Hőtan és folytonos közegek mechanikája (emelt szint) Beadandó

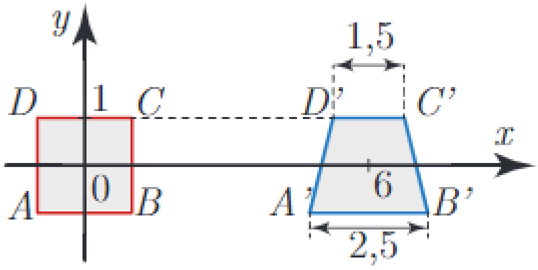
Brindza Mátyás (Z2R8XS)

2020.03.14.

4. Összetett vagy nemhomogén transzformációk

4.1. Homokóra nyújtós

FEELADAT: Mi az elmozdulásmező, a deformációs gradiens, a disztorzió és a deformáció?



Homokóra nyújtás

MEGOLDÁS:
Látható, hogy minden pont el van tolva x irányba 6 egységgel. Ez az eltolás majd "ki fog esni" a disztorzió kiszámításánál a deriválások miatt, nem fog deformációs járulékot adni. Az eltolásvektor jele legyen $\vec{r_0}$.

$$\vec{r_0} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ahhoz, hogy az elmozdulásmező megsejthető legyen, szemléletes megvizsgálni, speciális pontok hova képződnek. Ilyen speciális pontok a négyzet oldalainak metszete a tengelyekkel, az origó és a négyzet csúcsai. Ha először elvégezzük az eltolást és utána a nyújtást, akkor (6;0) pontból nézve:

Tengelyen lévő pontok:

$(0\ ;\ 1) \to (0\ ;\ 1)$
$(0\ ;\ -1) \to (0\ ;\ -1)$
$(1\ ;\ 0) \to (1\ ;\ 0)$
$(-1\ ;\ 0) \to (-1\ ;\ 0)$

Az origó:

$(0\ ;\ 0) \to (0\ ;\ 0)$

A négyzet csúcsai:

$(1\ ;\ 1) \to (0,75\ ;\ 1)$
$(1\ ;\ -1) \to (1,25\ ;\ -1)$
$(-1\ ;\ -1) \to (-1,25\ ;\ -1)$
$(-1\ ;\ 1) \to (0,75\ ;\ 1)$

Az elmozulásmező így:

$$\vec{u'}(\vec{r'}) = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} x \cdot y \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ez az $\vec{u'}$ azért van vesszővel ellátva, mert nincs benne az eltolás. Az eltolással együtt a következő lesz a valódi elmozdulásmező:

$$\vec{u}(\vec{r}) = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} x \cdot y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A disztorzió komponensei:

$$\beta_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial r_j} \tag{1}$$

A disztorzió tenzor mátrixa:

$$\hat{\beta} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A deformációs gradiens:

$$\hat{F} = \hat{\beta} + \hat{I}$$

$$\hat{F} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} y-4 & x \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

A deformáció, ha a transzformációt infinitezimálisnak tekintjük:

$$\overset{\wedge}{\varepsilon} = \frac{\overset{\wedge}{\beta}^T + \overset{\wedge}{\beta}}{2} = \frac{(-\frac{1}{4}) \begin{pmatrix} y & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{4}) \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{2}$$

$$\overset{\wedge}{\varepsilon} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 2y & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

A deformáció, ha a transzformációt nem tekintjük infinitezimálisnak:

$$\overset{\wedge}{\varepsilon} = \frac{\overset{\wedge}{\beta}^T + \overset{\wedge}{\beta} + \overset{\wedge}{\beta}^T \cdot \overset{\wedge}{\beta}}{2} = \frac{(-\frac{1}{4}) \begin{pmatrix} y & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{4}) \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{16} \begin{pmatrix} y & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}{2} = \frac{1}{32} \begin{pmatrix} -8y & -4x \\ -4x & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{32} \begin{pmatrix} y^2 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\wedge}{\varepsilon} = -\frac{1}{32} \begin{pmatrix} y^2 - 8y & xy - 4x \\ xy - 4x & x^2 \end{pmatrix}$$

