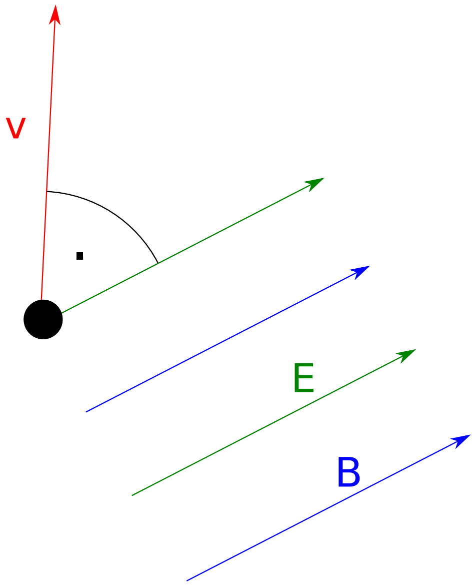
1. Ampere-törvény, Lorentz-erő

1.1. 2. ZH 2018 2.feladat

Egymással párhuzamos homogén E elektromos és B mágneses térben mozog egy m tömegű, Q töltésű részecske. Indítsuk el a részecskét v nagyságú és a terekre merőleges irányú sebességgel. Milyen messze lesz a részecske az indulási pontjától $\frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B}$ idő múlva?

Segítség: Ne csinálj Lorentz-transzformációt!



1. ábra. Az elektromos és a mágneses térre merőleges sebességű

Feladatot kidolgozta: *Z2R8XS*

Megoldás

Legyen koordinátarenszer origója a töltés helyzete a $t = 0$ pillanatban. A z tengely legyen párhuzamos az elektromos, illetve a mágneses térerősség vektorával, az x tengely pedig a $\vec{v}_0$ sebesség vektorral.

A Lorentz-erő

$$\vec{F} = Q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

minden időpillanatban. Newton törvényeiből

$$m \cdot \vec{r''}(t) = Q(\vec{E} + \vec{r'}(t) \times \vec{B})$$

Ez egy differenciál egyenlet rendszer $\vec{r}$ komponenseire. Ebben a koordinátarendszerben $\vec{E}$ és $\vec{B}$ konstans vektorok.

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \frac{Q}{m} \cdot (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} = \frac{Q}{m} \cdot (\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \cdot y' \\ -B \cdot x' \\ 0 \end{pmatrix})$$

A differenciál egyenlet rendszer így

$$x'' = \frac{Q}{m} \cdot B \cdot y'$$

$$y'' = -\frac{Q}{m} \cdot B \cdot x'$$

$$z'' = \frac{Q}{m} \cdot E$$

Megsejthető, hogy $x(t)$ és $y(t)$ valamiféle sin-okból és cos-okból állhat. Ha csak mágneses tér lenne, akkor egyszerű síkmozgást (körmozgást) szeretne végezni a test. Ha csak elektromos tér lenne, a térerősség irányába gyorsulna a test. Ebben az esetben mindkét mozgás típus jelen van - és ezek összeadhatók. Az összeadást jogosítja az, hogy az elektromos tér számára $\vec{v}$-nek csak a térrel párhuzamos komponense fontos, a mágneses térnek pedig csak a merőleges komponens fontos (a kereszt szorzat miatt). Így az elektromos tér csak a z komponensbe szól bele, a mágneses pedig a másik kettőbe.

Rendelkezésre álló kezdőfeltételek:

A töltés $t = 0$ pillanatban az origóban van.

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

$$z(0) = 0$$

A töltés sebessége $t = 0$ pillanatban az x tengely irányába mutat.

$$x'(0) = v_0$$

$$y'(0) = 0$$

$$z'(0) = 0$$

Hat kezdőfeltétel három másodrendű differenciál egyenlethez elég.

Az x függvény nulla, ha $t = 0$, valamint x' nem nulla. Ez úgy viselkedik ebben a pontban, mint a $j \cdot sin(k \cdot t)$ függvény.

Az y függvény nulla, ha $t = 0$, valamint y' is nulla. Ez $(-j) \cdot cos(k \cdot t) + konstans$-ként viselkedik.

Ennek az a fizikai értelme, hogy a koordinátarendszer origója rögzítve van a kezdeti helyzethez, de nem az origó körül fog forogni a töltés, hanem egy $\vec{B}$-vel párhuzamos tengely körül, amely R távolságra van az origótól.

