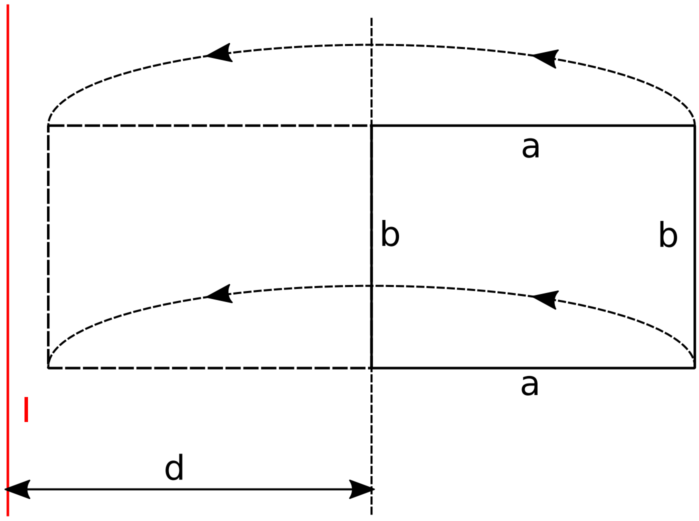
1. Indukció I.

1.1. Kovács-Párkányi Fizikai Példatár II. / 470.feladat

Egy a és b oldalú téglalap alakú vezetőkeret egy síkban fekszik a végtelen hosszú egyenes vezetővel, amelyben I erősségű áram folyik. A vezető a b oldallal párhuzamos és $d > a$ távolságra van a leközelebbi oldaltól. Mekkora Q elektromos töltésmennyiség halad keresztül a keret tetszés szerinti vezető keresztmetszetén, ha a keret a vezetőköz közelebbi b oldal körül 180°-kal elfordul, s ebben a helyzetben marad? A keret vezetékének keresztmetszete A, fajlagos ellenállása ϱ.

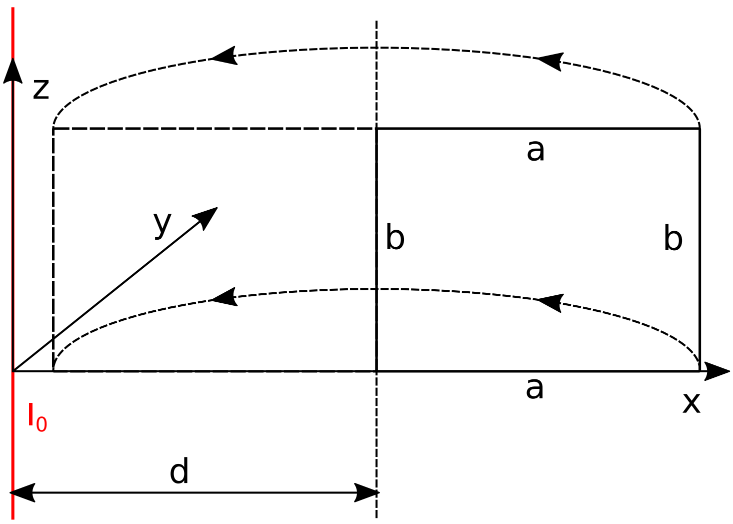


1. ábra. A vezetőkeret forgása és a végtelen hosszú huzal

Feladatot kidolgozta: *Z2R8XS*

Megoldás

Válasszunk koordinátarendszert, és legyen a végtelen hosszú vezetőben folyó áram jele I helyett I_0. A vezetőkeretben elinduló áram jele legyen I - ez függni fog a keret pozíciójától.



2. ábra. Koordinátarendszer választása

Tudjuk, hogy az indukált feszültség egy egyenes vezetőre

$$U_i = \vec{l}(\vec{v} \times \vec{B})$$

Először vizsgáljuk meg, milyen lesz a z tengelyre merőleges, a hosszúságú vezetőkben az indukált feszültség. Egy kis $\Delta\vec{l}$ vezetődarabkában ΔU_i feszültség fog ébredni az ottani $\vec{B}$ mágneses tér hatására, ha a $\Delta\vec{l}$-nek egy $\vec{v}$ sebessége van.

- Látható, hogy a kis huzaldarabkát jellemző $\Delta\vec{l}$ vektornak nem lesz z komponense, bárhol is vagyunk bármelyik a oldalon.
- Ha rögzítenénk a forgástengelyhez egy polárkoordinátarendszert, mely párhuzamos az (x, y) síkkal, és felírnánk a $\vec{v}$ sebességet, akkor csak ϕ irányú komponense lenne, radiálisan és felfelé nem mozdul el egyik oldal sem. Állítható, hogy $\vec{v}$-nek sem lesz z komponense.
- A végtelen hosszú áramjárta huzal által keltett mágneses tér vektora hasonló analógiával úgyszint "ϕ" irányú, ha vezeterőre rögzítenénk egy (x, y) síkkal párhuzamos polárkoordinátarendszert. A $\vec{B}$ vektornak sem lesz z komponense.

