Ch1 資料結構與演算法入門

第一節 資料結構與演算法簡介

1. 什麼是資料結構與演算法

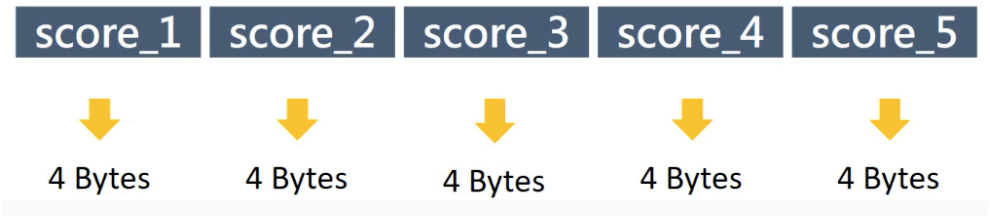
（1）什麼是資料結構？

資料結構是「資料內容」加上「資料內容間的關聯」。比如讀者過去可能學過的「陣列」，就是不斷把資料（內容）放到一個「資料結構」裡，陣列裡的「資料關聯」是資料存放的位置，也就是索引值。

為什麼要有資料結構呢？要是沒有資料結構，要處理的資料散在記憶體裡，就難以存取與處理；有好的資料結構，如同圖書館裡的圖書經過分門別類，擺放得很整齊，使得查找方便快速。

也就是說，應用資料結構，能以適當的形式處理資料，變得更快更省時。

C / C++ 中的陣列作為一種資料結構，有幾個特點：



A. 用連續的記憶體空間去裝資料，下一筆資料就在接續的記憶體位置
B. 每個資料佔的空間相同（比如整數陣列中，每筆資料各占 4 個 Byte）
C. 優點
    - 是儲存多筆資料時最省記憶體的方式
    - 取用資料時只要在連續的記憶體位址間移動，方便快速
    - 把「開頭資料的位置」加上特定某筆資料的「索引值」，可以直接算出該筆資料的存放位置

（2）什麼是演算法？

演算法是「一步步解決問題的方法」，在解決問題時，必須遵守特定的規則，使用電腦的語法來進行。演算法並不限於特定程式語言（C / C++、Java、Python、…），可以任選其一撰寫。

當一個演算法可以解決某一個問題的所有狀況時，就說該演算法「解決」了這個問題。

演算法的定義包含下列幾個部分：

A. 一個有限的步驟集合
B. 每個步驟被清楚的定義好
C. 每個步驟皆可被電腦執行

一般說的「寫程式」，其實結合了「資料結構」與「演算法」：在寫程式之前，要先選定資料結構，演算法則使用存在資料結構中的資料，經過特定的步驟來解決問題。

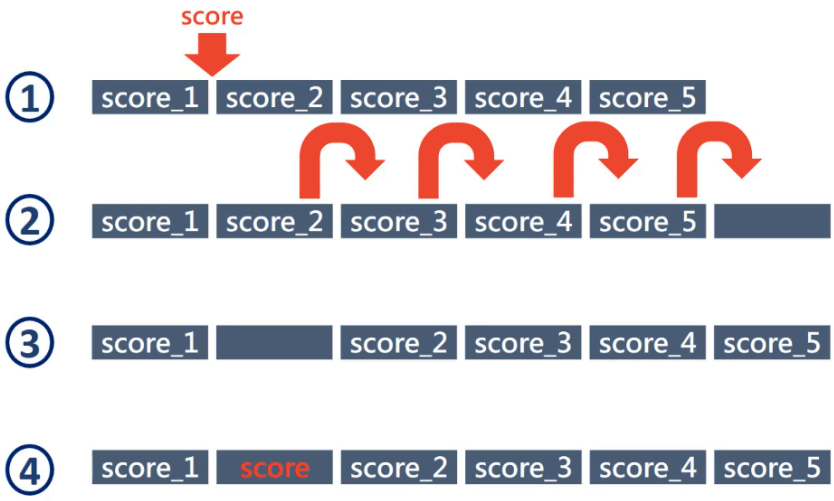
因此，寫程式時必要的「資料結構」與「演算法」是大部分資工系的必修課，這是為了確保培養出合格的工程師，使他們在撰寫程式時，不僅能夠「達成目標」，還能夠「兼顧效能的考量」，在不同資料結構與演算法搭配可得的效能間選取出最好者並採用。

