Ch2. 複雜度估算 Complexity

緊接著來看如何分析與運算特定程式碼的「複雜度」。

本章中，首先說明「為什麼要分析複雜度」以及「評估複雜度的方式」，再來，會介紹複雜度裡最重要的符號 Big-O。

之後，運用高中數學學過的「極限」來化簡 Big-O 的證明方式，並介紹除了 Big-O 以外，還有哪些估計複雜度的符號。最後，來看遞迴（式）的複雜度應該如何計算。

本章中用到一些數學工具，建議讀者可以動手實際運算一次。

第一節：複雜度簡介

1. 為什麼要評估複雜度

上一章中已經稍微提到此問題的答案：電腦並非無所不能。

雖然電腦運算比人腦運算快很多，但實際上還是有限制的。許多狀況下，即使是最先進的超級電腦也無法算出所有答案，這時如果採用更「好」的演算法，就能在單位時間內取得更好的解答。

再來，記憶體雖然很便宜，但絕非免費，特別是處理圖像或影片的時候，需要耗費許多記憶體空間，成本也可能很高昂。

當無法直接取得最佳解時，越有效率的算法可以找到越好的解答，正如同走迷宮時，通常只能看到眼前的路，但是如果從較高的位置望出去，就能夠看得更遠，也因此可以找到更好（更有效率）的路徑，以利更快走出迷宮。

(1) 如何評估複雜度

在評估複雜度之前，有一些前提條件 Criteria。

在檢視一個算法的複雜度前，要先看看它的「正確度」與「可讀性」：如果算法沒有正確度，即算法是「錯的」，無法被執行或達成設定好的目標，那自然沒有評估複雜度的意義，再來，程式碼要可以被閱讀，使其後續還可以被其他人維護與修改。

進入效能評估（Performance Analysis）的階段後，大致關注兩個方向：「時間複雜度」與「空間複雜度」。

- 時間複雜度代表一段程式執行所需的「運算次數與時間」
- 空間複雜度代表執行時會「佔用多少記憶體空間」。

2. 空間複雜度

(1) 空間複雜度的描述

$$S(I) = C + S_p(I)$$

$\mathrm{S}(I)$：需要的總記憶體空間
C：固定佔用的空間
$S_p(I)$：隨資料量變動的佔用空間

如上式所示，演算法需要的總記憶體空間 $\mathrm{S}(I)$，由 C 與 $S_p(I)$ 兩部分構成。

其中，C 是一個常數，並不隨著輸入的資料量大小不同而改變，程式碼中的常數（constant）或全域變數（global variable）佔用的空間屬於這個部分。

$S_p(I)$ 則會隨著輸入資料量 I 的大小改變：如果輸入的資料量 I 變大，$S_p(I)$ 就會隨之變大。遞迴式用到的堆疊（recursive stack space）、位於函式中的局部變數（local variable）等所佔空間屬於這部分，因為隨著資料量增加，呼叫函式的次數越多，過程中就會產生越多的局部變數。

(2) 費波那契數列的空間複雜度

計算費波那契數 Fibonacci (n)

```
int Fibonacci (int n)
{
	if (n <= 2)
		return 1;
	else
		return Fibonacci (n-1) + Fibonacci (n-2);
}
```

第 n 個費波那契數 Fibonacci (n) 會被拆解成第 n-1 個費波那契數 Fibonacci (n-1) 和第 n-2 個費波那契數 Fibonacci (n-2) 的和，所以用如上的遞迴式來運算費波那契數時，所需空間取決於總共拆解出的數字個數 2^n 的大小。

舉例來說，F(50) = F(49) + F(48)，等號右邊的前項成立 F(49) = F(48) + F(47)，後面一項成立 F(48) = F(47) + F(46)。每個費波那契數都被拆解成兩次對於函式的呼叫，簡單計算後，發現對函式的總呼叫次數接近 2^n。

一個函式被呼叫 2^n 次，每次固定產生 k 個局部變數，則遞迴執行完畢前共產生 $k2^n$ 個局部變數（遞迴全部完成前，變數都不能被釋放掉），所以所需的總空間大小取決於 2^n，即 $\mathrm{S_p}(\mathrm{I}) \propto 2^n$。

$$
\begin{aligned}
S(I) &= C + S_p(I) \\
&= C + k2^n
\end{aligned}
$$

從空間複雜度的公式來看，C 是一個常數，無論想得到的是第幾個費波那契數，此部分都為定值，但 $\mathrm{S_p}(\mathrm{I})$ 則受資料量 I 的大小影響。

$S_p(I)$ 「大概」等於 2^n，加上一個係數 k，表示 $S_p(I)$ 和 2^n 成正比關係。

3. 時間複雜度

(1) 時間複雜度的描述

$$T(I) = C + T_p(I)$$

$T(I)$：需要的總運算時間
C：固定花費的時間
$T_p(I)$：花費時間中隨資料量變動的部分

時間複雜度也是一樣，所需的總時間會由兩個部分構成：第一部分是不會因為輸入資料大小而改變的時間 C，第二部分則是會因為輸入資料大小而改變的時間 $T_p(I)$。

兩種「1 到 N 的和」的算法	
算法 1	算法 2

int sum = 0;
for (int i=1 ; i<=N ; i++)
    sum += i;
	$\text{int sum} = \dfrac{N(N+1)}{2}$

$T_p(I) \propto N$ $T(I) = C + T_p(I)$ $= C + kN$	$T_p(I) = 0$ $T(I) = C + T_p(I) = C$

舉例而言，上表中左右兩個程式碼都可以得到整數「1 加到 N」的和。左邊是由 1 開始加 2、加 3、…，一路加到 N；右邊則利用公式解，即面積等於「（上底+下底）乘以高除以 2」。

左邊的程式碼中，N 越大，運算的次數就越多（迴圈共執行 N 次），因此運行的時間取決於 N；公式解需要的時間則（幾乎）不會因為輸入的 N 值大小而改變，是一個常數 C。

(2) 費波那契數的時間複雜度

計算費波那契數 Fibonacci(n)

```
int Fibonacci (int n)
{
        If (n<=2)
                return 1;
        else
                return Fibonacci (n-1) + Fibonacci (n-2);
}
```

費波那契數的「時間複雜度」方面，因為函式總共會被呼叫 2^n 次，所以總共需要的時間一樣是一個常數 C，加上正比於 2^n 的 $T_p(I)$，即 $T_p(I) \propto 2^n$。

$$
\begin{aligned}
T(I) &= C + T_p(I) \\
&= C + k2^n
\end{aligned}
$$

第二節：複雜度的估計法

1. 估計複雜度的前提

首先，假設「包括但不限於下列的所有運算」都花費一樣的時間：

A. 加減乘除
B. 取餘數
C. 位運算、存取記憶體
D. 判斷、邏輯運算子
E. 賦值運算子

實際上，它們所需的時間當然不一樣，此假設只是為了方便運算與統計。

在如上假設下，只要統計出整段程式總共需要的「運算次數」，看「次數」的數量級大小，就可以得出複雜度，也就可以評估執行所需的時間。也就是說，在估計複雜度時，一般假定「做 10 次運算」正好需要「做 1 次運算」的 10 倍時間，實際上這當然並不完全精確。

