Hőtan és folytonos közegek mechanikája (emelt szint) Beadandó

Brindza Mátyás (Z2R8XS)

2020.04.30.

9. Termodinamika I

9.1. Kvázisztatikus, nyomás

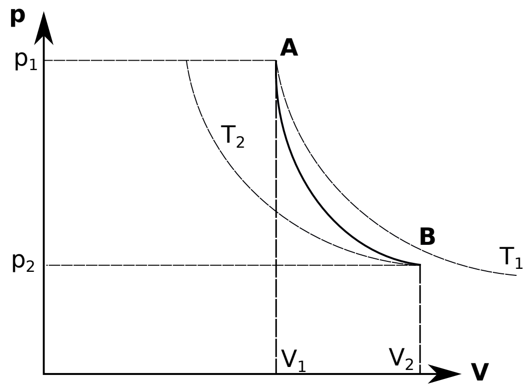
FELADAT:

Ideális gáz p_1 nyomású, V_1 térfogatú állapotából, szabad adiabatikus tágulás során a p_2 nyomású és $V_2 > V_1$ térfogatú állapotba jut. Ezután állandó nyomáson, kvázisztatikusan V_1 térfogatúra nyomjuk össze, majd ugyancsak kvázisztatikusan addig melegítjük,amíg a nyomása ismét p_1 nem lesz. Nyílt- vagy körfolyamatról van-e szó? Rajzoljunk ábrasorozatot az egyes állapotokhoz tartozó mennyiségeket is jelölve! Határozzuk meg a folyamat során leadott hőmennyiséget! Mely egyenleteken és hogyan kell módosítani, ha nem ideális gázunk van?

MEGOLDÁS:

Legyen a belső energia kezdetben $U = U_0$.

Az első folyamat során megvátozik a hőmérséklet, a nyomás és a térfogat is.



Az első folyamat

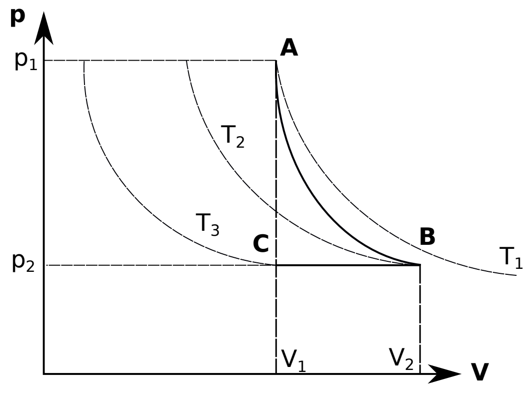
Az adiabatikus állapotváltozás során a gáz nem ad le és nem vesz fel hőt, ezért $Q_1 = 0$.

Az adiabatikus munka $W_1 = n \cdot C_V \Delta T$. Esetünkben $\Delta T = T_2 - T_1$. A W_1 értéke negatív lesz, ami tágulásnál el is várható. Így a belső energia:

$$U_1 = U_0 + W_1 + Q_1$$

$$U_1 = U_0 + n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1)$$

A második folyamat során állandó nyomás mellett változik a hőmérséklet és a térfogat.



Az első és a második folyamat

A térfogati munka általánosan

$$W = -\int_{V_1}^{V_2} p \cdot dV$$

Konstans $f(x) = c$ függvény integrálja a és b határokon $(b - a) \cdot c$. Ebben az esetben

$$W = -\int_{V_2}^{V_1} p_2 \cdot dV$$

ahol $V_2 > V_1$. Így

$$W_2 = -p_2 \cdot (V_1 - V_2)$$

$$W_2 = p_2 \cdot (V_2 - V_1)$$

Ez pozitív érték lesz, ami összenyomásnál várható. A hőcsere izobár állapotvátozás során

$$Q = n \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1)$$

Esetünkben

$$Q_2 = n \cdot C_p \cdot (T_3 - T_2)$$

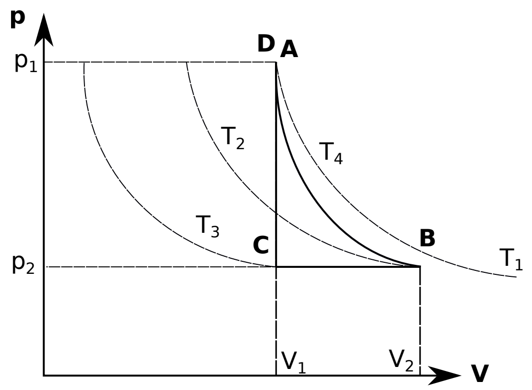
Ez az érték negatív lesz. Intuitívan ha egy gázt összenytomunk és közben nem változik a nyomása, akkor le kellett hűlnie.

