1. Ohm-törvény

1.1. Elméleti Fizikai Példatár II./ 4.3. feladat

Négyzetháló n^2 (egyforma homogén vezetőhuzalból készült) számú sejtből áll. Mindegyik huzal ellenállása r. Az áram a rács egyik csúcspontjából indul ki és a szemközti csúcsba megy. Határozzuk meg az egész rács R ellenállását az $n = 2, 3$ esetekben!

a) $n = 2$

a) $n = 3$

Feladatot kidolgozta: *Z2R8XS*

Megoldás

Egy-egy huzal darabkát felfoghatunk úgy, mint egy-egy ellenállás. Két csomópont közti huzal darabka úgy viselkedik, mint egy ellenállás, ami tökéletesen vezető drótokkal van kötve a két csomóponthoz.

Soros kapcsolás esetén : $R_e = R_1 + R_2$

Párhuzamos kapcsolás esetén : $\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Csillag delta kapcsolás esetén :

$\Delta - Y$

$$R_A = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_B = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

$$R_C = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$$

ahol A, B és C pontok a "kimeneti pontok". Az adott pontnak megfelelő ellenállás a pontba "befutó" két ellenállás szorzatával arányos. Tehát az A pontba R_1 és R_2 ellenállás "fut be".

$Y - \Delta$

$$R_1 = \frac{R_A \cdot R_B}{R_C} + R_A + R_B$$

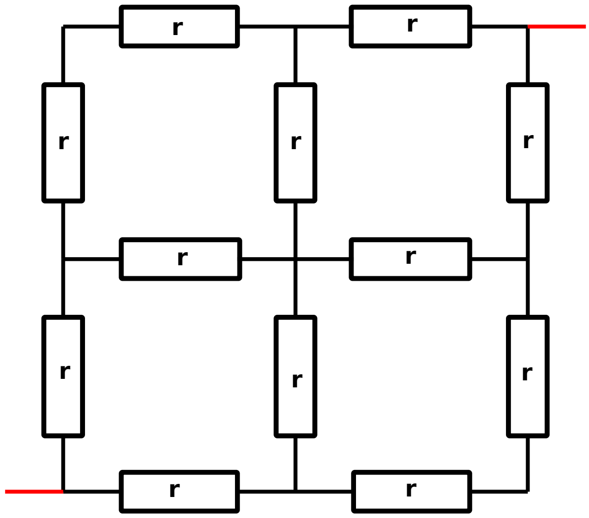
$$R_2 = \frac{R_A \cdot R_C}{R_B} + R_A + R_C$$

$$R_3 = \frac{R_B \cdot R_C}{R_A} + R_B + R_C$$

A következőkben csillag alatt Y alakú kapcsolást, delta alatt Δ alakú kapcsolást értek, csillag-delta kapcsolás alatt pedig ezen esetek gyűjtőnevét.

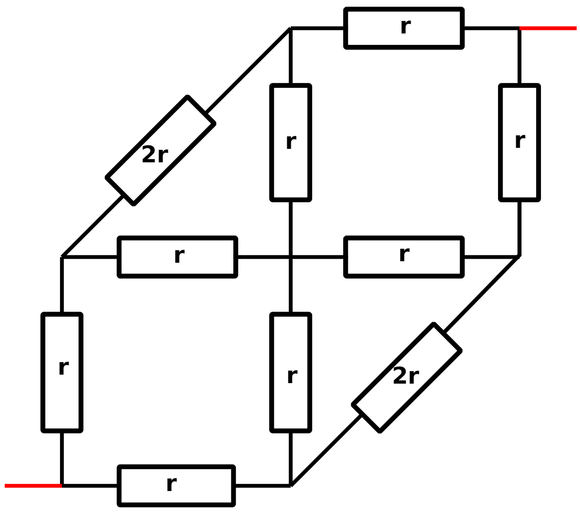
a) n=2

Itt az alábbi módon helyezkednek el az ellenállások.



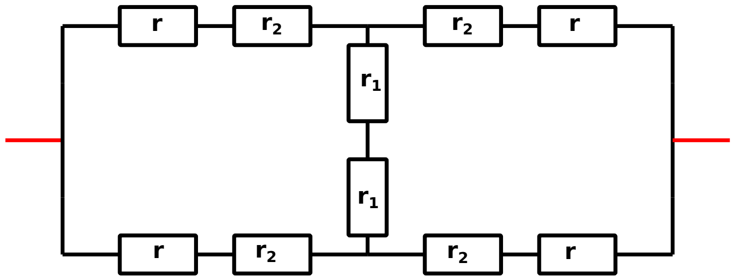
1. ábra. 2x2 rács

Látható, hogy a jobb alsó és a bal felső sarokban két-két ellenállás sorosan van kapcsolva. Ezek összevonhatóak összeadással.



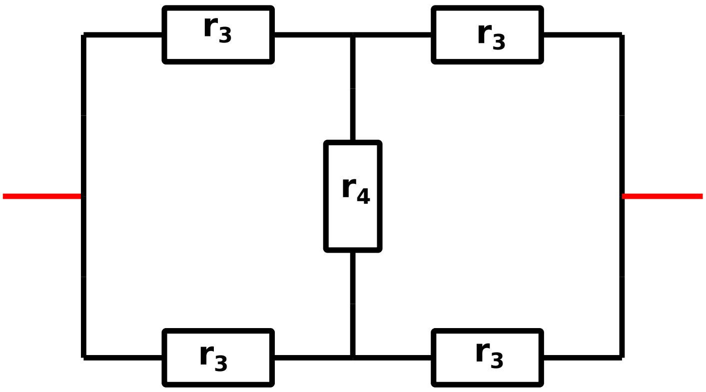
2. ábra. Sarkok egyszerűsítése

Itt a jobb alsó és a bal felső sarokban találkozunk egy-egy csillag-delta alakú kapcsolással. E két csillag-delta találkozik középen. A rendszer szerencsére szimmetrikus.



