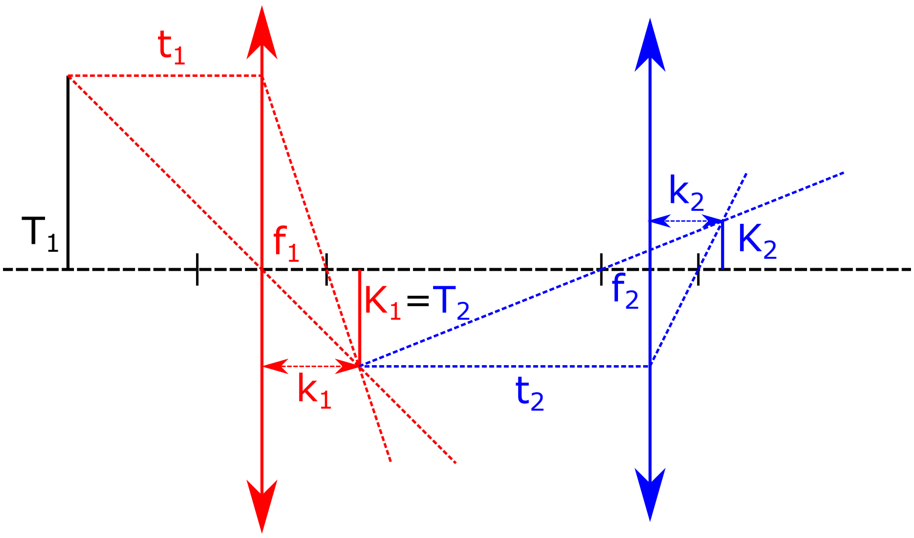
1. Optika

1.1. Kovács-Párkányi Fizikai Példatár II. / 223. Feladat

Határozzuk meg két lencséből álló lencserendszer nagyítását, ha adott a lencsék fókusztávolsága, a lencsék egymástól való távolsága (d), és a tárgy távolsága a lencsétől.



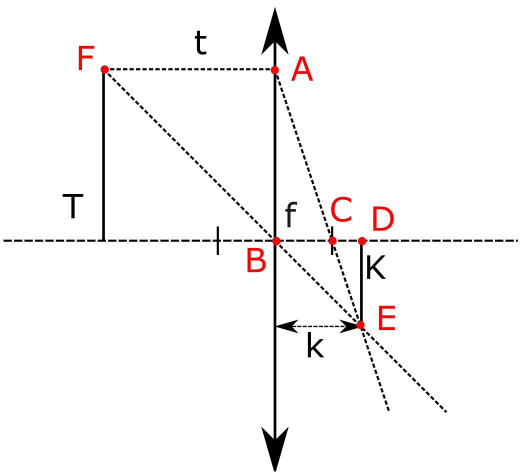
1. ábra. A két lencse és a kép kialakulása

Feladatot kidolgozta: *Z2R8XS*

Megoldás

A feladat nem adta meg konkrétan, milyen lencsékről van szó, viszont ha a képtávolságot és a fókusztávolságot előjelesen használjuk, ugyanúgy érvényesülni fog minden lencsére a levezetés.

Nézzük, milyen összefüggés áll fenn a képtávolság, tárgytávolság és a fókusztávolság között. Legyen f a fókusztávolság, t a tárgy távolsága a lencsétől, k a kép távolsága a lencsétől, T a tárgy mérete és K a kép mérete.



2. ábra. Domború lencse

Az ACB és a CED háromszögek hasonlóak. Vegyük a két beforgó arányát.

$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{CD}$$
$$\frac{T}{K} = \frac{f}{k-f}$$

Az AFB és a DBE háromszögek hasonlóak. Vegyük a két beforgó arányát.

$$\frac{BD}{FA} = \frac{DE}{AB}$$
$$\frac{k}{t} = \frac{K}{T} = N$$

Az N-t szokás a lencse nagyításának nevezni. Használjuk fel ezt a két összefüggést.

$$\frac{t}{k} = \frac{k-f}{f}$$
$$t \cdot k - t \cdot f = f \cdot k$$
$$\frac{1}{f} - \frac{1}{k} = \frac{1}{t}$$
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{k} + \frac{1}{t}$$

Nézzük meg, a lencserendszer nagyítása hogy áll elő az őt alkotó két lencse nagyításából.

Az első lencse T_1 tárgyról alkot K_1 képet: $K_1 = N_1 \cdot T_1$.

A második lencse T_1 tárgyról alkot K_2 képet: $K_2 = N_2 \cdot T_2$.

