Hőtan és folytonos közegek mechanikája (emelt szint) Beadandó

Brindza Mátyás (Z2R8XS)

2020.04.09.

6. Hidrosztatika és felületi feszültség

6.1. Parafa-rugó

FELADAT:
Egy vízzel telt edénybe d átmérőjű, ρ sűrűségű ($\rho < \rho_{viz}$) parafagolyót helyezünk, majd az edény aljához kötjük egy D rugóállandójú rugóval. Mekkora a rugó megnyúlása, ha a golyó teljes egészében a folyadékban van?

MEGOLDÁS:
A golyót felfelé nyomó erő az F_f felhajtóerő. A golyót lefelé húzó erők az F_r rugóerő és az F_g gravitációs erő. Ezen erők egyensúlyban vannak.

$$F_f = F_g + F_r$$

A rugó megnyúlása, x érdekel. Tudjuk, hogy

$$F_r = D \cdot x$$

$$F_g = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = (\rho \cdot \frac{4}{3} \cdot (\frac{d}{2})^3 \pi) \cdot g = \frac{d^3}{6} \pi \rho g$$

$$F_f = \frac{d^3}{6} \pi \rho_{viz} g$$

Tehát

$$D \cdot x = \frac{d^3}{6} \pi \rho_{viz} g - \frac{d^3}{6} \pi \rho g$$

$$x = \frac{1}{D} \cdot \frac{d^3}{6} \pi (\rho_{viz} - \rho) g$$

6.2. Lapát

FELADAT:
Egy lapát sűrűségét szeretnénk meghatározni azáltal, hogy tudjuk, hogy egyik végénél fogva, a vízbe ferdén belelógatva épp a lapát hosszának felénél van a vízszint. Ehhez azt a modellt használjuk, hogy a lapát és a víz sűrűsége állandó, alakja kecses vékony rúd, amelynek a vastagsága elhanyagolható, továbbá a lapátot tartó kezünk gömbcsuklóként,egyetlen pontban tartja a lapátot.

MEGOLDÁS:

A lapátra három erő hat. A gravitációs erő, a rúd tömegközéppontja tekinthető a támadáspontjának. A felhajtóerő, mely csak a rúd bemerült részére hat - így ennek a támadáspontja a rúd bemerült részének tömegközéppontjába esik. A harmadik erő ténylegesen a rúd nem bemerült végén hat, kezünkkel kompenzáljuk a rúdra ható erőket és azok forgatónyomatékait, így lesz a rúd egyensúlyban. A gravitációs erő és a felhajtóerő jelölése öröklődnek az előző feladatból, valamint a kezünk által kifejzett erőnek F lesz a jele.

$$F + F_g = F_f$$

A forgatónyomatékok összege 0. Mivel a rendszer egyensúlyban van, bármely pontból felírhatók a forgatósnyomatékok. Célszerű a gömbcsuklóból felírni, így nem kell foglalkozni F-fel. Mivel a rúd valamilyen ϕ szögben is bele lehet mártva a vízbe, ezért figyelembe kell venni, hogy az erőknek csak a rúdra merőleges komponensük ad járulékot a forgatónyomatékokba.

$$F_f \cdot cos\phi \cdot (\frac{3}{4}L) = F_g \cdot \phi(\frac{1}{2}L)$$

ahol L a rúd hossza. Láthatóan L-lel és $cos\phi$-vel lehet egyszerűsíteni. Tudjuk azt is, hogy

$$F_g = \rho \cdot g \cdot V$$

$$F_f = \rho_{viz} \cdot g \cdot \frac{V}{2}$$

ahol ρ a rúd sűrűsége, V pedig a térfogata. Innen

$$\frac{3}{4} \cdot \rho_{viz} \cdot g \cdot \frac{V}{2} = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot V$$

V-vel, g-vel és $\frac{1}{2}$-vel lehet egyszerűsíteni.

$$\rho = \frac{3}{4}\rho_{viz}$$

A rúd sűrűsége 75%-a a vízének.