（3）為什麼不全部使用陣列就好？

使用陣列儲存資料時，每一筆資料間的關係是「記憶體位置的關聯」。陣列的優點在於儲存空間最小化，但也存在許多問題。

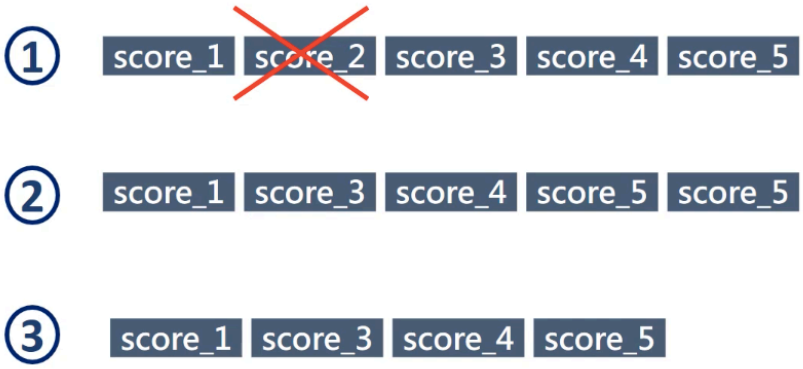
考慮幾種常見的陣列操作，假設陣列長度為 n：

A. 新增資料



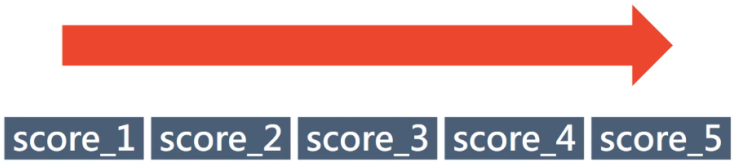
新增資料進陣列時，最多需要移動 n 筆資料（若新增資料位置在陣列開頭，要把原本的 n 筆資料全部往後移一格）。

B. 刪除資料



刪除陣列中的資料時，最多需要移動 $n-1$ 筆資料（刪除開頭的資料時，要把後面 $n-1$ 筆資料都往前移）。

C. 搜尋資料



從陣列開頭一個個往後找，叫做「循序搜尋」，當搜尋的目標在陣列尾端時，需要進行 n 次運算。

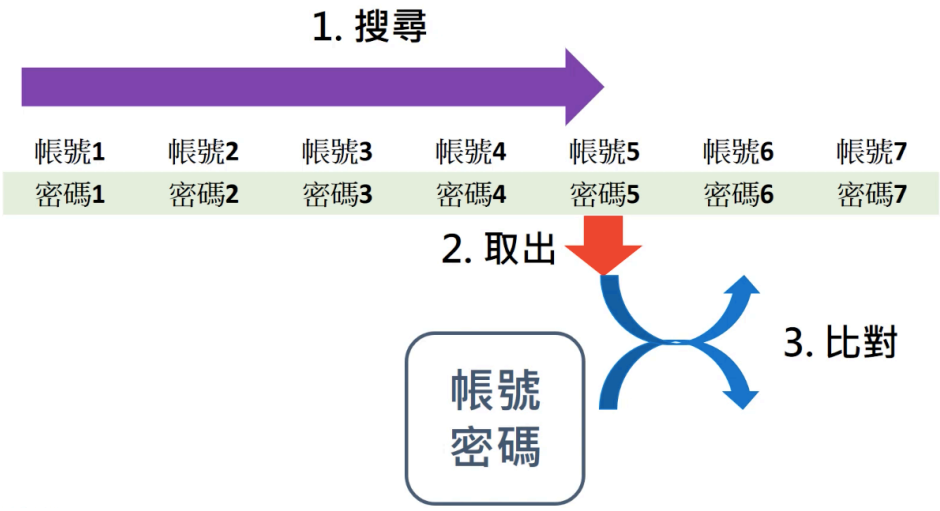
上面的例子中，為了新增一筆資料在長度為 5 的陣列中開頭資料的「後方」，需要把 4 筆資料往後移，而如果是想刪除第二筆資料，則刪除後需要將後面的 3 筆資料往前移。