4.2. Visszafejtés

FELADAT: Milyen transzformációkat takarnak az egyes deformációs gradiensek? Mekkora forgatástés milyen tengely irányú mekkora nyújtást vagy nyírást tartalmaznak? Rajzold le, mivétranszformálódik az egységnégyzetet, és jelöld be rajta a nyújtás tengelyeit és a forgatásszögét, ha van!

$$\hat{F}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{0,125} & \sqrt{0,125} \end{pmatrix} \qquad \hat{F}_2 = \begin{pmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix} \qquad \hat{F}_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

4.2.0. Lineáris algebra és Python

Az $\hat{F}^T\hat{F} = \hat{V}\hat{D}\hat{V}^T$ képletben a $\hat{V}$ és $\hat{V}^T$ mátrixok komponensei kiszámolhatók, az $\hat{F}^T\hat{F}$ mátrix sajátvektoraiból. Ezt az alábbi Python kód segítségével meg lehet tenni.

Mátrix diagonalizálása

In [1]:
```
import numpy as np
```

Beépített függvényekre hivatkozva (a sajátvektorok alapértelmezetten le lesznek normálva) :

In [2]:
```
F = np.matrix([[2**(0.5),-(2**(0.5))],
               [(0.125)**(0.5),(0.125)**(0.5)]]) # Deformációs gradiens
FT = F.T # F transzponáltja
M=FT*F
se, sv = np.linalg.eig(M) # se - sajátértékek, sv - sajátvektorok
```

In [3]:
```
se
```

Out[3]:
```
array([4.  , 0.25])
```

Az sv jobboldali sajátvektorokból alkotott mátrix, ez felel meg a V mátrixnak. Ennek az inverze felel meg V transzponáltjának.

In [4]:
```
sv
```

Out[4]:
```
matrix([[ 0.70710678,  0.70710678],
        [-0.70710678,  0.70710678]])
```

Sajátértékekek és sajátvektorok

Az $\hat{F}^T\hat{F} = \hat{V}\hat{D}\hat{V}^T$ képletben $\hat{D}$ is kiszámolható:

$$\hat{F}^T\hat{F} = \hat{V}\hat{D}\hat{V}^T$$

$$\hat{V}^T(\hat{F}^T\hat{F})\hat{V} = (\hat{V}^T\hat{V})\hat{D}(\hat{V}^T\hat{V})$$

$$\hat{D} = \hat{V}^T\hat{F}^T\hat{F}\hat{V}$$

```
In [6]: V = np.matrix(sv)

In [7]: D = np.linalg.inv(V) * M * V

In [8]: D

Out[8]: matrix([[ 4.00000000e+00,  0.00000000e+00],
                [-2.91433544e-16,  2.50000000e-01]])

In [9]: #tüntessük el a kerekítés miatti nagyon kicsi tagokat
        for i in np.nditer(D, op_flags=['readwrite']):
            if abs(i)<0.0000000005:
                i[...]=0
        DG = D.copy() # hogy ne ugyanarra a memóriacímre mutasson
        # DG lesz a D mátrix gyöke
        for j in np.nditer(DG, op_flags=['readwrite']):
            j[...]=np.sqrt(j)
        # I lesz a D mátrix inverze
        I = np.linalg.inv(D)
        DGI = I.copy() # hogy ne ugyanarra a memóriacímre mutasson
        # DGI lesz a D mátrix inverzének gyöke
        for k in np.nditer(DGI, op_flags=['readwrite']):
            k[...]=np.sqrt(k)
```

