JEGYZŐKÖNYV
KORSZERŰ VIZSGÁLATI MÓDSZEREK LABORATÓRIUM

MAG-MÁGNESES REZONANCIA VIZSGÁLATA

ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

- Mérést végezte : Brindza Mátyás
- Mérőtársak : Kovács Benjamin, Németh Olivér

- Mérés időpontja : 2023.04.21.

Tartalomjegyzék

1. A mérés célja **4**

2. A mérés elméleti háttere **4**
2.1. A g-faktor . . . 4
2.2. Az energiaszintek felhasadása . . . 5
2.3. A mágneses momentum mozgása forgó koordinátarendszerben . . . 5
2.4. Abszorpció és Kiszélesedés . . . 6

3. A kísérleti elrendezés **7**

4. Mérési feladatok **7**
4.1. A proton g-faktora . . . 7
4.2. A fluor és a proton rezonanciájának összehasonlítása . . . 8
4.3. Hibaforrások . . . 8

Mérési adatok, megjegyzések

Oszcillátor : 5.671kHz
Egyenáram : 1.6A

Stabilitás mérés :
9:10 - 13.7ms
9:15 - 11.2ms
-> 5 perc alatt 2ms elcsúszás

Elcsúszás után visszaállítjuk a frekvenciát, ami most 5.688kHz, tehát 16kHz az elcsúszás a frekvenciában.

Ezek adják meg az egész mérés pontosságát, ebből tudjuk megmondani, hogy mennyire tudjuk pontosan mérni a dolgokat.

Mivel a színusz lineáris a nulla körül, ezért ezt lineárisnak vesszük (hogy mit, nem tudom, majd kiderül).

Első mérési pont :
Hall szonda : 129.4mT
Oszcillátor : 5.687 (az utolsó számjegy ingadozik 7 és 8 között)

Áramerősség	Áramerősség tekerő	Hall szonda	Oszcillátor
1.366A	445	117.0mT	5.5150kHz
1.186A	384	103.1mT	4.457kHz
0.994A	321	92.2mT	4.055kHz

1. A mérés célja

A mérés során a hidrogén és a fluor atommagok mágneses rezonanciájáról szerzünk tapasztalatokat. Meggyőződünk róla, hogy egy sztatikus B_0 tér hatására felhasadnak az elfajult energiaszintek, és egy időben változó $B_1(t) = B_1 \cdot \cos(\omega t)$ tér hatására fellép a rezonancia jelensége.

2. A mérés elméleti háttere

2.1. A g-faktor

Nagyságrendi becslést, illetve intuíciót szerezhetünk a giromágneses arányról, ha megvizsgáljuk egy pontszerű töltött részecske mozgását homogén mágneses térben. Bárhogy felvehetjük a koordinátarendszert a jelenség leírására, de ezesetben a legpraktikusabb, ha a külső sztatikus tér a z tengely irányába mutat.

Tudjuk, hogy a mágneses momentum és az impulzusmomentum arányosak egymással :

$$\hat{\mu} = \gamma \hat{J} \tag{1}$$

ahol γ-t giromágneses aránynak szokás nevezni, amely egy részecskére jellemző mennyiség. Az m tömegű és q töltésű részecske v sebességgel körpályán kering egy B mágneses térben, eközben egy A felületet súrolva. Egy köráram mágneses momentuma definíció szerint az áram nagysága és a közbezárt felület szorzata, az impulzusmomentum pedig ismert klasszikus forgómozgás esetén :

$$\mu = I \cdot A = qv\frac{1}{2\pi r}r^2\pi = \frac{qvr}{2} \tag{2}$$

$$J = mvr \tag{3}$$

$$\Rightarrow \mu = \frac{q}{2m}J \Rightarrow \gamma = \frac{q}{2m} \tag{4}$$

Várhatóan a részecske tömege és töltése határozza meg, hogy adott J impulzusmomentum mellett mekkora lesz a részecske mágneses momentuma. Ez kvalitatív bár fennáll kvantumrészecskékre is, az arányossági tényező más lesz. A kvantum-részecskéknek kvantált az impulzusmomentumuk, és saját impulzumomentumuk is van. Az impulzusmomentumot $\hbar$ egységekben adjuk meg a j kvantumszám segítségével.

