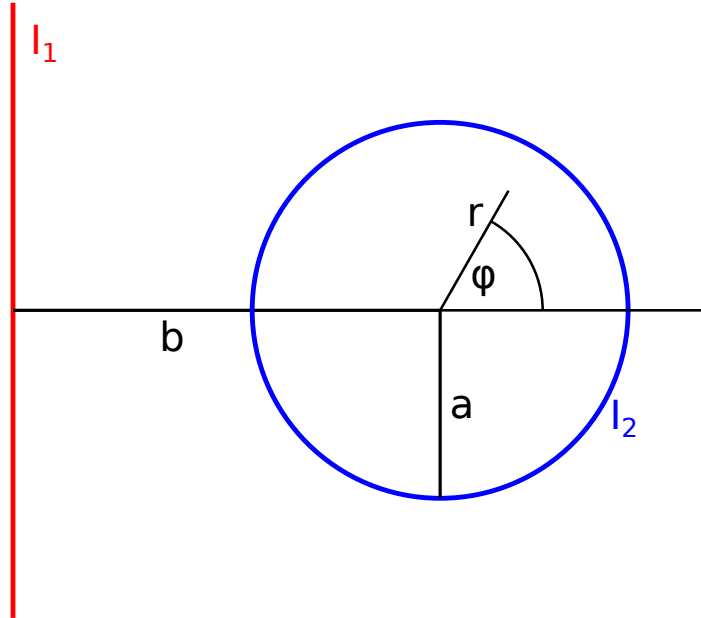


1. Indukció II.

1.1. Elméleti Fizikai Példatár II. / 6.22. feladat

Hosszú egyenes vezető és a sugarú gyűrű egy síkban fekszik. A gyűrű középpontjának a vezetőtől mért távolsága b ($b > a$). Határozzuk meg az L_{12} kölcsönös indukciós együtthatót és az F_{12} kölcsönhatási erőt, ha az áram az egyenes vezetőben I_1 és a gyűrűben I_2 .



1. ábra. A hosszú egyenes vezető és a gyűrű

Feladatot kidolgozta: Z2R8XS

Megoldás

Tudjuk, hogy a végtelen hosszú vezető mágneses terének erőssége a vezetőtől r távolságban

$$B(\varrho) = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot \varrho}$$

ahol I a vezetőben folyó áram erőssége.

A kölcsönös indukciós együttható kiszámolható a fluxus és a vizsgált teret létrehozó áram erősségével.

$$\Phi_{12} = I_1 \cdot L_{12}$$

$$L_{12} = \frac{\Phi_{12}}{I_1}$$

A körvezetőre célszerű sík zsáktartományt húzni, mert egyéb esetben csak nehezítené az integrálást. Ez a kört leképezhető egy (ϕ, r) paramétertartományra, ahol elvégezhető az integrálás.

Az integrálás előtt még kifejezendő a mágneses tér erősségének helyfüggése a körvezető középpontjához rögzített polárkoordinátákkal.

$$\varrho = b + r \cdot \cos(\phi)$$

Tudjuk, hogy $dx \cdot dy = r \cdot dr \cdot d\phi$

$$L_{12} = \frac{1}{I_1} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dr \left(\frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot r}{2 \cdot \pi \cdot (b + r \cdot \cos(\phi))} \right)$$

$$\begin{aligned}
L_{12} &= \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a dr \left(\frac{r}{b + r \cdot \cos(\phi)} \right) \\
L_{12} &= \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \int_0^a dr \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\sqrt{b^2 - r^2}} \\
L_{12} &= \frac{\mu_0}{2 \cdot \pi} \int_0^a dr \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{\sqrt{b^2 - r^2}} \\
L_{12} &= \mu_0 \cdot (b - \sqrt{b^2 - a^2})
\end{aligned}$$

Az intuktivitás energiája

$$W = \frac{1}{2} L_{12} \cdot I_1 \cdot I_2 + \frac{1}{2} L_{21} \cdot I_2 \cdot I_1$$

A kölcsönös indukciós együtthatóról tudni, hogy $L_{12} = L_{21}$, így

$$W = L_{12} \cdot I_1 \cdot I_2$$

Érezhető, hogy a kölcsönhatási erő a körvezető középpontját a hosszú vezetőre merőlegesen leképező egyenes mentén fog hatni, legyen ez egy "b irány". A Lorentz erő a körvezetőben mindenhol radiális irányban fog mutatni. A rendszernek a vezetővel párhuzamos irányú eltolási szimmetriája van. Két azonos távolságra lévő pontban ható erő b irányra merőleges komponense nem ad járulékot az eredő erőbe, ezek a b -re merőleges komponensek kiejtik egymást. Maradnak a b irányú komponensek. A távolabb lévő pontokra kisebb, a közelebb lévő nagyobb erő hat. Az erők iránya, azaz hogy radiálisan kifelé vagy befelé mutatnak-e, I_1 és I_2 áramok irányától függnék. Az erő nagyságának meghatározásához ezt nem szükséges tudni.

Fixáljuk, hogy egy a sugarú körvezetőről beszélünk. A körvezető b irányú eltolásához munkát kell végeznünk. A munkával megváltoztatjuk az induktivitási energiát. Rögzített sugár mellett W felfogható, mint egy V potenciális energia, mely csak b -től függ.

Az erő ekkor a potenciális energia negatív gradiense. A gradiens itt egy dimenziós mozgásra vonatkozik, tehát $\nabla = \partial_b$.

$$\begin{aligned}
|\vec{F}_{12}| &= F_{12} = -\nabla W = \frac{-\partial}{\partial b} W \\
F_{12} &= \frac{-\partial}{\partial b} (\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot (b - \sqrt{b^2 - a^2})) \\
F_{12} &= -\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} + 1 \right) \\
|F_{12}| &= \mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}} + 1 \right)
\end{aligned}$$