## Ch9. 堆疊 Stack

接下來要進入堆疊 Stack 的部分。

課程大綱

A. 堆疊 Stack 與佇列 Queue 簡介
B. 堆疊 Stack 簡介
C. 堆疊 Stack 實作
D. C++ STL 中的堆疊
E. 堆疊 Stack 應用

首先會簡介堆疊 Stack 和佇列 Queue ，這兩種結構十分類似，差別只在新增資料和刪除資料方向上的不同。

再來，會介紹堆疊 Stack 有哪些實際的應用與其架構，緊接著，來看如何實作出一個堆疊，以及在 C++ STL 裡面要怎麼呼叫出一個堆疊來使用，最後，再來看幾個堆疊的實際應用。

### 第一節：堆疊與佇列簡介

1. 堆疊與佇列的特色

A. 堆疊 Stack 與佇列 Queue 相同處
   a. 都只能操作兩端的值
   b. 不支援搜索

B. 堆疊 Stack
   插入、刪除在同側：Last-in-first-out（LIFO）

C. 佇列 Queue：
   插入、刪除在不同側：First-in-first-out（FIFO）

堆疊和佇列這兩種結構都限制了新增資料的方向，在取用資料時，只能操作「兩端的值」。

堆疊的操作方式很像洗完盤子後，把盤子一個個堆在一起，每個盤子都會在洗好的時候被放到最上面，下次要用的時候，也是從最上面把盤子拿出來：放盤子的時候，是從「最上面放」，拿的時候也是從「最上面拿」。

與此類似，新增資料和刪除資料都是同一側的話，我們就把它叫做堆疊。

另一個常見的例子是品客洋芋片，平常在吃的時候，都是從圓筒的上方把洋芋片拿出來，如果吃不完，需要放回去，也是從上方放回。

堆疊就是這樣一個「新增資料和刪除資料在同一側」的結構，這種資料結構會有什麼特性？想像它像洗衣服一樣，剛洗完的衣服放在最上面，每次要穿新衣服也從上面拿出來，因為放和拿都是從最上面，就導致「最上面的資料會被頻繁更新」，下面的資料則久久才更新一次。

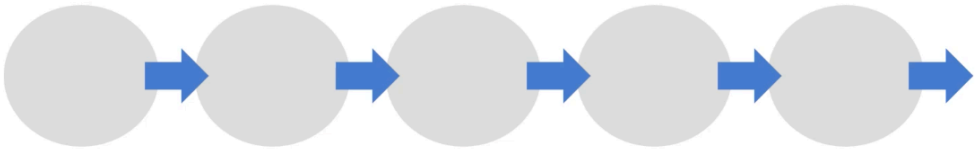
插入和刪除在同側時，又叫做 last-in-first-out（LIFO），根據文意，也就是最後進去結構的資料最先出來，就如最後洗完的衣服放在最上面，下次會第一個穿到，它很適合拿來實現「回復到之前的狀態」。

再來是佇列，佇列的插入和刪除在不同側，這像是排隊的時候，先排進去隊伍中的，會最先排完隊而從隊伍出來：從右邊開始排隊，左邊進場時，先排到佇列裡面的就會先出來，又叫做 first-in-first-out（FIFO）。

(1) 堆疊與佇列的實作方式

## 陣列(Array)

## 鏈結串列(Linked list)



實作堆疊和佇列的時候，都各有兩種方式：一個是用「陣列」來實作，另一個則使用「鏈結串列」，但因這兩種資料結構本身特性上的不同，所以本書在實作上，選擇用陣列練習 Stack 的實作、鏈結串列練習 Queue 的實作。

(2) 操作堆疊與佇列的複雜度

堆疊和佇列都只支援在特定的位置新增和刪除資料，查詢也是一樣。

新增、刪除、查詢這三種操作的複雜度都是 $O(1)$，不管資料的筆數多寡，取出所需要的時間都是一個「定值」。

新增、刪除、查詢只能在特定位置進行的特性，實務上更像是一種「保護機制」，在取用時，只能照順序一筆筆取出來，不會也不能跳過某幾筆資料，這和「印出資料」或者「函式與函式間呼叫」需要「照順序處理」的特性呼應。