3. ábra. Csillag-delta kapcsolások a sarkokban

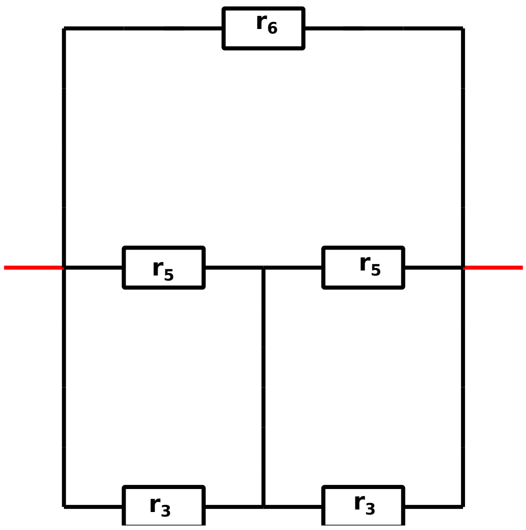
$$r_1 = \frac{r^2}{4r} = \frac{1}{4}r$$
$$r_2 = \frac{2r^2}{4r} = \frac{1}{2}r$$



4. ábra. Összevonások

$$r_3 = r + r_2 = \frac{3}{2}r$$
$$r_4 = r_1 + r_1 = \frac{1}{2}r$$

A felső kettő és a középső ellenállás csillag delta kapcsolást képez, ez is átalakítható. Mivel átalakítás után a háromszög két csúcsát nem választja el semmi a kimeneti és a bemeneti kábeltől, ezért le lehet húzni ez a két pontot közvetlenül a piros vonalakhoz, ekvipotenciális pontokkal kábel mentén ez megtehető.

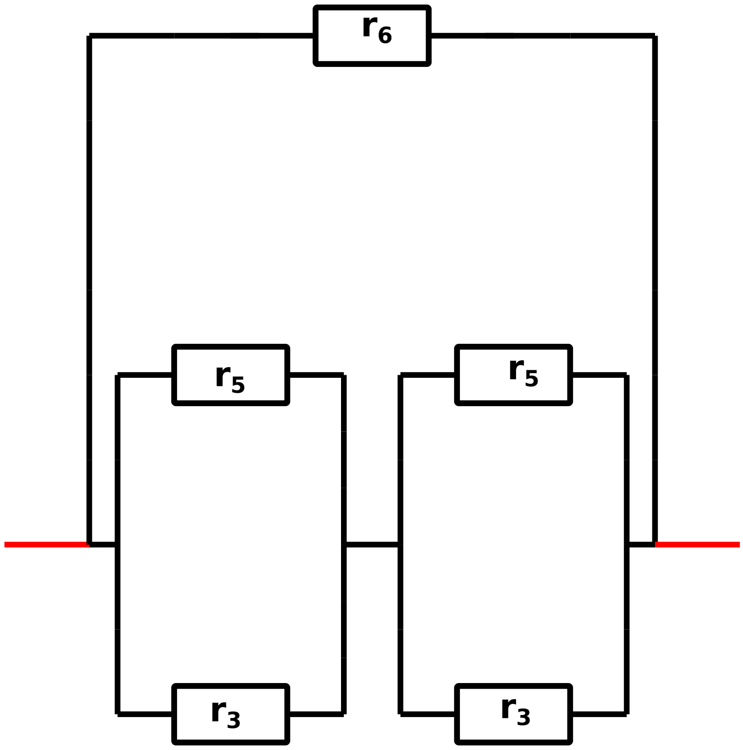


5. ábra. Csillag-delta átalakítás utáni széthúzása

Az alsó kettő marad r_3, a többiek:

$$r_5 = \frac{r_3 \cdot r_4}{r_3} + r_3 + r_4 = \frac{1}{2}r + \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}r = \frac{5}{2}r$$
$$r_6 = \frac{r_3 \cdot r_3}{r_4} + r_3 + r_3 = \frac{9}{2}r + \frac{6}{2}r = \frac{15}{2}r$$

Bár a középső kábelen nem folyik áram, egy rövidzárnak tekinthető két pont között, így nem hagyható el. A helyes átalakítás az lenne, hogy széthúzzunk két klasszikus párhuzamos kapcsolásra.



6. ábra. Párhuzamos kapcsolásokra való bontás

Az lenti két párhuzamos kapcsolás külön-külön átalakítható. Átalakítás után e két párhuzamos kapcsolás eredője sorosan lesz kötve, így gond nélkül összeadhatóak. Mindezek után már csak két ellenállás marad párhuzamosan kötve.

$$\frac{1}{r_7} = \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_5} = \frac{r_3 + r_5}{r_3 \cdot r_5} = \frac{4}{\frac{15}{4}r}$$

$$r_7 = \frac{15}{16}r$$

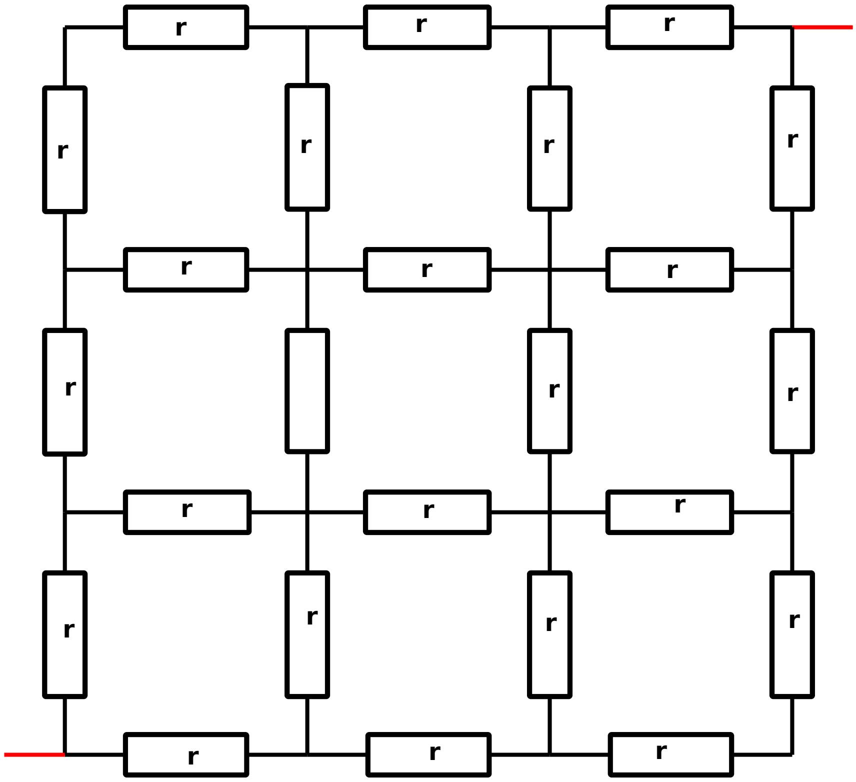
$$r_8 = 2r_7 = \frac{15}{8}r$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_8} + \frac{1}{r_6} = \frac{r_6 + r_8}{r_6 \cdot r_8} = \frac{\frac{75}{8}}{\frac{225}{16}r} = \frac{10}{15r} = \frac{2}{3r}$$