$$J = \hbar \cdot j \tag{5}$$

Az impuzlusmomentum és a mágneses momentum közti arányosság kvantumos korrekciójára vezetjük be a g mennyiséget, melyet g-faktornak szokás nevezni.

$$\gamma = g \cdot \frac{q}{2m} \tag{6}$$

Elektronok és nukleonok esetén érdemes egyesíteni a konstansokat, ezt a célt szolgálja a Bohr-magneton (μ_B) és a magmagneton (μ_N).

$$\mu_e = g_e \cdot \frac{e}{2m_e}J_e = g_e\mu_B j \tag{7}$$

$$\mu = g \cdot \frac{e}{2m_p}J = g\mu_N j \tag{8}$$

A magnetonok anyagi jellemzőkből állnak, a g-faktor pedig kimérhető μ és j ismeretében. A g-faktor értéke elektronra, protonra és neutronra :

$$g_e \approx 2.002322 \tag{9}$$

$$g_p \approx 5.585486 \tag{10}$$

$$g_n \approx -3.826085 \tag{11}$$

A klasszikus esetet $g = 1$ esetén kapjuk vissza. Kvantumos esetben ettől eltérő, de nagyságrendileg megegyező g-faktorokat mérünk.

2.2. Az energiaszintek felhasadása

Egy részecsecske impulzusmomentuma $J = \hbar j$ módon kvantált, egy adott tengelyre vett vetületének $2j+1$ lehetséges értéke van. A fennálló forgásszimmetria miatt nem alaptalan feltételezés, hogy a magára hagyott rendszerben degeneráltak lehetnek az energiaszintek. Egy külső B_0 mágneses tér hatására megszűnik a degeneráció, a mágneses térrel való kölcsönhatás miatt felhasadnak az energiaszintek.

$$\hat{K} = -\hat{\mu}\hat{B}_0 = -\gamma B_0 \hat{J}_z \tag{12}$$

A mágneses kvantumszám különbözteti meg a $\hat{J}_z$ operátor sajátállapotait, a $\hat{K}$ operátor sajátértékei pedig maguk az energiák.

$$\hat{J}_z|m>= m\hbar|m> \tag{13}$$

$$\hat{K}|m>= E_m|m> \tag{14}$$

Tehát az energiaszintek :

$$E_m = -\gamma B_0 \cdot (m \cdot \hbar) \tag{15}$$

Az energia arányos γ-val és a külső térrel, ezért a szomszédos energiaszintek közti különbség is.

$$\Delta E = |\gamma|\hbar B_0 \tag{16}$$

A felhasadt energiszintek között átmenetek hozhatók létre egy időben változó mágneses tér szuperponálásával. Perturbáljuk harmonikusan a Hamilton-operátort.

$$\hat{H}'(t) = -\hat{\mu}B_1(t) = -\hat{\mu}B_1\cos(\omega t) \tag{17}$$

Bevett módon kiszámolható az időegységenkénti átmeneti valószínűség a perturbációszámítás első rendjében.

$$W_{m\to m'} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle m\right| - \hat{\mu}B_1\left|\right\rangle\right|\delta(E_{m'} - E_m - \hbar\omega) \tag{18}$$

A felfelé és lefelé léptető operátorok $\hat{J}_\pm = \hat{J}_x \pm \hat{J}_y$. A $\hat{J}_x$ és $\hat{J}_y$ operátorok kifejezhetők a léptető operátorokkal, ezért egy $|m>$ sajátállapotot a $|m+1>$ és $|m-1>$ állapotok kombinációjába viszik. A (13)-as kifejezésben már láttuk, hogy a $\hat{J}_z$ operátor nem változtatja meg m-et. Így tehát a $\underline{B}_1$ térnek csakis a $\underline{B}_0$-ra merőleges komponensei képesek átmeneteket előidézni. A perturbációszámítás első rendjében csak szomszédos állapotok között lehet átmenet, azaz $m \to m \pm 1$. A Dirac-delta miatt minden olyan átmetet valószínűség 0, ahol $h\omega$ nem fedezi pontosan az $E_{m'} - E_m$ energiakülönbséget. Az energiakülönbség a (16)-os kifejezésből ismert.