之後介紹應用時，就會看到它為什麼要做這樣的限制。

2. 堆疊 Stack 簡介

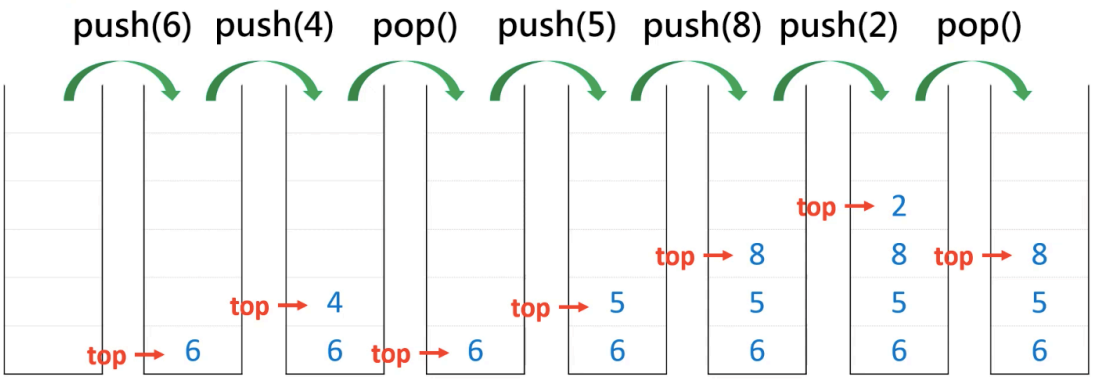
還有一種類比，是把堆疊想像成一個書堆，每次放新的一本書都是從上面放，

每次拿書也從上面拿。


堆疊的操作因為受到限制，比較單純，沒有 erase、insert 等操作，基本的操作只有下列 5 種：

| 常見的堆疊操作 | |
|---|---|
| push | 新增一筆資料 |
| pop | 刪除一筆資料 |
| top | 回傳最末端（上面）的資料 |
| empty | 確認 stack 裡是否有資料 |
| size | 回傳 stack 內的資料個數 |

(1) 堆疊操作的實例




實際來看一個例子，表示堆疊時，通常會畫成上圖這樣像品客洋芋片的圓筒形

狀，上面是開口，下面則是封閉的，每次新增資料都是從上面放進去，要取出資料時也必須從上面取出來。

假設一開始執行 push(6)，代表新增一筆資料 6 到這個堆疊裡面，堆疊中多出 6 這筆資料，此時會有一個 top 指標指向「最上面那筆資料」的位置。再來，執行 push(4)，把 4 這筆資料放進堆疊裡，這樣 4 就在 6 的上面。

pop() 是刪除一筆資料，要刪除時一樣從上面拿走，所以會把最上面的 4 拿掉，剩下 6。

接下來是 push(5)，把 5 放到堆疊裡，變成 5 和 6，push(8) 和 push(2) 依序把 8 和 2 放到堆疊裡，這時 pop() 把最上面的 2 取出來，堆疊從上而下剩下 8 5 6 這三筆資料。

(2) 練習判斷堆疊的新增與刪除

給定 stack = {1,2,3}，方向為右進右出，經過以下操作後，該 stack 的最後內容為何？

A. push(4)
B. pop()
C. push(5)
D. push(6)
E. push(7)
F. pop()
G. pop()

先試著動手算一次，稍後再來寫程式實作。

A. push(4)：{1,2,3,4}
B. pop()：{1,2,3}
C. push(5)：{1,2,3,5}
D. push(6)：{1,2,3,5,6}
E. push(7)：{1,2,3,5,6,7}
F. pop()：{1,2,3,5,6}
G. pop()：{1,2,3,5}