移動 3、4 筆資料似乎不是什麼大工程，但當陣列很大時，比如有 5 萬筆，甚至 5,000 萬、5 億筆資料的情形，則每次進行新增與刪除，都得移動很多筆資料，相當耗費時間。

（4）為什麼要研究資料結構與演算法

讀者可能會想，真的有研究資料結構與演算法的必要嗎？只要能夠達到目的，使用的資料結構或演算法不是就沒有優劣之分了？

事實上，剛剛提到的新增、刪除、查找資料等操作都相當常見。舉大家熟悉的 Facebook 為例，為回應每個使用者的操作，伺服器隨時需要進行受理註冊、確認登入、搜尋、排序等流程。



一開始，新使用者註冊的帳號密碼被放到資料庫中。

之後使用者每次登入時，都會搜尋資料庫，先找到輸入的帳號，再取出對應的密碼，最後把取出的密碼與輸入的密碼加以比對。如果比對結果是一致的，則使用者登入成功，如果不一致，則會跳出要求重新輸入的訊息。

就像這樣，回應每個使用者的每次登入動作，都需要經過查找資料的過程。若使用「循序搜尋陣列」來進行，要從第一筆資料開始一路往後尋找，最多可能從頭到尾取出所有資料後才找到（即搜尋目標位在陣列尾端）。

假設 Facebook 總共有 100 億個帳號（畢竟有些人會辦超過一個帳號），且所有帳號密碼的配對都使用陣列儲存，那麼平均來說，要搜尋 50 億筆帳號才能決定一次登入是否成功，如果同時間有數萬名使用者登入，系統就會無法負荷。

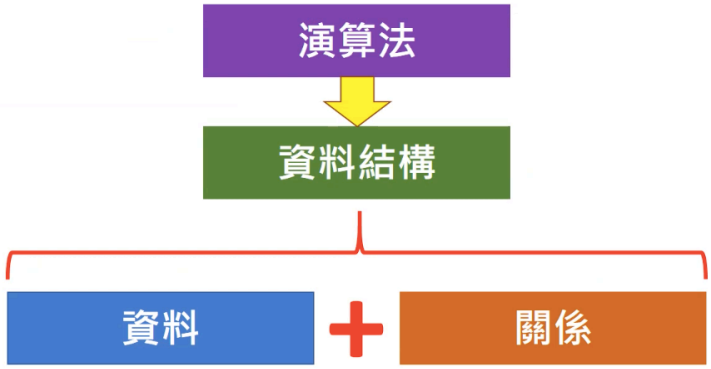
因此，在寫程式的時候需要考慮使用的「資料結構與演算法搭配」是否具有充分擴充性，亦即需考慮未來業務成長之後，是否可以負荷增加的流量。