$$\hbar\omega = \Delta E = |\gamma|\hbar B_0 \tag{19}$$

Ez a kifejezés adja meg, hogy a perturbáló tér milyen frekvenciája mellett történhet átmenet az energiaszintek között, ezért rezonancia-feltételnek is szokás nevezni.

$$\omega = |\gamma|B_0 \tag{20}$$

2.3. A mágneses momentum mozgása forgó koordinátarendszerben

Tudjuk, hogy bármely időpillanatban egy mágneses momentumra $\underline{M} = \underline{\mu} \times \underline{B}$ forgatónyomaték hat, mely az impulzusmomentum idő szerinti deriváltja.

$$\frac{d\underline{J}}{dt} = \underline{\mu} \times \underline{B} \tag{21}$$

$$\frac{d(\gamma \underline{J})}{dt} = \frac{d\underline{\mu}}{dt} = \underline{\mu} \times (\gamma \underline{B}) \tag{22}$$

Egy $\underline{A}(t)$ vektor $\underline{\Omega}$ szögsebességgel forgó rendszerben és laboratóriumi rendszerben vett időderiváltja közti kapcsolat az alábbi módon fejezhető ki.

$$\frac{d\underline{A}(t)}{dt} = \left.\frac{\delta \underline{A}(t)}{\delta t}\right|_{\underline{\Omega}} + \underline{\Omega} \times \underline{A} \tag{23}$$

Így a mágneses momentum egy $\underline{\Omega}$ szögsebességgel forgó rendszerben felírható, mint :

$$\left.\frac{\delta \underline{\mu}}{\delta t}\right|_{\underline{\Omega}} = \underline{\mu} \times (\gamma B + \underline{\Omega}) = \underline{\mu} \times \underline{B}'_{eff} \tag{24}$$

ahol $\underline{B}'_{eff} = \underline{B}' + \frac{\Omega}{\gamma}$. A forgó koordinátarendszerben mért mennyiségeket vesszővel jelöljük. Sztatikus tér esetén érdemes úgy megválasztani a forgó koordinátarendszert, hogy $\underline{\Omega} = -\gamma \underline{B}_0$ fennálljon. Ekkor a koordinátarendszer forgása követi a mágneses momentum precesszióját a $\underline{B}_0$ tér körül, ugyanis $\underline{B}'_{eff} = 0$. Ennek a forgásnak a szögsebességét a spin Larmor-frekvenciájának szokás nevezni.

$$|\omega| = \omega_L = \gamma B_0 \tag{25}$$

Kapcsoljunk be egy $\underline{B}_1(t) = \underline{B}_1 \cos(\omega t) \perp \underline{B}_0$ harmonikus teret, mely felbontható két, ellentétes sodrású cirkulárisan polarizált komponensre. Kiderül, hogy ezek közül csak a mágneses momentummal egy irányban forgó komponensnek lesz jelentős járuléka, ezért - az 1/2-es szorzótól eltekintve - az alábbi kifejezéssel közelítjük a harmonikus teret.

$$\underline{B}_1(t) = B_1 \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ \sin(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Ezesetben célszerűbb másképp megválasztani a koordinátarendszert, mégpedig úgy, hogy az a $\underline{B}_1(t)$ tér forgását kövesse, azaz $\Omega = \omega$. A fázissal nem foglalkozunk, $\underline{B}_1$ mindig a forgó koordinátarendszer x'-tengelye felé mutasson. Ekkor a forgó rendszerben a mágneses tér :

$$\underline{B}'_{eff} = \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \\ B_0 + \omega/\gamma \end{pmatrix} \tag{27}$$

Így forgó koordinátarendszerben a mágneses momentum a $\underline{B}'_{eff}$ tér körül precesszál. Laboratóriumi rendszerben azt látjuk, hogy az eredő tér a B_0 tér körül forog, és az önmagában forgó tér körül végez precessziót a mágneses momentum. Pusztán geometriai elgondolással belátható, hogy a $\underline{B}_eff$ térnek a z-tengellyel bezárt szöge (Θ) konstans, illetve a kezdetben $\underline{B}_0$ irányába mutató mágneses momentum z-tengellyel bezárt szöge 0 és 2Θ között változik. Kezdtetben z-irányba mutat a mágneses momentum, a $\underline{B}'_{eff}$ körüli körmozgás során a legszélső eset az lesz, amikor a momentum vektora átkerül a $\underline{B}'_{eff}$ "másik oldalára", azaz a szimmetria miatt 2Θ szöget zár be a z-tengellyel. A $\underline{B}'_{eff}$ komponensei alapján meghatározható a Θ szög nagysága is.