2. Step Count Table

設計一個如下的函式，它的功能是把一個陣列裡的值全部加起來。傳入值是陣列開頭的指標 *p 和一個整數長度 len，接著，用一個 for 迴圈把每一筆資料加到 sum 裡。

		Steps	Frequency	Sum of steps
1	int sum (int *p, int len)	0	1	0
2	{	0	1	0
3	int sum = 0;	1	1	1
4	if (len > 0){	1	1	1
5	for (int i=0 ; i<len ; i++)	1	len+1	len+1
6	sum += *(p+i);	1	len	len
7	}	0	1	0
8	return sum;	1	1	1
9	}	0	1	0

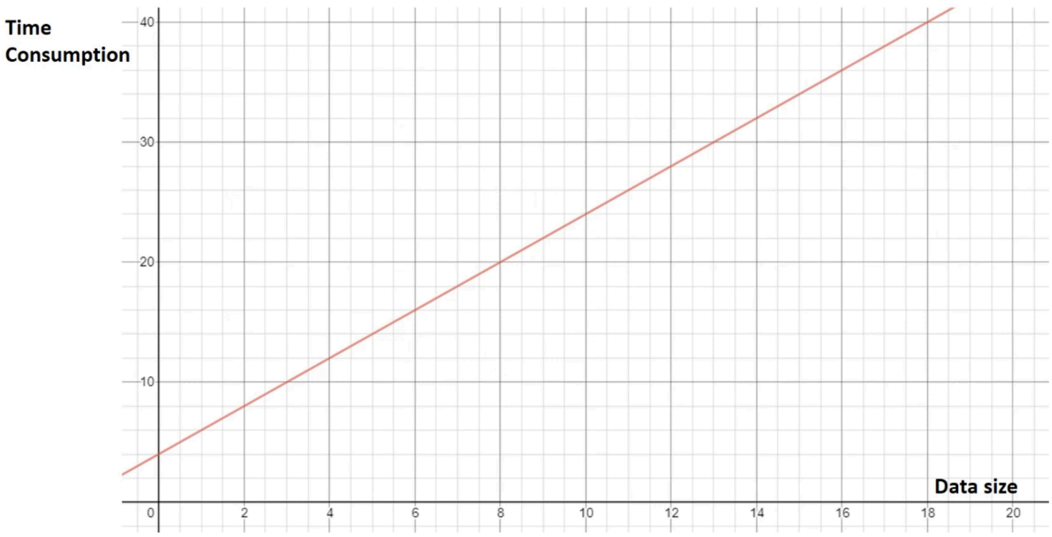
		Total steps： 2len+4

怎麼計算複雜度呢？首先，可以看每一行程式碼需要的「運算步數 Steps」，以及這行程式碼執行的「總次數 Frequency」，將這兩項相乘，就是這段程式碼的總運算步數（Sum of steps）。

以第三行為例，int sum = 0 需要的步數 Step 是 1，且這行總共執行的次數 Frequency 是 1 次，所以這行得到的總步數是 1；第六行的 sum += *(p+i) 一樣需要一步，總執行次數是 len 次（i 從 0 遞增到 len-1），因此所需總步數為 $1 \times len = len$ 步。

注意到第 5 行總共執行 $len + 1$ 次，而非 len 次，因為 i 正好與 len 相等時，仍需要經過「比較 i 和 len」的動作後，才能決定應跳出迴圈往下執行。

Step count table



將每一行需要的步數加總，發現整段程式碼需要的總時間是 $2len + 4$ 次。把 $2len + 4$ 畫在一個圖表上，橫軸是資料大小 len，縱軸是所需時間，$T(len) = 2len + 4$ 是一個二元一次方程式。

圖中的 y 截距 4 即剛剛講的 C，並不會跟著資料量改變；$T_p(I)$ 的部分則隨著資料量增加而變大，因此所需總時間與資料量大致呈正比關係。

3. 「小時候胖不是胖」

對於一個特定的演算法而言，資料量小和資料量大時的優劣不一定相同，通常需要在意的是「資料量大」的時候演算法的表現，因為資料小的時候所耗費的時間原本就不多，所以可以不予考慮。

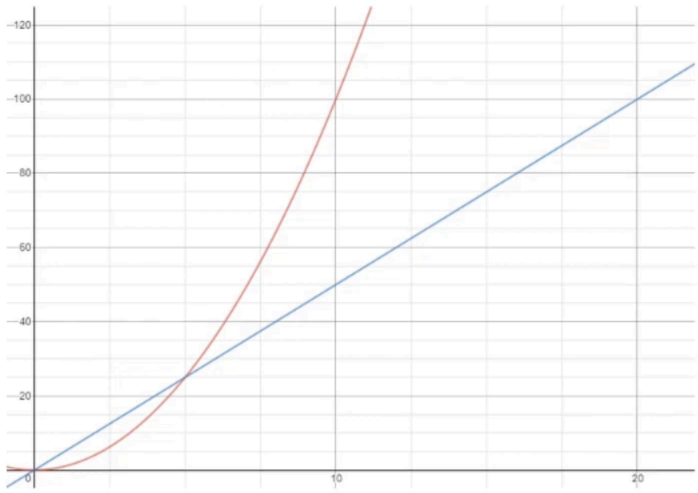
算法 1	算法 2

int sum = 0;
for (int i=1 ; i<=N ; i++)
    sum += i;
	$\text{int sum} = \dfrac{N(N+1)}{2}$

以剛剛看過的程式碼而言，左邊是由 1 加到 N，右邊則是利用公式解。

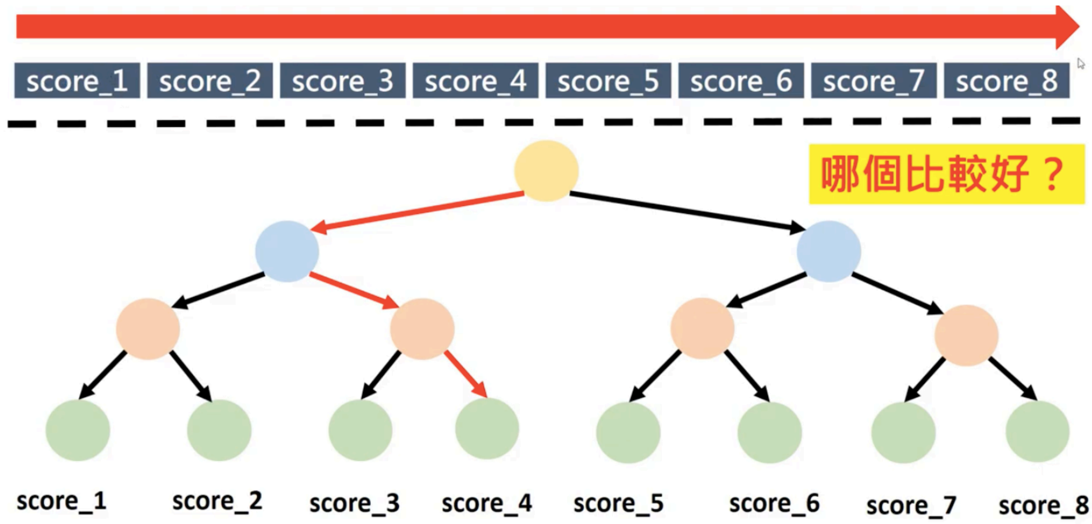
兩種方法在資料量小與資料量大時有固定的優劣關係嗎？極端的情況，如 n 是 1 的時候，其實右邊要比左邊花費更久的時間：因為右邊的算法需要進行乘法和除法，而左邊則只有加法而已。

