1. Dielektrikumok

1.1. Elméleti Fizikai Példatár II./ 3.2. feladat

Egy sík a teret két részre osztja. A felső térrész deilektromos állandója ε_1, az alsóé ε_2. A felső térrészben az elválasztó síktól h távolságra, a felülettel párhuzamosan végtelen hosszúnak tekinthető vonaltöltés helyezkedik el.

a) Határozzuk meg a potenciált!

b) Mekkora erő hat a töltés L hosszúságú szakaszára?

Feladatot kidolgozta: *Z2R8XS*

Megoldás

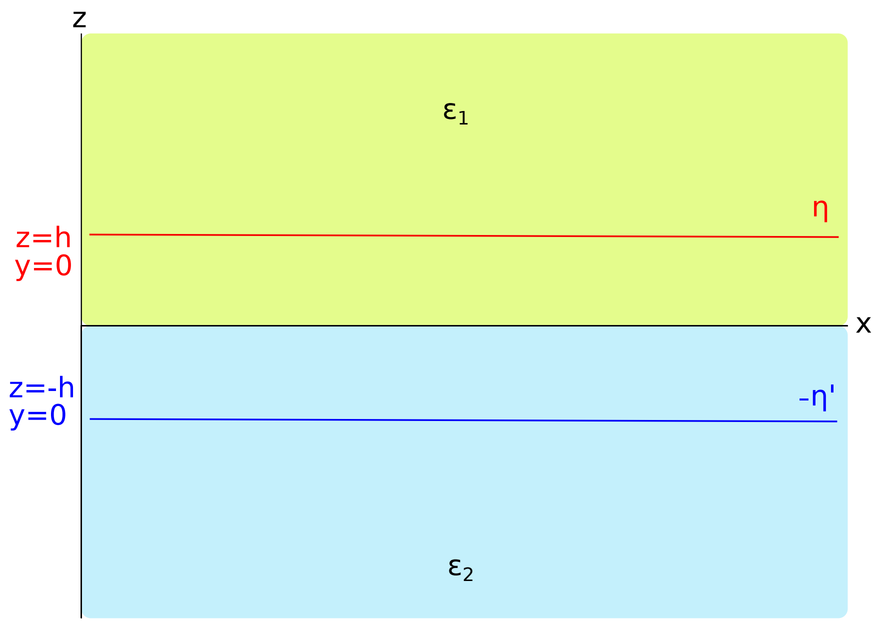
A feladat megoldásához szükséges megemlíteni egy jelenséget. Ha két egymással érintkező dielektrikumot elektromos erőtérbe helyezünk, az érintkező felület töltötté válik. Ez annak köszönhető, hogy a kétféle anyagban eltérő a relatív permittivitás, vagyis másképp polarizálódnak, ezért a határfelületen ellentétes előjelű és különböző nagyságú polarizációs töltések lesznek.

Egy vonaltöltés által létre hozott elektromos tér a következőképp néz ki:

$$E = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{1}{r}$$

Itt r a vonaltöltés által kielölt egyenestől vett távoltságot jelenti. Az egyenesre merőleges síkban mindig radiális irányú. A térerősség vektornak nincs ezzel az egyenessel párhuzamos komponense.

A tükörtöltés módszere alkalmazható.



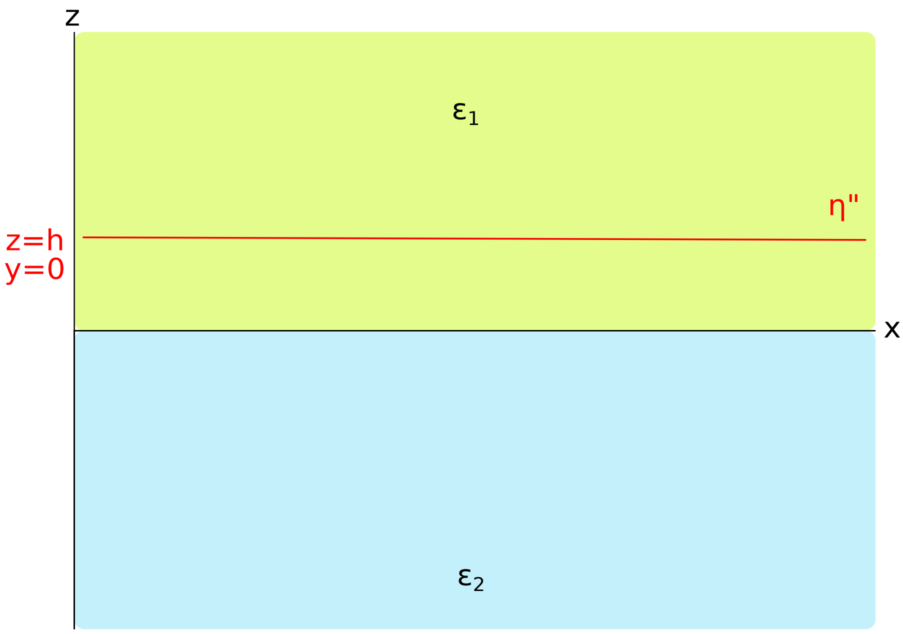
1. ábra. A felső térrész elektromos terének szemléltetése