Így a belső energia

$$U_2 = U_1 + W_2 + Q_2$$

$$U_2 = (U_0 + n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1)) + (p_2 \cdot (V_2 - V_1)) + (n \cdot C_p \cdot (T_3 - T_2))$$

A harmadik folyamat során állandó térfogat mellett változik a hőmérséklet és a nyomás.



Az első, a második és a harmadik folyamat

A térfogati munka itt $W_3 = 0$, mivel nem változik a térfogat. Ennél a folyamatnál a hőcsere mértéke

$$Q_3 = n \cdot C_V \cdot (T_4 - T_3)$$

Ez várhatóan pozitív szám lesz. A melegítés definíció szerint abban nyilvánul meg, hogy a melegített test hőt vesz fel.

A belső energia:

$$U_3 = U_2 + W_3 + Q_3$$

$$U_3 = (U_0 + n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1) + p_2 \cdot (V_2 - V_1) + n \cdot C_p \cdot (T_3 - T_2)) + (n \cdot C_V \cdot (T_4 - T_3))$$

$$U_3 = U_0 + n \cdot C_V \cdot (T_2 + T_4 - T_1 - T_3) + (p_2 \cdot V_2 - p_2 \cdot V_1) + n \cdot C_p \cdot (T_3 - T_2)$$

A $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ összefüggést felhasználva

$$p_2 \cdot V_2 = n \cdot R \cdot T_2$$

$$p_2 \cdot V_1 = n \cdot R \cdot T_3$$

Továbbá ideális gázok esetén $R = C_p - C_v$. Innen a belső energia a folyamat végén:

$$U_3 = U_0 + n \cdot C_V \cdot (T_2 + T_4 - T_1 - T_3) + (n \cdot R \cdot T_2) - (n \cdot R \cdot T_3) + n \cdot C_p \cdot (T_3 - T_2)$$
$$U_3 = U_0 + n \cdot C_V \cdot (T_2 + T_4 - T_1 - T_3) + n \cdot R \cdot (T_2 - T_3) + n \cdot C_p \cdot (T_3 - T_2)$$
$$U_3 = U_0 + n \cdot C_V \cdot (T_2 + T_4 - T_1 - T_3) + n \cdot (C_p - C_V) \cdot (T_2 - T_3) + n \cdot C_p \cdot (T_3 - T_2)$$
$$U_3 = U_0 + n \cdot C_V \cdot (T_2 + T_4 - T_1 - T_3) - n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_3)$$
$$U_3 = U_0 + n \cdot C_V \cdot (T_4 - T_1)$$

Körfolyamat-e az $ABCD$ állapotváltozás? Ideális gáz esetén

Az A pontban: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = n \cdot R$

Az D pontban: $\frac{p_1 \cdot V_1}{T_4} = n \cdot R$

Innen $T_1 = T_4$. Ellentmondásba futunk-e?

$$U_3 = U_0 + n \cdot C_V \cdot (T_4 - T_1)$$
$$U_3 = U_0$$

Az $ABCD$ állapotvátlozás során nem változott a belső energia sem. Ez körfolyamat.

A Q_1, Q_2 és Q_3 pozitív volt, ha a gáz felvett bizonyos hőmennyiséget. A leadott hőmennyiség ennek (-1)szerese.

$$Q = -(Q_1 + Q_2 + Q_3) = -(n \cdot C_p \cdot (T_3 - T_2) + n \cdot C_V \cdot (T_4 - T_2))$$
$$Q = -(Q_1 + Q_2 + Q_3) = n \cdot C_p \cdot (T_2 - T_3) + n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1)$$

Reális gázok esetén a térfogati munka másképp néz ki, mivel a

$$p = \frac{n \cdot R \cdot T}{(V - n \cdot b)} - a \cdot (\frac{n}{V})^2$$

összefüggést kellene kiintegrálni. A hőcserébe is bele kellene piszkálni, kivizsgálni hol vannak állapotváltozások, a látens hő figyelembevétele. Továbbá egyes helyeken az átalakítások nem a $pV = nRT$ egyenlet segítségével történne.