也就是說，資料量小的時候，左邊比較快，右邊比較慢，但是資料量一大，很明顯的右邊的算法會比較快。



上圖（橫軸為資料量、縱軸為所需時間）可以做一個類比，當資料量小的時候，紅線表現得比較好（速度快、需要的時間短），但是資料量一大，藍線就表現得比較好（速度快、需要的時間短）。因為在意的通常是資料量大的時候，所以藍線對應的演算法較佳。

4. 不同的搜尋演算法



上圖比較的是搜尋陣列時的「循序搜尋」和「二分搜尋」兩種方法。

從第一個搜尋到最後一個就叫「循序搜尋」，而把資料用二元樹的形式儲存，形成二元搜尋樹，每次搜尋皆可去除一半可能位置的方法，叫做「二分搜尋」。

循序搜尋中，最少需要搜尋 1 次（目標在資料開頭），最多則需要搜尋 8 次（目標在資料結尾）；相對的，二分搜尋不管目標資料位在何處，都必須進行 3 次搜尋（n 次搜尋可以找遍 2^n，$2^3 = 8$）。也就是說，對於不同搜尋目標而言，哪一種方法比較好，可以更快找到，其實並非一定。

5. 什麼才是「好」？

究竟是時間花的少，還是記憶體空間花的少更重要？亦或精準度或正確率較高才是需要關注的？

進行某些工程運算時，可以藉由犧牲部分精準度來節省運算時間，比如使用「二分搜尋法」進行根號運算的時候，如果能容忍的誤差越大，所花的時間也就可以越少。

就像這樣，「速度快」、「節省空間」、「精準度高」和「開發成本低」等考量之間，其實並沒有哪個一定更重要，隨時需要進行「平衡」。之前舉過的例子是以抽樣代替普查，雖然抽樣的精準度比普查差，但是時間在此例中，顯然比精準度來得更重要，畢竟 7 年才做出的普查意義不大。

只是再次重申，由於 CPU 運算資源通常更珍貴，所以大多時候更關注如何改善「時間複雜度」。

6. 時間換取空間 v.s. 空間換取時間

「時間換取空間」的策略是指用 CPU 的運算時間來節省記憶體空間的使用，具體來說，就是每次運算完後，都不儲存結果，每次要用到相同結果都重新再算一次。

「空間換取時間」的策略則每次運算完都將得到的結果儲存起來，下次要用到時查表就好，表上沒有所需結果時，也可使用內插法。這種做法會產生一個很大的表，佔用許多記憶體空間，但是一旦建出表格後，未來就能節省許多運算時間。

兩種策略中，較常使用的是以「空間換取時間」。

7. 時間 = 資料量 x 複雜度

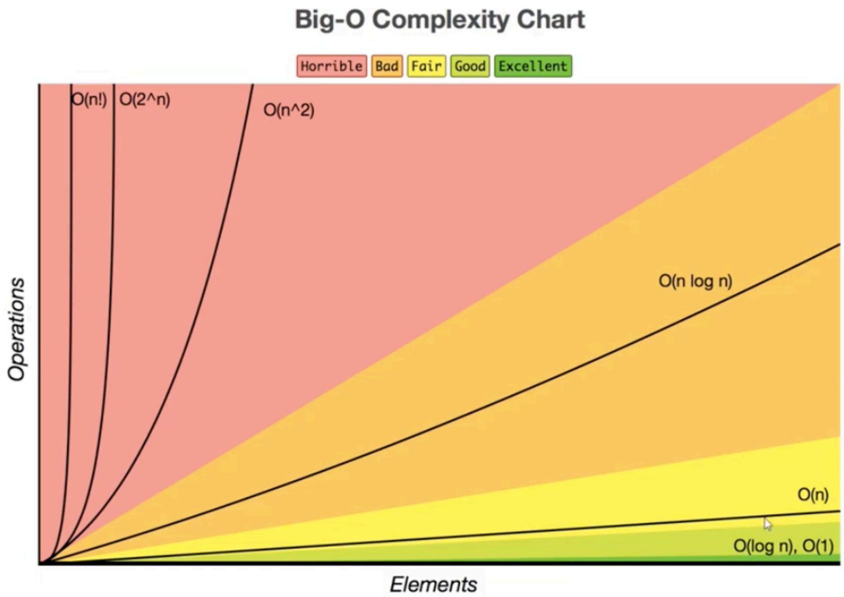
複雜度 -> 資料量	1	N	N^2	N^3	2^N
1	1 毫秒(ms)	1	1	1	1
10	1	10	10^2	10^3	1024 ~ 10^3
100	1	10^2	10^4	10^6	~10^{30}
1,000	1	10^3	10^6 (~15 分鐘)	10^9 (~12 天)	~10^{300}
10,000	1	10^4	10^8 (~25 小時)	10^{12} (~30 年)	~10^{3000}

從上面的表格裡可以看出，當資料量從 1 變成 1,000，成長 10^3 倍時，如果演算法的複雜度是 N^2，所需時間變成 10^6 倍；如果複雜度是 N^3，所需時間則變成 10^9 倍，這代表運算總次數會隨著 N 改變而有巨幅變動。

假設一次運算需要耗費 1 毫秒（10^{-3} 秒），那麼若有 10,000 筆資料，而複雜度是 N，總共需要花費 10 秒（$10 = 10^{-3} \times 10^4$）；複雜度為 N^2 時，大約需要 25 小時；N^3 約需 30 年的時間；2^N 時更是根本算不完。

這也是描述複雜度時習慣以「N 的次方數」表示的原因，N 的次方數一增加，只要資料量變大一個數量級，所需的時間就會呈指數成長，變動非常大。

8. 複雜度的優劣之分



討論複雜度的時候，可以用幾種不同的等級來表達。

如果複雜度是 O(1) 或 O(logn)，就是相當好的演算法，如果是 O(n)，即需要的時間大致上與資料量 n 成正比，那可以算是「普普通通」。

O(nlogn) 大概位於可接受的邊緣，如果複雜度到達 $O(n^2)$、$O(2^n)$，甚至 O(n!)，那麼在資料量大時，幾乎不可能使用現在的電腦將結果算出來。

也就是說，一經評估複雜度，就可以大致瞭解一個演算法的複雜度落在較好或較差的區間，也決定了資料量大時，該演算法還具不具備實用性。

在做競賽題目時，通常複雜度會落在 O(nlogn)，這是因為許多常見的演算法如排序、插入、刪除等，複雜度都為 O(nlogn) 。在寫題目時，可以計算一下自己的答案是不是落在 O(nlogn) 或更好的範圍，如果超過了，比如複雜度是 $O(n^2)$ 或 $O(2^n)$ ，很可能代表有問題，少數狀況 $O(n^2)$ 可以接受，但只要到達 $O(n^3)$ 以上，通常就無法接受了。

