_j^* = h_j^T / \|h\|$

$h_j^*$  come prima viene risolto con la CORREZIONE DI FASE.  $\|h\|$  invece, che differisce del MRC in cui non è presente si calcola:

$$\|h\| = \sqrt{\|h_1\|^2 + \dots + \|h_M\|^2} \rightarrow \text{È ciò che detta la NORMALIZZAZIONE}$$

Infatti se controllo l'ENERGIA per simbolo TRASMESSO è pari a

$$\sum_{j=1}^N E\{|b_j c_m|^2\} = \sum_{j=1}^N |b_j|^2 A = \frac{\sum \|h_j\|^2}{\|h\|^2} A = \frac{\|h\|^2}{\|h\|^2} A = A \leftarrow \text{NON HA AGGIUNTO ENERGIA IN TRASMISSIONE.}$$

Il segnale ricevuto con il criterio di ottimalità dunque:

$$x(m) = \sum_{j=1}^N h_j b_j c_m + m(m) = \sum_{j=1}^N \frac{h_j h_j^*}{\|h\|^2} c_m + m(m) = \sum_{j=1}^N \frac{\|h_j\|^2}{\|h\|^2} c_m + m(m) = \sum_{j=1}^N \|h_j\| c_m + m(m)$$

Da cui otengo il SNR:

$$\text{SNR} = \frac{A}{\sigma^2} \sum_{j=1}^N \|h_j\|^2 \rightarrow \text{Esattamente come nel MRC ha un MATCH FILTER}$$

## CANALE MISO

Nel caso del MULTIPLE INPUT SINGLE OUTPUT ho N TRASMETTORE ed 1 RICEVITORE. Qui la situazione cambia in quanto devo sfruttare la conoscenza di  $h_{ij}$  nei CANALI per ottimizzare il SNR.

A differenza del SIMO però non posso usare dei coefficienti ( $b_{ij}$ ) per simbol Tappo alti perché li uso in TRASMISSIONE, non dopo AVERLI RICEVUTI. Infatti aumentando i coefficienti, che nel MISO sono tali, rado ad usare più POTENZA nella trasmissione del SIMBOL.

Ho che ogni ANTENNA produce un SEGNALE  $y_j$ :

$$y_j(m) = b_j c_m \quad \text{con } b_j \text{ COEFFICIENTE dell'ANTENNA.}$$

Il ricevitore ottiene un segnale pari alla ~~composizione~~ LINEARE di tutti i simili  $y_j$  che si sommano "SOMMATORI NELL'AZIA":

$$x(m) = h_1 y_1 + \dots + h_N y_N$$

Quindi il mio obiettivo è quello di MASSIMIZZARE il SNR, mantenendo un'ENERGIA per SIMBOLO pari ad A.

Per fare ciò devo avere che  $\sum_{j=1}^N b_j = 1$ . I coefficienti quindi rappresentano il PESO che  $y_j$  avrà nella composizione di  $x(m)$  e dovrà essere calcolato tenendo conto delle conoscenze di  $h_j$ .

Per questi il processo è detto PRE-CODING

## MAXIMAL RATIO TRANSMIT COMBINING (MRC)

Anche in questo caso voglio sfruttare un sistema tutto dove essere NORMALIZZATO in quanto  $\sum b_j$

Il CITERIO DI OTTIMALITÀ è  $b_j = h_j^* / \|h\|$

$h_j^*$  come prima viene risolto con le correzioni del MRC in cui  $m(m)$  è presente si calcola:

$$\|h\| = \sqrt{\|h_1\|^2 + \dots + \|h_N\|^2} \rightarrow \text{È ciò che ottieno}$$

Infatti se controllo l'ENERGIA PER SIMBOLO TRASMESSO è pari a

$$\sum_{j=1}^N E\{|b_j c_m|^2\} = \sum_{j=1}^N |b_j|^2 A = \frac{\sum |h_j|^2}{\|h\|^2} A = \frac{\|h\|^2}{\|h\|^2} A = A \leftarrow \text{NON HO AGGIUNTO ENERGIA IN TRASMISSIONE.}$$

Il segnale ricevuto con il CITERIO DI OTTIMALITÀ diventa:

$$x(m) = \sum_{j=1}^N h_j b_j c_m + m(m) = \sum_{j=1}^N \frac{h_j h_j^*}{\|h\|^2} (c_m + m(m)) = \sum_{j=1}^N \frac{|h_j|^2}{\|h\|^2} (c_m + m(m)) = \sum_{j=1}^N |h_j|^2 c_m + m(m)$$