$$R = \frac{3}{2}r$$

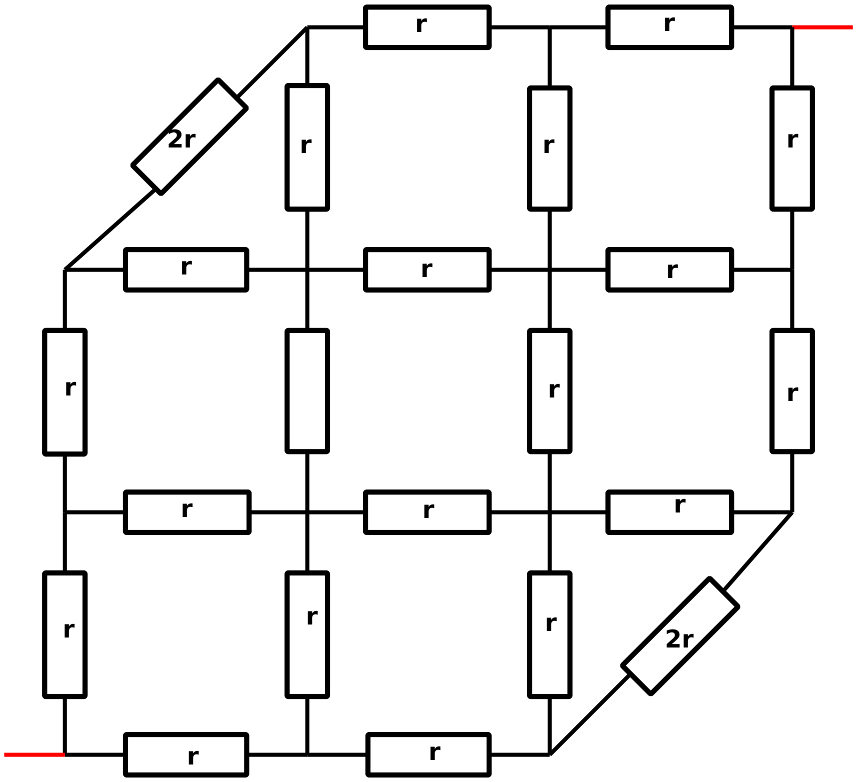
b) $\mathbf{n = 3}$

Itt az alábbi módon helyezkednek el az ellenállások.



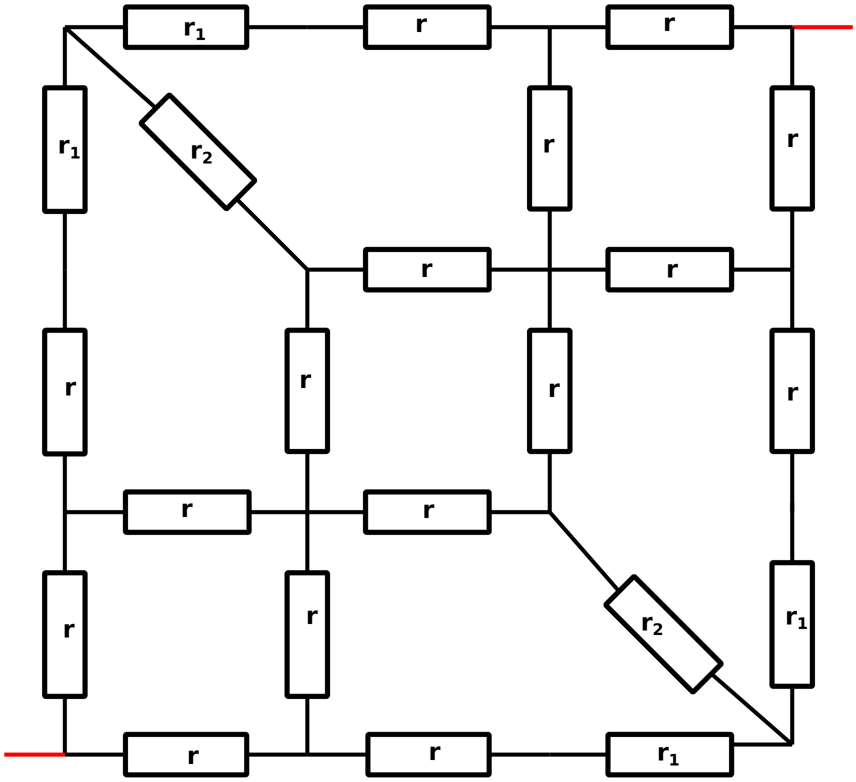
7. ábra. 3x3 grid

Hasonlóan a jobb alsó és a bal felső sarokban két-két ellenállás sorosan van kapcsolva. Ezek összevonhatóak összeadással.