Kulcsfontosságú lépés, hogy az első lencse képe (piros K_1) a második lencse tárgya (kék T_2), azaz $K_1 = T_2$. Innen:

$$K_2 = N_2 \cdot T_2 = N_2 \cdot K_1 = N_2 \cdot (N_1 \cdot T_1)$$

A lencserendszer T_1 tárgyról alkot K_2 képet, így a rendszer nagyítása:

$$N = \frac{K_2}{T_1} = N_1 \cdot N_2$$

A lencserendszer nagyítása egyenlő a lencsék nagyításának szorzatával.

A feladat szerint csak f_1, f_2, d és t_1 adott, fejezzük ki ezekkel a nagyítást.

$$N = N_1 \cdot N_2$$
$$N = \frac{K_1}{T_1} \cdot \frac{K_2}{T_2}$$
$$N = \frac{k_1}{t_1} \cdot \frac{k_2}{t_2}$$

k_1 kifejezhető az ismert t_1-gyel és f_1-gyel.

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{t_1}$$
$$\frac{1}{k_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{t_1}$$
$$k_1 = \frac{f_1 \cdot t_1}{t_1 - f_1}$$

t_2 kifejezhető k_1-gyel és d-vel.

$$t_2 + k_1 = d$$

$$t_2 = d - \frac{f_1 \cdot t_1}{t_1 - f_1}$$

k_2 kifejezhető t_2-vel és f_2-vel.

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1}{k_2} + \frac{1}{t_2}$$

$$\frac{1}{k_2} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{t_2}$$

$$k_2 = \frac{f_2 \cdot t_2}{t_2 - f_2}$$

$$k_2 = \frac{f_2 \cdot (d - \frac{f_1 \cdot t_1}{t_1 - f_1})}{(d - \frac{f_1 \cdot t_1}{t_1 - f_1}) - f_2}$$

Térjünk vissza N-hez.

$$N = \frac{k_1}{t_1} \cdot \frac{k_2}{t_2}$$

$$N = k_1 \cdot \frac{1}{t_1} \cdot k_2 \cdot \frac{1}{t_2}$$

$$N = \frac{f_1 \cdot t_1}{t_1 - f_1} \cdot \frac{1}{t_1} \cdot \frac{f_2 \cdot (d - \frac{f_1 \cdot t_1}{t_1 - f_1})}{(d - \frac{f_1 \cdot t_1}{t_1 - f_1}) - f_2} \cdot \frac{1}{d - \frac{f_1 \cdot t_1}{t_1 - f_1}}$$

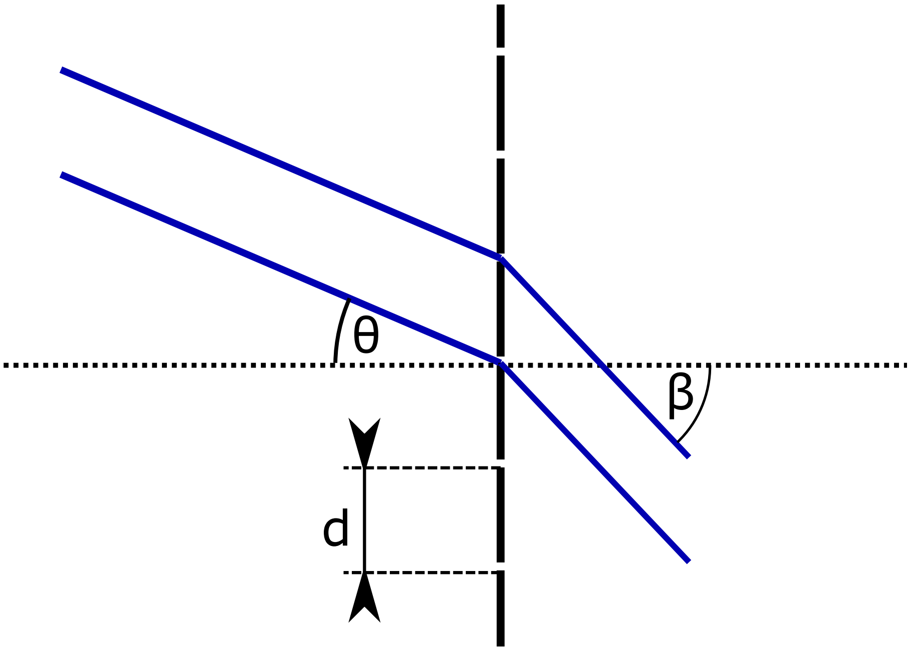
$$N = \frac{f_1}{t_1 - f_1} \cdot \frac{f_2}{(d - \frac{f_1 \cdot t_1}{t_1 - f_1}) - f_2}$$

Az alábbi összefüggést kapjuk a lencserendszer nagyítására:

$$N = \frac{f_1 \cdot f_2}{(t_1 - f_1)(d - f_2) - t_1 \cdot f_1}$$

1.2. Kovács-Párkányi Fizikai Példatár II. / 267. Feladat

Az optikai rács *cm*-enként 5700 rést tartalmaz. Maximálisan hány rend jelenhet meg ennek a rácsnak a színképében, ha látható fénnyel világítjuk meg?



