

JEGYZŐKÖNYV

KLASSZIKUS FIZIKA LABORATÓRIUM

03. MÉRÉS - HANGFREKVENCIÁS MECHANIKAI REZGÉSEK VIZSGÁLATA



- Mérést végezte : Brindza Mátyás
 - Mérést végző Neptun-azonosítója: Z2R8XS
 - Jegyzőkönyv leadásának időpontja : 2021.06.10.
-
-

A mérés célja

A mérés során az egyik mintának meghatározzuk a sajátfrekvenciáit, majd e frekvenciák felénél is vizsgáljuk a rezgést. Ugyanennél a mintánál megmérjük az alapfrekvenciánál rezonanciagörbét.

A másik mintánál a frekvencia hosszfüggését határozzuk meg.

Mérőeszközök

- Függvénygenerátor
- Digitális multiméter
- Analóg feszültségmérő
- Digitális oszcilloszkóp
- Piezo-kristályos detektor
- Gerjesztő elektromágnes konstans mágnessel
- Csavarmikrométer, tolómérő
- Digitális mérleg
- B jelzésű minta
- 14-es jelzésű minta

A mérés elméleti háttere

A továbbiakban rezgés alatt transverzális mechanikai rezgést értünk. Gerjesztés hatására a rúdiban kialakuló rezgések kifejezhetők diszkrét sajátmódusok szuperpozíciójaként. A gerjesztés ügyes megválasztásával külön is gerjeszthetők a sajátmódusok. A z tengely irányában történő rezgetés esetén a sajátmódusokat leíró függvények az alábbi alakot öltik.

$$z_i(x, t) = Z_i(x) \cdot T_i(t)$$

ahol

$$Z_i = A_i \left[\left(sh(\lambda_i \cdot x) - sin(\lambda_i \cdot x) \right) + \frac{sh(\lambda_i \cdot x) + sin(\lambda_i \cdot x)}{ch(\lambda_i \cdot x) + cos(\lambda_i \cdot x)} \cdot \left(cos(\lambda_i \cdot x) - ch(\lambda_i \cdot x) \right) \right]$$

$$T_i = A_i(\omega) \cdot sin(\omega \cdot t - \delta_i(\omega))$$

ahol

$$A_i(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_{i0}^2 - \omega^2)^2 + 4 \cdot \kappa_i \cdot \omega^2}}$$

és κ_i a csillapításra jellemző tényező.

A gerjesztő generátor kimenete szinuszos, így a gerjesztő erő felírható $F = F_0 \cdot sin(\omega \cdot t)$ alakban. A gerjesztést sűrűlódás jellegű hatások (belső sűrűlódás, légellenállás) próbálják gátolni, így a test minden pontja csillapított kényszerrezgést fog végezni.

A módusok sajátfrekvenciái felírhatóak, mint:

$$\omega_{0i} = \frac{k_i^2}{l^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot q}}$$

ahol $k_i = \lambda_i \cdot l$, E a Young-modulust, I a másodrendű felületi nyomaték, ρ a sűrűség és q a keresztmetszet területe.

A másodrendű felületi nyomaték definíció szerint:

$$I = \int \int_q z^2 \cdot dx \cdot dz$$

Mivel a minta alakja adott - téglatest -, ezért ez az integrál expliciten megoldható mint a geometriai paraméterek függvénye - azaz a téglalap keresztmetszetű rúd nyomatéka lehajlítás során.

$$I = \frac{a \cdot b^3}{12}$$

ahol b a hajlító erővel párhuzamos oldal - ez vastagságként lett feltüntetve a későbbiekben.

A rezonancia frekvenciánál lesz maximális az amplitúdó, így az $A_i(\omega)$ függvény szélső értékét kell megkeresni:

$$\omega_r = \sqrt{\omega_{0i}^2 - 2 \cdot \kappa_i^2}$$

$$A_{i,max} = \frac{A_{0i}}{2 \cdot \kappa_i \cdot \sqrt{\omega_{0i}^2 - \kappa_i^2}}$$

Szemléletes bevezetni a normált rezonanciagörbét is:

$$A_{i,N} = \frac{A_i(\omega)}{A_{i,max}}$$

A $\Delta\omega$ félértékszélesség így annak a két frekvenciának a különbsége, ahol a normált rezonanciagörbe az $1/\sqrt{2}$ értéket veszi fel.