8. ábra. Sarkok egyszerűsítése

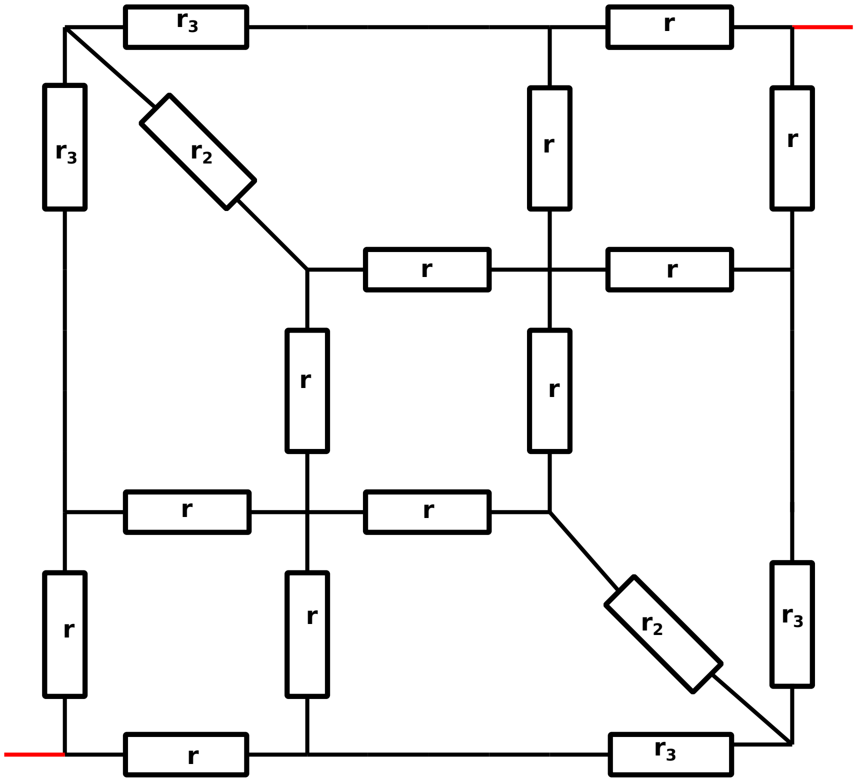
E két sarokban végezhető csillag delta kapcsolásos átalakítás.



9. ábra. Csillag-delta kapcsolások a sarkokban

$$r_1 = \frac{2r}{4} = \frac{1}{2}r$$
$$r_2 = \frac{r}{4} = \frac{1}{4}r$$

Kapunk négy pár sorosan kapcsolt ellenállást, melyek csak arra várnak, hogy összeadják őket.

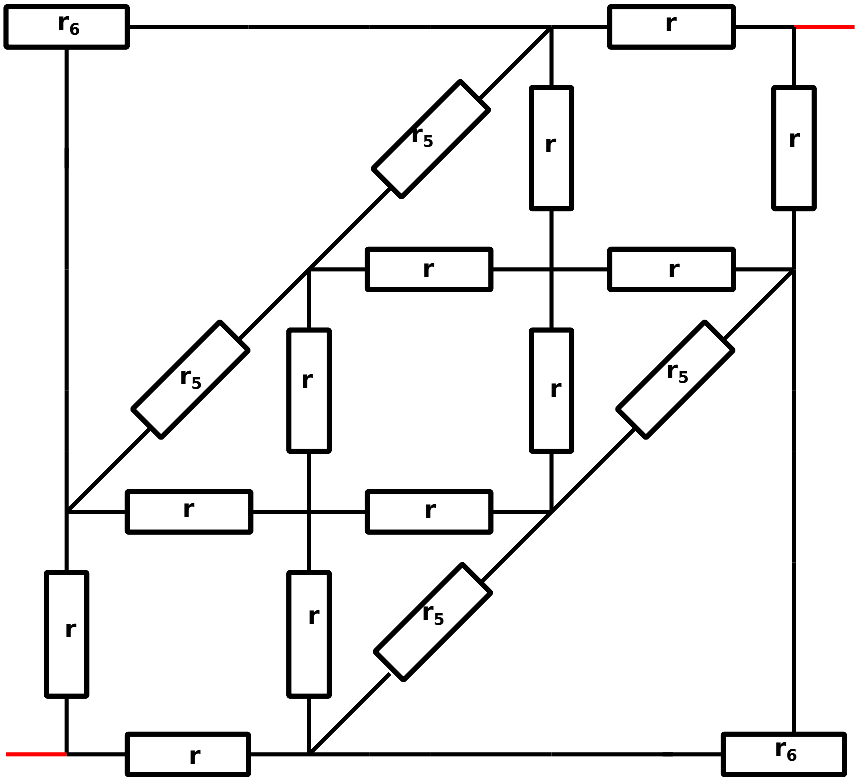


10. ábra. Összevonások

$$r_3 = r + r_1 = \frac{3}{2}r$$

Az ábra hasonlóan néz ki, már pár ellenállást bekebeleztek a csillag delták.

Középen, ferde sávban felbukkan négy csillag delta.