經過這些操作之後，最後 stack 裡的資料是 {1,2,3,5}。

3. 堆疊 Stack 的用途

(1) 堆疊最常見的用途：依序紀錄先前的資訊

A. 常用來回復到先前的狀態

a. 瀏覽器回到上一頁

b. 編輯器復原：在 word 中打錯字，想回復先前的狀態時按「復原」

B. 編譯器的解析 parse

C. 函式呼叫（遞迴）

D. 迷宮探索、河內塔、發牌：Depth-First Search（演算法內容）

E. 無法得知 stack 裡有哪些資料：只能以 pop () 一個個把資料拿出來


在文書軟體中依序做一些操作：剪下、貼上、斷行、輸入、調整字體、貼上、刪除，完成這些操作後，若想要復原應如何進行？要從最後進行的「刪除」開始，依序檢視做過哪些動作，並進行反向操作。

所以每次使用一個指令，或者瀏覽一個網頁的時候，都是把這些操作放到一個堆疊 stack 裡面，最後放入的資料在最上面，與「復原」時最後做的操作應最先復原的特性相同，也就是 last-in-first-out，類似的，最後造訪的網頁要最先還原。

就像這樣，常見的「文件還原」和瀏覽網頁時使用的「回到上一頁」功能都是透過遞迴來實作的。

stack 和 queue 有一個共通問題：無法直接知道其中有哪些資料，只能一個一個依序把資料取出來，而不能跳過次序將中間的某筆資料取出，這種操作是不被保護機制允許的。

(2) Stackoverflow

你或許聽過「Stackoverflow」，這是一個著名「解答程式問題」網頁的名稱。

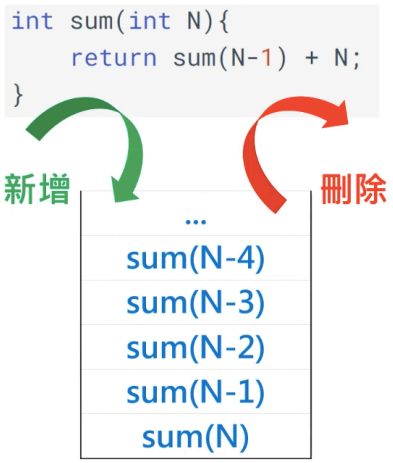

Stackoverflow 的名稱和 logo 是怎麼來的呢？這牽涉到記憶體配置的問題：遞迴呼叫一個函式的時候，每次呼叫都要紀錄當下的位置，以便之後可以返回。

| 遞迴呼叫的函式 | |
|---|---|
| 1 | int sum (int N){ |
| 2 | return sum(N-1) + N; |
| 3 | } |

比如可以把「1 加到 N 的和」拆解成「1 加到 N-1」再「加 N」：

sum(N) = 1 + 2 + … + N = (1 + 2 + … + N-1) + (N) = sum(N-1) + N

所以 sum(N) 也可以表示成 sum(N-1) + N。




第一次呼叫執行 sum(N)，將 sum(N) 放到某個特定的 stack 裡面，接著因為 sum(N) 裡呼叫了 sum(N-1)，所以又把 sum(N-1) 也放到 stack 裡面，sum(N-1) 又會呼叫 sum(N-2)、sum(N-2) 會呼叫 sum(N-3)、...，依此類推，把所有被呼叫的函式不斷的放到 stack 裡。

在呼叫 sum(N-4) 之後，函式裡的「return」究竟該「回歸」到哪裡呢？

答案是 sum(N-3)，這個遞迴產生的 stack 會指出目前執行的函式是被誰呼叫的，就像 word 會把執行的每個步驟都用 stack 記錄方便還原一樣，只要依序把資料從 stack 裡面取出來就可以回到上一個步驟了。

呼叫函式要紀錄當下位置以便之後返回

A. 最後呼叫的函式會優先返回
B. 作業系統會以 stack 處理函式呼叫

呼叫太多層函式時，產生「Stack Overflow」錯誤。

stack 本身的容量是有上限的，如果遞迴的層數太多，把 stack 的整個容量都占滿了，程式就會崩潰，發生 Stack Overflow （堆疊溢位），這也是 stackoverflow 網站命名的由來。