Az U_i-vel egyenlő kifejezés egy vegyes szorzat. Egy vegyes szorzat a három vektor által kifeszített test térfogatát adja meg. E három vektor esetünkben egy síkban van, az (x, y) síkban. Komplanáris vektorok által kifeszített paralelepipedon térfogata 0.

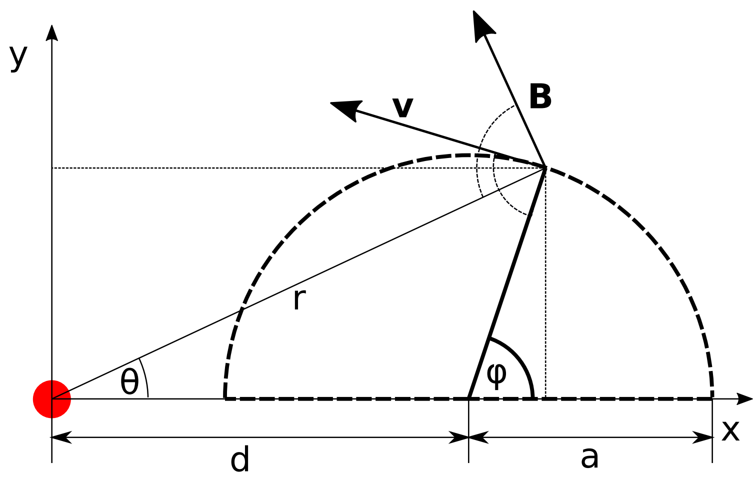
Mindezek alapján az állítás az, hogy a keret z tengelyre merőleges oldalainak nem lesz járuléka - a keretben ébredő áram szempontjából.

A forgástengelyen lévő b hosszúságú oldalnak úgyszint nem lesz járuléka, mert nem is fog elmozdulni.

A kezdetben a vezetőtől távolabbi b hosszúságú oldalnak lehet csak járuléka. Itt minden $\Delta\vec{l}$ darabkának csak z komponense van, míg $\vec{v}$ és $\vec{B}$ minden darabka esetén az (x, y) síkban van. Sőt, a mágneses térnek szimmetriája a z irányú eltolás, tehát minden darabkára ugyanolyan irányú és ugyanolyan nagyságú lesz $\vec{B}$. Tekintsük merev testnek a keretet, így minden huzal darabka sebessége azonos irányú és nagyságú lesz minden időpillanatban. Ha a vezető rá merőleges tengely körül forogna, akkor az egyes pontjainak más lenne a sebessége, de mivel nem forog, működik a

$$U_i = \vec{l}(\vec{v} \times \vec{B})$$

képlet. Skalár lesz a vegyes szorzat értéke, mely kifejezhető a vektorok komponenseivel. Írjuk fel a vektorokat.



3. ábra. A vezetőkeret és a végtelen hosszú huzal felülnézetből

Tudjuk, hogy $\vec{l}$-nek csak z komponense van, és hossza b, így

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$$

Tételezzük fel, hogy $\phi = 0$-tól $\phi = \pi$-ig konstans ω szögsebességgel fordul el a keret. Ekkor a forgó függőleges oldal pozíciója felülnézetből

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} d + a \cdot cos(\phi(t)) \\ a \cdot sin(\phi(t)) \end{pmatrix}$$

Ha $\phi(t) = \omega \cdot t$, akkor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -a \cdot \omega \cdot sin(\omega \cdot t) \\ a \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t) \end{pmatrix}$$

A forgó függőleges oldal minden pontjának konstans a z koordinátája, így a sebességnek 0 lesz a z komponense - ez releváns, mivel a vektoriális szorzást három dimenzióban kell elvégezni.

Tudjuk, hogy az egyenes, végtelen hosszú áramjárta vezeték által keltett mágneses tér nagysága

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_0}{r}$$

ahol r a vezetőtől lévő távolság.

Pozitív és negatív z irányba folyhat az áram. A vezetőkeretben ébredt feszültség előjele, azaz a benne folyó áram iránya függ ettől. Ezért nem rajzoltam be az előző ábárkon I_0 irányát. Számoljunk egyelőre úgy, hogy pozitív z irányba folyik az áram. Ha negatív irányba folyna, akkor csak egy előjellel különbözne a számolás - és ez az előjel mindvégig megmaradna, egészen a Q értékig. Q nagyságának meghatározásánál nem játszik kulcsfontosságú szerepet, melyik irányba folyik az áram.

Felfelé folyó áram esetén felülnézetből a mágneses tér vektora:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} -r \cdot sin(\Theta) \\ r \cdot cos(\Theta) \end{pmatrix} \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_0}{r^2}$$

Mivel $\vec{B}$ nagysága fordítottan arányos r-rel. Ha kiegészítjük három dimenzióra, a fent leírtak alapján $\vec{B}$-nek z komponense 0.

