

JEGYZŐKÖNYV

KORSZERŰ VIZSGÁLATI MÓDSZEREK

LABORATÓRIUM

MAGSPEKTROSZKÓPIAI GYAKORLATOK



ELTE
EÖTVÖS LORÁND
TUDOMÁNYEGYETEM

- Mérést végezte : Brindza Mátyás
- Mérőtársak : Kovács Benjamin, Németh Olivér
- Mérés időpontja : 2023.03.10.

Tartalomjegyzék

1. A mérés célja	3
2. A mérés elméleti háttere	3
2.1. A β -bomlás	3
2.2. Energetikai viszonyok	3
2.3. Tiltottság	4
2.4. Az energiaspektrum	4
2.5. A mag és a β -részecske Coulomb-kölcsönhatása	5
2.6. A Fermi-Kurie módszer	5
2.7. A magsugár meghatározása	5
2.8. Konverziós elektron	6
3. A kísérleti elrendezés	6
4. A mérés menete	7
5. Kiértékelés	8
5.1. A Cs-137 izotóp vizsgálata	9
5.1.1. A Cs-137 izotóp β -bomlása	9
5.1.2. Kalibráció	9
5.1.3. A β -részecskék energiaeloszlása	10
5.2. A Sr-90 izotóp vizsgálata	12
5.2.1. A Sr-90 izotóp β -bomlása	12
5.2.2. A Sr-90 izotóp nagyenergiás csúcsa	13
5.2.3. A Sr-90 izotóp alacsonyabb energiájú csúcsa	14
5.3. A magsugár mérése	17
6. Felhasznált irodalom	18

1. A mérés célja

A mérés során β -bomló izotópok által kibocsátott elektronok energiaeloszlását mérjük. Legelőször a Cs-137 izotóp konverziós elektronjának spektrumával kalibráljuk a detektort. Ezután meghatározzuk a Cs-137 és a Sr-90 izotópok β -bomlása során keletkezett elektronok maximális energiáját. A Sr-90 esetén két csúcs is van a spektrumban, mivel a bomlástermék egy Y-90 mag, mely szintén β -bomlik - egy Zr-90 maggá. Valójában diszkrét energia-intervallumokban mérjük a beérkező β -részecskék számát. A mérési adatokból a Fermi-Kurie módszerrel határozzuk meg az elektronok maximális energiáját, melyet ismerve kiszámolható a mag sugár is.

2. A mérés elméleti háttere

2.1. A β -bomlás

A β -bomlás a radioaktív bomlás egy fajtája, mely során az atommag egyik nukleonja elbomlik, így kibocsát egy β -részecskét és egy (anti)neutrínót. A β -részecske lehet egy elektron (β^- -részecske) vagy egy pozitron (β^+ -részecske) - ennek megfelelően beszélünk β^- - , illetve β^+ -bomlásról. Emellett elektronbefogás is történhet, mely során a mag egy protonja elnyel egy elektront.

Az energia-, töltés- és impulzusmegmaradás segítségével jellemezni tudjuk mindkét fajta β -bomlást, továbbá a leptonok száma is megmaradó mennyiség. Érdekes a keletkező részecskék és a töltésmegmaradás vizsgálatával kezdeni.

Akkor beszélünk β^- - **bomlásról**, ha a magban az egyik neutron elbomlik egy protonra, egy elektronra, és egy antineutrínóra :

$$n^0 \rightarrow p^+ + e^- + \tilde{\nu}_e \quad (1)$$

A neutron töltése 0, és két ellentétes töltésű részecskére bomlik, melyek össztöltése szintén 0, így nem sérül a töltésmegmaradás törvénye. Ez a bomló magra nézve annyit jelent, hogy megnő az atomszáma :

$${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z+1}^A Y + e^- + \tilde{\nu}_e \quad (2)$$

Akkor beszélünk β^+ - **bomlásról**, ha az atommag egyik protonja elbomlik egy neutronra, egy pozitronra, és egy neutrínóra :

$$p^+ \rightarrow n^0 + e^+ + \nu_e \quad (3)$$

A pozitív töltésű proton egy semleges neutronra bomlik el, ám a pozitron viszi tovább a pozitív töltést, ezért nem sérül a töltésmegmaradás törvénye. Ekkor az atommag atomszáma csökken :

$${}_Z^A X \rightarrow {}_{Z-1}^A Y + e^+ + \nu_e \quad (4)$$

Elektronbefogás - angolul Electron Capture (EC) - bekövetkeztével a mag egy protonja elnyel egy elektront, és kibocsát egy neutrínót :

$$p^+ + e^- \rightarrow n^0 + \nu_e \quad (5)$$

Ez szintén azzal jár, hogy lecsökken az atomszám :

$${}_Z^A X + e^- \rightarrow {}_{Z-1}^A Y + \nu_e \quad (6)$$

A neutronok és a protonok számának összege egyik esetben sem változik, ezért a tömegszám végig változatlan marad.

2.2. Energetikai viszonyok

Vezessük be a Q mennyiséget :

$$Q = (M_i^{mag} - M_f^{mag} - M_{e^-} - M_{\tilde{\nu}_e})c^2 \quad (7)$$

Ez a keletkező és a kiinduló (i - initial; f - final) részecskék tömegkülönbségéből származó energia - tehát az összes felszabadult energia. Egy atom tömege felírható, mint

$$M_{(A,Z)} = M_{(A,Z)}^{mag} + Z \cdot M_{e^-} - \sum_{n=1}^Z E_{(A,Z),n}^{kötési} \quad (8)$$

Mivel az antineutrínó (/neutrínó) tömege elhanyagolható az elektron (/pozitron) tömegéhez képest, és a kötési energiák közti különbség a kiinduló és a végső állapotban is eltörpül a magtömegbeli különbséghez képest :

$$Q_{\beta^-} = (M_i - M_f)c^2 \quad (9)$$

$$Q_{\beta^+} = (M_i - M_f - 2 \cdot M_{e^-})c^2 \quad (10)$$

$$Q_{EC} = (M_i - M_f)c^2 \quad (11)$$

Ennek következtében β^- -bomlás és elektronbefogás gyakorlatilag bármely $M_i > M_f$ esetben energetikailag megengedett, ám β^+ -bomlás kizárólag akkor jöhet létre, ha a keletkezett és a kiinduló atom közti tömegkülönbség nagyobb, mint két elektron tömege (összesen $\approx 1MeV$).

2.3. Tiltottság

A bomlás valószínűségét a magspin (J) és a paritás ($\pi = \pm 1$) megváltozása is befolyásolja. A kiinduló mag spinjének meg kell egyeznie a keletkezett részecskék spinjének és az elektron-antineutrínó rendszer \vec{L} pálya-impulzusmomentumának összegével.

$$\vec{J}_i = \vec{J}_f + \vec{S}_{e^-} + \vec{S}_{\bar{\nu}_{e^-}} + \vec{L} \quad (12)$$

Innen látszik, hogy amennyiben \vec{S}_{e^-} , $\vec{S}_{\bar{\nu}_{e^-}}$ és \vec{L} egy irányban állnak, a magspin megváltozása maximális. Ezt az átmenetet egyértékűnek (unique) szokás nevezni. Megengedett (allowed) átmenetről beszélünk, ha az antineutrínó-elektron rendszernek nincs pályamomentuma ($L = 0$), mivel ehhez járul a legnagyobb valószínűség, nullánál különböző pályamomentum esetén pedig valószínűtlenebb, azaz tiltott (forbidden) átmenetekről beszélünk. Minél nagyobb a pályamomentum, annál valószínűtlenebb az átmenet, azaz annál nagyobb rendben tiltott átmenetről beszélünk.