Kicsit csillapítást feltételezve ($\omega_{0i} \ll \kappa_i$) a félértékszélesség:

$$\Delta\omega = 2 \cdot \kappa$$

Hasznos összefüggés:

$$\frac{\omega_{0i}}{\omega_{00}} = \left(\frac{k_i}{k_0}\right)^2$$

A fémrúd gerjesztését egy elektrogámnes végzi. Az elektromágnes kimenő jele szinuszos, így a rúdra ható erőnek is szinuszos az időfüggése.

$$F_g \sim \alpha \cdot \cos(\omega_g \cdot t) + \beta \cdot \sin(2 \cdot \omega_g \cdot t)$$

Az első tag a örvényáramok és a gerjesztő elektromágnes alatt található állandó mágnes kölcsönhatásából származik. A második tag az örvényáramok és a változó mágneses tér kölcsönhatásából fakad. Így minden sajátmódus gerjeszthető $\omega_g = \omega_{0i}$ és $\omega_g = \omega_{0i}/2$ körfrekvenciával is.

Ebben a fejezetben körfrekvenciával számoltunk, de a gyakorlatban a frekvenciát mérjük, így az ω -ról áttérünk ν -re. A jelölések, indexelés a fentieknek alapján történnek.

Mérési adatok - kiadott

	a [mm]	b [mm]	c [mm]	m [g]
1	100.05	15.1	3.03	39.9757
2	100.05	15.05	3.02	
3	100.05	15.1	3.01	
Átlag	100.05	15.083	3.02	39.9757

(kiadott adatok)14-es jelzésű minta

Jelmagyarázat:

- a : a minta hossza
- b : a minta szélessége
- c : a minta vastagsága
- m : a minta tömege

	a [mm]	b [mm]	c [mm]	m [g]
1	100.03	15.10	3.03	39.9757
2	100.06	15.09	3.03	
3	100.02	15.11	3.05	
4	100.03	15.10	3.03	
5	100.02	15.10	3.04	
Átlag	100.05	15.083	3.02	39.9757

(mért)13-as jelzésű minta

Jelmagyarázat:

- a : a minta hossza
- b : a minta szélessége
- c : a minta vastagsága
- m : a minta tömege

	a [mm]	b [mm]	c [mm]	d [mm]	e [mm]	m [g]
1	100.05	9.95	2.00	10.00	20.05	14.6424
2	100.05	10.01	2.01	10.00	20.00	
3	100.05	10.01	1.97	10.00		
Átlag	100.05	9.99	1.99	10.00	20.025	14.6424

(kiadott adat)B jelzésű minta

Jelmagyarázat:

- a : a minta hossza
- b : a minta szélessége
- c : a minta vastagsága
- d : a kalapácsfej vastagsága

- e : a kalapácsfej hossza
- m : a minta tömege

i	ν_{0i}^m [Hz]	ν_{0i}^{fm} [Hz]
0	255.730	127.752
1	1615.85	799.277
2	4519.63	2258.30
3	8818.98	4396.91

(kiadott adatok) B jelzésű minta sajátfrekvenciái

A [mV]	ν [Hz]
5	253.654
10	254.234
15	254.392
20	254.645
25	254.793
30	254.786
35	254.836
40	254.915
45	255.042
50	255.197
45	255.731
40	255.912
35	256.071
30	256.244
25	256.457
20	256.682
15	256.954
10	257.314
5	258.003

A rezonanciagörbe kimérése az alapharmonikusra

Jelmagyarázat:

- A : feszültség
- ν : frekvencia

Rezgő hossz [cm]	Mért frekvencia ν_m [Hz]
8	246.038
7	266.923
6	351.375
5	465.253
4	656.114