9. 範例與練習

(1) 計算下列程式碼「執行輸出」的次數

```
for (int i=0 ; i<N ; i++)
    for (int j=0 ; j<N ; j++)
        for (int k=0 ; k<M ; k++)
            cout << i * j * k << " ";
```

最內層的迴圈會優先執行，k 從 0 增加到 M-1，總共執行了 M 次；中間這層的 j 從 0 遞增到 N-1，總共執行了 N 次；最外層的 i 從 0 遞增到 N-1，也是總共執行 N 次。

綜合起來，這個巢狀迴圈總共會執行 $M \times N \times N = M \times N^2$ 次。

(2) 計算下列程式碼「執行輸出」的次數

```
for (int j=1 ; j<N ; j+=2)
    cout << i << " " << j;
```

第一次執行時 j 是 1，第二次執行時 j = 3，第三次執行時 j = 5，以此類推。若將迴圈目前執行的次數以 n 表示，那麼 j 的值可以寫成 $1+2(n-1)$，只有 $1+2(n-1) < N$ 時，才會滿足迴圈的條件而繼續執行。

移項一下，可以得到 $n < \frac{N+1}{2}$。

(3) 計算下列程式碼的迴圈執行次數

```
for (i=M ; i>1 ; i/=2){
        cout << i << endl;
}
```

迴圈從 $i = M$ 時開始執行，i 必須大於 1，且每次執行完 i 會除以 2。

所以第一次執行時 $i = M$，第二次執行 $i = \frac{M}{2}$ ，第三次執行時 $i = \frac{M}{4}$，第 n 次執行時 $i = \frac{M}{2^{n-1}}$。

因為 $\frac{M}{2^{n-1}}$ 要滿足大於 1 的要求，所以：

$$\frac{M}{2^{n-1}} > 1$$

$$M > 2^{n-1}$$

$$\mathrm{n} < \log_2 M + 1$$。

(4) 計算下列程式碼的時間與空間用量

```
for (j=0 ; j<M ; j++){
        cout << j << endl;
}
for (i=0 ; i<N ; i++){
        cout << i << endl;
}
```

A. 空間複雜度：不管輸入的 M 和 N 是多少，都會使用同樣的記憶體空間。
B. 時間複雜度：第一個迴圈中，j 從 0 到 M-1，總共跑 M 次；第二個迴圈中，i 從 0 到 N-1，總共跑 N 次，上下加起來，迴圈執行總次數是 M+N。

(5) 計算下列程式碼的迴圈執行次數

```
for (int j=1 ; j<N ; j*=2)
        cout << j;
```

j 從 1 開始執行，j 需要小於 N 才會繼續執行，而 j 每次執行都會乘以 2。假設執行第 n 次，此時 j 是 2^{n-1}。

由於 $2^{n-1} < N$ 時迴圈才會執行，兩邊取 $\log_2$，可以得到 $n < log_2 N + 1$。

(6) 計算下列程式碼的迴圈執行次數

```
for (int i=1 ; i<N ; i++)
        for (int j=1 ; j<N ; j*=2)
                cout << i << " " << j;
```

內圈與剛才的例題完全相同，會執行 $log_2(N+1)$ 次。外圈的 i 則從 1 跑到 N-1，總共執行 N-1 次。

內外圈結合起來，總共執行 $(N-1)\,(log_2 N + 1)$ 次。

第三節：Big-O 的運算證明

本節來看看如何用 Big-O 符號來描述演算法的複雜度，複雜度 Complexity 就是描述演算法「工作效率」的函數。

1. 上界與下界

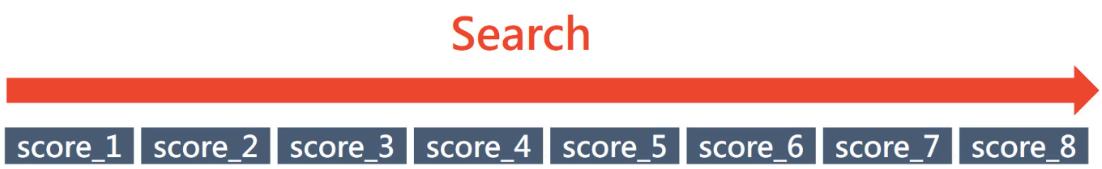
同一個演算法依資料散布情形的不同，處理次數也會有不同：

A. 最壞的情況 Worst-case 下需要的處理次數叫做「上界 upper bound」，因為最壞的狀況下需要的時間是最多的，所以實際執行需要的時間一定不會超過這個「上界」。

B. 最好的情況下需要的處理次數是「下界 lower bound」，「下界」對應的時間是最少需要的時間。

另外也會考慮平均的情況 Average-case。

2. 循序搜尋的上界與下界



如果要在一個長度為 Len 的陣列裡搜尋資料，可以使用「循序搜尋」，從陣列開頭一筆一筆資料確認。

最壞的狀況下，搜尋到最後一筆才找到所需的資料，因此共訪問了 Len 筆資料，這個 Len 就是「上界 upper bound」；最好的情況則是第一筆資料就是所需的資料，這時只要搜尋一筆資料，1 就是「下界 lower bound」。

平均來說（Average-case），需要搜尋 $\frac{Len+1}{2}$ 次。

3. Big-O 的理想條件

通常想知道的是某一算法在「最壞情形」下的表現，也就是最差的狀況下需要多少時間，這樣才能事先留下足夠時間供其執行。也就是說，在意的是 Worst-case，或者資料增加時「所需時間的成長幅度」，即 Growth rate。

另外，也希望複雜度不會受到單位的影響，不管是用 Byte 還是 Bit 為單位，或者時間上以秒、分、小時為單位，都可以得到相同的複雜度。

最後，不在乎小資料時的狀況（也就是「小時候胖不是胖」），畢竟資料量小時僅差幾毫秒，沒有實際影響。

4. Big-O 的數學定義

將上面提到的要求結合起來，就能構造出 Big-O 的數學定義：

$f(n) \in O\big(g(n)\big) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0,$
$f(n) \leq cg(n)$
[存在某個 $c > 0$ 和 n_0，使得對於所有 $n > n_0$，都成立 $f(n) \leq cg(n)$]

其中：
- c 是一個常數，加上這個係數後，Big-O 就不受記憶體 / 時間單位影響
- $n > n_0$ 指的是資料量 n 大於某個數 n_0

如果 $f(n) \in O\big(g(n)\big)$，那麼某個「所需時間可用 $f(n)$ 來表示」的演算法，它的複雜度就是 $O(g(n))$。

要證明 $f(n) \in O\big(g(n)\big)$，需要試著找到一組 c 跟 n_0，使得資料量 n 夠大（超過 n_0）的時候，$f(n) \leq cg(n)$ 總是成立。

若覺得此處的數學式不太直觀，不妨直接往下看看實例。

5. 實際使用 Big-O

如果想知道 $5x$ 能不能寫成 $O(x^2)$，就要試著找到一組 c 和 n_0，使得當資料量 n 超過某個門檻（$n > n_0$）時，都有 $5x \leq cx^2$，這裡 c 可以取任意值。