Da cui ottengo il SNR:

$$\text{SNR} = \frac{A}{\sigma^2} \sum_{j=1}^N |h_j|^2 \rightarrow \text{Esattamente come nel MRC ha un MATCH FILTER}$$

$$\begin{aligned} P_s &= E\left\{\left|\sum_j b_j c_m h_j\right|^2\right\} = E\left\{\left|\sum_j \frac{h_j^*}{\|h\|^2} c_m h_j\right|^2\right\} \\ &= E\left\{\left|\sum_j \frac{|h_j|^2}{\|h\|^2} c_m\right|^2\right\} = E\left\{\left(\frac{\|h\|^2}{\|h\|^2} c_m\right)^2\right\} = \\ &= \|h\|^2 E\{|c_m|^2\} = \|h\|^2 A = \\ &= \sum_j |h_j|^2 A \end{aligned}$$

$$P_N = E\{|m|^2\} = \sigma^2 n$$

$$\text{SNR} = \frac{P_s}{P_N} = \frac{\sum_j |h_j|^2}{\sigma^2 n} \cdot A$$

Finora ho considerato il canale conoscivo e COSTANTE mentre la velocità con cui varia il canale è molti MIGLIORI del SIR

### DISTRIBUZIONE DEL GUADAGNO

Sia che venga usato il MRT, sia che venga usato il MRC ho che il SNR sarà:

$$\text{SNR} = \frac{A}{B^2} \sum_{j=1}^N |h_j|^2$$

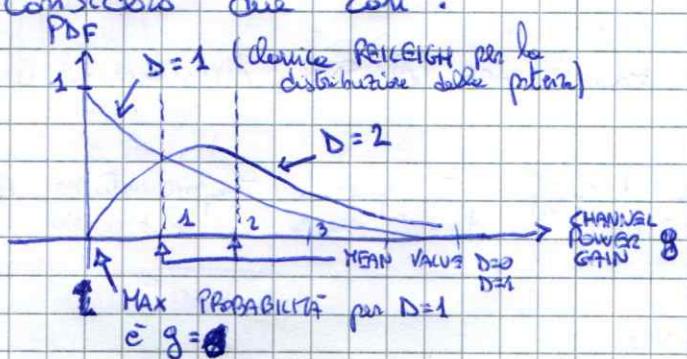
In questo caso  $\sum_{j=1}^N |h_j|^2$  è un VARIABILE RANDOMICA in quanto la considero dopo aver COMBINATO i segnali

Ricordo innanzitutto che  $\sum_{j=1}^N |h_j|^2 = \|H\|^2$

La sua DISTRIBUZIONE è  $f_{\|H\|^2}(g) = \frac{1}{(D-1)!} g^{D-1} e^{-g}$

Dove  $D = \text{numero di antenne}$

Considero due casi:

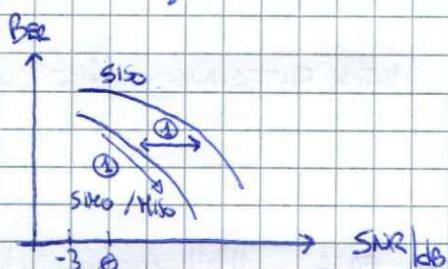


L'aggiunta di UN'ANTENNA in cauto ARRAY

① ~~GAIN~~ GAIN = Il MEAN VALUE è punti da  $g=1$  a  $g=2$

② DIVERSITY GAIN: la probabilità di avere  $g=0$  è punti d'alto e d'

Quindi confrontando una 4-QAM per SISO e per MISO/SIMO ho:



① La distanza rappresenta l'ARRAY GAIN

② La pendenza rappresenta il DIVERSITY GAIN

### CANALE MIMO

In quest'ultimo caso ho  $N$  RICEVITORI ed  $M$  TRASMETTITORI, con una matrice  $H \in \mathbb{C}^{N \times M}$  in cui  $h_{ij}$  è il CANALE tra RICEVITORE  $i$  e TRASMETTORE  $j$ .

### SINGULAR VALUE DECOMPOSITION (SVD)

IL DECOMPOSIZIONE A VALORI SINGOLARI prende di faktorizzare una MATRICE attraverso AUTOVETTORI e AUTOVALORI.