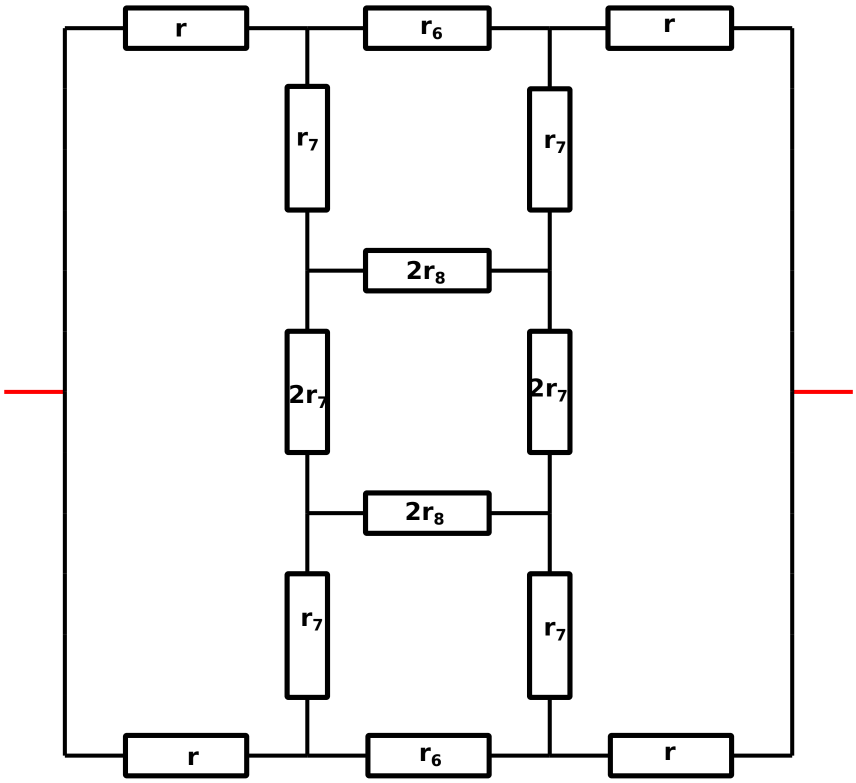


11. ábra. Visszaalakítás

$$r_5 = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_3} + r_2 + r_3 = 2r$$

$$r_6 = \frac{r_3 \cdot r_3}{r_2} + r_3 + r_3 = 12r$$

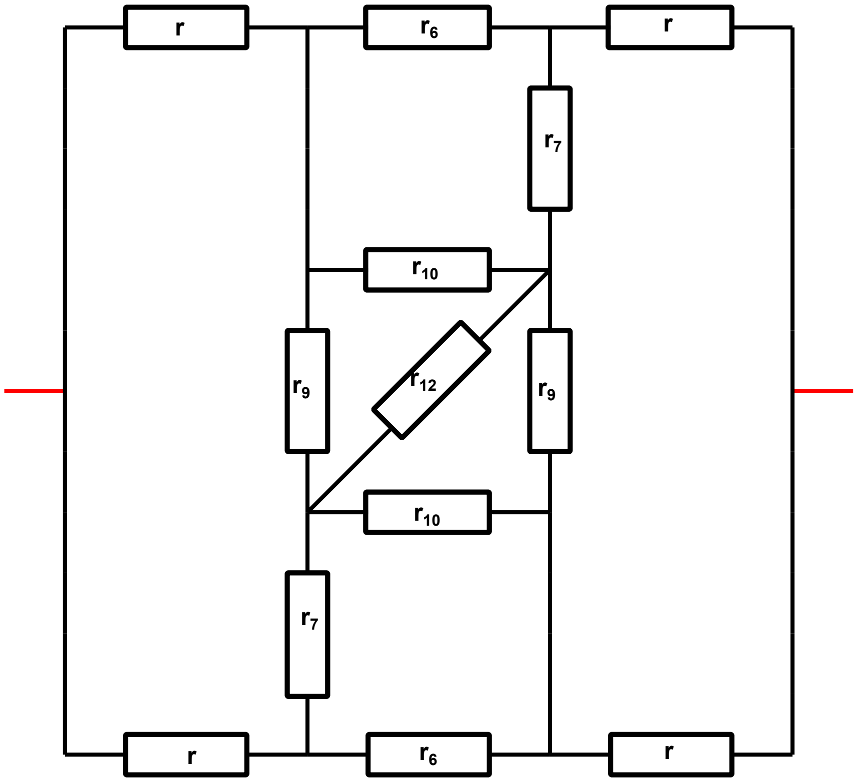
Ezeket átalakítva újra soros kapcsolásban lesz négy pár ellenállás.



12. ábra. Középen lévő csillag-delták átalakítás után

$$r_7 = \frac{r_5 \cdot r}{r + r + r_5} = \frac{1}{2}r$$
$$r_8 = \frac{r \cdot r}{r + r + r_5} = \frac{1}{4}r$$

A középső négyzet sarkaiaban újabb csillag delták bukkanak fel. Alakítsuk át a bal felső és a jobb alsó sarokban lévőket.Középen megjelenik két ellenállás, melyek párhuzamosan vannak kapcsolva. Ők helyettesíthetők egy ellenállással.



13. ábra.

$$r_9 = \frac{r_7 \cdot 2r_7}{2r_8} + r_7 + 2r_7 = r + \frac{3}{2}r = \frac{5}{2}r$$

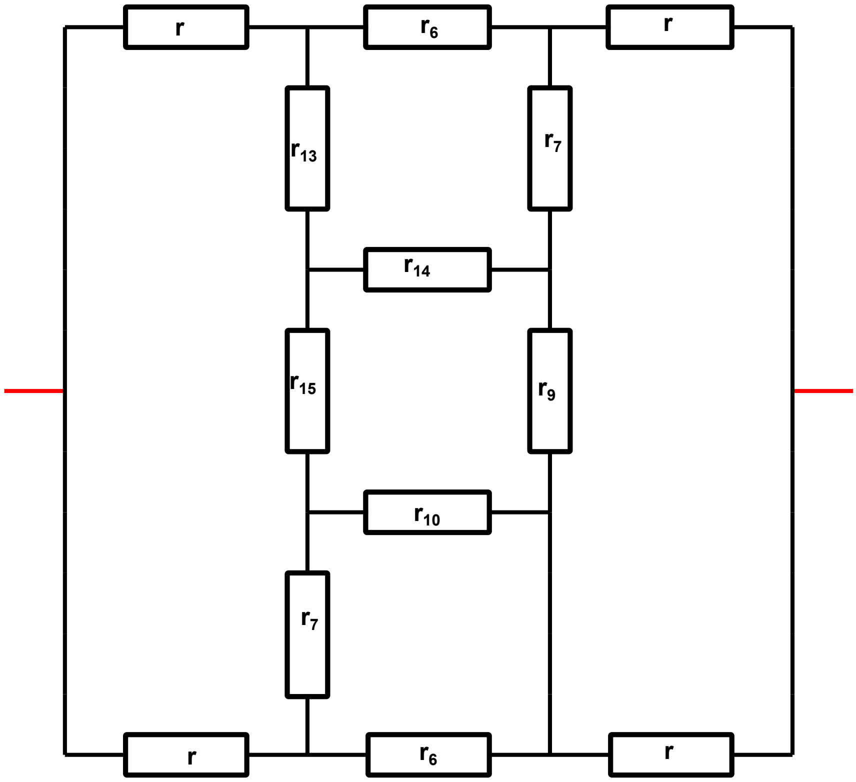
$$r_{10} = \frac{r_7 \cdot 2r_8}{2r_7} + r_7 + 2r_8 = r$$

$$r_{11} = \frac{2r_7 \cdot 2r_8}{r_7} + 2r_7 + 2r_8 = \frac{5}{2}r$$

$$\frac{1}{r_{12}} = \frac{2}{r_{11}}$$

$$r_{12} = \frac{5}{4}r$$

A középső négyzet bal felső sarkában és átlójában húzódó háromszöget alakítsuk át.