（4）空間複雜度與時間複雜度

不同的資料結構和演算法有不同的「空間複雜度」和「時間複雜度」。空間複雜度指的是「耗費的記憶體容量」，時間複雜度則是「運算次數 / 花費的時間」。

2. 常見的資料結構與演算法

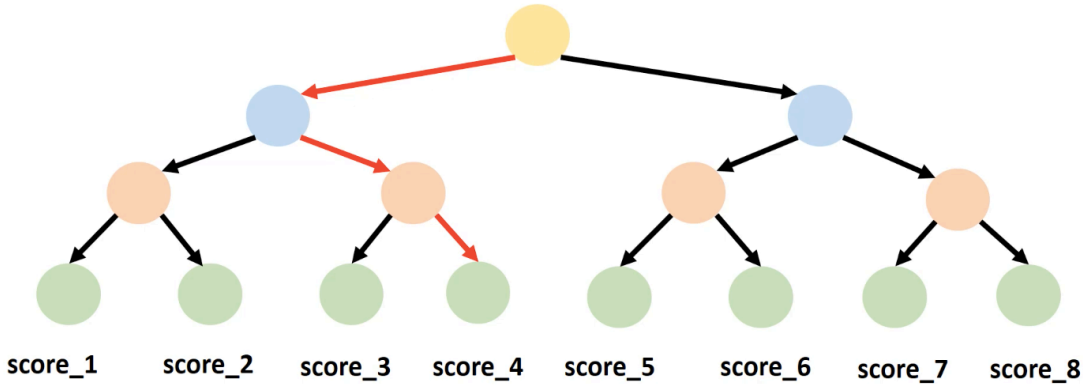
（1）資料結構與演算法的關係



演算法「操作」資料結構，換句話說，演算法就是使用資料的方式。若改變程式中使用的資料結構，就會連帶改變適當的資料的使用方式；反過來說，採用某種演算法時，也要選擇對應的資料結構。

通常程式的撰寫者不會自己發明資料結構，因為 C++ STL 裡已經內建了各種常用的結構，只需瞭解其內容，並能夠熟練使用就好。

以「搜尋」為例，已知使用陣列來儲存資料時，搜尋特定資料得慢慢從第一筆查找到最後一筆，但是否有更合適的資料結構可供使用呢？



C++ 內建的二元樹就是一個更好的選擇，使用二元樹儲存資料時，只要經過 n 次搜尋後，即可覆蓋 2^n 筆資料，因為每筆資料都連接到「兩筆」資料上，多進行一次搜尋就覆蓋約兩倍的資料量。如上圖所示，若有 8 筆資料需要搜尋，至多只需搜尋 3 次就可以完成（$8 = 2^3$）。

因為「資料結構」和「演算法」間的關係密切，通常學習程式時會一併學習這兩個學科。若一定要選擇其中一門先學，則先選擇資料結構會好一點。

（2）資料結構與演算法的搭配

下面列舉一些最常見的資料結構與資料操作，在撰寫程式時隨時會使用到：

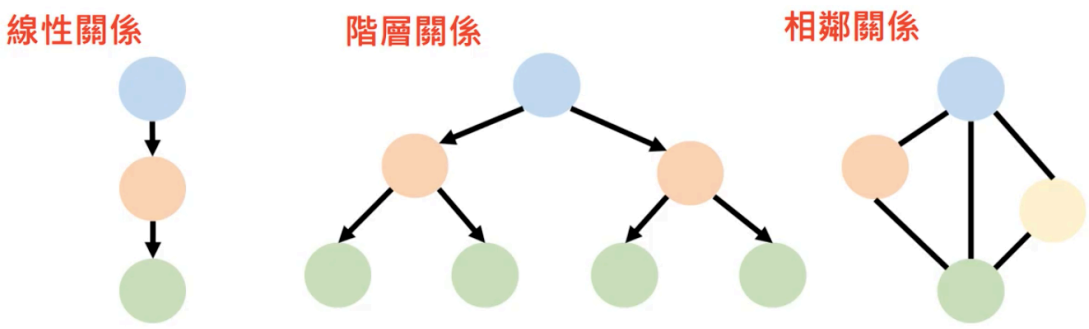
常見的資料操作	常用的資料結構
A. Sort 排序 B. Search 搜尋 C. Delete 刪除特定元素 D. Insert 插入特定元素 E. Push 放入一個元素 F. Pop 取出一個元素 G. Reversal 反轉 H. Query 查詢	A. Array 陣列 B. Linked list 鏈結串列 C. Stack 堆疊 D. Queue 佇列 E. Binary tree 二元樹 F. Undirected graph 無向圖 G. Directed graph 有向圖