Data la matrice  $N \times M$   $H$  può sempre scrivere nella forma:

$$H = U \Sigma V^H$$

con  $V^H = V$  <sup>TRAPOSTA</sup> <sub>CONIUGATA</sub>

dove  $U$  e  $V$  sono MATRICI UNITARIE (moltiplicabili per un vettore non ne variano la NORMA) e  $\Sigma$  è una MATRICE DIAGONALE

ES

DET per Ogni  
è UNITARIA

Essendo  $V$  e  $U$  unitari ho che:

$$\cdot VV^H = V^H V = I \quad \& \cdot UU^H = U^H U = I$$

$$U^{-1} = U^H$$

Considero poi  $\rho = \text{rank}(H) = \underline{\min(N, M)}$ . Quindi se  $N=M$  ho  $\rho=N=M$

Il funzionamento della comunicazione è il seguente:

① IL TRASMETTORE applica al simbolo  $s$  il PRE-CODING attraverso la MATRICE  $B$

$$x = Bs \rightarrow \text{Segnale da trasmettere}$$

② IL TRASMETTORE trasmette nel CANALE  $x$  che viene ricevuto dal RICEVITORE come

$$y = Hx + m \quad \text{dove } H = \text{CANALE MIMO} \quad \& \quad m = \text{RUMORE DEL CANALE}$$

③ IL RICEVITORE applica un SPACIAL FILTER al segnale ricevuto:

$$z = W^H y = W^H(Hs + m) = W^H H B s + m$$

Dove le STATISTICHE di  $m$  non vengono variate dal FILTRO

IL CRITERIO di ~~OPTIMALITY~~ prevede di:

- Considerare  $H = U\Sigma V^H$
- Usare come MATRICE di PRECODING  $B = V$
- Usare come SPACIAL FILTER  $W^H = U^H$

Quindi il mio segnale ricevuto sarà:

$$z = U^H H V s + m = U^H [U\Sigma V^H] V s + m = I\Sigma I s + m = \Sigma s + m$$

Ricordando che  $\Sigma$  è una matrice diagonale di RANGO  $p$ :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \delta_p \end{bmatrix} \quad \text{Ho ottenuto che } s \text{ viene trasmesso attraverso } p \text{ CANALI PARALLELI.}$$

Quindi in questo caso la CAPACITÀ del CANALE scalata all'aumentare del RANGO di  $H$  (numero di RICEVITORI e TRASMETTORI), quindi aumenterà il numero di CANALI PARALLELI che ho nella comunicazione.

Per esempio quindi se confronto un SISO  $1 \times 1$  e un MIMO  $4 \times 4$ , dove ho:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \delta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_4 \end{bmatrix}$$

Ho ottenuto un INCREMENTO di CAPACITÀ di un filtro  $4 \times 1$

## FREQUENCY DIVERSITY

06/12

Un CANALE di COMUNICAZIONE  $\Leftrightarrow$  MULTIPATH può avere una RISPOSTA IN FREQUENZA variabile, al variazione della frequenza.

Altroverso OFDM consente di dividere la banda in tante SUB CARRIER frequency ognuna con un CANALE FLAT. Il GAIN determina però variazioni tra le varie subcarrier e il motivo obiettivo è quello di creare come MASSIMIZZARE la CAPACITÀ distribuendo correttamente la POTEROSA tra le varie SUB CARRIER.

Secondo shannon la MASSIMA CAPACITÀ di trasmissione del motivo comune è:

$$C = B \log(1 + SNR) \quad \text{dove } \rightarrow B \text{ è la BANDA}$$

$\rightarrow \log(1 + SNR)$  è l'EFFICIENZA SPECTRALE TEORICA del motivo CANALE

L'EFFICIENZA SPECTRALE ( $\frac{bS}{Hz}$ ) indica quanto riusciamo a sfruttare la banda nelle trasmissioni

Ricordando che  $SNR = |H|^2 \frac{P}{N_0}$  con  $H$  = CHANNEL GAIN

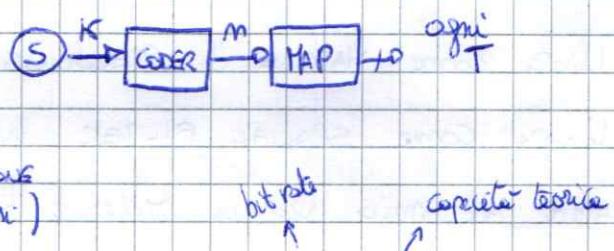
L'unico parametro su cui abbiamo il controllo è  $P$  (POTEROSA)

Dato il TEMPO di simbolo  $T$ :

- Symbol Rate  $R_s = \frac{1}{T} = B$

- Bit Rate  $R_b$

- Coding Rate  $R = \frac{K}{m}$  (rapporto bit di informazione sul totale di bit trasferiti)



Affinché le mie trasmissioni ottengano successo devo avere  $R_b < C$

So ho  $M$  possibili simboli ho bisogno di  $m = \log_2 M$  bit

Nei sistemi pratici considero:

$$R_b = (\log_2 M) R \frac{1}{T} \approx m R B$$

Quindi da Shannon ottengo  $m R B < B \log(1 + SNR)$  ovvero:

$$\rightarrow m R < \log(1 + SNR)$$

Quindi l'EFFICIENZA SPECTRALE dipende da come sono  $m$  e  $R$ .