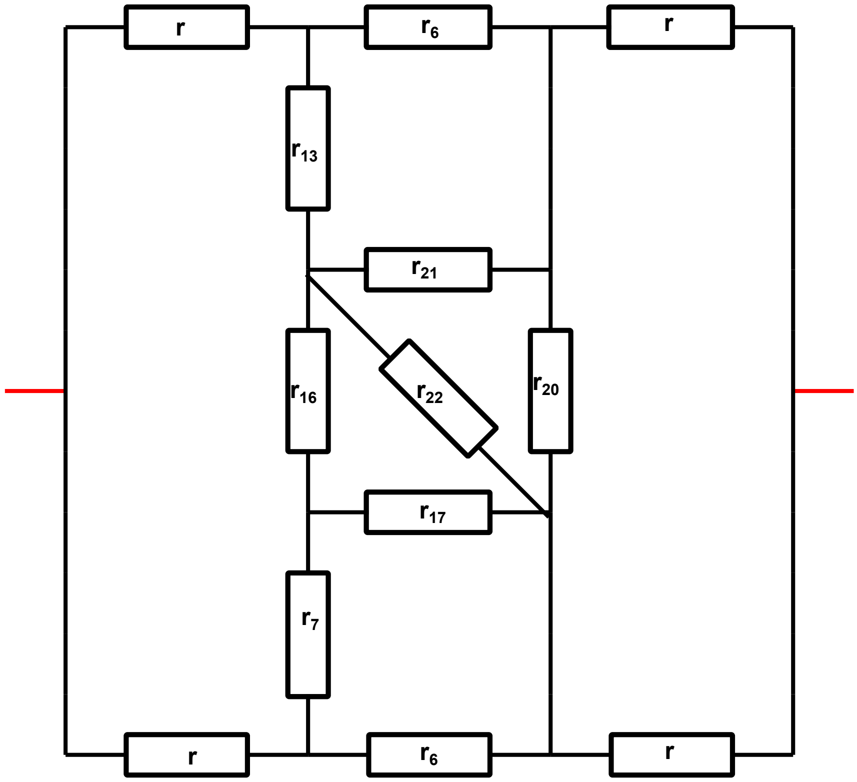
14. ábra.

$$r_{13} = \frac{r_9 \cdot r_{10}}{r_9 + r_{10} + r_{12}} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{19}{4}} r = \frac{10}{19} r$$

$$r_{14} = \frac{r_{10} \cdot r_{12}}{r_9 + r_{10} + r_{12}} = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{19}{4}} r = \frac{9}{19} r$$

$$r_{15} = \frac{r_9 \cdot r_{12}}{r_9 + r_{10} + r_{12}} = \frac{\frac{15}{4}}{\frac{19}{4}} r = \frac{15}{19} r$$

A felső négyzet bal felső és jobb alsó sarkát alakítsuk át.



15. ábra.

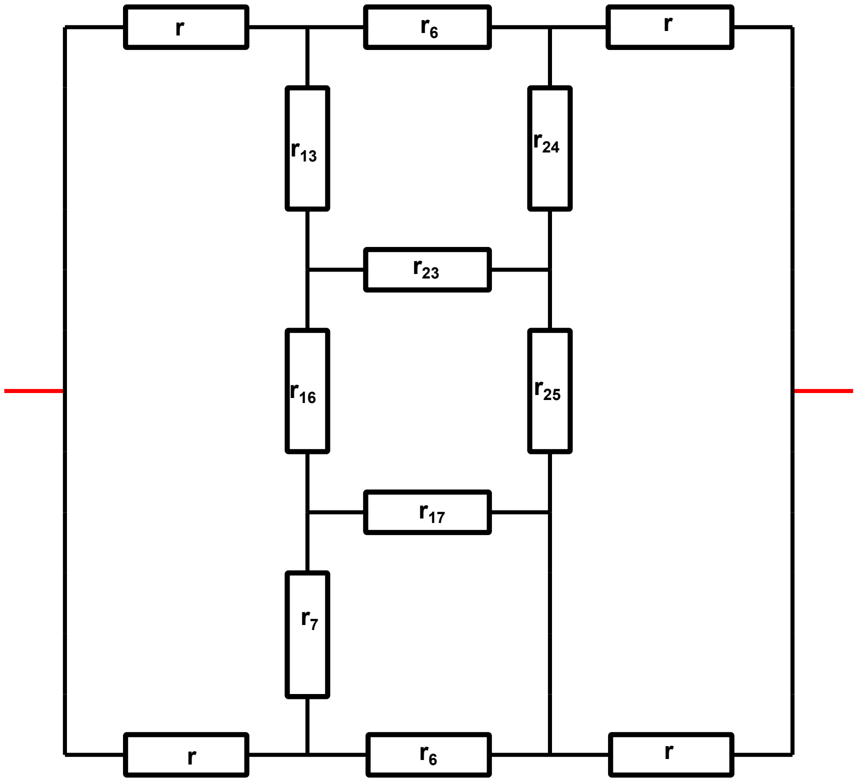
$$r_{16} = \frac{r_7 \cdot r_{15}}{r_{10}} + r_7 + r_{15} = \frac{1}{2}\frac{15}{19}r + \frac{1}{2}r + \frac{15}{19}r = \frac{32}{19}r$$
$$r_{17} = \frac{r_7 \cdot r_{10}}{r_{15}} + r_7 + r_{10} = \frac{1}{2}\frac{19}{15}r + \frac{1}{2}r + r = \frac{32}{15}r$$
$$r_{18} = \frac{r_{10} \cdot r_{15}}{r_7} + r_{10} + r_{15} = 2\frac{15}{19}r + r + \frac{15}{19}r = \frac{64}{19}r$$