$\hat{D}$ és $\hat{V}$ mátrixok, $\hat{D}$ inverze, gyöke és inverzének gyöke

Ellenőrzésképp kiírathatóak a mátrixok a képernyőre.

```
In [10]: D

Out[10]: matrix([[4.  , 0.  ],
                 [0.  , 0.25]])

In [11]: I

Out[11]: matrix([[0.25, 0.  ],
                 [0.  , 4.  ]])

In [12]: DG

Out[12]: matrix([[2. , 0. ],
                 [0. , 0.5]])

In [13]: DGI

Out[13]: matrix([[0.5, 0. ],
                 [0. , 2. ]])
```

Részeredmények ellenőrzése

Az alábbi két képlet is leprogramozható:

$$\hat{U} = \hat{V}\hat{D}^{1/2}\hat{V}^{T}$$

$$\hat{O} = \hat{F}\hat{V}\hat{D}^{-1/2}\hat{V}^{T}$$

Ahol $\hat{U}$ a nyújtást írja le, $\hat{O}$ pedig a forgatást.

```
In [14]: U=V*DG*V.T
         O=F*V*DGI*V.T

In [15]: U

Out[15]: matrix([[ 1.25, -0.75],
                 [-0.75,  1.25]])

In [16]: O

Out[16]: matrix([[ 0.70710678, -0.70710678],
                 [ 0.70710678,  0.70710678]])
```

$\hat{U}$ és $\hat{O}$ mátrixok

Lejjebb ezt a saját kezűleg írt kódot használom fel mátrixműveletek gyors elvégezése céljából.

4.2.1. Az első deformációs gradiens

$$\overset{\wedge}{F_1} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{0,125} & \sqrt{0,125} \end{pmatrix}$$

A fenti pédában ezzel a mátrixszal számoltam.

$$\overset{\wedge}{F_1}^T \overset{\wedge}{F_1} = \begin{pmatrix} 2,125 & -1,875 \\ -1,875 & 2,125 \end{pmatrix}$$

Sajátértékek: 4 ; 0.25

Sajátvektorok:

$$\vec{r_a} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{r_b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

A nyújtás:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 1,25 & -0,75 \\ -0,75 & 1,25 \end{pmatrix}$$

A forgatás:

$$\hat{O} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

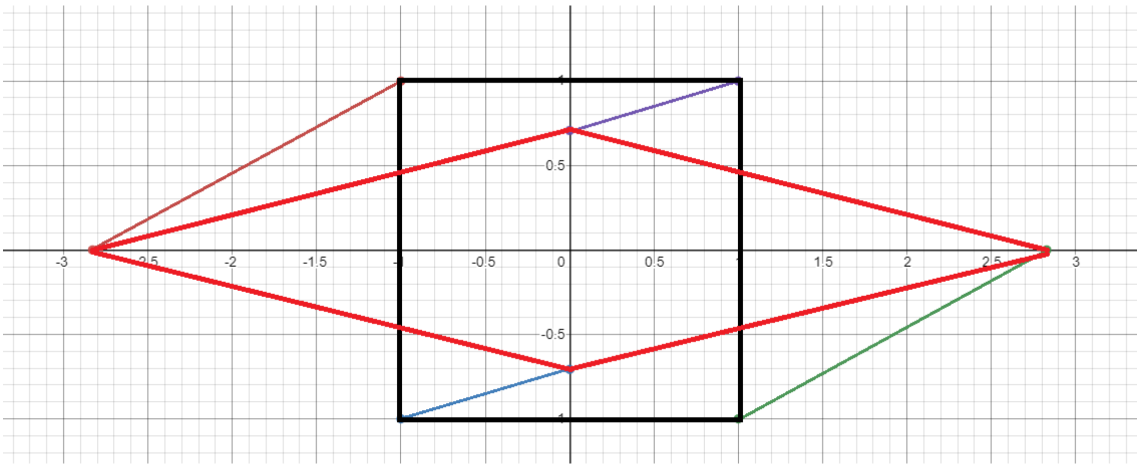
Az $\hat{O}$ mátrix egy $\frac{\pi}{4}$ szögű forgatást ír le.