(kiadott adatok) A 14-es jelzésű minta esetén az alapharmonikus hosszfüggése

Mérési adatok és kiértékelés

A jelzésű minta

Young-Modulusz

	a [mm]	b [mm]	c [mm]	d [mm]	e [mm]	m [g]
1	100.02	15.07	2.01	10.03	20.06	14.6202
2	100.03	15.06	2.02	10.02	20.04	
3	100.02	15.07	2.02	10.03	20.02	
4	100.02	15.07	2.04	10.03	20.03	
5	100.04	15.07	2.03	10.04	20.06	
Átlag	100.26 ± 0.014	15.068 ± 0.008	2.024 ± 0.016	10.03 ± 0.01	20.042 ± 0.022	14.6202

(mert)A jelzésű minta

Jelmagyarázat:

- a : a minta hossza
- b : a minta szélessége
- c : a minta vastagsága
- d : a kalapácsfej vastagsága
- e : a kalapácsfej hossza
- m : a minta tömege

A minta tömege : $m = 14.6202g \pm 0.00005g$

A mint térfogata : $V = 5475.447389mm^3 \pm 12.47434mm^3$

A minta sűrűsége : $\rho = 2670.1379741 \frac{kg}{m^3} \pm 5.26453 \frac{kg}{m^3}$

A minta másodrendű nyomatéka : $I = 10.411322mm^4 \pm 0.21554mm^4$

i	ν_{0i}^m [Hz]	ν_{0i}^{fm} [Hz]
0	249.05 ± 0.001	125.33 ± 0.02
1	1625.55 ± 0.02	812.63 ± 0.002
2	4517.3 ± 0.1	2258.5 ± 0.1
3	8796.85 ± 0.02	4352.42 ± 0.02

A jelzésű minta mért sajátfrekvenciái

Jelmagyarázat:

- i : a sajátfrekvencia száma
- ν_{0i}^m : a minta mért sajátfrekvenciája
- ν_{0i}^{fm} : ν_{0i}^m félértéke

Ezek átlaga, és a hiba, mint az átlagtól való legnagyobb eltérés :

$$E = 67.494129GPa \pm 3.34122GPa$$

i	0	1	2	3
$\nu_{0i}^{sz} [\text{Hz}]$	-	1560	4370	8563
$\nu_{0i}^{fsz} [\text{Hz}]$	-	785	2199	4309
Eltérés [%]	-	4.03	3.26	2.66

A jelzésű minta számolt sajátfrekvenciái

i	0	1	2	3
k_i	1.8751	4.69409	7.85476	10.9955
$E[\text{GPa}]$	64.15290	69.588264	68.543642	67.69170

A jelzésű minta számolt Young-moduluszai

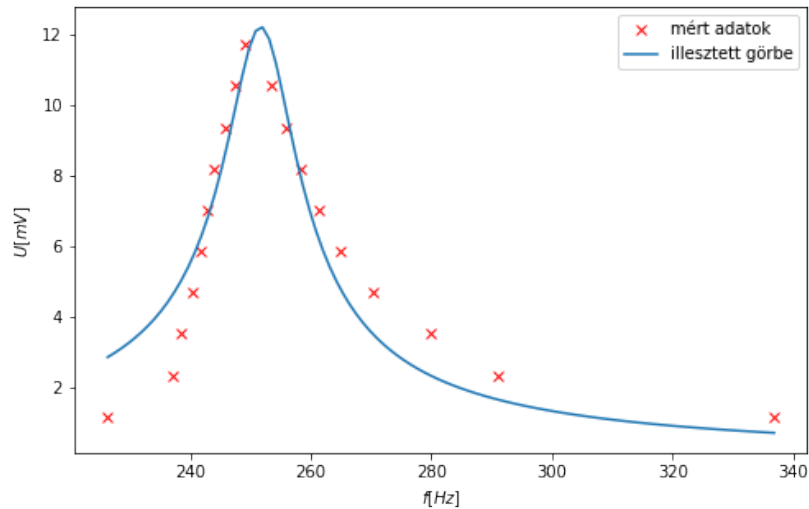
A rezonancia-görbe

$f[\text{Hz}]$	$A[\text{mV}]$
226.32	1.17
237.04	2.34
238.52	3.51
240.44	4.68
241.85	5.85
242.83	7.02
243.98	8.19
245.85	9.36
247.42	10.53
249.05	11.7
253.53	10.53
256.05	9.36
258.43	8.19
261.31	7.02
264.82	5.85
270.48	4.68
279.83	3.51
291.03	2.34
336.84	1.17