可以按照如下步驟進行：

A. 把等號左右的 x 約掉（因為 x 代表資料量，必定是正數），得到 $5 \leq cx$

B. 取 $c = 1$（或任意取其它值），同時取 $n_0 = 5$

D. 根據前兩步驟，當 $x > n_0 = 5$ 時，總是成立 $5 \leq cx = x$

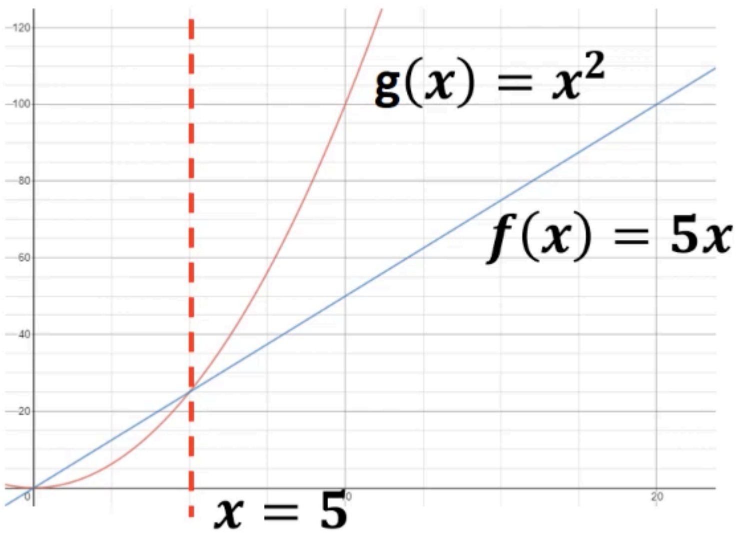
E. 得證 $5x \in O(x^2)$

用數學方式表達：給定 $f(x) = 5x$、$g(x) = x^2$，欲證有一組 $c > 0$、n_0，使得對所有 $n > n_0$ 時，總是滿足 $f(n) \leq cg(n)$。

A. 取 $c = 1,\ n_0 = 5$

B. $\forall x > 5,\ f(x) \leq g(x)$

因此 $f(n) \in O(g(n))$，此例中即 $5x \in O(x^2)$。



把 $f(x) = 5x$ 和 $g(x) = x^2$ 畫在上圖中，紅線是 x^2 對應的時間，藍線是 $5x$ 對應的時間，當 x > 5，即資料量超過 5 筆時，藍線都低於紅線，代表 $5x < x^2$。

Big-O 相當於「上界」，$f(n) \in O(g(n))$ 也可以說成「$g(n)$ 是 $f(n)$ 的上界」。上面的例子裡，x^2 是 $5x$ 的上界，在資料量超過 5 筆的時候，不管資料量再怎麼大，一個所需時間為 $5x$ 的演算法，需要的時間都小於 x^2。

6. 範例與練習

(1) 證明或否證 $5x \in O(x)$

證明過程：

A. 取 $n_0 = 0,\ c = 6$

B. $\forall x > 0,\ 5x \leq 6x$ (這個式子就是 $\forall$x > 0, $f(x) \leq cg(x)$)

因為找到一組 $n_0 = 0$，$c = 6$ 滿足 Big-O 的條件，所以 $5x \in \mathrm{O(x)}$。

(2) 證明或否證 $5x^2 \in \mathrm{O(x)}$

證明過程：

A. 目標是找到一組解滿足 $5x^2 \leq cx$ (也就是 $\mathrm{f(n)} \leq cg(n)$)

B. 等號左右同消掉 x，$5x \leq c$

C. $x \leq \frac{c}{5}$

這代表等式「$5x^2 \leq cx$」只有在 $x \leq \frac{c}{5}$ 的時候才會成立，所以無論 c 取多少，都不能找到對應的 n_0（因為反過來說，$x \geq \frac{c}{5}$ 的時候一定不會成立），所以 $5x^2 \notin \mathrm{O(x)}$。

(3) 證明或否證 $100x^2 \in \mathrm{O}(x^3 - x^2)$

證明過程：

A. 要找到一組解滿足 $100x^2 \leq c(x^3 - x^2)$

B. 取 $c = 100$，$100x^2 \leq 100(x^3 - x^2)$

C. $200x^2 \leq 100(x^3)$

D. $2 \leq x$

E. $\forall \mathrm{x} \geq 2$，$100x^2 \leq c(x^3 - x^2)$

在 $x \geq 2$ 的情況下，c 取 100 就一定會使條件 $100x^2 \leq c(x^3 - x^2)$ 成立，這樣我們就找到一組 c 和 n_0，也就證明了 $100x^2 \in O(x^3 - x^2)$。

使用 Big-O 定義來求複雜度似乎有點麻煩，等一下會介紹一種更簡便的方式。

(4) 證明或否證 $3x^2 \in O(x^2)$

A. 找一組c、n_0，使 $3x^2 \leq cx^2$
B. 取 $c = 3,\ n_0 = 0$
C. $\forall\, x \geq 0, 3x^2 \leq 3x^2$
D. 得證 $3x^2 \in O(x^2)$

(5) 證明或否證 $x \in O(\sqrt{x})$

A. $x \leq c\sqrt{x}$
B. 兩邊平方， $x^2 \leq c^2x$
C. $x \leq c$
D. 反過來說，當 $x \geq c$ 時，一定不成立 $x^2 \leq c^2x$
E. 由上可知，不管 c 取多少，都找不到 n_0 使得定義成立
   no matter what c is, if $n > c$, then $x > c\sqrt{x}$
F. 否證 $x \in O(\sqrt{x})$

第四節：極限的表達方式

1. 用極限方法證明 Big-O

上一節中，介紹了從定義上證明 Big-O 的方式：找到一組 $c > 0$、n_0，使得資料量大於 n_0 的情況下，都有 $f(n) \leq cg(n)$，如此一來，可知 $g(n)$ 是 $f(n)$ 的上界。

$f(n) \in O\big(g(n)\big) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0,$ --- (1)
$f(n) \leq cg(n)$ --- (2)

但要找到這樣的 c 和 n_0 不一定總是很容易，所以會想另尋一種更簡便的方式。觀察 (2) 式，若將不等號左右同除以 $g(n)$，可以得到下面的 (3) 式。

$\frac{f(n)}{g(n)} \leq c$ --- (3)

因為 (1) 的條件中只要求 (2) / (3) 的不等式在「n 大於某個 n_0 時」成立，所以可以直接將 n 推到無限大（然後 n_0 取一個小於無限大的值）。如果下面的 (4) 式成立，即「n 接近無限大時，$\frac{f(n)}{g(n)}$ 收斂到一個常數 c」，那麼就知道 $f(n) \in O\big(g(n)\big)$。

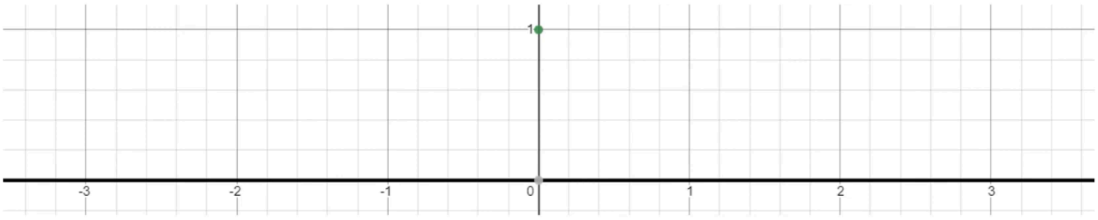
$\lim\limits_{n->\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq c$ --- (4)