Az $\hat{U}$ mátrix determinánsa 1, ezért egy tiszta nyírást leíró mátrix. A nyírás a sajátvektorok mentén történik, mértékét a sajátértékek jellemzik.

Mivel ezek a tranfszormációk szakaszt szakaszba képeznek, ezért pár mintapont elég, hogy az egységnégyzet végállapotát ábrázolni lehessen. Egy egységnégyzet csúcsai az alábbi pontokba képződnek.

A négyzet csúcsai:

$(1\ ;\ 1) \rightarrow (0\ ;\ 2\sqrt{0,125})$
$(1\ ;\ -1) \rightarrow (2\sqrt{2}\ ;\ 0)$
$(-1\ ;\ -1) \rightarrow (0\ ;\ -2\sqrt{0,125})$
$(-1\ ;\ 1) \rightarrow (-2\sqrt{2}\ ;\ 0)$



Az $\overset{\wedge}{F_1}$ mátrix által leírt transzformáció

A fekete alakzat a kiinduló egységnégyzet, a piros alakzat a végső állapot.

4.2.2. A második deformációs gradiens

$$\hat{F_2} = \begin{pmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}$$

$$\hat{F_2}^T \hat{F_2} = \begin{pmatrix} 1,44 & 0 \\ 0 & 2,25 \end{pmatrix}$$

Sajátértékek: 1,44 ; 2,25

Sajátvektorok:

$$\vec{r_a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r_b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A nyújtás:

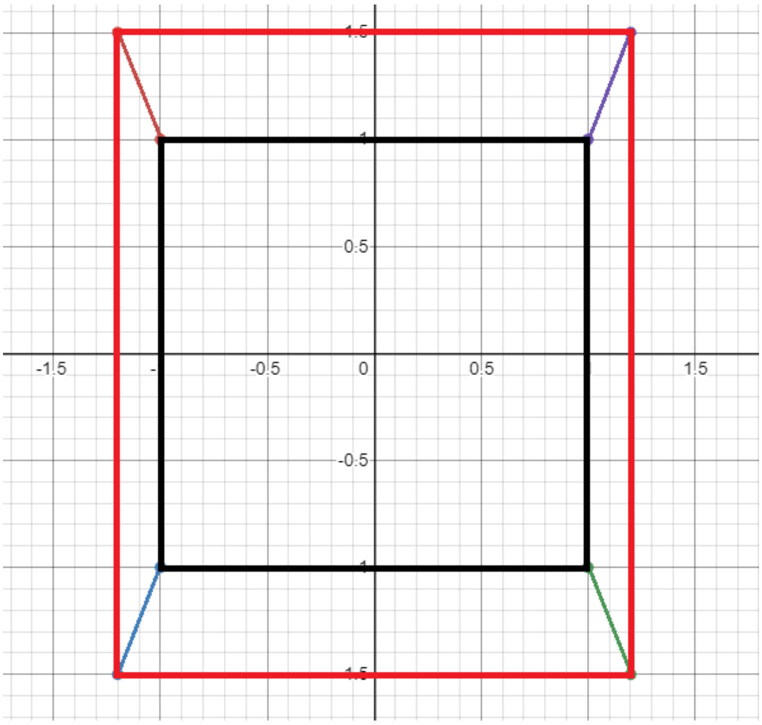
$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 1,2 & 0 \\ 0 & 1,5 \end{pmatrix}$$

A forgatás:

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az $\hat{O}$ mátrix egy 0 szögű forgatást ír le.
Az $\hat{U}$ mátrix determinánsa nem 1, ezért van térfogatváltozás. A nyírás a sajátvektorok mentén történik, mértékét a sajátértékek jellemzik.