Tehát az indukált feszültség:

$$U_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix} -a \cdot \omega \cdot sin(\omega \cdot t) \\ a \cdot \omega \cdot cos(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cdot sin(\Theta) \\ r \cdot cos(\Theta) \\ 0 \end{pmatrix} \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{I_0}{r^2})$$

$$U_i = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix} -a \cdot sin(\omega \cdot t) \\ a \cdot cos(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r \cdot sin(\Theta) \\ r \cdot cos(\Theta) \\ 0 \end{pmatrix})$$

$$U_i = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2}(-a \cdot sin(\omega \cdot t) \cdot r \cdot cos(\Theta) - a \cdot cos(\omega \cdot t) \cdot r \cdot sin(\Theta))$$

$$U_i = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{r^2}(-a \cdot sin(\phi) \cdot r \cdot cos(\Theta) - a \cdot cos(\phi) \cdot (-r \cdot sin(\Theta)))$$

A geometriai összefüggések segítségével egyszerűsíteni lehet ezen a kifejezésen - a pontozott vonalak segítségünkre válthatnak. Az alábbi azonosságok alkalmazhatók.

$$r^2 = (a \cdot sin(\phi))^2 + (d + a \cdot cos(\phi))^2 = a^2 + d^2 + 2a \cdot d \cdot cos(\phi)$$

$$a \cdot sin(\phi) = r \cdot sin(\Theta)$$

$$a \cdot cos(\phi) = r \cdot cos(\Theta) - d$$

Ezeket behelyettesítve:

$$U_i = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \frac{1}{a^2 + d^2 + 2a \cdot d \cdot cos(\phi)}(-a \cdot sin(\phi)(a \cdot cos(\phi) + d) + a \cdot cos(\phi) \cdot a \cdot sin(\phi))$$

$$U_i = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \frac{-a \cdot d \cdot sin(\phi)}{a^2 + d^2 + 2a \cdot d \cdot cos(\phi)}$$

Az indukált feszültségre, a vezetőkeretben folyó áramra és a vezetőkeret össz ellenállására:

$$U_i = I \cdot R$$

$$I = \frac{U_i}{R}$$

Ha tudjuk a vezetőkeret ϱ fajlagos ellenállását, akkor az egész keret ellenállása:

$$R = \frac{2\varrho}{A}(a + b)$$

Így az áram erőssége:

$$I = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0}{2\pi} \cdot \frac{-a \cdot d \cdot sin(\phi)}{a^2 + d^2 + 2a \cdot d \cdot cos(\phi)} \frac{A}{2\varrho(a + b)}$$

$$I = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0 \cdot A}{8\pi\varrho(a + b)} \cdot \frac{-2a \cdot d \cdot sin(\phi)}{a^2 + d^2 + 2a \cdot d \cdot cos(\phi)}$$

$$I = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0 \cdot A}{8\pi\varrho(a + b)} \cdot \frac{-2a \cdot d \cdot sin(\omega \cdot t)}{a^2 + d^2 + 2a \cdot d \cdot cos(\omega \cdot t)}$$

Tudjuk, hogy a vezető keresztmetszetén áthaladó töltésmennyiség idő szerinti deriváltja az áramerősség. Megkaptuk az áramerősséget, ebből visszaintegrálható az áthaladt töltésmennyiség t_0 és t_1 időpontok között, amennyiben t_0 pillanatban kezdődött a forgás és t_1 pillanatban fejeződött. Legyen $t_0 = 0$, így $\phi(0) = 0$. Legyen $t_1 = \pi/\omega$, így $\phi(t_1) = \pi$. Az időtől nem függő mennyiségek kiemelhetők az integrálás elé.

$$Q = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0 \cdot A}{8\pi\varrho(a + b)} \int_0^{\pi/\omega} \cdot \frac{-2a \cdot d \cdot sin(\omega \cdot t)}{a^2 + d^2 + 2a \cdot d \cdot cos(\omega \cdot t)} dt$$

Egy hasznos azonosság integrálásra:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = ln|f(x)| + c$$

Most a $+c$ konstanssal nem kell foglalkozni, mivel határozott integrál esetén ki fog esni.

$$Q = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0 \cdot A}{8\pi\varrho(a + b)}[ln(a^2 + d^2 + 2a \cdot d \cdot cos(\omega \cdot t))]_0^{\pi/\omega}$$

$$Q = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0 \cdot A}{8\pi\varrho(a + b)}[ln(a^2 + d^2 + 2a \cdot d \cdot cos(\pi)) - ln(a^2 + d^2 + 2a \cdot d \cdot cos(0))]$$

$$Q = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0 \cdot A}{8\pi\varrho(a + b)}[ln((a - d)^2) - ln((a + d)^2)]$$

$$Q = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0 \cdot A}{8\pi\varrho(a + b)} ln((\frac{a - d}{a + d})^2)$$

Tehát $Q = \frac{\omega \cdot b \cdot \mu_0 \cdot I_0 \cdot A}{8\pi\varrho(a+b)} ln((\frac{a-d}{a+d})^2)$ elektromos töltésmennyiség halad keresztül a keret tetszés szerinti keresztmetszetén.