A járványterjedés SIR modellje már korábban előkerült az előadásban. A modell egy változata figyelembe veszi, hogy az immunitás valamilyen μ rátával. Ennek megfelelően az egyenletei így alakulnak:

$$\frac{ds}{dt} = -\beta si + \mu r, \tag{1}$$

$$\frac{di}{dt} = \beta si - \gamma i, \tag{2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \gamma i - \mu r, \tag{3}$$

ahol $s = S/N$ a betegségre fogékonyak számának (S), $i = I/N$ a fertőzők számának (I) és $r = R/N$ a gyógyultak számának (R) aránya a teljes populációhoz (N) képest. A β és γ paraméterek ugyanazok, mint a SIR modellben.

1. Mutassuk meg, hogy az $s + i + r = 1$ összefüggés igaz. Disszipatív-e a rendszer? Redukáljuk háromról kettőre a változók számát az összefüggés segítségével!

2. Szimuláljuk az egyenleteket néhány realisztikus paraméter mellett! Például a gyógyulási idő $1/\gamma = 10$ nap, a β/γ arány pedig éppen a reprodukciós ráta R_0, amire egy realisztikus szám pl. $R_0 = 2$. Milyen időbeli viselkedés alakul ki különböző μ paraméterek mellett?

3. Keressük meg az egyenlet fixpontjait és vizsgáljuk meg a stabilitásukat. Hogyan fognak viselkedni a fixpont közvetlen környezetéből elindított trajektóriák? Mekkora lesz az egyik fixpont körüli mozgás periódusideje a paraméterek (β, γ, μ) függvényében?

4. Keressük meg a rendszer határciklusának helyét!