2.4. Az energiaspektrum

A bomlásállandó egy olyan statisztikus jellemző, mely megmutatja, hogy az adott β -bomló atom mekkora valószínűséggel fog egy E_e energiájú β -részecskét kibocsájtani. Az energiaspektrum alakjának elméleti megalapozásához az energiaintervallumra vonatkozó parciális bomlásállandóhoz fordulunk.

$$\lambda(E_e) = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{f,i}|^2 \left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e} \quad (13)$$

A $V_{f,i}$ mennyiség a kölcsönhatási mátrixelem és a $\frac{dn}{dE_f}$ mennyiség pedig a végállapotú energiasűrűség, melyet adott elektron-energiánál értékelünk ki.

A kölcsönhatási mátrixelem :

$$V_{f,i} = \int \Psi_f^* H_\beta \Psi_i d^3 \quad (14)$$

Ezesetben is az i index a kezdeti ("initial") és az f index a végső ("final") állapotra vonatkozik. A kezdeti hullámfüggvény képviseli a bomlani készülő magot, a végső hullámfüggvény pedig tartalmazza a végállapotú magot, az elektront/pozitront és az antineutrínót/neutrínót képviselő hullámfüggvényt. A β -részecske és a neutrínó hullámfüggvénye jó közelítéssel egy-egy síkhullám. Ennélfogva a két kibocsájtott részecske (közelített) hullámfüggvénye nem cseng le a végtelenben sem. A mag hullámfüggvénye pedig igen gyorsan lecseng, jól lokalizáltnak tekinthető a mag térfogatán belül, ezért a mag térfogatán kívül gyakorlatilag nulla a 14. kifejezésben szereplő integrál. Sorfejtés után első rendben az alábbi alakot ölti a mátrixelem :

$$V_{f,i} \approx \frac{g \cdot M_{f,i}}{V} \sqrt{S_n(Z, E_f, E_e)} \quad (15)$$

Az $S_n(Z, E_f, E_e)$ mennyiséget alakfaktornak szokás nevezni, ebbe került minden energia- és rendszámfüggő tag a csatolási állandó kiemelése után (a kezdeti és a kiinduló magra : $\int \psi_f^* H_\beta \psi_i = g M_{f,i}$). Ezt az egyszerűség kedvéért konstansnak tekintjük.

A végállapotú sűrűség meghatározásához elhanyagoljuk a végső atommag visszalökődési energiáját, mivel a mag tömege sokkal nagyobb, mint a kibocsájtott részecskék tömege - az impulzusmegmaradás miatt sokkal kisebb lesz a sebessége, ennél fogva a mozgási energiája is. A felszabaduló energia fedezi a keletkező részecskék tömegét, a maradék energia (mely kinetikus energiaként él tovább) pedig véletlenszerűen oszlik el köztük. A teljesség igénye nélkül, a levezetés végeredménye :

$$\left. \frac{dn}{dE_f} \right|_{E_e} = \left(\frac{4\pi V}{(2\pi\hbar)^3} \right)^2 \sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2} (E_{max} - E_e)^2 E_e dE_e \quad (16)$$

Itt E_{max} a β -részecske maximális lehetséges (teljes) energiája, illetve E_e a teljes energiája.

2.5. A mag és a β -részecske Coulomb-kölcsönhatása

Korábban elhanyagoltuk, hogy egy lényeges, kísérletileg is kimérhető különbség van a β^+ - és a β^- - bomlás között. Ugyanis a keletkező β -részecskének van töltése is, mely kölcsönhatásba lép a szintén töltött atommaggal. Így a pozitronokra bomláskor egy gyorsító potenciál hat, míg az elektronok egy lassító potenciálban hagyják el a magot. A Cu-64 izotóp β^+ - és β^- -bomlása során mért β -részecskék maximális energiája között van egy $\approx 100\text{keV}$ -nyi eltérés. Erre a hatásra tekintettel egy energia- és rendszámfüggő függvény (a Fermi-függvény) fogja megadni a korrekciót :

$$F(Z, E_e) = \frac{2(1+S)}{\Gamma(1+2S)^2} (2\rho p)^{2(S-1)} e^{\pi\eta} |\Gamma(S+i\eta)|^2, \quad (17)$$

ahol $S = \sqrt{1 - \alpha^2 Z^2}$ - itt α a finomszerkezeti állandó -, $\eta = \pm(\alpha Z E)/(pc)$ (pozitron esetén $-$, elektron esetén $+$) és $\Gamma(\cdot)$ a Gamma-függvény, valamint ρ a dimenziótlán effektív sugár :

$$\rho = r_N \cdot \frac{m_e c}{\hbar} \quad (18)$$

Az r_N mennyiség a végállapotú mag sugara. Az effektív sugárra az alábbi paraméterezett alakot használjuk.

$$\rho = 0.0029 \cdot A^{1/3} + 0.0063 \cdot A^{-1/3} - 0.0172 \cdot A^{-1} \quad (19)$$

Így a bomlásállandó :

$$\lambda(E_e) = g^2 |M_{f,i}|^2 \frac{1}{2\pi^3 \hbar^7 c^6} F(Z, E_e) S_n(Z, E_f, E_e) (E_{max} - E_e)^2 \sqrt{E_e^2 - (mc^2)^2} E_e dE_e \quad (20)$$

2.6. A Fermi-Kurie módszer

A gyakoriság-eloszlás felírható a bomlásállandó segítségével. A konstansokat egy K állandóban foglaljuk össze.

$$N(E_e) = K \cdot F(Z, E_e) \cdot S_n(Z, E_f, E_e) \cdot (E_{max} - E_e)^2 \cdot \sqrt{E_e^2 - (m_e \cdot c^2)^2} \cdot E_e \quad (21)$$

A vizsgált izotópok esetén 2^-FU , azaz másodrendben tiltott forbidden-unique átmenetek lépnek fel. Tiltott átmenetek esetén nem feltétlen jó közelítés, ám ezen mérésen feltesszük, hogy az $S_n(Z, E_f, E_e)$ függvény konstans, így bevezetjük a $K' = \sqrt{K \cdot S_n(Z, E_f, E_e)}$ állandót. A fenti egyenlet az alábbi alakra rendezhető át.

$$\sqrt{\frac{N(E_e)}{F(Z, E_e) \sqrt{E_e^2 - (m_e \cdot c^2)^2} E_e}} = K' (E_{max} - E) \quad (22)$$

Az $N(E_e)$ gyakoriság-eloszlást a fenti módon transzformálva egy negatív meredekségű egyenest kell kapnunk az energia függvényében. A tengelymetszet a maximális energia lesz. Bevezethetünk egy praktikusabb energia-változót is, az elektron teljes energiáját elektrontömeg-egységekben.

$$W = \frac{E_e}{m_e \cdot c^2} = 1 + \frac{E_{kin}}{m_e \cdot c^2} \quad (23)$$

Ez az elektron teljes energiája (nyugalmi + kinetikus) elektrontömeg-egységekben. Ezt felhasználva tovább egyszerűsíthetünk a 22.-es kifejezésen.

$$\sqrt{\frac{N(W)}{G(Z, W) \cdot W^2}} = K'' \cdot (W_{max} - W) \quad (24)$$

ahol $G(Z, W) = F(Z, E_e) \cdot p/W$ és $K'' = K' \cdot (m_e \cdot c^2)^{3/2}$, illetve az impulzus megadható, mint

$$p = \sqrt{W^2 - 1} \quad (25)$$

2.7. A magsugár meghatározása

A 24.-es kifejezésre egyenest illesztve meghatározható a K'' konstans és a W_{max} maximális teljes energia (elektrontömeg-egységekben). Ezáltal meghatározottnak tekinthető a K' konstans és az E_{max} maximális teljes energia is. A kifejezés így az alábbi alakra hozható.

$$F(Z, E_e) = \frac{N(E_e)}{K'^2 (E_{max} - E_e)^2 \sqrt{E_e^2 - (m_e \cdot c^2)^2} E_e} \quad (26)$$

Erre az eloszlásra a 17. egyenlet szerint illeszthetünk, melyben a végállapotú atommag sugara (vagy az effektív sugár) lesz az illesztendő paraméter.