A Lorentz-erő szolgáltatja a centirpetális erőt a körmozgáshoz. A centripetális gyorsulás nagysága

$$a_{cp} = \frac{v_{(x,y)}^2}{R}$$

Ha a töltés mozgása (x, y) síkra levetítve körmozgás, akkor van egy konstans ω szögsebessége (ez lesz a k együttható), és $\vec{v}$-nek nem változik a nagysága, ha levetítjük az (x, y) síkra. Így a képletbe beírható a kezdősebesség. Mivel pozitív x irányú a kezdősebesség, algebrailag a kör egyenlete $x^2 + (y - R)^2 = R^2$. Az $y(t)$ függvénynek tehát tartalmaznia kell egy "$+R$" tagot - ez a konstans lesz hozzáadva a koszinuszhoz.

$$x = R \cdot sin(\omega \cdot t)$$

$$y = -R \cdot cos(\omega \cdot t) + R$$

Ez a két függvény megfelel a kezdőfeltételeknek, ha $R \cdot \omega = v_0$, és a kör egyenletét is kielégítik.

Hiányzik még R és ω értéke.

$$x'' = \frac{Q}{m} \cdot B \cdot y'$$

$$-\omega^2 \cdot R \cdot sin(\omega \cdot t) = \frac{Q}{m} \cdot B \cdot (-R \cdot \omega \cdot sin(\omega \cdot t))$$

$$\omega = \frac{Q}{m} \cdot B$$

$$R = \frac{m \cdot v_0}{Q \cdot B}$$

Ezeket az értékeket visszakapjuk az $y(t)$ második deriváltjára vonatkozó egyenletből is. Ellenőrizzük le, hogy a centripetális gyorsulás esetén sem futunk ellentmondásba.

$$a_{cp} = \sqrt{(x'')^2 + (y'')^2}$$

$$\frac{v_0^2}{R} = \sqrt{\omega^4 \cdot R^2 \cdot sin^2(\omega \cdot t) + \omega^4 \cdot R^2 \cdot cos^2(\omega \cdot t)}$$

$$v_0^2 = R^2 \cdot \omega^2$$

Az alábbiak lesznek az $x(t)$ és az $y(t)$ függvények.

$$x(t) = \frac{m \cdot v_0}{Q \cdot B} \cdot sin(\frac{Q}{m} \cdot B \cdot t)$$

$$y(t) = \frac{-m \cdot v_0}{Q \cdot B} \cdot cos(\frac{Q}{m} \cdot B \cdot t) + \frac{m \cdot v_0}{Q \cdot B}$$

A $z(t)$ függvény maradt utoljára. Második deriváltja konstans, első deriváltja $t = 0$ helyen 0, és $z(0) = 0$, így a függvény $c \cdot t^2$ alakú lesz.

$$z(t) = \frac{Q}{m} \cdot E \cdot t^2$$

Az $r(t)$ függvényre van még szükség. Ez az $\vec{r}(t)$ vektor hossza.

$$r(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t) + z^2(t)}$$

$$r(t) = \sqrt{\frac{m^2 \cdot v_0^2}{Q^2 \cdot B^2} \cdot sin^2(\frac{Q}{m} \cdot B \cdot t) + (\frac{-m \cdot v_0}{Q \cdot B} \cdot cos(\frac{Q}{m} \cdot B \cdot t) + \frac{m \cdot v_0}{Q \cdot B})^2 + \frac{Q^2}{m^2} \cdot E^2 \cdot t^4}$$

A feladat az $r(\frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B})$ értéket kéri.

$$r(\frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B}) = \sqrt{\frac{m^2 \cdot v_0^2}{Q^2 \cdot B^2} \cdot sin^2(\frac{Q}{m} \cdot B \cdot \frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B}) + (\frac{-m \cdot v_0}{Q \cdot B} \cdot cos(\frac{Q}{m} \cdot B \cdot \frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B}) + \frac{m \cdot v_0}{Q \cdot B})^2 + \frac{Q^2}{m^2} \cdot E^2 \cdot (\frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B})^4}$$

$$r(\frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B}) = \sqrt{\frac{m^2 \cdot v_0^2}{Q^2 \cdot B^2} \cdot sin^2(\pi) + (\frac{-m \cdot v_0}{Q \cdot B} \cdot cos(\pi) + \frac{m \cdot v_0}{Q \cdot B})^2 + \frac{Q^2}{m^2} \cdot E^2 \cdot (\frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B})^4}$$

$$r(\frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B}) = \sqrt{\frac{Q^2}{m^2} \cdot E^2 \cdot \frac{m^4 \cdot \pi^4}{Q^4 \cdot B^4}}$$

$$r(\frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B}) = \sqrt{\frac{E^2 \cdot m^2 \cdot \pi^4}{Q^2 \cdot B^4}}$$

$$r(\frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B}) = \frac{E \cdot m \cdot \pi^2}{Q \cdot B^2}$$

Tehát a töltés a $t = \frac{m \cdot \pi}{Q \cdot B}$ idő múlva $\frac{E \cdot m \cdot \pi^2}{Q \cdot B^2}$ távolságra lesz az iniciális helyzetétől.