對於不同的問題，通常會選擇不同的資料結構及演算法。

舉例來說，在「廣度優先搜尋 BFS」中，通常使用「佇列 Queue」；在「深度優先搜尋 DFS」中，則通常使用「堆疊 Stack」。

有大量新增或刪除資料的需求時，較常使用「鏈結串列 Linked list」；需要常常存取資料時，則優先使用「陣列 Array」。

常見的資料結構可以大致分為三類：



A. 線性關係：這類資料結構中，一筆資料只會連結到另外「一筆」資料，如陣列、鏈結串列、堆疊、佇列等。

B. 階層關係：一筆資料會連結到多筆資料，而且資料間有「不同階層」的關係，但不會形成環（比如上面階層關係的圖中，最下方的綠色節點不會往上連回藍色節點而繞成一個圈圈），如各種「樹」。

C. 相鄰關係：資料結構中一筆資料向外連結到其他筆資料後，有可能會再連結回來（即可能會有環），比如圖論中的「圖」。

（3）常見的演算法

常見的演算法可以被運用在上述的各種資料結構上：

常見的演算法
A. 讀取 B. 搜尋（循序、二分、…） C. 遞迴 D. 排序 E. 動態規劃 F. 貪婪演算法

3. 評估演算法的好壞

（1）為什麼要評估演算法的好壞？

根本的原因是「資源的有限性」，雖然電腦的運算速度是人類手動計算難以比擬的，但絕非無限快；同時，配置的記憶體也有容量上限。

（2）圈圈叉叉與圍棋

圈圈叉叉總共只有 5,478 種下法，對於電腦而言，可以很快根據目前局面運算出所有可能發展，也因此可以隨時計算出勝算最大的下法。

圍棋在過去則被稱為「人類最後的堡壘」，直到數年前 Alpha Go 被開發出來前，人類在圍棋遊戲上都能夠打敗電腦。這是因為根據圍棋的規則，完整的一局共有 10^{171} 種可能的進行過程。

10^{171} 是多大的數字呢？可以這樣理解：全宇宙的原子的總數其數量級約在 10^{80}，也就是說，如果在目前宇宙的每個原子中都放入一個宇宙，並假定所有被放入的宇宙中各存在的 10^{80} 個原子裡，各自可以儲存一種棋局的發展，這樣也只能儲存 10^{160} 種棋局，仍然無法窮舉完所有的圍棋下法。

這使得雖然電腦的運算能力遠遠超過人類，仍無法很容易的解決下圍棋的問題，因為情況太多了。Alpha Go 當然也不可能透過窮舉的方式來得到最佳解，而僅只於選擇它「能夠搜尋的範圍內」的最佳解答，也叫做「局部最佳解」，因此 Alpha Go 仍可能被打敗，只是人腦要贏 Alpha Go 的可能性微乎其微。

從以上的例子可以理解到：在固定的資源下，演算法越好，能夠搜尋的範圍就越多，可以下得越精準。因為看到的範圍（視野）是有限的，用好的演算法，就像以更高的角度來看一個「棋局」、「地圖」或「環境」，對環境有更多認識，也就可能越早找到路徑走出迷宮。

這裡的結論是：當無法透過窮舉來解答某個問題時，運算越快、演算法越好，就能夠一次看到並考量更多東西，算出來的解答也會更好。

（3）演算法的評估方式

在評估演算法時，主要會考慮三個方向：

A. 耗用的資源，包括記憶體空間與 CPU 的運算
B. 寫程式時，程式碼的複雜度
C. 其他人理解該程式碼的困難程度

本書中，通常關心程式執行時所需的「運算次數」，也可看成需花費的時間。

（4）評估方式的平衡

但是「平衡」也是很重要的。

美國為何使用人口抽查來代替普查？因為根據估算，在戶政單位有限的資源下，想挨家挨戶調查每個家戶，光是一輪普查就要 7 年時間。這樣一來，普查根本失去了意義，因為長達 7 年的時間裡，許多調查對象中小孩已經長大，許多人也已經換工作了。

為了避免耗時費力得到的資料沒有參考性，只能選擇一種折衷方式，也就是每幾個人中只抽一個來問，而非每個人都問，這樣就能在比較短的時間內完成一輪。

因為資源的有限，對於「縮短時間」的要求有時會勝過對「精準度」的要求，也就是犧牲精準度以求更快得出結果。

（5）時間複雜度與空間複雜度

什麼時候應該更關注時間複雜度，什麼時候則應該更考慮空間複雜度呢？

運算時間和運算的次數大致呈正比，CPU 運算一次如果需要一毫秒，則算 10 次至少需要 10 毫秒。

而事實上，CPU 的運算資源比記憶體資源來得貴，「增加運算資源」是兩者間較困難的：要擴充記憶體為兩倍，只需花兩倍錢來買記憶體，並插入插槽內，但要擴充 CPU 為兩倍，則成本會比兩倍更高，因此在意的通常是時間複雜度。