I moderni SISTEMI DI COMUNICAZIONE come LTE usano il CQI (CHANNEL QUALITY INDICATION) che è la misurazione del SNR.

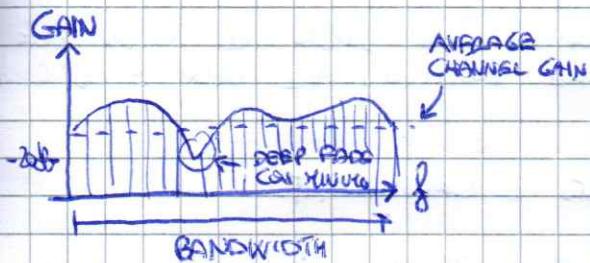
In base al CQI si decide il valore di  $m$  e di  $R$  (valori discreti)

Esempio LTE

Radio Bit Error Index	NAME	MODULATION	<del>R</del>	<del>mR</del>
(Peggior SNR)	1	QPSK $\frac{1}{2} \pi^2$	QPSK	0,0761
(Miglior SNR)	15	64 QAM $11/12$	64 QAM	0,325781

In base al CQI vede il V-BEAM INDEX e quindi MODULAZIONE e mR.

Questo sistema è detto **ADAPTIVE MODULATION and CODING**, ovvero adatto MODULAZIONE e CODING alla qualità del canale.



La VICINANZA DELLA BASE STATION è un fattore fondamentale.

Se infatti non vicino alla BASE STATION anche se ha un DEEP FADE con un attenuazione di -2dB comunque l'AVG GAIN sarà buono, quindi il CQI sarà comunque elevato.

### DISTRIBUZIONE OTTIMA DELLA POTENZA

Come già detto:  $\text{SNR} = \frac{|h_m|^2 P_m}{\sigma_m^2} = \frac{P_m}{\sigma_m^2}$  dove  $m$  indica la SUB-CARRIER FREQUENCY.

$P_m$  è unico valore che possiamo controllare nel SNR e da quindi possiamo sfruttare per MASSIMIZZARE l'efficienza spettrale teorica del nostro sistema.

Il nostro problema è quella della POTENZA DI BUDGET  $P_0$ , come la posso distribuire tra le subcarrier in modo da ottimizzare la capacità massima?

Ricordando che la capacità è pari a  $B \cdot \text{EFF. SPECIALE}$  voglio massimizzare l'EFFICIENZA, in quanto  $B$  è un semplice scalare.

Il problema da risolvere è quindi:

$$\max_P \sum_{m=1}^N \log_2 \left( 1 + \frac{P_m}{\sigma_m^2} \right)$$

$$P_m \geq 0 \quad \forall m = 1, \dots, N$$

$$\sum_{m=1}^N P_m = P_0 \quad \begin{array}{l} \text{la somma delle potenze} \\ \text{è il BUDGET} \end{array}$$

$$\rightarrow \log_2(1 + \text{SNR}) = \sum_m \log_2 \left( 1 + \frac{P_m}{\sigma_m^2} \right)$$

$\rightarrow$  Non può avere potenze negative  $\rightarrow$  se  $\theta$  in  $\log_2(1+\theta) = 0$  OK!

Essendo un problema di MASSIMIZZAZIONE CON VINCOLI è complesso da risolvere.

Per risolvere questo problema uso i MULTIPLICATORI DI LAGRANGE. Scrivo la FUNZIONE LAGRANGIANA:

$$L(P_1, \dots, P_N) = \sum_{m=1}^N \log_2 \left( 1 + \frac{P_m}{\sigma_m^2} \right) + \lambda \left( P_0 - \sum_{m=1}^N P_m \right)$$

Questa funzione contiene di suo intimo due funzioni da MASSIMIZZARE, sia i VINCOLI DASSISTETTARE (se  $\sum P_m > P_0$  otengo un valore negativo, quindi una penalità).