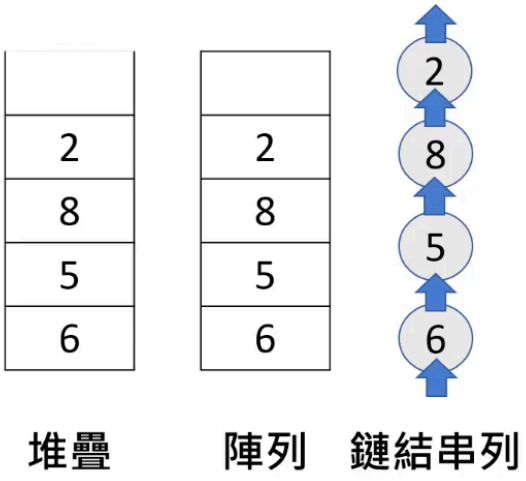
## 第二節：堆疊的實作

接下來要示範如何實作一個堆疊 stack。

堆疊 Stack

A. 可以用陣列或鏈結串列來實作
   a. 以陣列示範堆疊 Stack
   b. 再以鏈結串列練習佇列 Queue

B. 堆疊有大小限制
   a. 解決方式：realloc
   b. 或是直接使用 vector




選擇以「陣列」實作堆疊，是因為堆疊「新增和刪除資料」在同側，從上面把資料取走後，馬上又可以從上面把資料放進去，與佇列相比，較不容易發生「放滿」的情形；佇列是從上面把資料放進去，從下面把資料拿出來（拿出資料空出的空間不能直接用來放新的資料），相對更容易遇到「放滿」的問題，在佇列的章節中會說明如何解決。

然而陣列仍然會有容量的限制，所以使用「動態陣列」來控制記憶體空間的大小，比如使用 realloc，或者 vector，因為目的是練習實作，所以下列示範將引入函式庫：include <stdlib>，想辦法以動態陣列實作出堆疊來。

1. 堆疊類別內的成員

(1) 資料成員

A. 空間大小 Capacity：容器（底層的動態陣列）能容納的上限
B. 最上層位置 Top_Index：容器內最上層資料的位置，
代表目前使用到這個 Array 的哪個位置
C. 指標 Pointer：指向儲放資料的空間（開頭的記憶體位置）

(2) 函式成員

A. 新增 Push
B. 刪除 Pop
C. 大小 Size
D. 空 Empty
E. 取值 Top

(3) 以陣列實作堆疊的步驟：

A. 先用 malloc 準備好一個陣列
B. Top_Index（即索引值）一開始沒有任何資料，初始化為 -1
C. 再分別完成下列函式
a. Top
b. Empty
c. Size
d. Double_Capacity
e. Push
f. Pop
g. Print_Stack

其中，Double_Capacity 的功能是把目前的大小 Capacity 變成兩倍，用於在容量 Capacity 不夠時擴充空間；Print_Stack 是印出陣列中的所有資料，這個函式 STL 中沒有，僅方便測試使用。

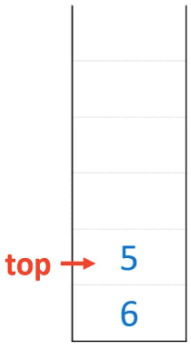
為了表明我們的堆疊由陣列實作，將其命名為 Stack_Array。

class Stack_Array

```
1   template<typename T>
2   class Stack_Array{
3
4       private:   // 屬性都設定成 private
5           int Capacity;
6           int Top_Index;
7           T* Pointer;
8           // 理論上只有類別內的函式會呼叫
9           void Double_Capacity();
10
11      public:      // 函式要被外界取用
12          Stack_Array(int=0);
13          bool Empty;
14          int Size();
15          T Top();
16          void Push(T);
17          void Pop();
18          void Print_Stack();
19  };
```

2. 函式的實作邏輯

(1) Top：回傳最末端的資料




A. 確認 Stack 不為空
   - 如果 Top_Index 值是 -1，就代表裡面沒有任何資料

B. 回傳 Top_Index
   - 指向目前 stack 中「最上面那筆資料」

(2) Empty：確認 Stack 裡是否有資料

A. 確認 Top_Index 是否 >= 0

B. 如果 Top_Index >= 0，回傳 false

C. 如果 Top_Index 是 -1，回傳 true，代表堆疊是空的

(3) Size：回傳 Stack 內的資料個數

A. 回傳 Top_Index + 1

說明：索引值是 3 代表裡面有 4 筆資料，索引值是 4 代表裡面有 5 筆資料，索引值是 -1 則代表裡面沒有任何資料，Top_Index + 1 正好就等於目前 stack 裡面的資料筆數。