9.2. Durrants be!

FELADAT:

A V térfogatú hőszigetelt szobácska nem hermetikusan zárt, a külső nyomás p. Mennyi hő szükséges, hogy a szobában lévő levegő hőmérsékletét T_1-ről T_2-re emeljük? Tekintsük a levegőt ideális gáznak!

MEGOLDÁS:

A szoba térfogata nem változik. A hőmérséklet megemelése azt jelenti, hogy fixen beállt a teljesn szobában a hőmérséklet a kezdő- és a végállapotban is - azaz nincs olyan, hogy felmelegítjük a szobát, és melegítés után még szivárog a levegő -, tehát a nyomás is állandónak tekinthető, mivel nem magát a folyamatot írjuk le, hanem a kezdő- és a végállapot közti összefüggést. Ha a hőmérsékletet változtatjuk, ideálisnak gáznak tekintve a levegőt, a $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$ képletben csak az anyagmennyiség változhat - mivel R is állandó. Így

$$n \cdot T = const.$$

Megjegyzés: A "hőmérséklet" helyett "beállt hőmérséklet"-et kell érteni. Ideális esetben a gáz minden pontban egyenletesen melegszik - feltehetőleg emögött is egyrészt a "beállt hőmérséklet" fogalma rejtőzik. Itt érdemes külön kikötni, hogy beállt a hőmérséklet, mert egyébként számolni kellene a szoba felületén lévő hézag áteresztő-képességével, muszáj lenne egy nem mindig elhanyagolható időfüggést is figyelembe venni. Nem lenne kvázisztatikus a folyamat, nem lehetne az eddigi értelemben beszélni állapotjellzőkről.

A levegő térfogatának 99%-a N_2 és O_2, szabádsági foka kellőképp jó közelítéssel $f = 5$. Tudjuk, hogy a belső energia

$$U = \frac{f}{2} n \cdot R \cdot T$$

Kezdeti állapotban:

$$U_1 = \frac{5}{2} n_1 \cdot R \cdot T_1$$

Végső állapotban:

$$U_2 = \frac{5}{2} n_2 \cdot R \cdot T_2$$

Felfogható úgy is, hogy U_1-hez jött egy Q közölt hő, ami kilökött valamennyi gázt a szobából W munka segítségével és az U_2 állapotot eredményezte. Fent megállapításra került, hogy a szobán belül $n \cdot T = const.$, így $U_1 = U_2$, azaz

$$Q = W$$

$$Q = p \cdot \Delta V$$

Nagyon fontos, hogy ez a folyamat nem vehető a standard értelemben izobár tágulásnak, mert a kiszökött gáz hőmérsékletét már nem fogja megváltoztatni a szobában lévő lévegővel közölt hő, sőt mitöbb, a kiszökött gáz koncentrációja más lesz a bent maradt gázéhoz képest.

$$\varrho(n_b) = \frac{n_b}{V}$$

ahol n_b a bent lévő anyagmennyiség. Ebből

$$V = \frac{n_b}{\varrho(n_b)}$$

Vegyük úgy, hogy ha kiszivárog egy Δn anyagmennyiségű levegő, akkor a sűrűsége megegyezik a szobában lévő levegő sűrűségével, és így ΔV térfogata lesz.

$$\Delta V = \frac{\Delta n}{\varrho(n_b)}$$

Tudjuk, hogy $n_b \cdot T = const. = n_1 \cdot T_1$, így felállítható a kiszivárgott térfogat hőmérsékletfüggése. Itt is hangsúlyozva van, hogy a beállt hőmérsékletről van szó. Akkor kapunk szép függvényt, ha a hézag áteresztő-képességét nem múlja felül a tágulás. Mondjuk azt, hogy a tágulás lassú, (mint egy szoba melegítésénél általában), vagyis a hézeg képes rögtön kiereszteni az összes levegőt. Ha egy Δn levegő kiáramlik, miközben a hőmérséklet ΔT-vel emelkedik, akkor:

$$(n_b - \Delta n) \cdot (T + \Delta T) = n_b \cdot T$$

$$n_b \cdot T - \Delta n \cdot T + n_b \cdot \Delta T - \Delta n \cdot \Delta T = n_b \cdot T$$