2.8. Konverziós elektron

A belső konverzió nem ritka jelenség radioaktív bomlás során. Ha a bomlástermék egy gerjesztett atommag, alapállapotba való visszatéréskor egy γ -foton formájában kisugározza a gerjesztett és az alapállapot energiája közti különbséget. Bizonyos valószínűséggel ezt a fotont elnyelheti az atom egy elektronja. Azt, hogy melyik héj elektronjai hajlamosabbak részt venni a belső konverzió folyamatában, sok tényező befolyásolja (pl. a mag és az elektronok energiaszintjei és hullámfüggvényei). Minden konfigurációra jellemző az az energetikai törvényszerűség, mely szerint a gerjesztett és az alapállapot közti energia-különbségnek el kell érnie az adott elektron kötési energiáját, különben az elektron nem szakítható el a magtól - ha eléri, a γ -foton maradék energiája a kilökött elektron mozgási energiájaként él tovább.

A belső héjak elektronjai közelebb vannak a maghoz, ezért pusztán a geometriából adódóan nagyobb eséllyel vesznek részt a folyamatban, azonban a kötési energiájuk is nagyobb. Amennyiben a legkülső héjról lökődik ki egy elektron, az atom ionizálódik. Amennyiben egy belső héjról távozik egy elektron, a helyére legerjesztődik egy másik elektron, mely ezalatt kibocsájt egy másik fotont (ezt karakterisztikus Röntgensugárzásnak szokás nevezni).

A Cs-137 izotóp β -bomlása során is felléphet belső konverzió. A konverziós elektron energia-eloszlása egy Gauss-szerű tendenciát mutat, melyet kalibrációra használunk. Ugyanis a keletkező Ba-137m mag legerjesztődéskor egy 662keV energiájú γ -fotont bocsájt ki, melyet egy, a legbelső héjon lévő, 32keV energiájú elektron elnyelhet. Így a kilépő elektron energiája 630keV . Ezen energiák értékének tényszerűsége az elmúlt század elméleti és mérés technikai vívmányain alapszik - persze van egy hibájuk, de elenyésző az általunk használt mérőberendezésekéhez és módszerekhez képest -, ezért ezek nominális értékeknek tekinthetők. Így a Cs-137 konverziós elektronjainak spektrumában a Gauss-szerű csúcs várható értéke 630keV energiaértéknek feleltethető meg.

A következőkben ismertetett sokcsatornás analízátor, amint a nevéből adódik, csupán csatorákra osztja a spektrumot. A csatornák "sorszámához" energiaértéket is kell rendelni. A csatornák energia-megfeleltetése nem változik végzetes mértékben, ám sok külső hibafaktor (szobahőmérséklet, elavulás, időjárás, stb.) kiküszöbölhető kalibrációval. A Cs-137 izotóp bomlása során fellépő konverziós elektron pont megfelelő erre a célra.

3. A kísérleti elrendezés

A β -bomló izotópok forrásként szolgálnak. A kibocsájtott elektronok (többek között) ionizálhatják vagy gerjeszthetik a forrás közvetlen közelébe helyezett szcintillátor kristály atomjait. Amint a gerjesztett atom magassab héjra fellökött elektronja visszatér eredeti állapotába, kibocsájt egy fotont.

Fontos megjegyezni, hogy a β -bomlásnak gyakran statisztikus velejárója a γ -sugárzás. Sok esetben nincs rá garancia, hogy a bomlástermék nem egy gerjesztett mag, mely legerjesztődéskor kibocsájt egy γ -fotont. A γ -fotonok is képesek gerjeszteni a szcintillátor kristály atomjait, melyek ennek hatására ugyanúgy fotonokat bocsájtanak ki. Mi az elektronok energiáját szeretnénk mérni, ezért minianizálnunk kell, hogy a γ -fotonok mekkora hányadát érzékeli a detektor. Ezt úgy tehetjük meg, ha fizikailag vékonyabb szcintillátor kristályt használunk, illetve ezt az elvet szem előtt tartva választjuk meg, hogy milyen anyagból legyen a szcintillátor.

A β részecskék behatolási mélysége nagyságrendekkel kisebb, mint a γ -fotonoké. Elég, de nem túl vékony kristály esetén a β -részecskék nagy része elnyelődik, miközben a γ -fotonok nagy része áthatol a kristályon. A γ -fotonok azon része, mely mégis kölcsönhatásba lép a kristály anyagával, három jelentősebb módon teheti meg azt : Compton-szórással ($P \sim Z$), párkeltéssel ($P \sim Z^2$) illetve fotoeffektussal ($P \sim Z^5$). Ennek fényében érdemes vékony és alacsony rendszámú anyagból készített kristályt használni, mivel ekkor lényegesen csökken a γ -fotonok detektálásának valószínűsége.

Egyetlen fotont nehéz lenne direkt módon érzékelni, ezért egy ún. PMT (photomultiplier tube) berendezést helyezünk a szcintillátor után. A berendezés először egy fotokatód segítségével (a fotoelektromos hatás következtében) elektronokká alakítja át a beérkező fotonokat. A fotokatódból kilépő elektronok egy erősen levákuumozott kamrába lépnek be, ahol egymást követő elektródák helyezkednek el. A szomszédos elektródák között feszültségkülönbség van fenntartva, melyek gyorsítják az elektronokat. Ezeket az elektródákat dinódáknak szokás nevezni. Egy beérkező elektron az első dinóda felszínéről (a kinetikus energiájától függően) kilök valamennyi elektront. Ezek az elektronok a gyorsítófeszültség hatására a második dinóda-ig elég energiát gyűjtenek össze, hogy ott is történhessen másodlagos kibocsátás. Így a dinódák száma és rájuk kapcsolt gyorsítófeszültség határozza meg a berendezés elektron-sokszorozó képességét - ez lehet akár $10^6 - 10^8$ -szoros erősítés is. A fotoelektron-sokszorozó berendezés lehetőséget nyújt arra, hogy akár egyetlen elektron beérkezéséről is tudomást szerezzünk egy mérhető elektromos jel formájában.

Az így sorba kapcsolt berendezéseknek is van egy határfoka - a kibocsájtott β -részecskék egy hányada nem jut el a fotoelektron-sokszorozó végéig, illetve az ezek után következő berendezésekben is történik veszteség. Mivel a mérési pontok esetén leginkább a beütésszámok aránya számít, ez a fajta veszteség nem

befolyásolja végzetesen a mérést - feltételezve azt, hogy egy elektron érzékelésének valószínűsége nem függ túl jelentős mértékben az energiájától.

Ezek után erősítő és jelfeldolgozó elektromos berendezések - melyek működését most nem részletezzük - segítik elő a fotoelektron-sokszorozó jelének átalakítását olyan formába, mely a sok-csatornás analizátor számára előnyös. Ezek a berendezések az elektronok által keltett feszültség-impulzusokat alakítják át Gauss-görbékre formázott jelekké, melyek csúcsai és szélességei árulkodnak az eredeti elektronok energiájáról. A görbe szélessége árulkodik arról is, hogy mennyi időt vett igénybe az, hogy az adott elektron leadja az összes energiáját a szcintillátornak. Ezután a sok-csatornás analizátor segítségével diszkrét csatornába (energia-intervallumokba) sorolódnak a jelek és digitalizálva lesznek.

A jel formájából következtethetünk a forrás által kibocsájtott elektron energiájára, illetve az adott csatornába beérkező jelek száma meg van feleltetve a forrásból kilépett elektronok számával. A kisebb energiát reprezentáló csatornáknak kisebb, míg a nagyobb energiákat reprezentáló csatornáknak nagyobb indexet (sorszámot) adunk. Ez látható az 1. és 2. ábrán is.

A sokcsatornás analizátor segítségével rendezett jelek digitalizálás után egy adapter segítségével átvihetők asztali számítógépre. A laboratóriumban az erre a célra kijelölt számítógépen található szoftver adatrögzítést és grafikus megjelenítést megvalósító funkciói teszik könnyebbé a mérést.