$$\tan(\Theta) = \frac{B_1}{B_0 + \omega/\gamma} \tag{28}$$

Definíció szerint $B_1 >> B_0$, ezért ez a tört minden esetben kicsi lesz, kivéve amikor a harmonikusan változó tér frekvenciája éppen[1] $\omega_L = -\gamma B_0$, mely Larmor-frekvenciaként ismert. Rezonanciát kereshetünk úgy is, hogy a B_0-t állandóan tartva a $B_1(t)$ tér frekvenciáját változtatjuk, valamint úgy is, hogy a pertubáló tér frekvenciáját tartjuk állandó értéken, és a B_0 teret változtatjuk.

2.4. Abszorpció és Kiszélesedés

Mágneses tér bekapcsolásakor egy feles spinű részecskének két állapota lehetséges :

$$E_{\uparrow\downarrow} = \mp\frac{1}{2}\mu_0 B_0 \tag{29}$$

A felfelé, illetve a lefelé orientálódó spinek betöltöttsége Boltzmann-eloszlást követ adott T hőmérsékleten.

$$N_{\uparrow\downarrow} = e^{\pm\frac{g\mu_0 B_0}{2k_B T}} \tag{30}$$

A spinek száma külön-külön változik időben, ám az összegük állandó.

$$N_0 = N_\uparrow(t) + N_\downarrow(t) = const. \tag{31}$$

A $B_1 \sim \sin(\omega_L t)$ tér bekapcsolása felborítja a fenti termikus egyensúlyt, mivel a tér azonos valószínűséggel engedi meg az átmenetet mindkét irányban. Mivel lecsökkent az alacsonyabb energiájú állapotok valószínűsége (illetve megnőtt a magasabb energiájú állapotok valószínűsége), miközben a rendszer "igyekszik" visszatérni a termikus egyensúlyhoz, a spinek disszipálják az elnyelt energia egy részét a környezetükbe. Ennélfogva a tér kikapcsolása után a spin-eloszlás visszatér eredeti állapotába. Az ehhez szükséges időt nevezzük spin-rács relaxációs időnek (T_1). Amennyiben a spinek gyorsan disszipálják az energiát a $B_1(t)$ gerjesztéshez képest, a rendszer stabl, és a gerjesztés alatt sem lesz távol a termikus eloszlástól. Túl gyenge csatolás vagy túl erős gerjesztés hatására telítés történik, így lecsökken az abszorpció. Magok esetén másodperc nagyságrendű is lehet a relaxációs idő, ezért előnyös kisebb gerjesztést használni.

[1] A kiszélesedés jelenségéről a következő fejezetben lesz szó.

A gyakorlatban nem egy Dirac-elta írja le a $\Theta(\omega)$ összefüggést, hanem egy véges szélességű csúcs, melynek közepe a Larmor-frekvencia. Ennek oka a homogén és az inhomogén kiszélesedésben keresendő.

Egy δt élettartamú gerjesztett állapotnak $\delta\omega \approx \delta E/\hbar$ energiabizonytalansága van a Heisenberg-féle határozatlansági relációból adódóan, ezért ezen a tartományon is megfigyelhető jelentős abszorpció. Ezt hívjuk homogén kiszélesedésnek. Ez szoros kapcsolatban áll a relaxációs idővel, ugyanis $\delta t \approx T_1$. Az inhomogén kiszélesedés oka, hogy a spinek sosem egzaktul sztatikus és homogén teret érzékelnek. Bármely névleg homogén térnek is vannak inhomogenitásai, ám minden spin kölcsönhat magával a mintával is. Egy δB_{lok} lokális fluktuáció esetén $\delta\omega = \gamma\delta B_{lok}$ kiszélesedés lép fel.