A másodrendben kicsi tagokat hanyagoljuk el.

$$n_b \cdot \Delta T = \Delta n \cdot T$$
$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta n}{n_b}$$

Ekkor

$$\Delta V = \frac{\Delta n}{n_b/V}$$
$$\Delta V = \frac{\Delta T}{T} V$$

Az kiszivárgott gáz térfogata legyen V_k.

$$V_k = \sum \Delta V = \sum \frac{\Delta T}{T} V$$
$$V_k = V \int_{T_1}^{T_2} \frac{1}{T} dT$$
$$V_k = ln(\frac{T_2}{T_1}) \cdot V$$

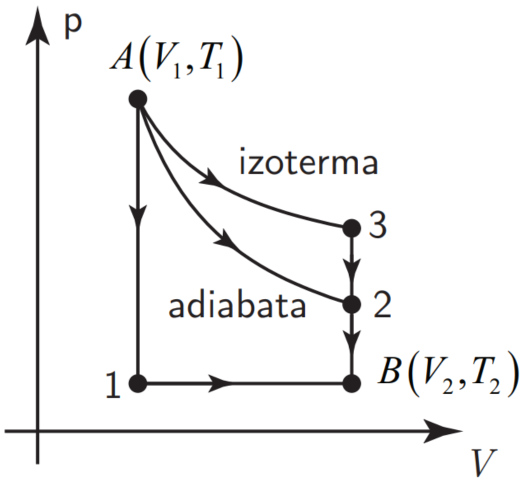
A $Q = p \cdot \Delta V$ képletben $\Delta V = V_k$.

$$Q = p \cdot ln(\frac{T_2}{T_1}) \cdot V$$

9.3. Minden út B-be vezet

FELADAT:

Az ábra egy ideális gáz állapotváltozásait mutatja. Mekkora a belső energia különbsége az A és B pontok között? Határozzuk meg a munkavégzést, illetve a felvett hőt az $A1B$, az $A2B$ és az $A3B$ kvázisztatikus folyamatokra! Adott a C_v hőkapacitás és az n anyagmennyiség.



Ideális gáz állapotváltoztatásai, amely során A-ból B-be jutunk el izobár, izoterm, izochor vagy adiabatikus módo-kon.

MEGOLDÁS:

A1B

Egy izochor és egy izobár folyamat történik egymás után.
Az izochor állapotváltozásnál nincs munkavégzés.

$$W_a = 0$$

A felvett hő

$$Q_a = n \cdot C_V \cdot (T_3 - T_1)$$

Az izobár állapotváltozásnál a munkavégzés

$$W_b = -p \cdot (V_2 - V_1) = \frac{1}{V_2} n \cdot R \cdot T_2 \cdot (V_1 - V_2)$$

A felvett hő

$$Q_b = n \cdot C_p (T_2 - T_3)$$

Összesen:

$$W_{A1B} = W_a + W_b = \frac{1}{V_2} n \cdot R \cdot T_2 \cdot (V_1 - V_2)$$

$$Q_{A1B} = Q_a + Q_b = n \cdot C_V \cdot (T_3 - T_1) + n \cdot C_p (T_2 - T_3) = n \cdot (C_V \cdot (T_3 - T_1) + (R + C_V) \cdot (T_2 - T_3))$$

$$T_3 = \frac{1}{n \cdot R} (\frac{1}{V_2} n \cdot R \cdot T_2) \cdot V_1 = \frac{V_1}{V_2} T_2$$

$$Q_{A1B} = n \cdot (C_V \cdot (\frac{V_1}{V_2} T_2 - T_1) + (R + C_V) \cdot (1 - \frac{V_1}{V_2}) \cdot T_2)$$