A négyzet csúcsai:
$(1\ ;\ 1) \rightarrow (1,2\ ;\ 1,5)$
$(1\ ;\ -1) \rightarrow (1,2\ ;\ -1,5)$
$(-1\ ;\ -1) \rightarrow (-1,2\ ;\ -1,5)$
$(-1\ ;\ 1) \rightarrow (-1,2\ ;\ 1,5)$



Az $\hat{F_2}$ mátrix által leírt transzformáció

A fekete alakzat a kiinduló egységnégyzet, a piros alakzat a végső állapot.

4.2.3. A harmadik deformációs gradiens

$$\overset{\wedge}{F_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\overset{\wedge}{F_3}^T \overset{\wedge}{F_3} = \begin{pmatrix} 4,04 & 0,5 \\ 0,5 & 0,29 \end{pmatrix}$$

Sajátértékek: 4,10552184 ; 0.22447816

Sajátvektorok:

$$\vec{r_a} = \begin{pmatrix} 0,9915228 \\ 0,12993279 \end{pmatrix} \qquad \vec{r_b} = \begin{pmatrix} -0,12993279 \\ 0,9915228 \end{pmatrix}$$

A nyújtás:

$$\hat{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0,2 \\ 0,2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

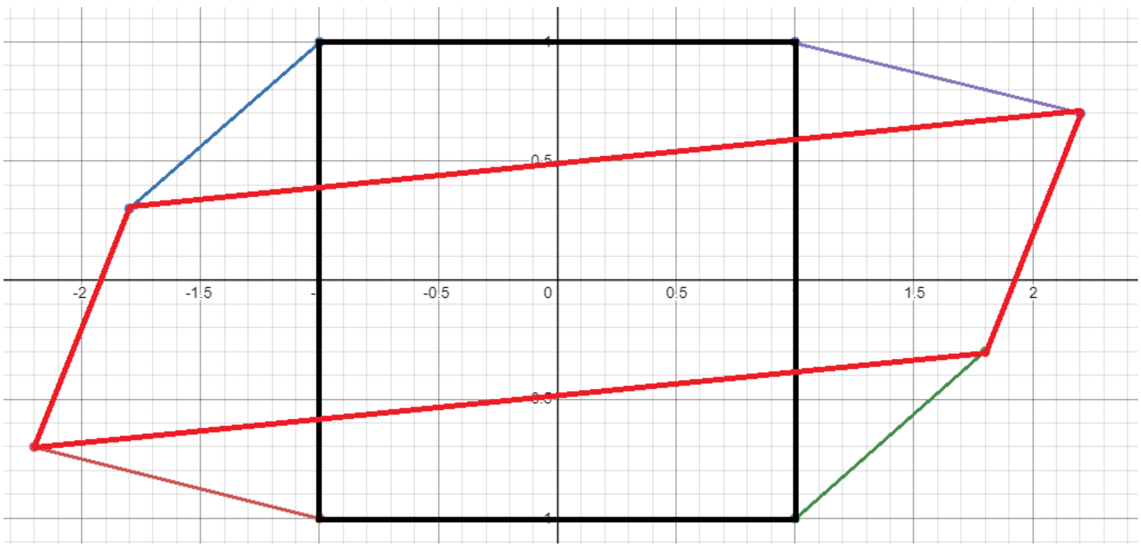
A forgatás:

$$\hat{O} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az $\hat{O}$ mátrix egy 0 szögű forgatást ír le.

Az $\hat{U}$ mátrix determinánsa nem 1, ezért van térfogatváltozás. A nyírás a sajátvektorok mentén történik, mértékét a sajátértékek jellemzik.
A négyzet csúcsai:

$(1\ ;\ 1) \rightarrow (2,2\ ;\ 0,7)$
$(1\ ;\ -1) \rightarrow (1,8\ ;\ -0,3)$
$(-1\ ;\ -1) \rightarrow (-2,2\ ;\ -0,7)$
$(-1\ ;\ 1) \rightarrow (-1,8\ ;\ 0,3)$



Az $\overset{\wedge}{F_3}$ mátrix által leírt transzformáció

A fekete alakzat a kiinduló egységnégyzet, a piros alakzat a végső állapot.