Kísérletileg meghatározott, hogy a mérőberendezések összességéből, a közelítésekből és módszerekből akár 5 – 25% hiba is előfordulhat, ezért ez tudható be az egyik legnagyobb hibaforrásnak.

4. A mérés menete

Első lépésként bekapcsoljuk a számítógépet és a mérőberendezést, majd a számítógépen található szoftverben testreszabjuk a mérés paramétereit.

A szoftverben beállítható, hogy mennyi csatornára szeretnénk felbontani a spektrumot. A mérési feladatok elvégzéséhez az adatokat elég 512 csatornaszám mellett kiértékelni - látni fogjuk, hogy a kalibrációs hiba még 512 csatorna mellett is több, mint kellően kicsi -, azonban magához a méréshez érdemes minél nagyobb csatornaszámot választani - esetünkben a legnagyobb beállítható csatornaszám 8192 volt. Minél nagyobb a csatornaszám, annál jobban látszik, hogy mennyire "sima" a szoftver által grafikusán megjelenített hisztogram - mely valós időben ábrázolja az egyes csatornákhöz tartozó beütések számát -, azaz jobban látható, hogy mikor gyűlt össze kellő mennyiségű adat.

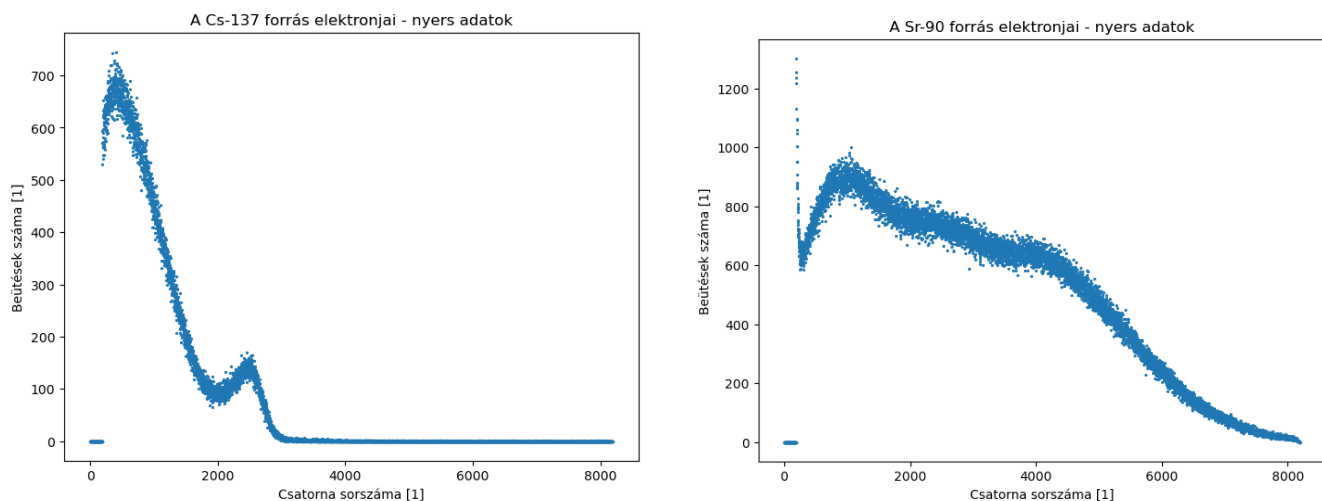
Beállítható a mérés időtartama is. A mérés bármikor megállítható és elindítható, illetve a beállított időtartam letelte után folytatható is. Érdemes nagyobb időtartamot választani (40 perc - több óra), ekkor biztosan nem fog túl korán megállni a mérési adatok gyűjtése. Ha a hisztogram alakja már nem változik (a szemmel látható tartományon belül) lényeges mértékben, elég adat gyűlt össze.

Természetesen minden bomló izotóphoz szigorúan tilos pusztán kézzel hozzáérni, ezért a források el- és visszahelyezéséhez csipeszt használunk. Elsőként a Cs-137 forrást vesszük elő és helyezzük a szcintillátor alá. Lehetőség szerint a forrás és a szcintillátor közti távolságot érdemes minél jobban csökkenteni, mivel így kisebb veszteség történik levegővel való kölcsönhatás miatt, és nagyobb térszögben érik a β -részecskék a szcintillátort. Ezután megkezdjük az adatok rögzítését a szoftver segítségével, majd megvárjuk, amíg elegendő mennyiségű adat gyűlik össze. A rögzített adatok bármikor elmenthetők egy file-ba, és bármikor törölhetők, ha újrakezdenénk a mérést.

A Sr-90 forrás esetén is hasonlóan járunk el. Az elmentett mérési adatok file-kezelővel elérhetőek és átmásolhatóak külső adattárolóra, illetve egy erre alkalmas programnyelv segítségével megnyithatóak és olvashatóak változóba. Az adatfile-ok feldolgozásához és kiértékeléséhez Python-t használtam.

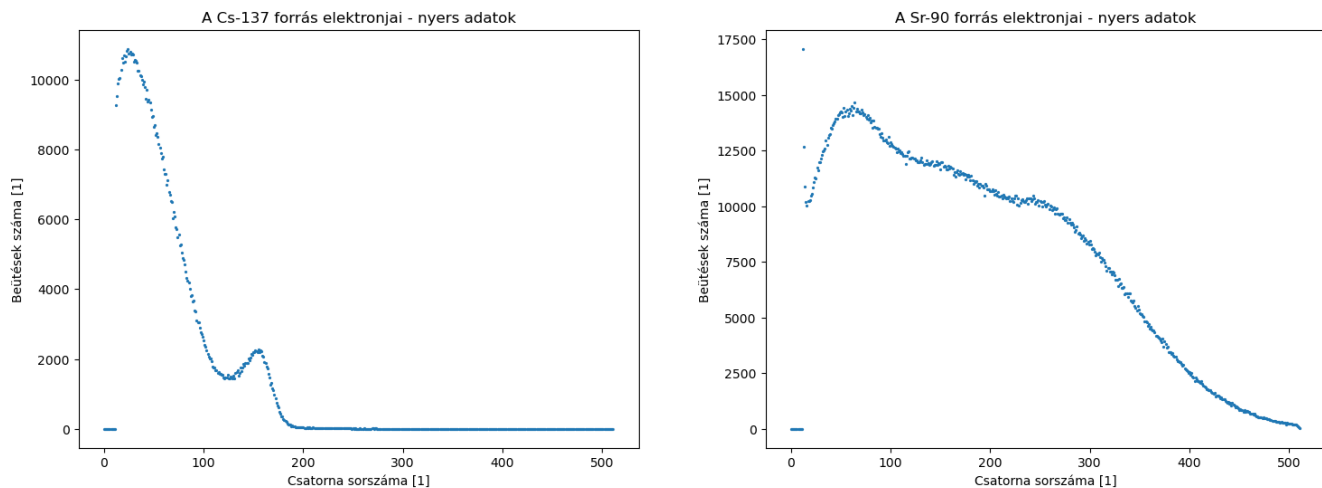
5. Kiértékelés

Mindkét izotóp esetén az exportált adatfile - a mérés specifikációján kívül - 8192 sorból áll, és mindegyik sorban egy egész szám található - mely az adott csatornán mért beütések számát jelzi. A file-okat egy Python notebook segítségével olvastam be és dolgoztam fel. A nyers adatokat az alábbi két ábra jeleníti meg.



1. ábra. A mért adatok - nyers adatok 8192 csatornán

A mérési adatokat elegendő 512 csatornára felosztott spektrumként értelmezni - ekkor lényegesen könnyebb dolga lesz az illesztésre használt Python függvénynek is -, ezért 16-osával összevonhatóak a csatornák ($512 \cdot 16 = 8192$).