A2B

Egy adiabatikus és egy izochor folyamat történik egymás után.
Az adiabatikus állapotváltozásnál a munkavégzés egyenlő a belső energia megváltozásával

$$W_a = n \cdot C_V (T_4 - T_1) = \frac{-p_1 \cdot V_1}{\kappa - 1} (1 - (\frac{V_1}{V_2})^{\kappa - 1}) = \frac{-p_1 \cdot V_1}{R/C_V 1} (1 - (\frac{V_1}{V_2})^{R/C_V}) = C_V \cdot \frac{-p_1 \cdot V_1}{R} (1 - (\frac{V_1}{V_2})^{R/C_V})$$

$$W_a == -n \cdot C_V \cdot T_1 \cdot (1 - (\frac{V_1}{V_2})^{R/C_V})$$

Innen kifejezhető T_4

$$T_4 = (\frac{V_1}{V_2})^{R/C_V} T_1$$

A felvett hő

$$Q_a = 0$$

Az izochor állapotváltozásnál nincs munkavégzés.

$$W_b = 0$$

A felvett hő

$$Q_b = n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_4)$$

Összesen:

$$W_{A2B} = -n \cdot C_V \cdot T_1 \cdot (1 - (\frac{V_1}{V_2})^{R/C_V})$$

$$Q_{A2B} = n \cdot C_V \cdot (T_2 - (\frac{V_1}{V_2})^{R/C_V} T_1)$$

A3B

Egy izoterm és egy izochor folyamat történik egymás után.
Az izoterm állapotváltozásnál a nyomás

$$p_a(V) = n \cdot R \cdot T_1 \frac{1}{V}$$

A munkavégzés:

$$W_a = -\int_{V_1}^{V_2} p_a(V)dV = -n \cdot R \cdot T_1 \cdot ln(\frac{V_2}{V_1})$$

Mivel a hőmérséklet nem változik, a belső energia sem változik, ezért a $W_a = -Q_a$. Most W_a negatív lesz, mert táguláskor a környezet negatív munkát végez a gázon, miközben a gáz hőt vesz fel.

$$Q_a = n \cdot R \cdot T_1 \cdot ln(\frac{V_2}{V_1})$$

Az izochor folyamatnál

$$W_b = 0$$

A felvett hő

$$Q_b = n \cdot C_V (T_2 - T_1)$$

Összesen:

$$W_{A3B} = W_a + W_b = -n \cdot R \cdot T_1 \cdot ln(\frac{V_2}{V_1})$$

$$Q_{A3B} = Q_a + Q_b = n \cdot R \cdot T_1 \cdot ln(\frac{V_2}{V_1}) + n \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1)$$

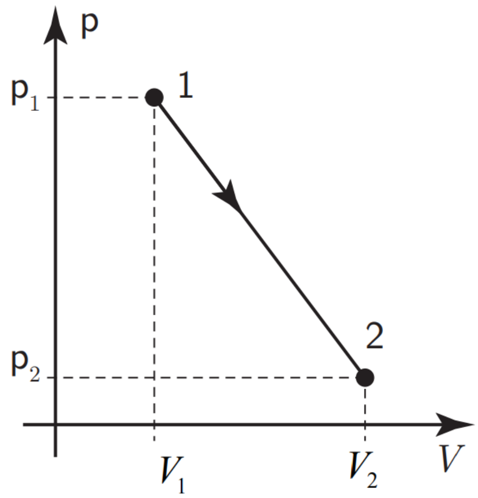
9.4. Hosszú lesz

FELADAT:

Egy mólnyi ideális gázt az ábrán látható úton viszünk át kvázisztatikusan az 1-es állapotból a 2-es állapotba.

1. A folyamat mely részén lesz hőfelvétel és mely részén lesz hőleadás?

2. Határozzuk meg a gáz mólhőjét a folyamat során, ha ismert az állandó térfogat mellett mért mólhő! Lehet-e a folyamat során 0 a mólhő? Lehet-e végtelen?



Ideális gáz állapotváltozása, ami a $p - V$ síkon egyenes. Nem tartalmaz nevezetes részfolyamatot.

MEGOLDÁS:

1.