2. 極限的複習

往下進行之前，很快複習一下高中數學裡教過的「極限」。如果 $f(x)$ 在 x 逼近 a 時的極限為 L，可以寫成 $\lim\limits_{x->a} f(x) \leq L$，這就是極限的定義。

$$f(x)\begin{cases}0, & \forall x \neq 0 \\ 1, & if\ x = 0\end{cases}$$

$$f(0) = 1,$$
$$but$$
$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$



舉一個例子，有一個 x 的函數 $f(x)$，當 $x \neq 0$ 時，$f(x)$ 的值是 0，而當 $x = 0$ 時，$f(x) = 1$，因此 (0,1) 在 $f(x)$ 上。

雖然 $f(0) = 1$，但是 x「趨近於」0 時，並不會真的「到達」 0，所以 $f(x)$ 在 x 趨近於 0 時，值仍然是 0，即 $\lim\limits_{x->0} f(x) = 0$。

3. 極限的運算規則

給定下面三式：

$\lim\limits_{x->\infty} f(x) = L$

$\lim\limits_{x->\infty} g(x) = K$

$\lim\limits_{x->\infty} h(x) = \infty$

根據極限的定義，下面的 A 到 E 式成立。也就是說，要得到「$f(x)$ 和 $g(x)$ 的運算」的極限，可以先將 $f(x)$ 與 $g(x)$ 個別的極限值 L、K 取出之後，再進行相應的運算。

A. $\lim\limits_{x->\infty} (\,f(x) + g(x)\,) = L + K$

B. $\lim\limits_{x->\infty} (\,f(x) - g(x)\,) = L - K$

C. $\lim\limits_{x->\infty} (\,f(x) \times g(x)\,) = L \times K$

D. $\lim\limits_{x->\infty} (\,f(x) \div g(x)\,) = L \div K$

E. $\lim\limits_{x->\infty} (\frac{1}{h(x)}) = 0$

特別注意 E 式，$\lim\limits_{x->\infty} h(x) = \infty$ 會使得 $\lim\limits_{x->\infty} (\frac{1}{h(x)}) = 0$，也就是「無限大分之一」= 0。

4. 範例與練習

(1) 計算 $\lim\limits_{n->\infty} \frac{3n+2}{2n+5}$

$\lim\limits_{n->\infty} \frac{3n+2}{2n+5}$ 上下同除以 n，

$= \lim\limits_{n->\infty} \frac{\frac{3n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{5}{n}}$ 因為其中所有形如 $\frac{c}{n}$（c 是常數）的值都是 0，所以，

$= \lim\limits_{n->\infty} \frac{3+0}{2+0}$

$= \frac{3}{2}$

只要計算出 $\frac{f(n)}{g(n)}$ 的極限值，看它是不是無限大，就可以決定是否有 $f(n) \in O(g(n))$。比如令 $f(n) = 3n + 2$、$g(n) = 2n + 5$，因為 $\lim\limits_{n->\infty} \frac{3n+2}{2n+5} = \frac{3}{2} \neq \infty$，所以 $f(n) \in O(g(n))$。

(2) 證明或否證 $5x \in$ O(x)

$\lim\limits_{x->\infty} \frac{5x}{x} = 5 \leq c$

因為 $\lim\limits_{x->\infty} \frac{5x}{x}$ 的值收斂到 5，而非無限大，得證 $5x \in$ O(x)。

(3) 證明或否證 $100x^2 \in \mathrm{O}(x^3 - x^2)$

$\lim\limits_{x->\infty} \frac{100x^2}{x^3-x^2}$ 上下同除以 x^3，

$$= \lim_{x->\infty} \frac{100\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3}}$$

$$= \lim_{x->\infty} \frac{100 \times 0}{1 - 0} = 0 \neq \infty$$

因為 $\lim\limits_{x->\infty} \frac{100x^2}{x^3-x^2}$ 的值收斂到 0，而非無限大，得證 $100x^2 \in \mathrm{O}(x^3 - x^2)$。

(4) 證明或否證 $5x^2 \in \mathrm{O(x)}$

$$\lim_{x->\infty} \frac{5x^2}{x} = \infty$$

因為 $\lim\limits_{x->\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x->\infty} \frac{5x^2}{x}$ 等於無限大，並不會收斂，所以 $5x^2 \notin \mathrm{O(x)}$。

(5) 證明或否證 $3\mathrm{x}^3 + 5x^2 + 2\mathrm{x} + 6 \in \mathrm{O}(x^3)$

$$\lim_{x->\infty} \frac{3x^3 + 5x^2 + 2x + 6}{x^3} = 3$$

得證 $3x^3 + 5x^2 + 2x + 6 \in O(x^3)$。

(6) 證明或否證 $\mathrm{f(x)} \in \mathrm{O}(\mathrm{x}^2) \Leftrightarrow \mathrm{f(x)} \in \mathrm{O}(\mathrm{x}^2+\mathrm{x})$

(⇒)

假設左邊成立，$\lim\limits_{x->\infty} \frac{f(x)}{x^2} = c$，即 $f(x) = cx^2$。

此時右邊是否成立？

$$\lim_{x->\infty} \frac{f(x)}{x^2+x} = \lim_{x->\infty} \frac{cx^2}{x^2+x} = c$$

因此右邊也成立。

(⇐)

假設右邊成立，$\lim\limits_{x->\infty} \frac{f(x)}{x^2+x} = c$，即 $f(x) = c(x^2+x)$。

此時左邊是否成立？

$$\lim_{x->\infty} \frac{f(x)}{x^2} = \frac{c(x^2+x)}{x^2} = c$$

因此左邊也成立，兩個寫法等價。

第五節：複雜度的其他符號

來看看除了 Big-O 以外，還有哪些符號可以被用來表示複雜度。

1. Big-O 存在的問題

Big-O 是上界，也就是「最壞的情況」，這代表 Big-O 裡面任意放一個非常大的數字時，f(x) ∈ O(g(x)) 都會成立：

$f(x) \in O(x^2)$
$f(x) \in O(x^2 + x)$
$f(x) \in O(3x^2 + 2x)$
$f(x) \in O(x^3 + 1)$
$f(x) \in O(2x^4 + x)$
$f(x) \in O(x^5 + x^2 + 2)$
…