A felső térrészben az elektromos tér úgy néz ki, mintha az eredeti η töltéssűrűségű vonaltöltés és egy η' töltéssűrűségű vonaltöltés hozta volna létre. Mivel $\Phi(r) = -\nabla\vec{E}(r)$ és a vonaltöltés az (x,z) síkban helyezkedik el :

$$\Phi_1 = -\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}ln(r^2) + \frac{\eta'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}ln(r'^2)$$

$$\Phi_1 = -\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} ln(y^2 + (z-h)^2) + \frac{\eta'}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1} ln(y^2 + (z+h)^2)$$

Az alsó térrészben az elektromos térerősség olyan, mintha egy vonaltöltés hozta volna volna létre, melynek η" töltéssűrűsége van. Ez úgy magyarázható, hogy az eredeti vonaltöltés által létrehozott tér gyengítve van, mivel a két dielektrikum közt lévő határfelületen megjelent töltések árnyékolják.



2. ábra. Az alsó térrész elektromos terének szemléltetése

Hasonló módon felírható:

$$\Phi_2 = -\frac{\eta"}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2} ln(r"^2)$$

$$\Phi_2 = -\frac{\eta"}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_2} ln(y^2 + (z-h)^2)$$

A töltéssűrűségek meghatározhatóak a határfeltételek egyenletei alapján. Az első határfetétel, hogy a két elektromos tér felülettel párhuzamos komponensei (tangenciális) megegyeznek a határfelületen. Bevezethető az elektromos térerősség vektor "beesési szöge", ami ϕ jelölés alatt fog futni. Mivel az első térben a két vonaltöltés sűrűsége ellentétes előjelű, ezért tangeciális komponenseik kivonódnak.

$$(\vec{E_1})_t = (\vec{E_2})_t$$

$$(\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{1}{r} - \frac{\eta'}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{1}{r'})sin(\phi) = \frac{\eta"}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\frac{1}{r"}sin(\phi)$$

$$\frac{\eta}{\varepsilon_1}\frac{1}{r} - \frac{\eta'}{\varepsilon_1}\frac{1}{r'} = \frac{\eta"}{\varepsilon_2}\frac{1}{r"}$$

Mivel a határfelületen vagyunk, ezért $r = r' = r" = \sqrt{y^2 + h^2}$, vagyis:

$$\frac{\eta}{\varepsilon_1} - \frac{\eta'}{\varepsilon_1} = \frac{\eta"}{\varepsilon_2}$$

A másik határfeltétel, hogy a két elektromos eltolás térnek felületre merőleges (normális) komponensei megegyeznek a határfelületen. Mivel az első térben a két vonaltöltés sűrűsége ellentétes előjelű, ezért normális komponenseik összeadódnak.

$$(\vec{D_1})_n = (\vec{D_2})_n$$

$$\varepsilon_1(\vec{E_1})_t = \varepsilon_2(\vec{E_2})_t$$

$$\varepsilon_1(\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{1}{r} + \frac{\eta'}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{1}{r'})cos(\phi) = \varepsilon_2\frac{\eta"}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_2}\frac{1}{r"}cos(\phi)$$

$$\eta + \eta' = \eta"$$

$$(\eta - \eta')\varepsilon_2 = (\eta + \eta')\varepsilon_1$$

$$\eta' = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\eta$$

$$\eta" = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\eta$$

Egy L hosszúságú darabon $L\eta$ töltés van. Mivel az eredeti vonaltöltés önmagával nem hat kölcsön:

$$F = -\frac{\eta'\eta L}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{1}{\sqrt{y^2 + (z+h)^2}}$$

A vonaltöltés elhelyezkedése : $z = h$, $y = 0$.

$$F = -\frac{\eta'\eta L}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1}\frac{1}{2h}$$

$$F = -\frac{\eta'\eta L}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 h}$$

$$F = \frac{\eta^2 L}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_1 h}\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$