$$r_{19} = \frac{r_9 \cdot r_{14}}{r_7} + r_9 + r_{14} = 2\frac{5}{2}r\frac{9}{19}r + \frac{5}{2}r + \frac{9}{19}r = \frac{79}{19}r$$
$$r_{20} = \frac{r_7 \cdot r_9}{r_{14}} + r_7 + r_9 = \frac{5}{4}\frac{19}{9}r + \frac{1}{2}r + \frac{5}{2}r = \frac{203}{36}r$$
$$r_{21} = \frac{r_7 \cdot r_{14}}{r_9} + r_7 + r_{14} = \frac{1}{5}\frac{9}{19}r + \frac{1}{2}r + \frac{9}{19}r = \frac{203}{190}r$$

Újra találkozunk két ellenállással, melyek párhuzamosan vannak kapcsolva.

$$\frac{1}{r22} = \frac{1}{r_{18}} + \frac{1}{r_{19}} = \frac{19}{64r} + \frac{19}{79r} = \frac{2717}{5056r}$$
$$r_{22} = \frac{2717}{5056}r$$

A középső négyzet jobb felső sarkában és átlójában húzódó delta átalakítható csillaggá.



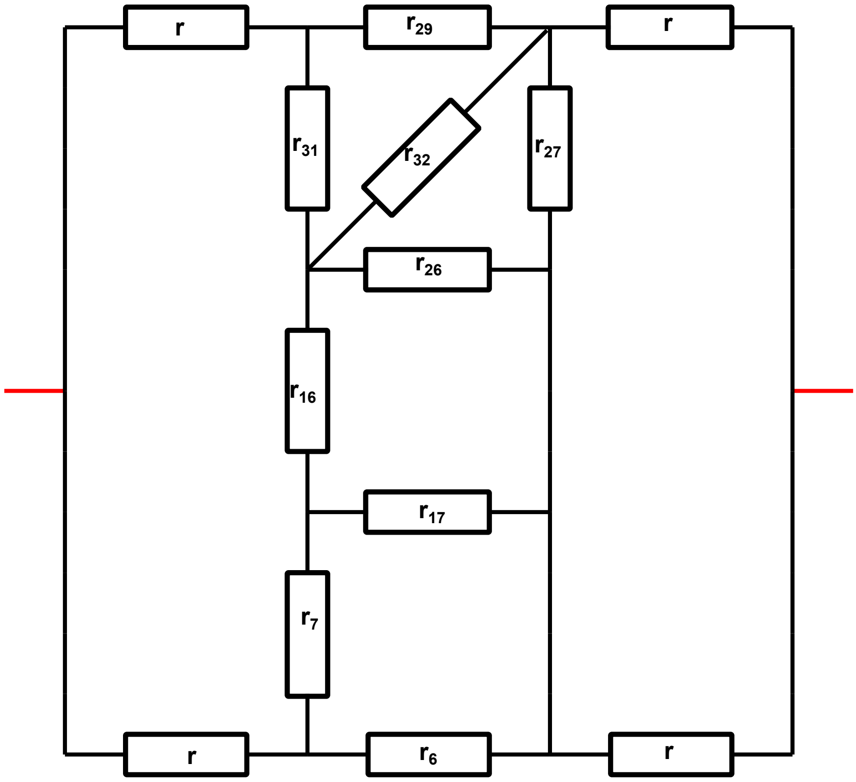
16. ábra.

$$r_{23} = \frac{r_{21} \cdot r_{22}}{r_{21} + r_{22} + r_{20}} = \frac{29029}{50560} \cdot \frac{4322880}{5380651} r = \frac{4963959}{10761302} r$$

$$r_{24} = \frac{r_{21} \cdot r_{20}}{r_{21} + r_{22} + r_{20}} = \frac{41209}{6840} \cdot \frac{4322880}{5380651} r = \frac{26044088}{5380651}$$

$$r_{25} = \frac{r_{20} \cdot r_{22}}{r_{21} + r_{22} + r_{20}} = \frac{551551}{182016} \cdot \frac{4322880}{5380651} r = \frac{52397345}{21522604} r$$

A felső középső négyzet jobb alsó és bal felső sarkába futó csillagok átalakíthatóak deltává. Újabb két párhuzamosan kötött ellenállással találkozunk.



17. ábra.

Technikai megjegyzés : Sajnos a kalkulátorok nem tudnak több számjegyet befogadni, közelítenek, így kénytelen vagyok tizedes törteket használni. Remélhetőleg a sok tizedes jegy miatt nem lesz akkora hiba a végeredményben.

$$r_{26} = \frac{r_{23} \cdot r_{25}}{r_{24}} + r_{23} + r_{25} = 3,1278132303838633r$$

$$r_{27} = \frac{r_{24} \cdot r_{25}}{r_{23}} + r_{24} + r_{25} = 32.82099752221226r$$

$$r_{28} = \frac{r_{24} \cdot r_{23}}{r_{25}} + r_{24} + r_{23} = 6.218715319998111r$$

$$r_{29} = \frac{r \cdot r_6}{r_{13}} + r + r_6 = 22.75r$$

$$r_{30} = \frac{r_{13} \cdot r_6}{r} + r_{13} + r_6 = 11.973684210526315r$$

$$r_{31} = \frac{\cdot r_{13}}{r_6} + r + r_{13} = 1.5964912280701755r$$

$$\frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{r_{28}} + \frac{1}{r_{30}}$$

$$r_{32} = 4.092969336556398r$$

A felső középső négyzet jobb alsó sarkán és átlóján húzódó deltát alakítsuk át csillaggá. Látszik, hogy vannak csomópontok, amik szomszédos csomóponttal ellenállásmentes dróttal vannak összekötve. Ezek ekvipotenciális pontok, úgy is lehet mondani, hogy "összehúzom a két pontot egybe". Ezzel az a technikai nehézség akad, hogy nagyon meggyötört rajzot eredményez.