這就像如果媽媽和你說：「只要你比任一個學生成績好，我就給你獎金」，那麼只要去和全班、甚至全學年成績最差的同學比，很容易就可以達成。

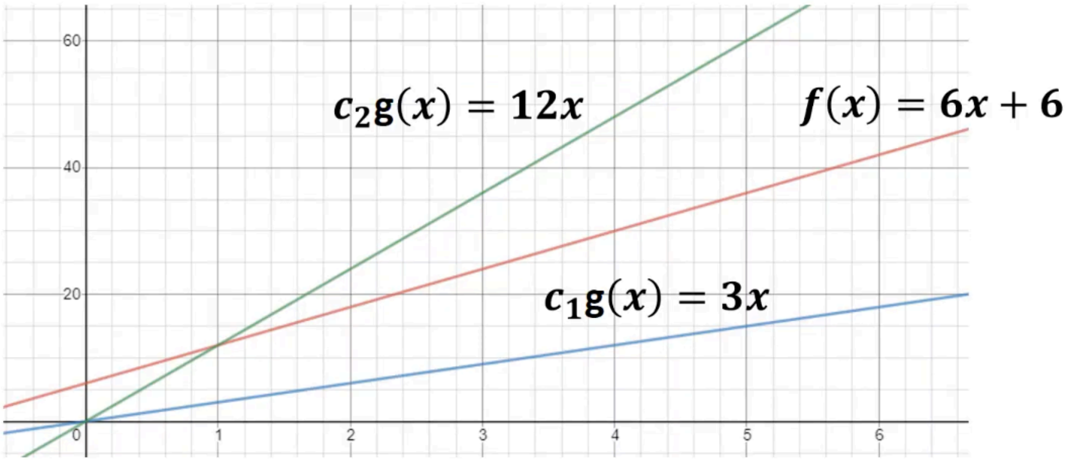
只要 $f(x) \in O(x^2)$，$f(x)$ 就可以寫成 $O(x^3)$、$O(x^4)$、$O(x^5)$、…，且繼續把 Big-O 中 x 的指數任意增加後都仍會成立。

2. Big-Theta Θ

(1) Big-Theta Θ 的定義

$$f(n) \in \Theta\big(g(n)\big) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0, \forall n > n_0,$$
$$s.t. 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$$

Big-Theta Θ 代表 $f(n)$ 會被 $c_1 g(n)$ 和 $c_2 g(n)$ 上下包夾在一起，另一種說法是 $g(x)$ 在乘以兩個相異常數後，可以使 $f(x)$ 介在其間。



$6x + 6 \in \Theta(\mathrm{x})$ 是否成立？

取 $g(x) = x$、兩常數 c_1 與 c_2 分別為 3 與 12，由上圖可看出紅線 $f(x)$ 在 $x > 1$ 時，被包夾在藍線 $c_1g(n)$ 和綠線 $c_2g(n)$ 之間，因此 $6x + 6 \in \Theta(\mathrm{x})$ 成立。

(2) Big-O 和 Big-Theta 的差異

Big-O 的 x 次方數可以不斷往上寫，Big-Theta 則要求特定 x 的最大次方數，如下表所示：

Big-O	Big-Theta
$6x + 6 \in \mathrm{O}(x^2)$	$6x + 6 \in \Theta(x)$
$6x + 6 \in O(x^2 + x)$	$6x + 6 \in \Theta(2x)$
$6x + 6 \in O(3x^2 + 2x)$	$6x + 6 \notin \Theta(3x^2 + 2x)$
$6x + 6 \in \mathrm{O}(x^3 + 1)$	$6x + 6 \notin \Theta(x^3 + 1)$
$6x + 6 \in O(2x^4 + x)$	$6x + 6 \notin \Theta(2x^4 + x)$
$6x + 6 \in \mathrm{O}(x^5 + x^2 + 2)$	$6x + 6 \notin \Theta(x^5 + x^2 + 2)$
…	…

(3) 使用極限方法證明 Big-Theta Θ

$f(n) \in \Theta(g(n)) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0, \forall n > n_0,$ ---(1)
$s.t. 0 \leq c_1 g(n) \leq f(n) \leq c_2 g(n)$ ---(2)

上面 (2) 式各項同除以 g(n)：

$$0 < \lim_{n->\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq c$$

只要 $\frac{f(n)}{g(n)}$ 的極限值「不是無限大」而且「大於 0」，則 $\mathrm{f(n)} \in \Theta(\mathrm{g(n)})$。

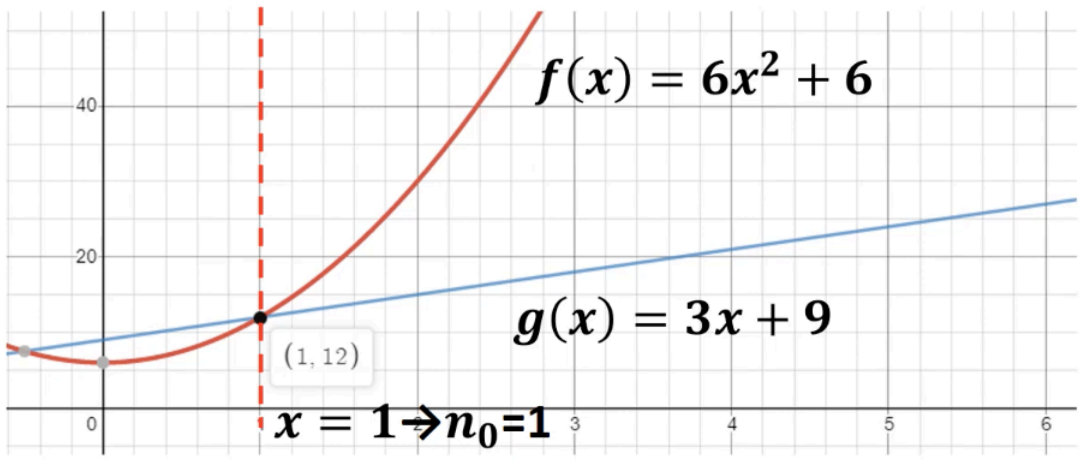
注意：$g(n)$ 只跟 $f(n)$ 中的 x 的最大次方有關。

3. Big-Omega Ω

(1) Big-Omega Ω 的定義

$f(n) \in \Omega(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0,$
$s.t. 0 \leq cg(n) \leq f(n)$

即 $f(n) \in \Omega(g(n))$ 代表 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的下界 (Big-O 則是上界)。



上圖中，$6x^2+6\ \in\ \Omega(3x+9)$ 是否成立？

取 $n_0=1$，紅線 $f(x)\ =\ 6x^2+6$ 在 $x>1$ 時都大於藍線 $g(x)\ =\ 3x+9$，因此 $6x^2+6\ \in\ \Omega(3x+9)$ 成立。

(2) 使用極限方法證明 Big-Omega Ω

$$f(n)\in\ \Omega\big(g(n)\big)\Leftrightarrow\exists c>0,\exists n_0,\forall n>n_0, \qquad \text{---(1)}$$
$$s.t.\,0\le cg(n)\le\ f(n) \qquad \text{---(2)}$$