A nyomás és a térfogat viszonya:

$$p(V) = a + b \cdot V$$

$$b = \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}$$

$$p(V_1) = p_1 = a + \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} V_1$$

$$a = p_1 - \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1} V_1$$

Továbbra is érvényes, hogy

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T$$

$$T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R}$$

Így

$$T = \frac{(a + b \cdot V) \cdot V}{n \cdot R}$$

Legyen U a belső energia megváltozása az 1.-es állapothoz képest.

$$U = n \cdot C_V \cdot (T - T_1)$$

$$U = n \cdot C_V \cdot (\frac{(a + b \cdot V) \cdot V}{n \cdot R} - T_1)$$

Legyen W az 1.-es állapottól számítva a végzett munka.

$$W = -\int_{V_1}^{V} p_a(V) dV = -[a \cdot V + \frac{b}{2} V^2]_{V_1}^{V} = -(a \cdot V + \frac{b}{2} V^2) + (a \cdot V_1 + \frac{b}{2} V_1^2)$$

Tudjuk, hogy

$$Q = U - W$$

Nézzük, hol vált előjelet. Hőt ad le a gáz, ha

$$Q = U - W < 0$$

$$Q = (n \cdot C_V \cdot (\frac{(a+b \cdot V) \cdot V}{n \cdot R} - T_1)) - (-(a \cdot V + \frac{b}{2}V^2) + (a \cdot V_1 + \frac{b}{2}V_1^2)) < 0$$

$$n \cdot C_V \cdot (\frac{(a+b \cdot V) \cdot V}{n \cdot R} - T_1) + (a \cdot V + \frac{b}{2}V^2) - (a \cdot V_1 + \frac{b}{2}V_1^2) < 0$$

$$C_V \cdot \frac{(a+b \cdot V) \cdot V}{R} - n \cdot C_V \cdot T_1 + a \cdot V + \frac{b}{2}V^2 < a \cdot V_1 + \frac{b}{2}V_1^2$$

$$2C_V \cdot (a+b \cdot V) \cdot V - 2n \cdot R \cdot C_V \cdot T_1 + 2a \cdot R \cdot V + R \cdot \ b \cdot V^2 < 2R \cdot a \cdot V_1 + R \cdot b \cdot V_1^2$$

$$2C_V \cdot a \cdot V + 2C_V \cdot b \cdot V^2 + 2a \cdot R \cdot V + R \cdot \ b \cdot V^2 < 2R \cdot a \cdot V_1 + R \cdot b \cdot V_1^2 + 2n \cdot R \cdot C_V \cdot T_1$$

$$(R \cdot \ b + 2C_V \cdot b) \cdot V^2 + (2C_V \cdot a + 2a \cdot R) \cdot V < 2R \cdot a \cdot V_1 + R \cdot b \cdot V_1^2 + 2n \cdot R \cdot C_V \cdot T_1$$

$$(R \cdot \ b + 2C_V \cdot b) \cdot V^2 + (2C_V \cdot a + 2a \cdot R) \cdot V - (2R \cdot a \cdot V_1 + R \cdot b \cdot V_1^2 + 2n \cdot R \cdot C_V \cdot T_1) < 0$$

A másodfokú polinomnak két gyöke van, V_a és V_b. Maximumos másodfokú görbét kapunk, vagyis $V_a < V < V_b$ esetén a parabola x tengely feletti részén vagyunk - tehát $Q > 0$. Amikor $V = V_a$ vagy $V = V_b$, akkor $Q = 0$, azaz nincs hőcsere. Akkor lesz $Q < 0$, amikor $V < V_a$ vagy $V > V_b$.

$$(R \cdot \ b + 2C_V \cdot b) \cdot V^2 + (2C_V \cdot a + 2a \cdot R) \cdot V - (2R \cdot a \cdot V_1 + R \cdot b \cdot V_1^2 + 2n \cdot R \cdot C_V \cdot T_1) < 0$$

Legyenek

$$A = R \cdot \ b + 2C_V \cdot b$$

$$B = 2C_V \cdot a + 2a \cdot R$$

$$C = 2R \cdot a \cdot V_1 + R \cdot b \cdot V_1^2 + 2n \cdot R \cdot C_V \cdot T_1$$

Ekkor

$$V_{ab} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$$

$$V_a = \frac{-B - \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$$

$$V_b = \frac{-B + \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$$

Megjegyzendő, hogy a nevezőben mindkét esetben negatív szám lesz, de a számlálóban is negatív szám van, mivel $A = (R + 2C_V) \cdot b$, ahol a zárójelben pozitív szám van, b pedig negatív.