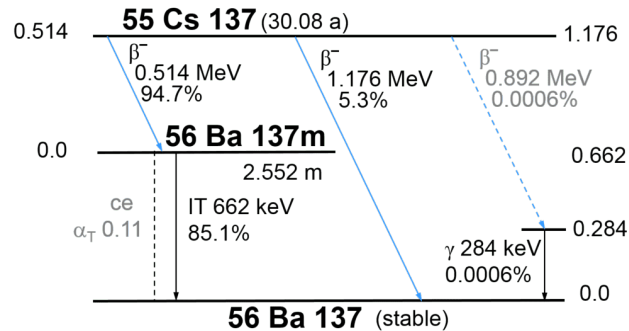


2. ábra. A mért adatok - összevonva 512 csatornára

5.1. A Cs-137 izotóp vizsgálata

5.1.1. A Cs-137 izotóp β -bomlása

A Cs-137 izotóp bomlásakor keletkezett elektronok energia-eloszlásának megértéséhez vizsgáljuk meg az izotóp bomlási sémáját ¹.



3. ábra. A Cs-137 izotóp bomlási sémája

Az esetek 94.6%-ában a bomlástermék egy Ba-137m (m = metastabil) mag, mely gerjesztett állapotából nyugalmi állapotba téréskor kibocsájt egy $E_\gamma = 662\text{keV}$ energiájú γ -fotont. Ezt a fotont elnyelheti a Ba-137 egy belső héján lévő elektronja, melynek kötési energiája 32keV . Így a kilökött elektron energiája 630keV . Ez az elektron, az ún. konverziós elektron felel a Cs-137 spektrumában (2. ábra bal oldala) a 150. csatorna környékén lévő Gauss-szerű csúcsért. Ugyanakkor a β -bomlás következtében keletkezik egy 514keV energiájú elektron is, mely a spektrum alacsonyabb részén lévő, nagyobb csúcsért felel.

Az esetek 5.4%-ában a Cs-137 mag egy stabil Ba-137 maggá bomlik, mely során egy 1176keV energiájú elektron keletkezik.

5.1.2. Kalibráció

Kalibrációhoz a Cs-137 konverziós elektronját használjuk, mely referenciát ad a 630keV hollétéhez. A konverziós elektron csúcsára Gauss-görbét lehet illeszteni, melynek szimmetriatengelyét feleltetjük meg 630keV -tal.

A legkisebb hibát visszaadó illesztési határok alapján a konverziós elektron által keltett csúcs a 146. és a 249. csatorna között mutat legjobban Gauss-szerű viselkedést. Az illesztés alsó és felső határán paraméterszkennelés végezhető (egy-egy "for" ciklus megvalósítja a léptetést, és minden iteráció során történik egy illesztés), majd kiválsztható a legkisebb hibájú határ-konfiguráció - erről rövidesen több szó lesz. Bár szemmértékkel is megbecsülhető, hogy melyek a legrosszabb, illetve a legjobb illesztési tartományok, paraméterszkennelés esetén a legjobb és a legrosszabb határu illesztések között 1-3 nagyságrendnyi eltérés is adódhat a hibában, mely igencsak számottevő - persze rossz határokat bármikor lehet választani, itt az a fontos, hogy a matematikailag legjobb konfigurációt válasszuk. Ennélfogva, a későbbiekben is, optimális illesztési határok alatt a paraméterszkennelés végeredményét kell érteni. Jelöljük a beütések számát N -nel, a csatornák sorszámát pedig C -vel.

Poisson-eloszlás írja le azoknak az eseményeknek a bekövetkezési számát adott idő alatt, melyek egy bizonyos, ismert valószínűséggel következnek be függetlenül. A radioaktív bomlás is pont egy ilyen folyamat, ezért az N beütésszámok hibája mindig (legalábbis nyers adatok esetén) a Poisson-eloszlásból származhatható, mely szerint beütésszám alatt $N \pm \sqrt{N}$ értendő.

Az illesztés eredménye :

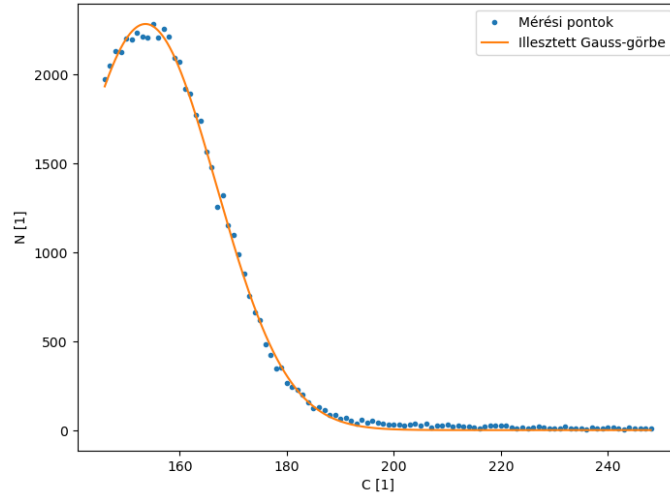
$$N(C) = A \cdot e^{-(C-\mu)^2/(\sigma)^2} \quad (27)$$

$$A = 2270.6107402 \pm 38.0929111 \quad (28)$$

$$\mu = 152.9864134 \pm 0.5326695 \quad (29)$$

$$\sigma = 19.3228024 \pm 0.4426337 \quad (30)$$

¹Forrás : <https://oncologymedicalphysics.com/cesium-137>



4. ábra. A Cs-137 konverziós elektronja, illesztett Gauss-görbe

A csatornaszámhoz ($C[1]$) lineárisan rendelünk energia-értéket ($E_{kin}[keV]$). Az első csatorna feleljen meg $1keV$ energiának.

$$E_{kin}(C) = a + b \cdot C \quad (31)$$

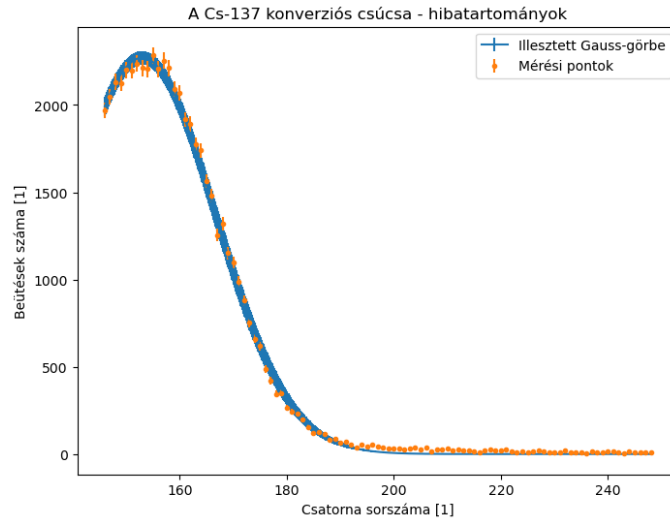
$$b = \frac{630 - 1}{152.9864134} keV, \quad a = \left(1 - \frac{630 - 1}{152.9864134}\right) keV \quad (32)$$

$$E_{kin}(C) = -3.1049396 keV + C \cdot 4.1049397 keV \quad (33)$$

$$\frac{\Delta E_{kin}}{E_{kin}} = \frac{\Delta \mu}{\mu} = 0.34818\% \quad (34)$$

Kevesebb, mint fél tized százalékos pontossággal meghatározható az adott csatornához rendelt energia értéke.

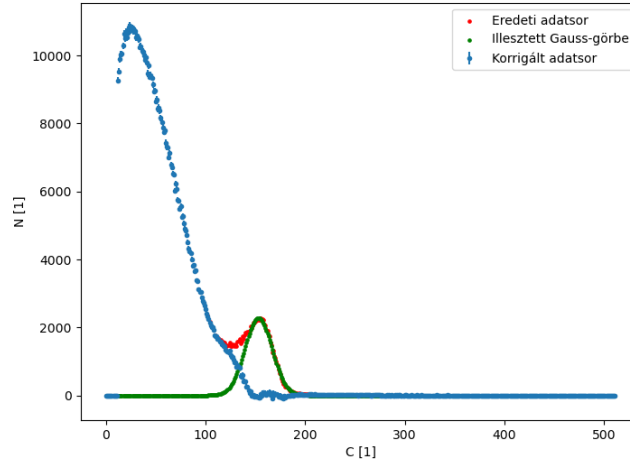
Ekkor a beütésszámok és a rájuk illesztett Gauss-görbe, illetve ezek pontonkénti hibái is ábrázolhatóak.