不過這也不是鐵則，比如醫療影像的處理就是一種例外，因為醫療影像講求高解析度，一張影像動輒就需要數 GB 的儲存空間，這時就會傾向關注「空間複雜度」，避免所需記憶體空間太大。

一般而言，處理高解析度的照片或影片時，才會有空間複雜度上的考量，文字小說等 txt 檔佔用空間不過幾 MB，只考慮時間複雜度即可。本書中，主要考慮時間複雜度。

（6）兩種變數交換方式

交換兩個變數的值是相當基礎的操作，下面用兩種不同的變數交換方式來直觀比較一下「注重時間複雜度」與「注重空間複雜度」所得的不同程式寫法。

寫法一	寫法二

int a = 5, b = 3;
a += b;
b = a-b;
a = a-b
	int a = 5, b = 3, tmp;
	tmp = a;
	a = b;　　// b assign 給 a
	b = tmp;

耗費運算時間多，耗費記憶體空間少 （時間複雜度差，空間複雜度好）	耗費記憶體空間多，耗費運算時間少 （空間複雜度差，時間複雜度好）

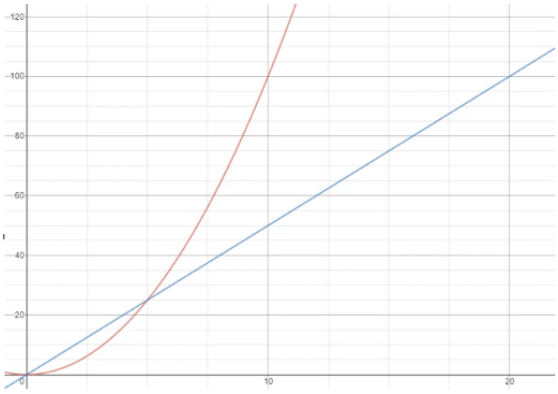
比較寫法一與寫法二，寫法二多使用到了 tmp 這個變數，而寫法一並沒有多宣告變數，因此寫法二的空間複雜度明顯較高（比較不好）。

但是相較於寫法二只使用到 =（賦值 assign）運算，寫法一使用了加減運算，因為電腦處理賦值運算比處理加減運算快，所以寫法一花費的時間較多，時間複雜度較高（亦即較差）。

如同前述，通常在意的是時間複雜度，所以實踐上，多數實作交換函式（swap）時都採用寫法二。

（7）只在意資料量大的情形

另外還要特別提到，比較不同演算法的複雜度時，有時會因為資料量的大小而得到不同結果。給定兩種算法 A、B，可能會發生「資料量小時 A 較有效率」,「資料量大時 B 較有效率」的情形，因為資料量小時，總耗費時間的「差異」必定不大，所以只需在意資料量級很大時哪種算法更有效率。



比較兩種「耗費的時間」對「資料量 x」的函數分別為 x^2（上圖紅線）與 $5x$（上圖藍線）的演算法：

$$x^2 < 5x，for\ x < 5$$

由上式，知道 $x < 5$ 時，x^2 比較好，但是一旦 $x > 5$，也就是資料量超過 5 筆時，$5x$ 就會比較好（花費的時間較少）。

$x > 5$ 時花費時間的多寡當然更需要在意，因為 5 筆資料一般來說不可能花費多久時間，處理上萬、上億筆資料時的效率才需要在意，也因此通常會傾向使用 $t(x) = 5x$ 的演算法，而非 $t(x) = x^2$ 的演算法。

第二節 效能還與哪些有關

1. 另外有幾件事必須注意

（1）程式碼與程式效能

同樣的一台電腦上，程式的效能只受到程式碼內容的直接影響嗎？並非如此。

考慮兩個數字相加，當數字小時，基本運算（加減乘除）可以在常數個指令內完成，但是 CPU 單次運算可以處理的位元有限，數字過大時，就得改用軟體完成，會把一筆比較大的資料切割成很多筆小資料再做運算。