6.3. Türelem

FELADAT:
Két, közel azonos méretű szappanbuborék gömböt fújunk fel egy Y alakú csővel, majd a buborékok közötti levegő áramlását a felfújást követően is biztosítjuk. Tegyük fel, hogy az egyik buborékból a másikba történő anyagáramlás sebessége elég lassú és arányos a buborékokban mérhető nyomás különbségével,
$\frac{d}{dt}m_1 = \beta \cdot (p_2 - p_1)$, a T hőmérséklet állandó, a cső térfogata elhanyagolható a buborékokéhoz képest, valamint tekintsük a levegőt ideális gáznak!
1. Írjuk fel a szappanbuborék átmérőjének időbeli változására a differenciál- és algebrai egyenletet úgy, hogy csak a szappanbuborékok sugara maradjon meg, mintidőfüggő mennyiség!
2. Legyen az egyenlő sugarú esetben a buborékok (instabil) egyensúlyi sugara R ! Mutassuk meg, hogy amennyiben $R_1 = R + \varepsilon_1$ és $R_2 = R\varepsilon_2$, ahol ε_1 és ε_2 elég kicsi, akkor arányuk 1!
3. Írjuk fel a differenciálegyenletet az instabil egyensúlyi helyzet körül, ε-ban elsőrendig közelítve! Oldjuk meg a differenciálegyenletet! Ezzel a közelítéssel számolva mennyivel több időt kell várni, amíg $\frac{\varepsilon}{R}$ megnő 1-ről 2%-ra, ahhoz képest, mintha 2-ről 3%-ra növekedne?
4. Extra gondolkodó 1 (házi feladatokon kívül): Mekkora lesz a nyomás a felfújt szappanbuborékban és mekkora lesz a sugara, ha az instabil egyensúlyi helyzethez tartozó sugár R, és eltekintünk a görbületi nyomás járulékától a külső nyomáshoz képest? Mennyivel változik meg ehhez képest a felfújt szappanbuborékhoz tartozósugár első rendben, ha nem hanyagoljuk el a görbületi nyomást a külső nyomáshozképest?
5. Extra gondolkodó 2 (házi feladatokon kívül): hogyan csökken 0-ra a kisebbik gömbsugara? Vizsgáljuk meg azt a határesetet, amikor az egyik gömb már majdnemteljesen fel van fújva, a másik pedig már nagyon kicsi!

MEGOLDÁS:
1.)
Valójában a felületi feszültségek különbsége miatt fog áramlani a levegő. Az egyik buborékban $p_0 + p_{g1}$, a másikban $p_0 + p_{g2}$ lesz a nyomás.

$$\rho\Delta V = \beta(p_2 - p_1)$$

Egy buborékra:
A p_g felületi feszültség többletnyomása által végzett munka

$$\Delta W = p_g \Delta V$$

A buborékfelszín energiájának mágváltozása

$$\Delta E = \alpha\Delta A$$

A többletnyomás által végzett munka egyenlő a buborékfelszín energiájának megváltozásával.
Nézzük hogy változik a térfogat.

$$\Delta V = \frac{4\pi}{3}((r + \Delta r)^3 - r^3)$$

Hanyagoljuk a Δr-ben nem lineáris tagokat.

$$\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r$$

Nézzük hogy változik a buborék felszíne. Ebbe bele kell számolni, hogy külső és belső része is van a buboréknak. A buborék tekinthető infinitezimálisan vékonynak, így a külső és a belső felület kiterjedése megegyezik.

$$\Delta A = 2 \cdot 4\pi((r + \Delta r)^2 - r^2)$$

Hanyagoljuk a Δr-ben nem lineáris tagokat.

$$\Delta A = 8\pi(2r\Delta r)$$

$$\Delta A = 16\pi 2r\Delta r$$

Mivel a Δr-ben nem lineáris tagokat kiejtettük, a többletnyomásra kapott képlettisztán r-től fog függni.

$$p_g = \frac{16\pi 2r\Delta r}{4\pi r^2 \Delta r}\alpha$$

$$p_g = 2\alpha\frac{1}{r}$$

α nem függ az időtől, így gyakorlatilag p_g időfüggése r-en keresztül értelmezhető.

