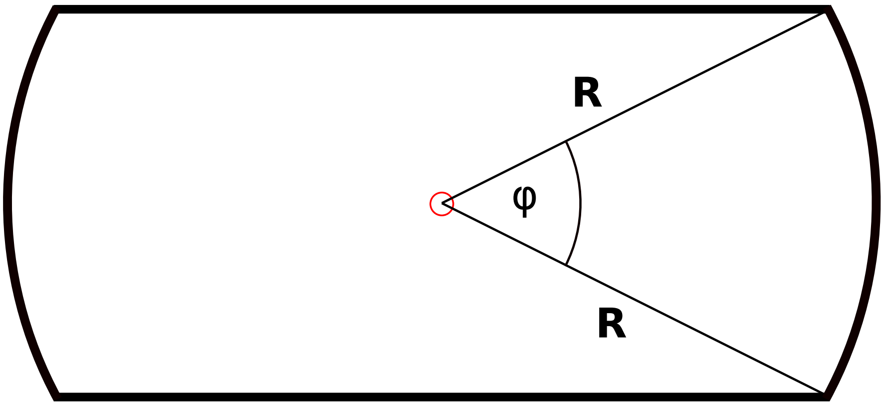
1. Biot-Savart törvény

1.1. Kovács-Párkányi Fizikai Példatár II. / 441. feladat

Az ábrán látható zárt vezetőben I erősségű áram folyik. Határozzuk meg a mágneses térerősséget a szimmetria-középpontban!



1. ábra. A vezető alakja

Feladatot kidolgozta: *Z2R8XS*

Megoldás

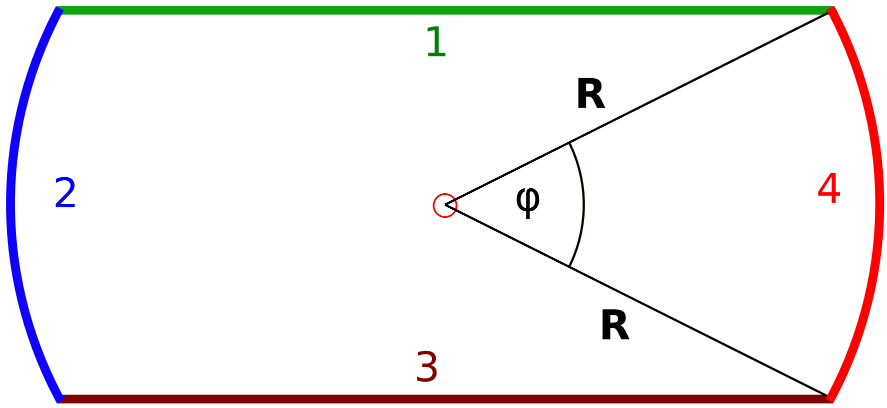
Legyen koordinátarendszer origója a piros kör középpontja - itt határozandó meg a mágneses térerősség. Legyen a rendszer az (x, y) síkban. A vezető alakja jellemezhető egy G görbével. A Biot-Savart törvény értelmében

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_G \frac{I\vec{r} \times d\vec{r}}{r^3}$$

Az áramerősség a görbe mentén konstans I értéket vesz fel, a görbén kívül a tér minden pontjában 0, így kiemelhető az integrál jel elé.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_G \frac{\vec{r} \times d\vec{r}}{r^3}$$

Paraméterezni kell a görbét és kiszámolni az integrált. A görbe kényelmesen felszoltható négy részre az alábbi módon. Folyjon az áram pozitív irányba, azaz óramutató járásával ellentétben. A számok is árulkodnak arról, merre folyik az áram.



2. ábra. A görbe felosztása

Az 1. rész x-szel paraméterezhető:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ R \cdot sin(\frac{\phi}{2}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Azaz

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \cdot sin(\frac{\phi}{2}) \end{pmatrix} dx$$

$$\vec{B}_1(\vec{r}(x)) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{Rcos(\frac{\phi}{2})}^{-Rcos(\frac{\phi}{2})} \frac{1}{(x^2 + R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2}))^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \cdot sin(\frac{\phi}{2}) \end{pmatrix} dx$$

Megfordíthatók az integrációs határok egy előjelváltás fejében.

$$\vec{B}_1(x) = \frac{\mu_0 I R sin(\frac{\phi}{2})}{4\pi} \int_{-Rcos(\frac{\phi}{2})}^{Rcos(\frac{\phi}{2})} \frac{1}{(x^2 + R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2}))^{3/2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dx$$

Foglalkozzunk az integrálandó vektor harmadik komponensével, oldjuk meg először határozatlan integrállal - hogy ne kelljen átírni a határokat.

$$F(x) = \int \frac{1}{(x^2 + R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2}))^{3/2}} \cdot dx$$