Az egyes amplitúdóknál mért frekvenciák

A félérték szélesség : $\Delta\nu = 18.13045\text{Hz}$

A csillapítási tényező : $\kappa = 56.95848\text{Hz}$



A rezonancia-görbe mérési pontjai és az ezekre illesztett görbe

13-as jelzésű minta

A rezonancia függése a rezgő rész hosszától

	a [mm]	b [mm]	c [mm]	m [g]
1	100.03	15.10	3.03	38.3324
2	100.06	15.09	3.03	
3	100.02	15.11	3.05	
4	100.03	15.10	3.03	
5	100.02	15.10	3.04	
Átlag	100.032 ± 0.028	15.10 ± 0.01	3.036 ± 0.014	38.3324

13-as jelzésű minta

Jelmagyarázat:

- a : a minta hossza
- b : a minta szélessége
- c : a minta vastagsága
- m : a minta tömege

A minta tömege : $m = 38.3324g \pm 0.00005g$

A mint térfogata : $V = 4585.82699mm^3 \pm 12.47434mm^3$

A minta sűrűsége : $\rho = 8358.8848 \frac{kg}{m^3} \pm 5.26453 \frac{kg}{m^3}$

A minta másodrendű nyomatéka : $I = 35.2128359mm^4 \pm 0.578914mm^4$

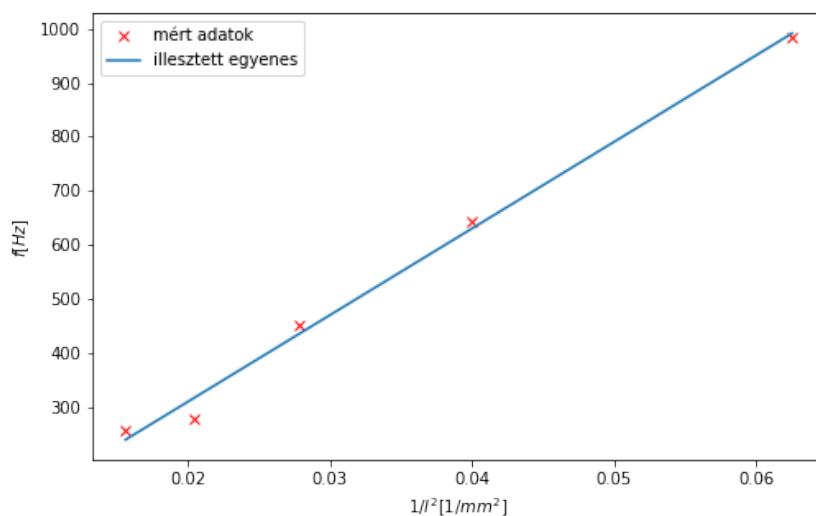
Analitikusan a következő összefüggés igaz a rezgő rész hossza és a rezonancia frekvencia között.

$$\nu_r = \frac{1}{l^2} \cdot \frac{k_0^2}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot q}}$$

Rezgő hossz [cm]	Mért frekvencia ν_m [Hz]
8	256.63
7	276.11
6	449.82
5	642.48
4	984.83

(mért) A 13-as jelzésű minta esetén az alapharmonikus hosszfüggése

Így a $\nu(\frac{1}{l^2})$ függvényre egyenest illesztve kiszámolható a Young-modulus az egyenes meredekségéből.



A rezonanciára és a rezgő rész hosszára kapott összefüggés

Így a Young-modulus:

$$E = 89.559672 \text{ GPa} \pm 6.756454 \text{ GPa}$$

Diszkusszió

A rezonanciagörbét láthatóan nem sikerült pontosan lemérni. Ez annak tudható be, hogy a voltmérő mutatója idővel elmászik valamerre, és nem lehetett megfelelő pontossággal beállítani az amplitúdót. Ezen kívül nem jelentkezik hatalmas relatív hiba sehol sem, így a mérés ezen részei sikeresnek tekinthetők.

Felhasznált irodalom

[1] Böhönyey - Havancsák - Huhn: Mérések a klasszikus fizika laboratóriumban, szerkesztette: Havancsák Károly, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003.