Hőtan és folytonos közegek mechanikája (emelt szint) Beadandó

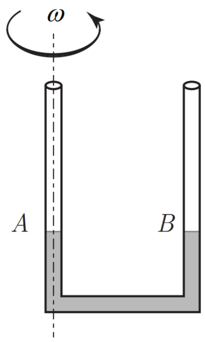
Brindza Mátyás (Z2R8XS)

2020.04.16.

7. Folyadékok II.

7.1. BernoUlli

FELADAT:
Egy szögletes, alul vízszintes, oldalt függőleges szárú, U alakú, két végén nyitott csőben folyadék van (lásd az ábrát). A cső vastagsága elhanyagolható a hosszához képest. A csövet az U egyik szára tengelyében állandó ω szögsebességgel forgatjuk. A forgástengelyhez közelebbik vízszint helyzetét jelöli A, a forgástengelytől távolabbikat B. Hogyan viszonyul a vízszint különbsége az A és B pontok között az ω szögsebesség függvényében?



Egy U alakú csőben folyadék van egyensúlyban, majd megforgatjuk a csövet az U egyik szára tengelyében.

MEGOLDÁS:
A folyadék felosztható három részre.
Az első rész, melyet függőlegesen átdöf a forgástengely, sem vízszintes sem függőleges irányban nem gyorsul, ha elhanyagolható a keresztmetszete. A "belső könyök" alján fellép egy nyomás, melyet a felette lévő folyadék oszlop hidrosztatikus nyomása és a külső nyomás alkot.

$$p_A = \varrho \cdot g \cdot h_A + p_0$$

A második résznek van gyorsulása, méghozzá vízszintes irányú - a körmozgás dinamikai feltételei miatt, mivel tömegközéppontja körpályán halad. E résznek a hidrosztatikai nyomása elhanyagolható, mivel a keresztmetszet is elhanyagolható a hosszához képest. Bár a keresztmetszet elhanyagolható, jobban látszik a lényeg, ha erőkkel van felírva ez az egyenlet. Ugyanis e szakasz belső részén fellép p_A nyomás, külső részén valami p_B nyomás, valamint a centripetális erő a folyadékrész tömegközéppontjában hat befelé. Ha beáll az egyensúly A és B folyadékszintek között, akkor mondható, hogy "a centripetális erőt p_A és p_B különbsége szolgáltatja". Mondható úgy is, hogy a centrifugális erő kilök némi folyadékot a belső szárból a külsőbe - vagyis B pont alatt nagyobb lesz a nyomás, mint A pont alatt. Ha beleülünk a vízszintes szakaszba, B felől hat egy erő, ami éppen kompenzálja az A felől ható erőt és a centrifugális erőt.

$$A \cdot p_A + m \cdot r \cdot \omega^2 = A \cdot p_B$$

A folyadékrész tömege sűrűségénék és térfogatának szorzata, az r pedig a centrifugális erő támadáspontja, azaz $\frac{L}{2}$, ahol L a vízszintes rész hossza.

$$A \cdot p_A + \varrho \cdot A \cdot L \cdot \frac{L}{2} \cdot \omega^2 = A \cdot p_B$$

$$p_A + \frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot L^2 \cdot \omega^2 = p_B$$

$$\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot L^2 \cdot \omega^2 = p_B - p_A$$

A harmadik rész függőleges, itt a külső könyökben p_B a nyomás. Ez a rész is körmozgást végez, azonban a pályán tartó erőt szolgáltatja a cső fala. E folyadékrész alján ható nyomást is a külső nyomás és a hidrosztatikai nyomás alkotja.

$$p_B = \varrho \cdot g \cdot h_B + p_0$$

E három egyenletből:

$$\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot L^2 \cdot \omega^2 = \varrho \cdot g \cdot (h_B - h_A)$$

$$\frac{1}{2} \cdot L^2 \cdot \omega^2 = g \cdot (h_B - h_A)$$

$$(h_B - h_A) = \frac{1}{2g} \cdot L^2 \cdot \omega^2$$

Az A és B vízszintek különbsége arányos a szögsebesség négyzetével.

Megjegyzés 1 : A szintkülönbség L négyzetével is arányos, mert ha megnöveljük L-t, nagyobb víztömeget kell körpályán tartani és a centrifugális erő "támadáspontja" is "elmozdul". A tehetetlenségi nyomaték fogalma erre magyarázatot adhat.

Megjegyzés 2 : Vegyük ezt az egyenletet.

$$\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot A \cdot L^2 \cdot \omega^2 = \varrho \cdot g \cdot A \cdot (h_B - h_A)$$

A jobb oldal lényegében a külső szárban lévő folyadéktöbblet súlya.

$$\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot A \cdot L^2 \cdot \omega^2 = m \cdot g$$

Szorozzuk meg az egyenlőséget $\frac{h_B - h_A}{2}$-vel.