Ez a lépés több egymás utáni egyszerűsítésre ad lehetőséget, melyek egymásra épülnek. mindezek után egy, az a) feladatból már ismert gráffal találkozunk. Ennek a megoldása az előző feladat végén használt módszerrel gond nélkül kivitelezhető. Tekintve arra, hogy sok hosszú szám és nehezen kifürkészhető képlet vezet a megoldáshoz, a levezetésben jelzem, honnantól analóg a levezetés az előző feladat végével.

A deltából csinált csillag ágaiban ezek az ellánállások lesznek:

$$r_{33} = \frac{r_{26} \cdot r_{27}}{r_{32} + r_{27} + r_{26}} = 2.5637708926976983r$$
$$r_{34} = \frac{r_{32} \cdot r_{27}}{r_{32} + r_{27} + r_{26}} = 3.3548792325044574r$$
$$r_{35} = \frac{r_{32} \cdot r_{26}}{r_{32} + r_{27} + r_{26}} = 0.3197171457895472r$$

Az ekvipotenciális csomópontok összekötésével egyértelmű lesz, hogy r_{16} és r_{17} párhuzamosan van kötve:

$$\frac{1}{r_3 6} = \frac{1}{r_1 6} + \frac{1}{17}$$
$$r_{36} = 0.9411764705882353r$$

Valamint r_{33} és r_{35} is párhuzamosan van kötve:

$$\frac{1}{r_{37}} = \frac{1}{r_{33}} + \frac{1}{35}$$
$$r_{37} = 0.2842673530567702r$$

Ezután r_{37} és r_{34} sorosan lesz kapcsolva.

$$r_{38} = r_{37} + r_{34} = 3.6391465855612277r$$

Valamint r_{36} és r_6 párhuzamosan lesz kapcsolva, és az ő eredőjük sorosan r-rel.

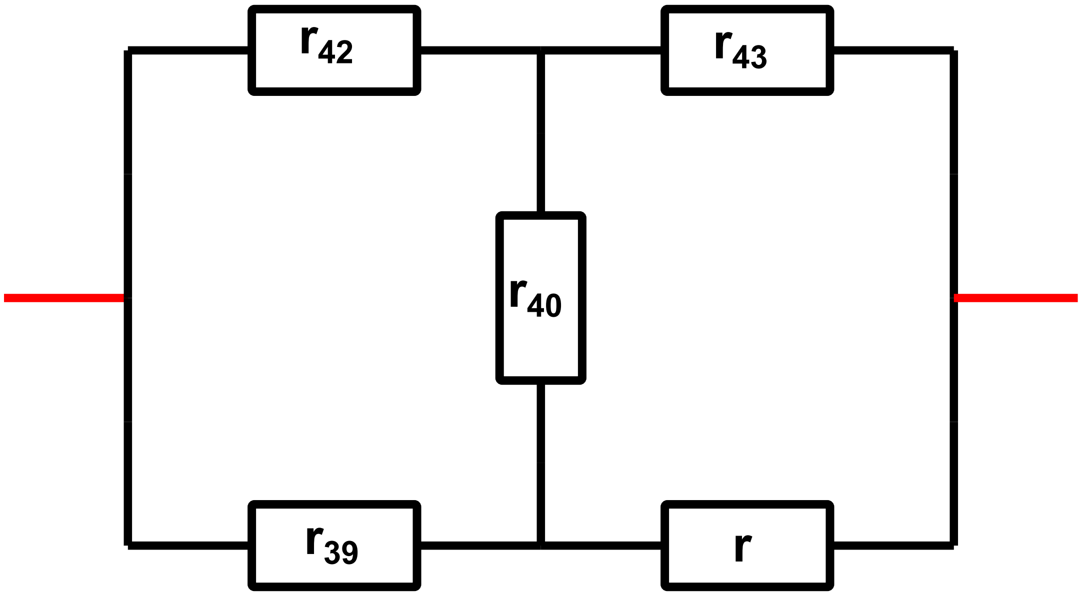
$$r_{39} = r + \frac{1}{\frac{1}{r_{36}} + \frac{1}{r_6}} = 1.8362369337979094r$$

Az r_{29},r_{31} és r_{38} ellenállások egy deltát képeznek, ez átalakítandó csillaggá.

$$r_{40} = \frac{r_{31} \cdot r_{38}}{r_{29} + r_{31} + r_{38}} = 0.20760168627209663r$$
$$r_{41} = \frac{r_{29} \cdot r_{38}}{r_{29} + r_{31} + r_{38}} = 2.9583240293773767r$$
$$r_{42} = \frac{r_{29} \cdot r_{31}}{r_{29} + r_{31} + r_{38}} = 1.2978148177457458r$$

Majd r_{41} és r sorosan lesz kapcsolva, így:

$$r_{43} = r_{41} + r = 3.9583240293773767r$$



18. ábra.

Ez alakra megegyezik az előző feladat végével.
A felső kettő és a középső ellenállás átalakítható csillagból deltába.

$$r_{44} = \frac{r_{42} \cdot r_{43}}{r_{40}} + r_{42} + r_{43} = 30.001465684362227r$$
$$r_{45} = \frac{r_{42} \cdot r_{40}}{r_{43}} + r_{42} + r_{40} = 1.573482822650001r$$
$$r_{46} = \frac{r_{43} \cdot r_{40}}{r_{42}} + r_{43} + r_{40} = 4.799109072838644r$$

Itt r_{45} és r_{39} valamint r_{46} és r lesznek párhuzamosan kötve egymás után.

$$r_{47} = \frac{1}{\frac{1}{r_{45}} + \frac{1}{r_{39}}} + \frac{1}{\frac{1}{r_{46}} + \frac{1}{r}} = 1.6749276785069198r$$

Legeslegvégül pedig r_{44} és r_{47} marad párhuzamosan kapcsolva.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_{44}} + \frac{1}{r_{47}}$$

$$R = 1.5863638481462r$$