5. ábra. A Cs-137 konverziós elektronja, illesztett Gauss-görbe

5.1.3. A β -részecskék energiaeloszlása

A konverziós elektronok adnak egy Gauss-eloszlású járulékot a beütések számában. Ennek a járuléknak az alacsonyabb energiájú ága belóg a β -részecskék járulékába, ezért, a pontosabb eredmény érdekében, a konverziós elektronok járulékára illesztett görbét érdemes levonni az eredeti adatsorból. Ez látható az alábbi ábrán is.



6. ábra. A Cs-137 spektruma a konverziós elektronok járuléka nélkül (zöld + kék = piros)

A beütések számából és az illesztett Gauss-görbéből adódó hibajárulék pontonként :

$$\Delta N_{levont} = \sqrt{\Delta N_{eredeti}^2 + \Delta N_{illesztett}^2} \quad (35)$$

Ez a korrekció igencsak mély nyomot hagy maga után, mely közel sem esik bele a Gauss-görbe illesztéséből származó hiba nagyságrendjébe.

A β -részecskék maximális energiájának meghatározásához a Fermi-Kurie módszert alkalmazzuk.

$$FK(W) = \sqrt{\frac{N(W)}{G(Z, W)W^2}} = K''(W_{max} - W) \quad (36)$$

A W mennyiség az elektron teljes energiája elektrontömeg-egységben ($m_e \cdot c^2$) kifejezve, a K'' változó konstansokat tartalmaz, a $G(Z, W)$ függvény pedig az alábbi kifejezésnek felel meg. Az $F(Z, E_e)$ függvény az ún. Fermi-függvény, melynek teljes alakja megtalálható az elméleti fejezetben - illetve ennek Python implementációja mérésleírásban.

$$G(Z, W) = F(Z, E_e) \cdot \frac{p}{W} \quad (37)$$

A kinetikus energiáról az alábbi módon kell $m_e \cdot c^2$ egységekbe áttérni.

$$W = \frac{E_e}{m_e \cdot c^2} = 1 + \frac{E_{kin}}{m_e \cdot c^2} \quad (38)$$

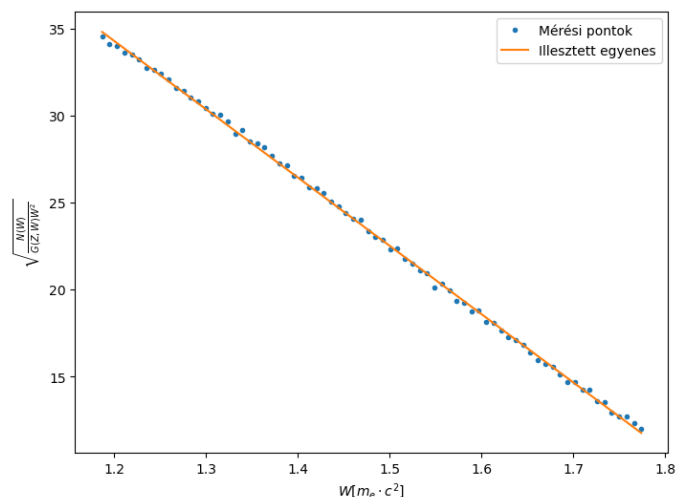
Mivel a kinetikus energiának a kalibráció során használt illesztésen keresztül van hibája, ezért a W mennyiségnek is lesz hibája. Lineáris összefüggés következtében ΔW :

$$\Delta W = \Delta E_{kin} \cdot \frac{1}{m_e \cdot c^2} = \frac{E_{kin} \cdot 0.34818\%}{m_e \cdot c^2} = (W - 1) \cdot 0.34818\% \quad (39)$$

A Python kódban kettő tömbön történik az összes operáció : egy tömb tartalmazza a beütések számát (N) és egy tömb tartalmazza a csatornákat (C). A csatornák tömbjét a 33-as kifejezéssel áttanszformáljuk kinetikus energiára, majd ezt a 38-es kifejezéssel teljes energiára. A Fermi-Kurie egyenes illesztéséhez a 36-os kifejezés közepén levő mennyiség hiányzik. Ez a mennyiség úgy kapható meg, hogy az adott elemre jellemző paraméterek (Z , A és a magból kilépő bomlástermék töltése) mellett végrehajtuk a beütések számát tartalmazó tömb minden elemén a 36-os kifejezés közepén lévő transzformációt.

A két tömbön végrehajtott numerikus illesztéssel meghatározható a K'' konstans és az elektronok maximális energiája (W_{max}). Az alsó és a felső illesztési határ szkennelésével javítható a kapott hiba is². A paraméterszkennelés eredménye, hogy a transzformált tömbök a 24. és 98. elemeik között viselkednek legjobban egyenesként.

²Például egybelógó alsó és felő határtartományok esetén a "legjobb" illesztést nyilván akkor kapnánk, ha csak két pontra illesztenénk, amittől értelmét vesztené az illesztés - ezért fontos minél nagyobb tartományt lefedni. A potenciális illesztési tartomány szélei egyébként is becsülve lennének, a paraméterszkennelés csupán ennek a finomhangolására, automatizálására szolgál.



7. ábra. A Cs-137 izotóp Fermi-Kurie egyenese

Az illesztés eredménye :

$$FK(W) = a \cdot (b - W) \quad (40)$$

$$b = 2.0740543 \pm 0.0018919 \quad (41)$$

$$a = 39.2302113 \pm 0.1201165 \quad (42)$$

Így az elektronok maximális energiája :

$$W_{max} = (2.0740543 \pm 0.0018919) \cdot m_e \cdot c^2 \quad (43)$$

A 25. kifejezés alapján a kinetikus energia :

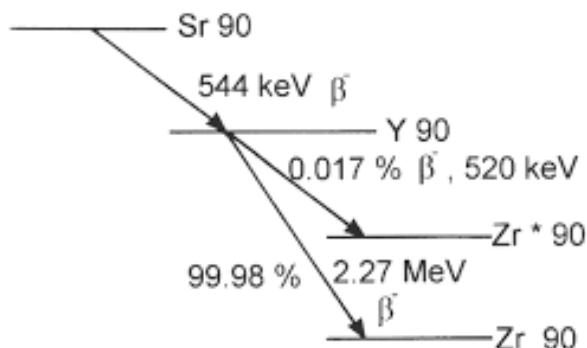
$$E_{max}^{kin} = (W_{max} - 1) \cdot 511keV = 548.84174keV \pm 0.96676keV \quad (44)$$

A nominális érték $E_{max}^{kin} = 514keV$, ami sajnos nem esik bele a hibatartományba, azonban csak 6.34793%-os az eltérés. Azonban ez bőven beleesik a berendezésekre és a módszerekre várt 5–25%-os hibatartományba.

5.2. A Sr-90 izotóp vizsgálata

5.2.1. A Sr-90 izotóp β -bomlása

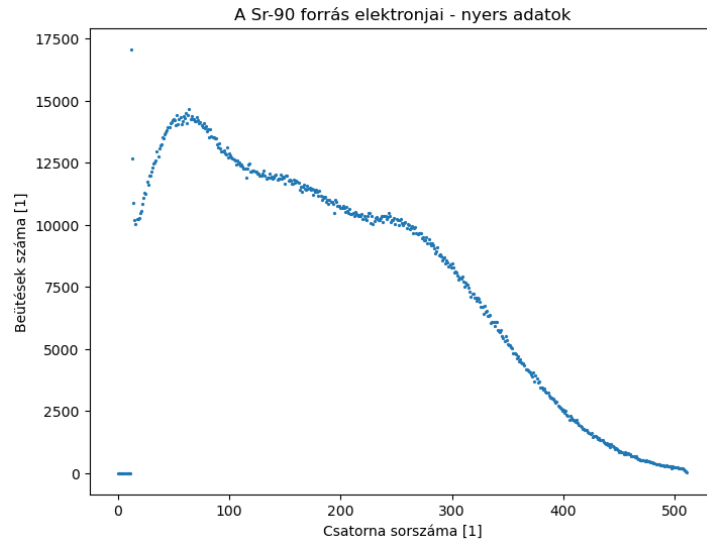
A Sr-90 izotóp spektrumában két csúcs lelhető fel, mivel a bomlási sémán³ szereplő bomlásokból két β -bomlás is benne van a mért energiaspektrumban.