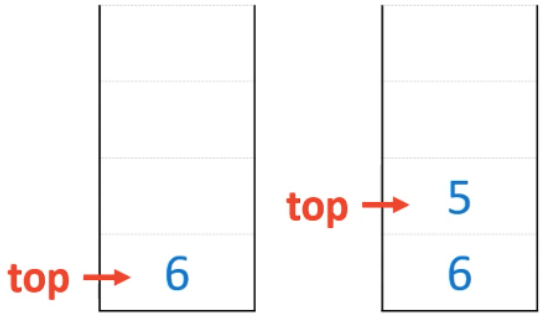
(4) Push：新增一筆資料

A. 確認空間足夠，空間不夠時用 realloc 重新配置空間

- Capacity = Capacity*2

B. Top_Index 往後移一格（Top_Index++），等於多給出一個空間

C. 把資料 assign 給 Top_Index 指到的位置

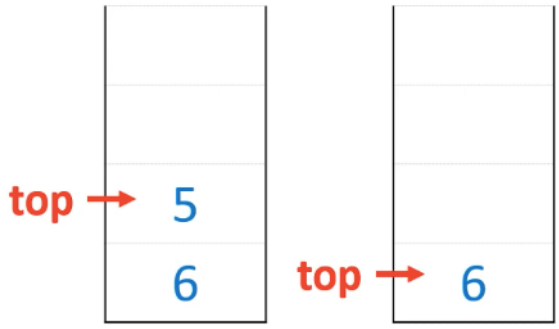



說明：想要在 6 這筆資料上面新增一筆 5，就把 top 往上移一格，再把 5 這個值賦予給 top 新指到的位置。

(5) Pop：刪除一筆資料

A. 確認 Stack 不為空

B. Top_Index 往前移一格（Top_Index--）




說明：因為 top 代表目前 stack 裡面最上面那筆資料的位置，取用時不可以超過這個位置，所以資料「不需要」真的刪除，在上面的例子裡，之後讀取只會讀到 6，再新增一筆資料時自動就會把已經刪除的 5 覆蓋掉。

3. 初始化一個堆疊，並完成

A. 建構式

B. Print_Stack()

Stack.h

```
1  #ifndef STACK_H_INCLUDED
2  #define STACK_H_INCLUDED
3
4  #include <stdlib.h>          // for malloc
5  #include <iostream>          // for cout
6  using namespace std;
7
8  template<typename T>
9  class Stack_Array{
10     private:       // 屬性都設定成 private
11         int Capacity;
12         int Top_Index;
13         T* Pointer;
14         // 理論上只有類別內的函式會呼叫
15         void Double_Capacity();
16
17     public:        // 函式要被外界取用
18         Stack_Array(int=0);
19         bool Empty;
20         int Size();
21         T Top();
22         void Push(T);
23         void Pop();
24         void Print_Stack();
25 };
26 …
27 #endif // STACK_H_INCLUDED
```

建構式

```
1  template<typename T>
2  Stack_Array<T>::Stack_Array(int len){
3      // 容量設定為與 len 相同
4      Capacity = len;
5
6      // 如果使用者有給出非 0 的初始化大小
7      if (len>0){
8          // 用 malloc 開出空間，Pointer 指向這個動態陣列的開頭
9          Pointer = (T*) malloc(sizeof(T)*len);
10     }
11     // 沒有給出引數時，把 Pointer 設定為空指標
12     else {
13         Pointer = nullptr;
14     }
15
16     // 目前還沒有任何資料，因此 Top_Index 要設定成 -1
17     Top_Index = -1;
18 }
```