3. A kísérleti elrendezés

A mérés során két különálló tekercset használunk a sztatikus B_0 és a harmonikusan változó $B_1(t)$ tér előállítására. Azt a mérési módszert valósítja meg a berendezés, mely során a B_0 teret változtatjuk, erre szolgál egy harmadik, moduláló tekercs, melyet a moduláló jelgenerátor hajt meg. A B_0 teret $25Hz$ frekvenciával, a nagyságának néhány százalékával változtatjuk. A pertubáló tér frekvenciája kézzel változtatható, de konstans.

A rezonancia esetén fellépő abszorpciót ugyanaz a tekercs méri, mely a rádiófrekvenciás gerjesztést végzi. A tekercsen végigszaladó jelek eljutnak az oszcillátorba, ahol abszopció esetén amplitúdó-csökkenést látunk. Az oszcillátor vízszintes tengelyén látjuk a homogén mágneses tér modulációját, a függőleges tengelyen pedig az abszopciót - rezonancia esetén csúcsot.

Hall-szondát használunk a mágneses té méréséhez. Egy rádiófrekvenciás antennát használunk a frekvencia mérésére, ugyanis két szinuszos jel összege lebegést mutat. Az oszcilloszkóp használható integrált módban is, ekkor 256 ciklust átlagol, ezzel a háttérzaj nagy részét kiszűrve.

Fontos megemlíteni, hogy a tekercsek esetén az áramot tartjuk kontroll alatt, ugyanis ez szabja meg a keletkező mágneses tér nagyságát. A tekercsnek van ellenállása, ennélfogva használat során melegszik, mely megváltoztatja az ellenállását is. Feszültségforrás esetén nem, vagy csak nehezen lehetne kiküszöbölni a melegedésből fakadó ellenállás-változást.

A mintatartót, mely kézzel szabályozható, úgy állítjuk be, hogy a tekercsek tengelyére essen rá.

4. Mérési feladatok

4.1. A proton g-faktora

A protonminta (vizes oldat) rezonanciáját 9 pontban mértük meg, melyekből fejenként 4-et sorsultunk ki véletlenszerűen mérőtársaimmal. Ezeket az alábbi táblázat foglalja össze.

I_{hall}[A]	I_{knob}	B_{hall}[mT]	$\nu_L[MHz]$
1.186	384	103.1	4.547
1.715	557	139.1	6.094
2.243	728	177.4	7.768
2.415	785	189.5	8.309

1. táblázat. A ^{60}Co izotóp esetén mért csúcspárokra illesztett görbe paraméterei

A frekvencia és a mágneses tér közti a (20) összegüggést követi, illetve a g-faktor a (6) kifejezés segítségével számolható ki a giromágneses arányból.

$$\omega_L = \frac{\nu_L}{2\pi} = \frac{g}{2\pi} \cdot \frac{q_p}{2m_p} \cdot B_0 \tag{32}$$

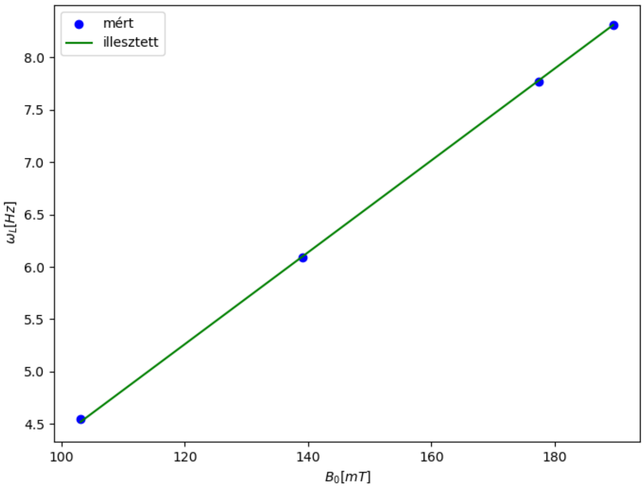
$$m_p = 1.67262192 \cdot 10^{-27}kg \quad q_p = 1.6022 \cdot 10^{-19}C \tag{33}$$

Ezek ismeretében az $\omega_L(B_0)$ adatsorra egyenes illeszthető, melynek eredménye az alábbi ábrán látható.