$$V_a = \frac{-B - \sqrt{B^2 + 4AC}}{2A}$$

$$V_a = \frac{-1}{2A}(+B + \sqrt{B^2 + 4AC})$$

$$V_a = \frac{-1}{2(R + 2C_V) \cdot b}(2(C_V + R) \cdot a + \sqrt{(4(C_V + R)^2 \cdot a^2) + 4((R + 2C_V) \cdot b) \cdot (2R \cdot a \cdot V_1 + R \cdot b \cdot V_1^2 + 2n \cdot R \cdot C_V \cdot T_1)})$$

$$V_a = \frac{-1}{(R + 2C_V) \cdot b}((C_V + R) \cdot a + \sqrt{((C_V + R)^2 \cdot a^2) + ((R + 2C_V) \cdot b) \cdot (2R \cdot a \cdot V_1 + R \cdot b \cdot V_1^2 + 2n \cdot R \cdot C_V \cdot T_1)})$$

$$V_a = \frac{-(C_V + R) \cdot (p_1 - \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}V_1)}{(R + 2C_V) \cdot (\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1})} -$$

$$- \frac{\sqrt{(C_V + R)^2 \cdot (p_1 - \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}V_1)^2 + (R + 2C_V) \cdot (\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}) \cdot (2R \cdot (p_1 - \frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}V_1) \cdot V_1 + R \cdot (\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1}) \cdot V_1^2 + 2n \cdot R \cdot C_V \cdot T_1)}}{(R + 2C_V) \cdot (\frac{p_2 - p_1}{V_2 - V_1})}$$

$$V_a = \frac{-(C_V+R)\cdot(p_1 - \frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1)}{(R+2C_V)\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})} -$$

$$-\frac{\sqrt{(C_V+R)^2\cdot(p_1-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1)^2+(R+2C_V)\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})\cdot(2R\cdot(p_1-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1)\cdot V_1+R\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})\cdot V_1^2+2\cdot R\cdot C_V\cdot T_1)}}{(R+2C_V)\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})}$$

$$V_b = \frac{-(C_V+R)\cdot(p_1 - \frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1)}{(R+2C_V)\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})} +$$

$$+\frac{\sqrt{(C_V+R)^2\cdot(p_1-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1)^2+(R+2C_V)\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})\cdot(2R\cdot(p_1-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1)\cdot V_1+R\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})\cdot V_1^2+2n\cdot R\cdot C_V\cdot T_1)}}{(R+2C_V)\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})}$$

$$V_b = \frac{-(C_V+R)\cdot(p_1 - \frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1)}{(R+2C_V)\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})} +$$

$$+\frac{\sqrt{(C_V+R)^2\cdot(p_1-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1)^2+(R+2C_V)\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})\cdot(2R\cdot(p_1-\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1)\cdot V_1+R\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})\cdot V_1^2+2\cdot R\cdot C_V\cdot T_1)}}{(R+2C_V)\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})}$$

Itt Q az 1.-es állapottól számítva a felvett össz hő. Ahol $Q(V)$ függvénynek a deriváltja előjelet vált, ott megy át a hőfelvétel hőleadásba. A parabolának a maximuma a két nullahely között van. Legyen V_0 az a térfogat, aminél történik a váltás.

$$V_0 = \frac{V_a + V_b}{2}$$

A gyökös részek (V_a és V_b képleteiben a második sor) kiesnek, marad az első sor kétszer és elosztva kettővel.

$$V_0 = \frac{-(C_V+R)\cdot(p_1 - \frac{p_2-p_1}{V_2-V_1}V_1)}{(R+2C_V)\cdot(\frac{p_2-p_1}{V_2-V_1})}$$

Tehát hőfelvétel ha $V < V_0$ és hőleadás ha $V > V_0$.

2.

Tudjuk, hogy

$$C = \frac{1}{n}\frac{\partial Q}{\partial T}$$
$$\delta Q = \delta U - \delta W$$

A δW egy kis trapéz területe, ez expliciten a nyomásra és a térfogatra érzékeny.

$$\delta W = \Delta V \cdot \frac{p(V+\Delta V) + p(V)}{2}$$

A δU expliciten egy kis hőmérsékletváltozásra érzékeny.

$$\delta U = n \cdot C_V \cdot \Delta T$$

Egy fent levezetett összefüggés:

$$T = \frac{(a + b\cdot V)\cdot V}{n\cdot R}$$