印出堆疊中所有資料：Print_Stack

```
1  template<typename T>
2  void Stack_Array<T>::Print_Stack(){
3
4      cout << "Data:";
5
6      for(int i=0;i<=Top_Index;i++){
7          cout << *(Pointer+i) << " ";
8      }
9
10     cout << endl;
11
12 }
```

測試堆疊的建構式與 Print_Stack

```
1  #include <iostream>
2  #include "Stack.h"
3  using namespace std;
4
5  int main()
6  {
7      // 注意類別名稱取名叫「Stack_Array」以和 STL 中的 Array 區別
8      Stack_Array<int> data;
9      data.Print_Stack();
10
11     return 0;
12 }
```

執行結果（目前堆疊中還沒有資料）

Data：

4. 在 Stack.h 中完成以下函式

   A. Empty()

   B. Size()

   C. Double_Capacity()

   D. Top()

   E. Push()

   F. Pop()

判斷是否為空：Empty

```
1  template<typename T>
2  bool Stack_Array<T>::Empty(){
3      return (Top_Index == -1);
4  }
```

回傳堆疊大小：Size

```
1  template<typename T>
2  int Stack_Array<T>::Size(){
```

```
3       return Top_Index + 1;
4   }
```

將容量 Capacity 變為兩倍：Double_Capacity

```
1   template<typename T>
2   void Stack_Array<T>::Double_Capacity(){
3
4       // 例外處理：原本為空堆疊（Capacity == 0）
5       if(Capacity == 0){
6           Capacity = 1;
7           Pointer = (T*) malloc(sizeof(T));
8       }
9       // 一般情形
10      else{
11
12          Capacity *= 2;
13
14          // 先儲存 Pointer 位置以便釋放
15          T* tmp = Pointer;
16
17          // 開一個新的兩倍大空間給 Pointer
18          Pointer = (T*) malloc(sizeof(T)*Capacity);
19
20          // 把原先的資料搬遷到新空間
21          for(int i=0;i<=Top_Index;i++){
22              Pointer[i] = tmp[i];
23          }
24
25          // 釋放原空間
26          free(tmp);
27
28      }
29
30  }
```

回傳最上面一筆資料：Top

```
1  template<typename T>
2  T Stack_Array<T>::Top(){
3      // 例外處理：空 Stack
4      if (Empty()){
5          cout << "Error! This stack is empty!" << endl;
6      }
7      // 一般情形
8      else {
9          return Pointer[Top_Index];
10     }
11 }
```

新增資料進堆疊：Push

```
1  template<typename T>
2  void Stack_Array<T>::Push(T value){
3
4      // 空間已滿時擴充
5      if (Top_Index == Capacity-1){
6          Double_Capacity();
7      }
8
9      // 移動最上面一筆資料的 index，使資料要放入的位置變成可以取用
10     Top_Index++;
11
12     // 放入資料
13     Pointer[Top_Index] = value;
14
15     // 上面兩行也可合併成
16     // Pointer[++Top_Index] = value;
17     // 會先把 Top_Index +1 後再傳回 Top_Index 的值
18
19 }
```

從堆疊中去除一筆資料：Pop

```
1  template<typename T>
2  void Stack_Array<T>::Pop(){
3
4      // 例外處理：空 Stack 時不處理
5      if(Empty())
6          return ;
7
8      // 一般情形：Top_Index 減一，使最後一筆資料不會被取用到
9      Top_Index--;
10
11 }
```

測試堆疊 Stack 的各項功能

```
1  #include <iostream>
2  #include "Stack.h"
3  using namespace std;
4
5  int main()
6  {
7      Stack_Array<int> data;
8
9      // 新增資料到 stack 中
10     for(int i=0;i<5;i++){
11         data.Push(i);
12         data.Print_Stack();
13     }
14
15     // 印出 stack 中的資料
16     for (int i=0;i<5;i++){
17         cout << data.Top() << " " << endl;;
18         // 刪除 stack 最上端的資料
19         data.Print_Stack();
```

```
20              data.Pop();
21          }
22
23          return 0;
24      }
```

執行結果

```
Data:0
Data:0 1
Data:0 1 2
Data:0 1 2 3
Data:0 1 2 3 4
4
Data:0 1 2 3 4
3
Data:0 1 2 3
2
Data:0 1 2
1
Data:0 1
0
Data:0
```