Ha a levegő sűrűsége nem változik, az áramlás során kontinutás miatt az egyik buborékból kiáramló tömeg egyenlő lesz a másikba beáramlóval. Ha ideális gáznak tekintjük a levegőt, az első buborékra felírható, hogy

$$(p_0 + p_{g1}) \cdot V_1 = \frac{m_1}{M} RT$$

ahol M jól kiátlagolt moláris tömeg. R egy állandó, T-t és p_0-t is állandónak tekintjük.

$$\frac{4\pi}{3}(p_0 \cdot r_1^3 + 2 \cdot \alpha r_1^2) = \frac{TR}{M} m_1$$

Csak r és m függ az időtől. Adott egy egyenlet m deriváltjára, ezért deriváljuk le ezt az egyenletet, hogy használni tudjuk.

$$\frac{4\pi}{3}(3p_0 \cdot r_1^2 \cdot (\frac{d}{dt} r_1) + 4 \cdot \alpha r_1 \cdot (\frac{d}{dt} r_1)) = \frac{TR}{M} \frac{d}{dt} m_1$$

$$4\pi p_0 \cdot r_1^2 \cdot (\frac{d}{dt} r_1) + \frac{16}{3} \pi \cdot \alpha r_1 \cdot (\frac{d}{dt} r_1) = \frac{TR}{M} \beta (\frac{2\alpha}{r_2} - \frac{2\alpha}{r_1})$$

$$\frac{\pi}{3}(12p_0 \cdot r_1^2 \cdot (\frac{d}{dt} r_1) + 16 \cdot \alpha r_1 \cdot (\frac{d}{dt} r_1)) = \frac{TR}{M} 2\alpha\beta \frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}$$

Innen $\frac{d}{dt} r_1$ kifejezhető egy kisátrendezéssel.

$$\frac{d}{dt} r_1 = \frac{3\alpha\beta TR(r_1 - r_2)}{2\pi M r_1 r_2 (3p_0 r_1^2 + 4\alpha r_1)}$$

Természetesen ugyanez levezethető a másik buborékra is. Ha a nyomások előjeles különbségét vesszük, a tömeg deriváltja lehet negatív, ezzel definiálva a kiáramlást.

$$\frac{d}{dt} r_2 = \frac{3\alpha\beta TR(r_2 - r_1)}{2\pi M r_1 r_2 (3p_0 r_2^2 + 4\alpha r_2)}$$

A szappanbuborékok átmérőinek időbeli változása

$$\frac{d}{dt} d_1 = \frac{3\alpha\beta TR(r_1 - r_2)}{\pi M r_1 r_2 (3p_0 r_1^2 + 4\alpha r_1)}$$

$$\frac{d}{dt} d_2 = \frac{3\alpha\beta TR(r_2 - r_1)}{\pi M r_1 r_2 (3p_0 r_2^2 + 4\alpha r_2)}$$

2.)

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{r + \varepsilon_1}{r - \varepsilon_2} = \frac{1 + \frac{\varepsilon_1}{r}}{1 - \frac{\varepsilon_2}{r}}$$

Ez megközelítőleg

$$(1 + \frac{\varepsilon_1}{r})(1 + \frac{\varepsilon_2}{r}) = 1 + \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{r} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{r}$$

Ha ε elég kicsi, ha tart 0-hoz, akkor ez az arány tartani fog 1-hez.

$$\frac{d}{dt}(r + \varepsilon_1) = \frac{3\alpha\beta TR(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\pi M (r + \varepsilon_1)(r - \varepsilon_2)(3p_0 (r + \varepsilon_1)^2 + 4\alpha (r + \varepsilon_1))}$$

$$\frac{d}{dt}(r + \varepsilon_1) = \frac{3\alpha\beta TR(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2\pi M (r^2 + r(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))(3p_0 r^2 + 2r\varepsilon_1 + 4\alpha (r + \varepsilon_1))}$$

$$\frac{d}{dt}(r + \varepsilon_1) = \frac{3\alpha\beta TR(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{2\pi M r^2 (3p_0 r^2 + 2r\varepsilon_1 + 4\alpha (r + \varepsilon_1)) + r(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(3p_0 r^2 + 4\alpha r)}$$