Hőtan és folytonos közegek mechanikája (emelt szint) Beadandó

Brindza Mátyás (Z2R8XS)

2020.04.02.

5. Rugalmas testek egyensúlya

5.1. Oszlopban állandó nyomás

FELADAT: Egy állandó ρ sűrűségű, hossztengelyére forgásszimmetrikus test (olyan oszlop, amely-nek a hossztengelyére merőleges keresztmetszete minden magasságban kör) felső lapja a felfüggesztéshez van rögzítve, alsó síklapjára egy G súlyú nehezék van rögzítve. Milyenalakú legyen az oszlop, hogy a feszültségtenzor hossztengellyel párhuzamos σ_{zz} komponense állandó legyen azon belül?

MEGOLDÁS:
Ha a minden keresztmetszet kör, akkor az $A(z)$ alapterület:

$$A(z) = \pi(r(z))^2$$

ahol $r(z)$ egy olyan függvény, mely megadja, mekkora sugarú a keresztmetszet egy bizonyos z magasságban. Tulajdonképpen ezt az $r(z)$ függvényt keressük.

$$p = \frac{F(z)}{A(z)} = \frac{G + g\rho \int_z^l A(z)dz}{A(z)}$$

$\int_z^l A(z)dz$ függvény és a deriváltja fordul elő. Nevezzük őket $t(z)$-nek és $t'(z)$-nek.

$$p \cdot t'(z) + \rho g t(z) + G = 0$$

A differenciálegyenlet megoldása:

$$A(z) = c \cdot \lambda e^{\lambda z}$$

$$r^2(z)\pi = c \cdot \lambda e^{\lambda z}$$

$$r(z) = \sqrt{\frac{c \cdot \lambda}{\pi} e^{\lambda z}}$$

5.2. Csöves 1

FELADAT: Mekkora a másodrendű nyomatéka egy tömör hengernek a hossztengelyére merőleges keresztmetszetében? Hogyan aránylik ez egy azonos nagyságú keresztmetszettel rendelkező üreges csőéhez képest, ugyanolyan irányú keresztmetszetben, ha a cső sugara kétszerese a tömör hengernek?

MEGOLDÁS: Az első henger kerestmetszetének területe

$$T_t = r^2\pi$$

ahol r az első henger keresztmetszenének sugara.
Egy üreges henger kerestmetszetének területe

$$T_u = (r_1^2 - r_2^2)\pi$$

ahol r_1 a külső palást sugara, r_2 pedig a belsőé.
Tudjuk, hogy

$$T_u = T_t$$

A cső külső sugara kétszere a hengerének, tehát

$$r_1 = 2r$$

Mivel arányt keresünk, célszerű az r_2-t is r-rel kifejezni annak reményében, hogy egyszerűsíteni lehet majd.

$$(r_1^2 - r_2^2)\pi = r^2\pi$$

$$4r^2 - r_2^2 = r^2$$

$$r_2^2 = 3r^2$$

Egy tömör henger másodrendű nyomatéka hossztengelyére merőleges keresztmetszetében:

$$I_t = \frac{\pi}{4}r^4$$

Egy üreges henger másodrendű nyomatéka hossztengelyére merőleges keresztmetszetében:

$$I_u = \frac{\pi}{4}(r_1^4 - r_2^4)$$

$$I_u = \frac{\pi}{4}(2^4r^4 - 3^2r^4)$$

$$I_u = \frac{\pi}{4}(16r^4 - 9r^4)$$

$$I_u = \frac{7\pi}{4}r^4$$

I_t és I_u aránya:

$$\frac{I_t}{I_u} = \frac{\frac{\pi}{4}r^4}{\frac{7\pi}{4}r^4}$$

$$\frac{I_t}{I_u} = \frac{1}{7}$$

5.3. Húzódzkodó

FELADAT: 2 db négyszögletes profilú, 3cm oldalélű,valamilyen anyagvastagságú hasáb tart egy húzódzkodó keresztrudat a faltól 50cm távolságban. Mekkora a négyszögletes rudak anyagvastagsága, ha Gyurma Gyuri a maga 80kg-os testtömegével a keresztrúdra ráfüggeszkedvén annak lehajlása 5mm? A vas Young-modulusza 200GPa.

MEGOLDÁS:
Legyen Gyurma Gyuri súlya G.

$$G = 80kg \cdot 9,81 \frac{m}{s^2} = 784,8N$$

Legyen a hasábok lehajlása s.

$$s = 5 \cdot 10^{-3}m$$

A hasábok felfüggesztéseinek távolsága legyen L.

$$L = 2 \cdot 0,5m = 1m$$

A hasábok szélétől $\frac{L}{2}$ távolságra helyezkedik el a keresztrúd.
Legyen az egy-egy hasábra ható erő F. Tegyük fel, hogy a keresztrúd tökéletesen egyenletesen ossza el Gyuri súlyát a hasábok között, valamint hanyagoljuk el a hasábok behajlását saját súlyuk alatt. Így

$$F = \frac{G}{2} = 392,4N$$

Valamint a Young-modulusz

$$E = 2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$$

Egy üreges hasáb másodrendű nyomatéka általánosan, ha a a hasáb szélessége, b a hasáb vastagsága, szélességre merőleges tengelyt vizsgálunk és a megfelelő indexek külső, illetve belső adatokra vonatkoznak:

$$I = \frac{a_k^3 b_k - a_b^3 b_b}{12}$$

Tudjuk, hogy $a_k = b_k = a = 3 \cdot 10^{-2}m$. Legyen az anyagvastagság x, ekkor $a_b = b_b = a - 2x = b$. Így

$$I = \frac{a^4 - b^4}{12}$$

Előadáson levezetésre került az alábbi képlet s-re.

$$s = \frac{1}{48} \frac{F}{EI} L^3$$

Ezt átalakítva:

$$I = \frac{1}{48} \frac{F}{Es} L^3$$

$$\frac{a^4 - b^4}{12} = \frac{1}{48} \frac{F}{Es} L^3$$

$$a^4 - b^4 = \frac{1}{4} \frac{F}{Es} L^3$$

$$b^4 = a^4 - \frac{1}{4} \frac{F}{Es} L^3$$

$$b^4 = (3 \cdot 10^{-2}m)^4 - \frac{1}{4} \frac{392,4N}{2 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2} \cdot 5 \cdot 10^{-3}m} 1m^3$$

$$b^4 = (8,1 \cdot 10^{-7} - 9,81 \cdot 10^{-8})m^4$$

$$b^4 = 7,119 \cdot 10^{-8})m^4$$

$$b = 2,9047 \cdot 10^{-2}m$$

$$a - 2x = 2,9047 \cdot 10^{-2}m$$

$$x = 4,7638 \cdot 10^{-4}m = 0,47638mm$$

Megközelítőleg 0,47638 mm a hasábok anyagvastagsága.