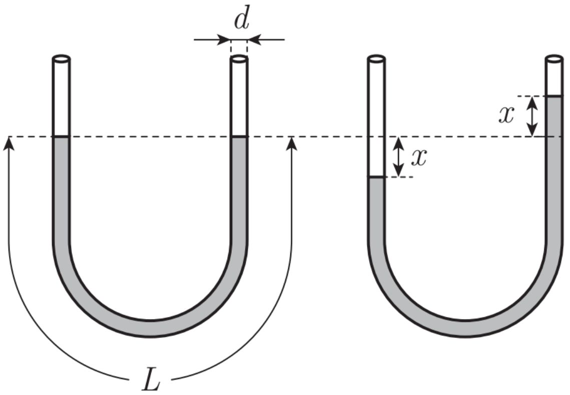
$$\frac{1}{2} \cdot \varrho \cdot A \cdot L^2 \cdot \omega^2 \cdot \frac{h_B - h_A}{2} = m \cdot g \cdot \frac{h_B - h_A}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\frac{m}{2} \cdot L^2) \cdot \omega^2 \cdot = m \cdot g \cdot \frac{h_B - h_A}{2}$$

Az átáramlás felfogható úgy, hogy a belső szárból $\frac{m}{2}$ tömegű folyadék ment át a külső szárba. Lehetne azt is mondani, hogy ennek az $\frac{m}{2}$ tömegű folyadéknak a forgási energiája "arra fordítódott", hogy a külső szárban A-hoz képest megnövekedjen a helyzeti energia 0-ról $m \cdot g \cdot \frac{h_B - h_A}{2}$-re (mivel ilyen magasan van a többletfolyadék tömegközéppontja A-hoz képest).

7.2. Csöves 2

FELADAT:
Egy U alakú, d átmérőjű, kör keresztmetszetű nyitott csőben folyadék van, L hosszban, $d << L$. Az egyik csövön egy pillanatra levegőt befújva egy kicsit lecsökkentjük a folyadékszint magasságát x_0-val, majd figyeljük a vízszint mozgását. Milyen mozgást fog végezni? Tételezzük fel, hogy a cső adott keresztmetszete mentén lévő folyadékrészre a sebességével arányos súrlódási erő lép fel.



Egy U alakú csőben már megint folyadék van.

MEGOLDÁS:
Tüntessünk ki egy pontot, aminek a mozgását vizsgáljuk. Legyen ez a pont a folyadéknak a cső bal oldalán lévő felszínén. Tegyük fel, hogy a pont nem tér le a folyadék felszínéről. Ha ezt a pontot vizsgáljuk, leírható vele a bal oldalon történő szintváltozás, mint az idő függvénye. Ha a folyadék összenyomhatatlan, a jobb oldali felszín változása is leírható. Ekkor a jobb oldali felszínen lévő pont mozgása a bal oldaliéhoz képest tükrözve van az egyensúlyi helyzetre.
Pozitív kitérés történjen lefelé. Az $x(t)$ függvényt keresendő, ahol $x(0) = x_0$.
A nyomáskülönbségből adódó erő nagysága egyenlő a nyomás és a keresztmetszet szorzatával. A megfelelő hidrosztatikai nyomáskülönbség $\varrho \cdot g \cdot (2x)$, és a keresztmetszet $\frac{1}{4}\pi \cdot d^2$. A súrlódás arányos a sebességgel, tehát $\lambda x'$ alakú lesz. E két erő az egész folyadékot mozgatja, tehát $x"(t)$ az egész folyadék tömegével lesz fordítottan arányos. A folyadék össz tömege legyen m. Így a kitüntetett pont ily módon viselkedik.

$$m \cdot x"(t) = -\lambda x'(t) - \varrho \cdot g \cdot (2x(t)) \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot d^2$$

$$m \cdot x"(t) = -\lambda x'(t) - (\varrho \cdot g \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot d^2)x(t)$$

A nyomáskülönbségből adódó erő felfelé, azaz negatív irányba nyomja a pontot, ha annak kitérése pozitív. Ha a sebesség pozitív, akkor a súrlódási erő negatív irányba mutat, mivel gátolni szeretné a mozgást. Az egyenletből látszik, hogy csillapított rezgőmozgást fog végezni a folyadék felszíne.
A megoldás folyamatának könnyítése érdekében több konstans szorzata helyettesíthető egy-egy újabb konstanssal.