8. ábra. A Sr-90 izotóp bomlási sémája

³Forrás : <https://www.hep.physik.uni-siegen.de/teaching/masterlab2019/manuals/betaspeceng.pdf>

Az első β -bomlás 100% eséllyel következik be, és $544keV$ energiájú elektronok lépnek ki. A második bomlás majdnem minidg, 99.98%-os valószínűséggel játszódik le, és a kilépő elektronok energiája $2270keV$. Ez a két csúcs jelenik meg a Sr-90 mért spektrumában is.

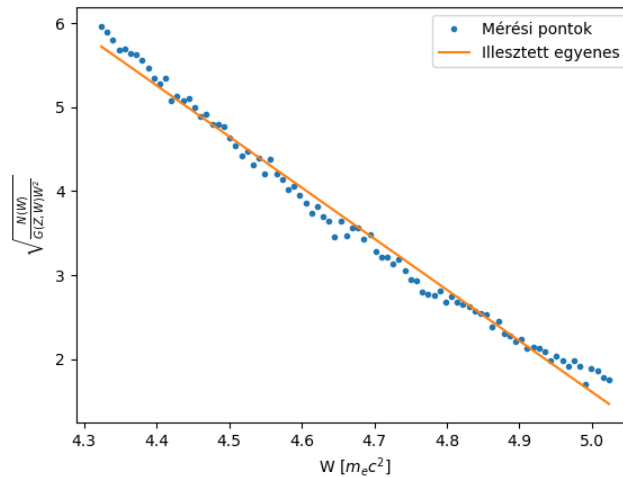


9. ábra. A Sr-90 izotóp spektruma

Hasonló elvek szerint, mint a Cs-137 konverziós csúcsa esetén - a második csúcs nagyenergiás ága függetlennek tekinthető az első csúcstól -, a második csúcsra illesztünk először, extrapolálunk, majd ezt levonjuk az adatsorból, annak reményében, hogy így az első csúcs jó közelítéssel csak az első bomlásból származó elektronokat fogja tartalmazni.

5.2.2. A Sr-90 izotóp nagyenergiás csúcsa

Paraméterszkennelés alapján a beütésszámok Fermi-Kurie transzformáltja leginkább a 184. és a 400. csatorna között mutat lineáris tendenciát.



10. ábra. A Sr-90 izotóp nagyobb energiájú csúcsára illesztett Fermi-Kurie egyenes

Az illesztés eredménye :

$$FK(W) = a \cdot (b - W) \quad (45)$$

$$b = 5.2647209 \pm 0.0072334 \quad (46)$$

$$a = 6.0767439 \pm 0.0702854 \quad (47)$$

Így az elektronok maximális energiája :

$$W_{max} = (5.2647209 \pm 0.0072334)m_e c^2 \quad (48)$$

A maximális kinetikus energia :

$$E_{max}^{kin} = (W_{max} - 1) \cdot 511keV = 2179.2723799keV \pm 3.6962674keV \quad (49)$$

A nominális érték $E_{max} = 2270keV$, ami nem esik bele ebbe a hibatartományba, az eltérés 3.99681%-os, ám a berendezésekből és a közelítésekből származó hiba tartományába bőven beleesik.

5.2.3. A Sr-90 izotóp alacsonyabb energiájú csúcsa

A fentiekben a Fermi-Kurie módszer során áttanszformáltuk a beütésszámokat. Ahhoz, hogy az eredeti adatsorból le tudjuk vonni a második csúcs járulékát, vissza kell transzformálni az illesztett görbét. Megismételve a 24.-es kifejezést :

$$\sqrt{\frac{N(W)}{G(Z, W)W^2}} = K''(W_{max} - W) \quad (50)$$

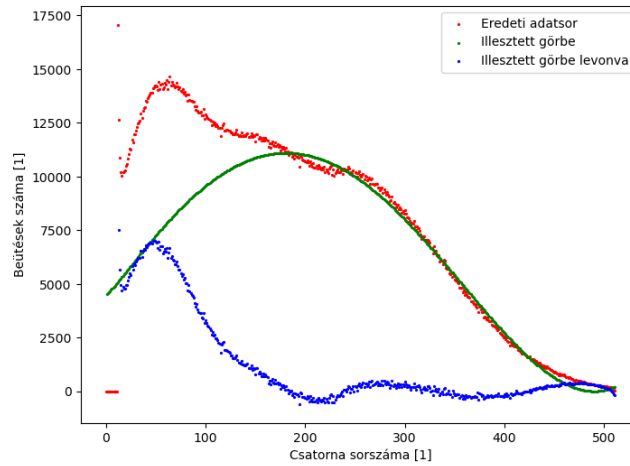
Ez a kifejezés a tényleges adatsorral való operálás során az alábbi alaköt ölti. Jelölje " i " a tömbök indexét.

$$\sqrt{\frac{N^{[i]}}{G(Z, W^{[i]})W^{[i]2}}} = K''(W_{max} - W^{[i]}) \quad (51)$$

Az illesztés során a K'' és a W_{max} paraméterek értékét határoztuk meg. Az illesztés által leírt görbét úgy kapjuk meg, ha átrendezzük az egyenletet úgy, hogy a bal oldalon csupán $N^{[i]}$ maradjon.

$$N^{[i]} = \left(K''(W_{max} - W^{[i]}) \right)^2 \cdot G(Z, W^{[i]})W^{[i]2} \quad (52)$$

Az összes eredeti $W^{[i]}$ érték mellett kigeneráljuk az $N^{[i]}$ értékeket, és ezeket vonjuk le az eredeti adatsorból. Az eredmény az alábbi ábrán látható.



11. ábra. A Sr-90 izotóp spektruma a nagyenergiás csúcs levonása után

Ahogy a Cs-137 esetén, most sem tökéletes az illesztett görbe levonása után maradt adatsor. Ebben az esetben a levont csúcs bőven a megmaradt csúcscsal összemérhető tartományban van, ezért szükséges figyelembe venni az illesztés hibáját is, mely a hibaterjedés elve alapján megvalósítható. Ehhez szükséges megvizsgálni az 52.-es kifejezést, azaz milyen közvetlen és közvetett hibájú mennyiségek szerepelnek benne. A K'' és W_{max} mennyiségek hibája a Fermi-Kurie egyenes illesztéséből fakad, míg a W hibája a kalibrációs hibát tartalmazza.

A $G(Z, W^{[i]})$ kifejezés egy kicsit összetettebb. A Fermi-függvény esetén alábbi kifejezést használtam a hiba (ΔF) meghatározásához, melyet Python-ban implementáltam.