Legyen $c^2 = R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})$

$$F(x) = \int \frac{1}{(x^2 + c^2)^{3/2}} \cdot dx$$

$$F(x) = \frac{1}{c^3} \int \frac{1}{((\frac{x}{c})^2 + 1)^{3/2}} \cdot dx$$

Helyettsesítsük $tg(u) = \frac{x}{c}$-vel. Így $\frac{c \cdot du}{cos^2(u)} = dx$

$$F(u) = \frac{1}{c^3} \int \frac{1}{(tg(u)^2+1)^{3/2}} \cdot \frac{c \cdot du}{cos^2(u)}$$

$$F(u) = \frac{1}{c^2} \int \frac{1}{(tg(u)^2+1)^{3/2}} \cdot \frac{du}{cos^2(u)}$$

$$F(u) = \frac{1}{c^2} \int \frac{1}{(\frac{sin^2(u)}{cos^2(u)}+1)^{3/2}} \cdot \frac{du}{cos^2(u)}$$

$$F(u) = \frac{1}{c^2} \int \frac{1}{\frac{1}{cos^2(u)^{3/2}}} \cdot \frac{du}{cos^2(u)}$$

$$F(u) = \frac{1}{c^2} \int cos(u)du$$

$$F(u) = \frac{1}{c^2} sin(u)$$

$$F(x) = \frac{1}{c^2} sin(arctg(\frac{x}{c}))$$

Ha x és c egy derékszögű háromszög befogói lennének, arányuk arkusz-tangense megandá az c hosszúságú (szöggel szomszédos) befogó és a $\sqrt{x^2+c^2}$ hosszúságú átfogó által bezárt szöget. Ennek a szögnek a szinusza megadja az x hosszúságú (szöggel szemköztes) befogó és az átfogó arányát. Így

$$F(x) = \frac{1}{R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})}}$$

Az itt megkapott $F(x)$ csak a primitív függvény. A határozott integrál értékét a határok segítségével kell kiszámolni. Legyen az integrál értéke T.

$$T = [\frac{1}{R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})}}]_{-R \cdot cos(\frac{\phi}{2})}^{R \cdot cos(\frac{\phi}{2})}$$

$$T = \frac{1}{R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})} \frac{R \cdot cos(\frac{\phi}{2})}{\sqrt{R^2 \cdot cos^2(\frac{\phi}{2}) + R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})}} - \frac{1}{R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})} \frac{-R \cdot cos(\frac{\phi}{2})}{\sqrt{R^2 \cdot cos^2(\frac{\phi}{2}) + R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})}}$$

$$T = \frac{2Rcos(\frac{\phi}{2})}{R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2}}$$

$$T = \frac{2cos(\frac{\phi}{2})}{R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})}$$

Tehát

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{2cos(\frac{\phi}{2})}{R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{cos(\frac{\phi}{2})}{R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Belátható, hogy a 3. görbén integrálva egzaktul ugyenzt kapjuk, mivel ellentétes irányba folyik az áram, de az ellenkező irányban is integrálunk.

$$\vec{B}_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{cos(\frac{\phi}{2})}{R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A 2. és a 4. görbével hasonló lesz a helyzet, $\vec{B}_2 = \vec{B}_4$. Paraméterezzük a 4. görbét polárkoordináták segítségével. Mivel a ϕ név már foglalt, a szöget jelölő paraméter jele α lesz.

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} R \cdot cos(\alpha) \\ R \cdot sin(\alpha) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d\vec{r} = \left(\begin{matrix} -R \cdot sin(\alpha) \\ R \cdot cos(\alpha) \\ 0 \end{matrix} \right) d\alpha$$

Láthatóan e két vektor mindig merőleges egymásra. Vektoriális szorzatuknak csak z komponense van, valamint hossza a két vektor hosszának szorzata.

$$\vec{r} \times d\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 \end{pmatrix} d\alpha$$

Tehát

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_{-\phi/2}^{\phi/2} \frac{1}{R^3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ R^2 \end{pmatrix} d\alpha$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \int_{-\phi/2}^{\phi/2} \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\alpha$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{1}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi/2 - (-\phi/2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_4 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\phi}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mindegyik huzalrész térerőssége pozitív z irányba mutat - ez várható is volt a jobb kéz szabály miatt. Az egyes huzalrészek térerősségei összeadódnak.

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + \vec{B}_4$$

$$\vec{B} = \frac{2\mu_0 I}{2\pi} \cdot \frac{cos(\frac{\phi}{2})}{R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{2\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\phi}{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

A rendszer által keltett mágneses tér a rendszer szimmetria-középpontjában

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot (2\frac{cos(\frac{\phi}{2})}{R^2 \cdot sin^2(\frac{\phi}{2})} + \frac{\phi}{R}) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ha ellenkező irányba folyna az áram, az egyenlőség jobb oldala megszorzódna (-1)-gyel.