Quindi ora per risolvere il mio problema devo calcolare  $\max_L L(P_1, \dots, P_N)$  che è un PROBLEMA DI OTIMIZZAZIONE SENZA VINCOLI (RELAXED PROBLEM), quindi molto più semplice.

Inoltre questo consiste nel trovare i GRADIENTI di  $L(P_1, \dots, P_N)$  e impostare a 0 per trovare il MASSIMO della funzione:

$$\nabla L = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial P_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial L}{\partial P_N} \end{bmatrix} \quad \text{con } \frac{\partial L}{\partial P_m} = \frac{1}{\log 2} \frac{1}{1 + \frac{P_m}{\sigma_m^2}} - \lambda = 0 \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{P_m}{\sigma_m^2}} = \lambda \log 2 \rightarrow$$

$$\rightarrow P_m = \frac{1}{\lambda \log 2} - \sigma_m^2 = \mu - \sigma_m^2$$

Quindi imponendo ogni gradiente a 0 ho che l'incremento gradiente è

$$P_m = \mu - \delta_m^2 \quad \text{con } \mu = \frac{1}{\lambda \log 2} \rightarrow \text{"Punto Stationario"}$$

Quindi per ottenere il MAX  $P_m$  devo scegliere un valore di  $\lambda$  che per la TEORIA DI LAGRANGE deve essere STRETTAMENTE POSITIVO, ma deve essere anche tale da

$\lambda > \delta_m^2$  altrimenti  $P_m < 0 \rightarrow$  Non rispetto i CONSTRAINTS

Quindi ricordando che  $(x)^+ = \begin{cases} x & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{if } x \leq 0 \end{cases}$  devo scegliere:

$$P_m^* = \max \{0, \mu - \delta_m^2\} = (\mu - \delta_m^2)^+ \quad \forall m = 1, \dots, N$$

Quindi ho:

$$\sum_{m=1}^N (\mu - \delta_m^2)^+ = P_0 \rightarrow \text{è una funzione NON LINEARE o comunque del } ()^+$$

Se però scrivo la funzione  $f(\mu) = \sum_{m=1}^N (\mu - \delta_m^2)^+ - P_0$  ho  $f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$  MONOTONA CRESCENTE

Quindi per trovare  $\mu$  (la radice ottimale) il METODO DELLA BISEZIONE.

Come punti INIZIALI sceglio:

$$a_1 = 0 \rightarrow f(a_1) = -P_0 < 0$$

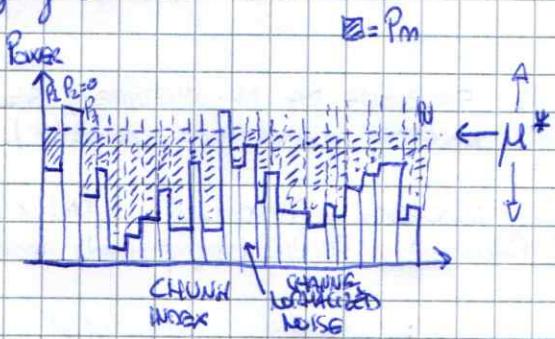
$$b_1 = \frac{\sum_{m=1}^N \delta_m^2 + P_0}{N} \rightarrow f(b_1) \geq 0 \quad \leftarrow \text{or diremo l'insieme finché non trovo } \mu : f(\mu) = 0$$

Una volta trovati  $a_1 \leq \mu^*$  ho trovato anche tutti i  $P_m^*$  da cercare.

Questo sistema consegna:

- MAGGIOR POTENZA se il CHANNEL NORMALIZED NOISE è BASSO
- MINOR POTENZA se il CHANNEL NORMALIZED NOISE è ALTO
- 0 POTENZA (Non si trasmette in m) se il NOISE è TROPPO ELEVATO.

Graficamente ho:



Se immaginiamo ogni CHUNK un CONTENITORE di altezza  $\mu^*$  e il NORMALIZED NOISE come il contenuto "solido" di acqua di cui, la  $P_m$  allora è come dell'Acqua che RISPIE lo SPAZIO RESIDUALE del contenitore (Da qui WATERFILLING METHOD)

↳ Maggiore è lo spazio, più acqua entra  
↳ Se il contenitore scuro è > Altezza min ci sono spazio per Acqua.

È chiaro che MAGGIORI SOCI il BUDGET  $P_0$ , MAGGIORI SOCI  $\mu^*$  "alto"

OFDM + WATERFILLING rappresentano il SISTEMA DI COMUNICAZIONE più UNTO.

Lo è molto più efficace di una DISTRIBUZIONE UNIFORME ( $P_{ij} = P_0 / M$ )