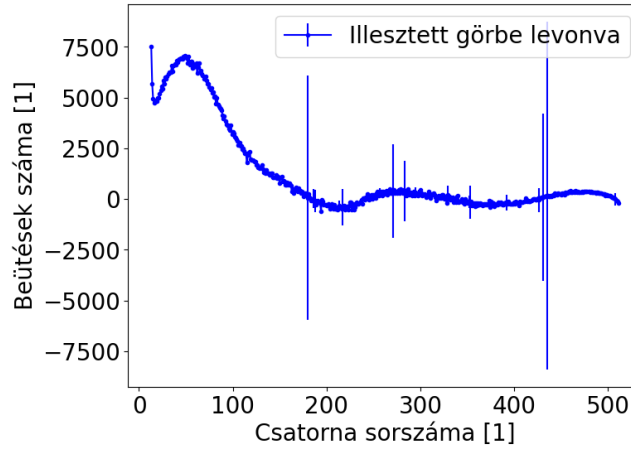
$$\Delta F^2 = \left(\frac{dF}{dW} \cdot \Delta W \right)^2 \quad (53)$$

A teljes derivált a sima parciális derivált mellett kiadja az η és a p energiafüggését is, melyek ennél fogva tartalmazzák az energia hibáját is. Így a $G(Z, W) \cdot W^2$ mennyiség hibája :

$$\Delta(G(Z, W) \cdot W^2) = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial F} \cdot \Delta F \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial p} \cdot \Delta p \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial W} \cdot \Delta W \right)^2} \quad (54)$$

Minden W -től függő mennyiség esetén definiálható egy függvény, amely visszaadja magát a mennyiséget, és a derivált segítségével a hibát is. A ΔW esetén is, melyet a 39.-as kifejezés ír le, a W -től való függés egyetlen függvénnyel megvalósítható, így az összes többi mennyiség esetén elég megadni az enegiát, majd meghívni ezt a hibaszámító függvényt. Valamint olyan függvény is definiálható, mely az érték-hiba párokat fogadja argumentumnak, és visszaadja a $G(Z, W) \cdot W^2$ mennyiség hibáját. Ennek ismeretében a beütések számának pontonkénti hibája meghatározható - pontonként, mert energiafüggő hibajárulékok is vannak.

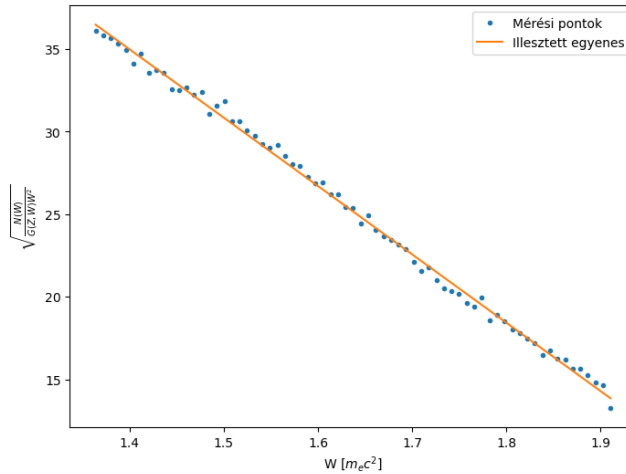
Ezek által automatizálható a hibaszámítás. Mivel vannak energiafüggő tagok is, a beütések számának nem egységes, hanem pontonkénti hibája lesz, ezért a hibaszámítás után korrektebb jelezni ezt, ahogy az alábbi ábra is mutatja.



12. ábra. A Sr-90 izotóp spektruma a nagyenergiás csúcs levonása után

Az akkora mértékű ugrások a hibában, mint a fenti ábrán látható néhány adatpont estén betudhatóak numerikus (számítástechnikai) hibának, ezért ezek ki is dobhatók. A továbbiakban - és az előzőekben is - a "NaN" értékek, és egyéb illesztéssel járó viszontagságok (ésszerű határokon belül) figyelmen kívül hagyhatóak. Ezen kívül látszik, hogy a hibaterjedésből származó hiba szinte elenyésző a csúcsok nagyságához képest - és amint hamarost látszik, a végeredmény hibájához képest is.

A második csúcs illesztését a 46. és 115. csatorna között végeztem, mivel a transzformált adatsor itt mutatott leginkább lineáris tendenciát.



13. ábra. A Fermi-Kurie egyenes a Sr-90 izotóp kisebb energiájú csúcsára

Az illesztés eredménye :

$$FK(W) = a \cdot (b - W) \quad (55)$$

$$b = 2.2453144 \pm 0.0043446 \quad (56)$$

$$a = 41.3881702 \pm 0.2859877 \quad (57)$$

Így a maximális kinetikus energia :

$$E_{max}^{kin} = 636.36 keV \pm 2.22 keV \quad (58)$$

A nominális érték $E_{max} = 544 keV$, ami nem esik bele ebbe a hibatarományba, és 16.54865%-os az eltérés.

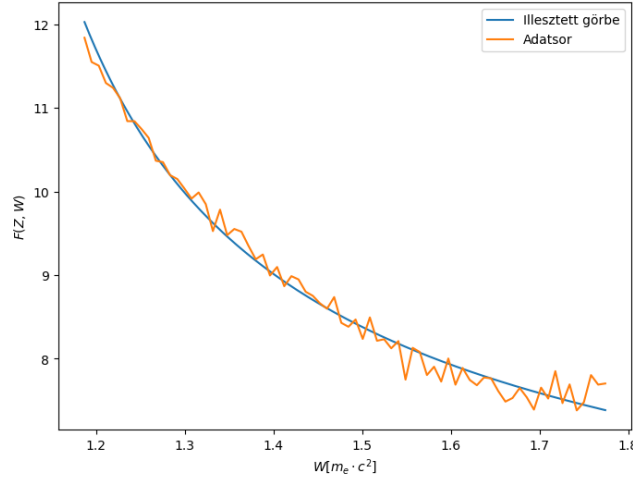
Megfigyelhető, hogy az első csúcshoz képest több, mint négyszer akkora lett az eltérés a nominális értéktől. A nagyenergiás csúcsba már jobban belelóg a kisenergiás csúcs, olyannyira, illetve az oda-vissza transzformálástól halmozódtak a hibák. Szerencsére ez még mindig benne van a mérés 5 – 25%-os becsült hibatarományában.

5.3. A magsugár mérése

Az elméleti részben ismertetett módon végezzük a transzformációt :

$$F(Z, E_e) = \frac{N(E_e)}{K'^2(E_{max} - E_e)^2 \sqrt{E_e^2 - (m_e \cdot c^2)^2} E_e} \quad (59)$$

A megfelelő változó-transzformációkat követően Fermi-függvény alakú görbét illesztünk az adatsorra - ugyanazon a tartományon, amelyen a Fermi-Kurie módszert alkalmaztuk. Az egyszerűség kedvéért W szerint ábrázoltam az eredményeket.



14. ábra. A Cs-137 esetén illesztett Fermi-függvény

A Cs-137 izotóp esetén :

$$r_N = 6.19991554 fm \pm 0.7687895 fm \quad (60)$$

A Sr-90 esetén pedig :

$$r_N = 6.531568 fm \pm 0.7687895 fm \quad (61)$$

Ezek az eredeti $\rho = 0.0029 \cdot A^{1/3} + 0.0063 \cdot A^{-1/3} - 0.0172 \cdot A^{-1}$ közelítésből származó képlet alapján számolt értéktől 12.4%, illetve 18.9833% eltérést mutatnak, melyek benne vannak a közelítésekben, a módszerekből és mérőberendezésből származó becslt 5 – 25%-os hibahatárban - ezen belül is most épp a közelített ρ -val hasonlítottuk össze, tehát a maximumhoz képest (25%) kisebb hibát is vártunk.

6. Felhasznált irodalom

[1] A beta-bomlás vizsgálata, Lökös Sándor és Pásztor Gabriella, 2022.04.01., <http://atomfizika.elte.hu/kvml/docs/msp.pdf>

[2] "Caesium-137" Wikipedia, Wikimedia Foundation, 2023.03.23., <https://en.wikipedia.org/wiki/Caesium-137>

[3] "Strontium-90" Wikipedia, Wikimedia Foundation, 2023.01.01., <https://en.wikipedia.org/wiki/Strontium-90>

[4] "Yttrium-90" Wikipedia, Wikimedia Foundation, 2023.02.07, <https://en.wikipedia.org/wiki/Yttrium-90>

[5] "Beta decay" Wikipedia, Wikimedia Foundation, 2023.03.07., https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_decay