Az illesztett paraméter :

$$g = 5.752 \pm 0.007 \tag{34}$$

A névleges érték $g_p = 5.5856$, mely nem esik bele (ebbe) a hibatartományba, ám az eltérés csupán $\approx 3\%$.



1. ábra. A proton rezonanciájának térfüggésére illesztett egyenes

4.2. A fluor és a proton rezonanciájának összehasonlítása

A méréshez egy teflon és egy víz mintát használunk. A mérés menete a következő.

- Megkeressük a víz rezonancia frekvenciáját az áram változtatásával.
- A vízmintát kicseréljük a teflon mintára, majd ismét növeljük a mágneses teret, amíg rezonanciát nem tapasztalunk, melynek frekvenciáját megmérjük.
- Helyezzük újra a vízmintát a mintatartóba, majd a mágneses tér változtatása nélkül megkeressük a rezonancia frekvenciáját.

Ezt ismételjük 4 mérési pontban. Amennyiben a tér nem változott sem időben, sem térben, az alábbi összefüggés lesz igaz minden mérési pontra.

$$\frac{\nu_F}{\nu_p} = \frac{\omega_F}{\omega_p} = \frac{\frac{1}{\hbar} g_F \mu_N B_0}{\frac{1}{\hbar} g_p \mu_N B_0} = \frac{g_F}{g_p} \tag{35}$$

A mérés eredményét az alábbi táblázat foglalja össze.

$\nu_F[MHz]$	5.724	6.547	7.246	7.795
$\nu_p[MHz]$	6.084	6.950	7.700	5.095
g_F/g_p	0.941	0.9420	0.9410	1.5300

2. táblázat. A fluor és a proton rezonanciájának összehasonlítása, g-faktoruk aránya

Az utolsó mérési pont minden bizonnyal hibás, ezért nem vettem figyelembe. Ennek a mérési módszernek az előnye, hogy az eredményben jó közelítéssel kiküszöbölhető a mágneses tér reprodukciós hibája és az esetleges indukcióvonal-torzulások is megegyeznek a frekvencia-párok esetén, illetve a hőtágulásból származó szisztematikus hiba is.

Így a fluor g-faktora, mely névleg $5 - 10\%$-kal kisebb, mint a protoné, beleesik ebbe a hibatartományba.

$$g_F = 5.4146 \pm 0.0007 \tag{36}$$

4.3. Hibaforrások

Hall-szonda segítségével mértünk reprodukálhatóságot is egy adott, állnadó $I = 1.282A$ mellett.

$B_{hall}[mT]$	116.4	115.2	114.6	116.4	116.1

3. táblázat. Reprodukálhatóság Hall-szondával

Így kiszámolható az adatsor szórása, mely a mágneses tér hibáját adja meg.

$$\Delta B = 0.5mT \tag{37}$$

Ez alulbecslésnek bizonyul a névleges $1-2\%$-hoz képest, ezért az utóbbit használjuk.

Az oszcilloszkópon a csúcsok leolvasását $1ms$ pontosan tehetjük meg, ám 5 perc alatt $2.5ms$ eltérést észleltünk, mely $5.687MHz - 5.671MHz = 16kHz$ elcsúszást jelent. Így a frekvencia hibája megadható, mint :

$$\Delta\nu = \frac{16kHz}{2.5} = 6.4kHz \tag{38}$$

Ez lényegesen nagyobb, mint az antenna $1kHz$ pontossága, ezért erre a hibára hagyatkozunk.

A mérés során melegedő tekercsek ellenállás áramforrással van kiküszöbölve, ám a hőtágulás következtében megváltozik a tekercsek térfogata. Továbbá megemlítendő, hogy Föld-mágneses tere nem befolyásolja a mérést, ugyanis ez a μT tartományban van, mely lényegesen kisebb a mért mennyiségeknél és a hibájuknál.

Így a g-faktor hibája :

$$\left(\frac{\Delta g_p}{g_p}\right)^2 = \left(\frac{\Delta\omega_L}{\omega_L}\right)^2 + \left(\frac{\Delta B_0}{B_0}\right)^2 \tag{39}$$

$$g_F = 5.415 \pm 0.115 \tag{40}$$

Illetve hasonlóan a g_F/g_p arány hibája :

$$\Delta\frac{g_F}{g_p} = 0.941 \pm 0.002 \tag{41}$$