3. ábra. Rácsra érkező fénysugarak

Feladatot kidolgozta: *Z2R8XS*

Megoldás

A látható fény hullámhossza a $\lambda \in [3,9 \cdot 10^{-7}m; 7,5 \cdot 10^{-7}m]$ intervallumba esik. Keressük egy látható tartományba eső monokromatikus fényhez a maximális rendet, adott $d = 10^{-2}m/5700$ rácsállandó mellett.

Az alábbi összefüggés érvényesül a rácsállandó (d), a beesési szög (θ), az intentzitásmaximumok iránya (β_k), a fény hullámhossza (λ) és a rend (k) között.

$$d \cdot (sin(\theta) + sin(\beta_k)) = \pm k \cdot \lambda$$

Érdemes megvizsgálni a szélső eseteket. Legyen merőleges beesés, azaz $\theta = 0$, így $sin(\theta) = 0$. Módosítsuk az egyenletet.

$$d \cdot sin(\beta_k) = \pm k \cdot \lambda$$

Vizsgáljuk a pozitív eseteket. Szimmetrikus jelenségről van szó, tehát ha k-t mindig pozitívnak vesszük, egy pozitív $sin(\beta_k)$-hoz tartozó k ugyanaz, mint egy negatív $sin(\beta_k)$-hoz - ha a $\pm$ eseteit ehhez igazítva kezeljük.

$$d \cdot sin(\beta_k) = k \cdot \lambda$$

$$k = \frac{d \cdot sin(\beta_k)}{\lambda}$$

Technikailag azt kell megoldani, hogy fix d mellett keressük k maximális pozitív egész megoldását, miközben λ nem léphet ki a látható tartományból. Megnézzük melyik a legmagasabb elérhető rend, majd ebből kikövetkeztethető, összesen hány rend, illetve hány csík jelenik meg. Tudjuk, hogy $sin(\beta_k)$ maximuma 1. Az lesz a legszélsőségesebb irány, melynél $sin(\beta_k)$ közelítőleg

1, itt jelenik meg a legmasabb rend.

$$k = \frac{d}{\lambda}$$

A hullámhossz a nevezőben van, így minél kisebb hullámhosszt kell választani. Meg kell találni azt a legkisebb hullámhosszt, melynél ez a hányados pozitív egész szám lesz.

$$k = \frac{1m}{57 \cdot 10^4} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

Legyen $x = \lambda \cdot 10^7$. Így x-nek a $[3,9m; 7,5m]$ tartományban kell lennie.

$$k = \frac{10^{-4}m}{57} \cdot \frac{1}{x \cdot 10^{-7}}$$

$$k = \frac{10^3 m}{57} \cdot \frac{1}{x}$$

$$k = \frac{10^3 m}{57 \cdot x}$$

Legyen $y = 57 \cdot x$. Így y-nak a $[222,3m; 427,5m]$ tartományban kell lennie.

$$k = \frac{1000m}{y}$$

A probléma arra redukálódott, hogy az 1000 számnak azt a legkisebb osztóját keressük, mely eleme a $[222,3m; 427,5m]$ intervallumnak. Belátható, hogy $y = 250m$.

Helyettesítsünk vissza, nézzük mekkora lesz λ.

$$\lambda = (\frac{y}{57}) \cdot 10^{-7} = 4,385964912 \cdot 10^{-7}m = 438,5964912 \cdot 10^{-9}m$$

Tehát a közelítőleg $438,5964912nm$ hullámhosszú fénynél jelenik meg a legtöbb rend (ez sötétkéknek felel meg). A legmagasabb előforduló rend $k = 4$. Mivel nem történik olyan, hogy átugrunk egy rendet (például nem következhet az első után a negyedik), pozitív $sin(\beta_k)$-kra 4 csík jelenik meg, negatív $sin(\beta_k)$-kra is 4, és lesz egy $k = 0$ eset is, azaz összesen 9 irányban kapunk intentzitásmaximot, konstruktív interferenciát.