這代表同樣一個程式碼，同樣的運算步驟，有時執行的效能會不太一樣（受到輸入資料的影響）。要記得程式碼越短或程式碼上看起來運算次數越少，不等於執行就會越快，這要回到組合語言去看，因為編譯器常默默完成許多程式碼上無法看到的事情。

（2）strlen 的例子

舉 strlen 函式為例，看看編譯器自動採用的執行方式會如何影響到程式效能：

strlen 函式	
1	for (int i=0 ; i<strlen(str) ; i++){ // int i = 0
2	// check if i < strlen(str), if yes, repeat
3	if (str[i]=='a') counts++; // check if (str[i]=='a'), if yes, counts++;
4	// i++
5	}

假設傳入一個長度為 n 的字串 str，上面的程式碼可以算出 str 裡 'a' 這個字元的出現次數。

執行一次 $strlen(str)$ 需要進行 n 次運算，因為這個函式是直接從開頭字元一個一個數出 str 中字元個數的。再來，因為寫了一個 for 迴圈，迴圈共執行 n 次，當中每次呼叫 $strlen$ 來和 i 比較時，都需要進行 n 次運算，所以看

起來總共需要進行 n^2 次運算。

但是實際測試會發現，當資料量變為 k 倍時（比如 str 的長度變為 nk 個字元），需要的時間並沒有真的變成 k^2 倍。這是因為編譯器會默默進行優化，當它發現每次迴圈跑的過程中 $strlen$ 的值不會改變，就自動將其看作常數，導致程式的執行複雜度與表面上看起來不同。

2. 為什麼使用 C++?

（1）C++ 的優缺點

有些讀者可能有疑問，為什麼本書選擇使用 C++ 來討論資料結構與演算法？

C++ 主要的好處：

A. 內建的 STL 函式庫封裝了常見的資料結構與演算法
B. 支援指標操作，寫鏈結串列 Linked list 時，用指標較有感覺
C. Python 的執行效能較差，比程式競試時可能發生超過時間限制（TLE, Time Limit Exceeded）的問題

當然 C++ 也有壞處，最大的一點就是學習與撰寫起來不如 Python 直觀。要提醒讀者的是，如果目標是比程式競試或進大公司，因為考驗撰寫出的程式效率，因此要得高分最好使用 C / C++。

（2）本書中許多例子可提交於 LeetCode，提交結果有下列幾種，略作說明：

A. Accepted（AC）：通過
B. Wrong Answer（WA）：執行結果是錯的
C. Time Limit Exceed（TLE）：線上評分網站會擔心使用者提交無窮迴圈，造成資源浪費，所以一旦程式碼執行超過時間上限，就會跳出這個結果
D. Runtime Error（RE）：執行 exe 檔時出錯
E. Compile Error（CE）：編譯成 exe 檔的過程中出錯
F. Memory Limit Exceed（MLE）：超過可用的記憶體上限，比較少見

（3） C++ 的一些優化方式

在撰寫 C++ 時（尤其是比程式競試的時候），有一些技巧可以使用（酌參即可，不需了解原理）：

輸入優化：把與 stdio 的同步設為 false，這樣每次用 cin 和 cout 後，就不會用 flush 把緩衝器清掉，輸出入比較快	
1	std::ios::sync_with_stdio(false);
2	std::cin.tie(0);

讀檔檢查：讓輸出入的資料顯示在螢幕上，就可以檢視現在存取的資料有沒有問題	
1	freopen("test.in", "r", stdin);
2	freopen("test.out", "w", stdout);

第三節 Take Home Message

1. 資料結構：資料與資料間的關係，把資料先儲存起來，演算法才能夠操作
2. 演算法：操作或運算資料的方法與步驟
3. 評估程式效能的方式：主要分成「時間複雜度」與「空間複雜度」
    - 時間複雜度：運算所需的時間，與運算次數成正比
    - 空間複雜度：耗用的記憶體空間
4. 程式碼越短效能一定越好嗎？
    - 不一定，還需要考量運算的次數和組合語言
5. 還有哪些東西會影響效能？
    - 最常見的是編譯器優化，程式實際執行時不一定完全依照我們寫的程式碼
    - 電機系和資工系通常會修組合語言，以了解程式實際執行的情況，也建議讀者有機會的話可以修習