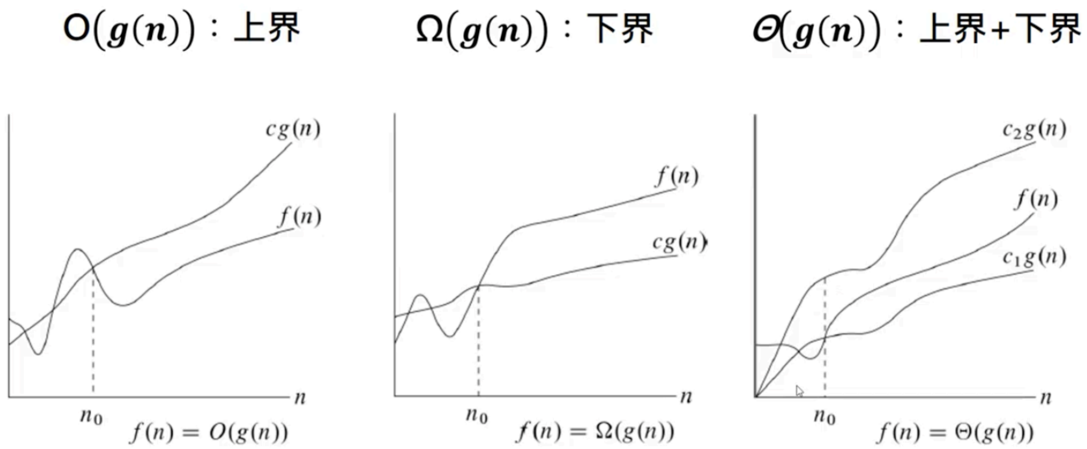
上面 (2) 式中各項同除以 g(n)，

$$c\ \le\ \lim_{n->\infty}\frac{f(n)}{g(n)}$$

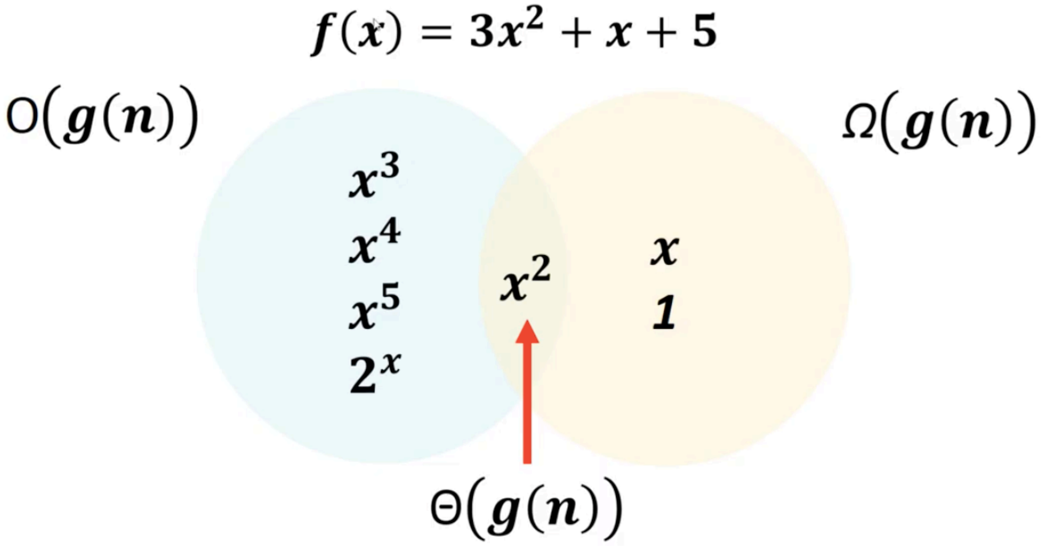
只要 $\frac{f(n)}{g(n)}$ 的極限值大於 0（c 可取任意大於 0 的小值），則

$f(n)\in$ Ω(g(n))。

4. 各個符號的比較



舉例來說，如果時間複雜度 $f(x) = 3x^2 + x + 5$，Big-O 可以取 x^2、x^3、x^4、x^5、2^x、…，因為這些函數都是 $f(x)$ 的上界；Big-Omega 則是 $f(x)$ 的下界，可以取 x^2、x、1 等；Big-Theta 則是上界與下界的交集，最大次方項必須與 $f(x)$ 中 x 的最大次方項 x^2 的次方相同。



第六節：遞迴的複雜度計算

如何計算遞迴式的時間複雜度？

1. 三種計算方法

這裡只介紹三種方法，第四種方法「支配理論」與演算法中的「分治法」有關。

A. 數學解法 Mathematics-based Method
   直接以遞迴的觀念算出複雜度

B. 代換法 Substitution Method
   猜一個數字後代入看是否成立

C. 遞迴樹法 Recurrence Tree Method
   畫出遞迴樹後加總

2. 計算遞迴式的複雜度

計算下列程式碼的時間複雜度：

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1)+3, if\ n>1 \\ 1, otherwise \end{cases}$$

(1) 數學解法：直接以遞迴的觀念算出複雜度

$T(n)$
$= T(n-1)+3$
$= T(n-2)+3+3$
$= T(n-3)+3+3+3$
$= \dots$
$= T(1)+3(n-1)$ // 共有 n-1 個 3，且 $T(1)=1$
$= 3n-2 \in O(n)$

(2) 代換法：猜一個數字後代入

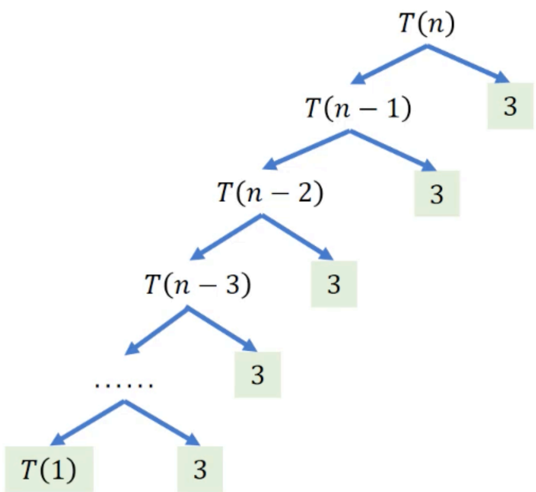
猜 $T(n) \in O(n)$ ，即 $T(n) = cn$，
取 $c = 3$，$T(n) = 3n$。

代入檢驗：
$T(n) = 3n \leq c(n-1) + 3 = T(n-1) + 3$ // 等號成立
$T(n) = 3n \leq cn - c + 3 = T(n-1) + 3$ // 等號成立
$T(n) \in O(n)$

先猜一個複雜度之後，把數字代進去檢驗，看是否產生矛盾，如果沒有矛盾則得證。

(3) 遞迴樹法：畫出遞迴樹後加總之

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1) + 3, if\ n > 1 \\ 1, otherwise \end{cases}$$



把遞迴樹畫出來後，發現每個 $T(n)$ 都可以拆成兩個部分：$T(n-1)$ 和 3，又 $T(1) = 1$。

$T(n) = T(1) + 3 \times (n-1)$
$= 3n - 2$

得證 $T(n) \in O(n)$。

3. 使用任一方法計算下列程式碼的時間複雜度

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n-1), if\ n > 0 \\ 1, otherwise \end{cases}$$

推薦：數學解法/遞迴樹

$T(n)$

$= 2\,T(n-1)$

$= 2^2\,T(n-2)$

$= 2^3\,T(n-3)$

$= \dots$

$= 2^n\,T(0)$

$= 2^n \in O(2^n)$

$T(n)$ 可以被寫成 $2 \times T(n-1)$，$T(n-1)$ 又可以換成 $2 \times T(n-2)$，一直換下去，可以換成 $2^n \times T(0)$，又 $T(0) = 1$，所以 $T(n) = 2^n$，時間複雜度是 $O(2^n)$。