$$x"(t) = \frac{-\lambda}{m}x'(t) - (\varrho \cdot g \cdot \frac{1}{2m}\pi \cdot d^2)x(t)$$

$$a = \frac{\lambda}{m} = \frac{4\lambda}{\varrho L d^2}$$

$$b = \varrho \cdot g \cdot \frac{1}{2m}\pi \cdot d^2 = \frac{2g}{L}$$

$$x"(t) = -a \cdot x'(t) - b \cdot x(t)$$

Ahol a és b szigorúan pozitív számok.
Keressük a differenciál egyenlet megoldását $k \cdot e^{\alpha t}$ alakban. Mérjük az időt attól a pillanattól, hogy a bal oldali felszín x_0-lal van az egyensúlyi helyzet alatt - így nem kell egy konsanst írni a kitevőbe. Ekkor

$$k \cdot \alpha^2 \cdot e^{\alpha t} + a \cdot k \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t} + b \cdot k \cdot e^{\alpha t} = 0$$

Triviális megoldás, ha $k = 0$, valamint $e^{bármi}$ sosem nulla.

$$\alpha^2 + a \cdot \alpha + b = 0$$

A karakterisztikus egyenlet gyökei a másodfokú megoldóképletből:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 - 4 \cdot b})$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{a^2 - 4 \cdot b})$$

A gyök alatt nem feltétlen pozitív szám van, így további két részre szedhető a megoldás.

Ha $a^2 - 4 \cdot b > 0$:

$$\frac{16\lambda^2}{\varrho^2 L^2 d^4} > \frac{8g}{L}$$

$$\frac{2\lambda^2}{\varrho^2 L d^4} > g$$

Ez a dinamikai feltétele annak, hogy a következő állítható legyen:

$$x(t) = x_1 \cdot e^{(-a+\sqrt{a^2-4\cdot b})t} + x_2 \cdot e^{(-a-\sqrt{a^2-4\cdot b})t}$$

Mivel $x(0) = x_0$, ezért $x_1 + x_2 = x_0$-nak teljesülnie kell.
Az x_1-hez tartozó exponenciális függvény lassabban csökken, mint az x_2-höz tartozó. Ha x_1-nek és x_2-nek megegyezik az előjele, akkor a két exponenciális függvény lecsengése összeadódik, azaz x az x_0 helyzetből közelíteni fog az egyensúlyi helyzethez. Ha x_1 és x_2 ellentétes előjelűek, úgymond kivonódnak a lecsengések, ezáltal a folyadék felszínén kitüntetett pont áthalad az egyensúlyi helyzeten, tovább megy valamennyit (x_0-nál biztosan kisebb távolságot), majd visszafordulva tartani fog az egyensúlyi helyzethez.

Ha $a^2 - 4 \cdot b < 0$:

$$\frac{16\lambda^2}{\varrho^2 L^2 d^4} < \frac{8g}{L}$$

$$\frac{2\lambda^2}{\varrho^2 L d^4} < g$$

Ez a dinamikai feltétele annak, hogy a következő állítható legyen:

$$x(t) = x_1 \cdot e^{(-a+i\sqrt{4\cdot b-a^2})t} + x_2 \cdot e^{(-a-i\sqrt{4\cdot b-a^2})t}$$

Itt már kitértünk a komplex számok halmazára, x_1 és x_2 gond nélkül lehet komplex. Ha véletlenül egymás konjugáltjai, akkor lehet egyszerűsíteni az egyenlőségen.
Felírható:

$$x_1 = |x_1| \cdot e^{i\phi}$$

$$x_2 = |x_1| \cdot e^{-i\phi}$$

Innen

$$x(t) = |x_1| \cdot e^{-a\cdot t}(e^{i((\sqrt{4\cdot b-a^2})t+\phi)} + e^{(-i((\sqrt{4\cdot b-a^2})t+\phi)})$$

Tudjuk, hogy $2cos(x) = e^{ix} + e^{-ix}$, tehát

$$x(t) = |x_1| \cdot e^{-a\cdot t} 2cos((\sqrt{4 \cdot b - a^2})t + \phi)$$

Kezdőfeltételekből:

$$|x_1| \cdot 2cos(\phi) = x_0$$

Minden, ami nem a koszinusz függvény felfogható úgy, mintha az amplitúdó változását írná le. Tehát a folyadék felszínei rezegni fognak az egyensúlyi helyzet körül, csökkenő amplitúdóval.
Papíron végtelen idő múlva érik el az egyensúlyi helyzetet (az előző megoldáshoz hasonlóan), ám a gyakorlatban ha "beér egy ε tartományba", akkor mondható, hogy megálltak. Praktikus nem foglalkozni e makroszkopikus problémánál a nagyon nagyon pici kitérésekkel - ilyeneknél akár eddig nem figyelembe vett jelenségek (pl. párolgás, már nem elhanyagolható keresztmetszet, a folyadék anyagi tulajdonságai) meggátolják, hogy a matematikai modell képviselje a valóságot.