## 第三節：C++ STL 裡面的堆疊

接下來，來看 C++ STL 裡面的堆疊 stack。

A. C++ STL 裡面常見的容器：

a. Container adapter：提供特殊的介面/資料存取順序

- stack：新增刪除資料在同側
- queue：新增刪除資料在異側
- priority_queue

B. C++ 中：

a. stack、queue、priority_queue 各有特性與適用情形

b. deques 是 double-ends queue

- 插入、搜尋、刪除：$O(1)$
- b. 只能在特定位置進行

C. Python：沒有引用特定函式庫的情況下，一般都使用 list

這也是學資料結構時常使用 C++ 的原因，因為 C++ STL 有把這些不同的資料結構各自封裝起來，且可以直接使用。

1. STL 中的 stack

(1) stack 和 queue 的使用

A. 引用函式庫

```
#include <stack>
#include <queue>
```

B. 宣告時，以要使用的資料結構名稱開頭，<> 中放的是裡面資料的型別，如果堆疊中要放 int，就寫 <int>，並在後方取一個名稱

```
stack<datatype> stack_name;
queue<datatype> queue_name;
```

注意 STL 中的 stack 與 queue 沒有迭代器 iterator！因為這兩種結構都只能從固定的方向一筆一筆取用資料，所以迭代器沒有意義。

| STL 中 stack 的操作 | |
|---|---|
| stack.push(value) | 新增一筆資料 |
| stack.pop(); | 刪除一筆資料 |
| stack.top(); | 回傳一筆資料 |
| stack.empty(); | 判斷 stack 是否為空 |
| stack.size(); | 回傳 stack 的長度 |

測試 STL 中的 Stack

```
1  #include <iostream>
2  #include <stack>
3  using namespace std;
4
5  int main(){
6
7      // data 中放的是 int 資料
8      stack<int> data;
9
10     // 新增資料
11     for (int i=0;i<10;i++)            // 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
12         data.push(i);
13     cout << data.top() << endl;    // 9
14     data.pop();                    // 0 1 2 3 4 5 6 7 ~~9~~
15     data.pop();                    // 0 1 2 3 4 5 6 7 ~~8~~
16
17     cout << data.top << endl;      // 7
18
19     return 0;
20 }
```

執行結果

```
9
7
```

2. print_stack

Stack 的資料只能照順序取用，不能跳過部分資料直接取用中間的資料，唯一使用中間資料的方法就是把在該筆資料上方的資料全部先 pop 掉。

| 印出 stack 內的資料： | |
|---|---|
| 1 | void print_stack(stack<int>& s){ |
| 2 | |
| 3 | // 例外處理：空 stack |
| 4 | if(s.empty()) |
| 5 | return ; |
| 6 | |
| 7 | // 一般情形 |
| 8 | // 把最上面的資料存進 data 裡 |
| 9 | int data = s.top(); |
| 10 | |
| 11 | // 刪去最上面的資料後重新丟回函式中 |
| 12 | // 相當於處理去除最上面一筆資料的 stack |
| 13 | s.pop(); |
| 14 | print_stack(s); |
| 15 | |
| 16 | // 從最底層的資料開始處理 |
| 17 | // 只剩下一筆資料的時候會第一次運行到這裡 |
| 18 | cout << data << " "; |
| 19 | |
| 20 | // 為了不改動 stack，把資料放回 stack 中 |
| 21 | s.push(data); |
| 22 | |
| 23 | } |

3. Example：LeetCode#155 最小值堆疊 Min Stack

A. 題目

設計一個堆疊，支援下列操作，且可以在 $O(1)$ 時間內回傳最小元素

a. push(x)：加入一筆資料 x 到堆疊中

b. pop()：把堆疊最上方的元素移除

c. top()：取得堆疊最上方的元素

d. getMin()：取得堆疊中值最小的元素

B. 出處：https://leetcode.com/problems/min-stack/

C. 說明

min stack 是要實作出一個最小堆疊，這個最小堆疊可以在 $O(1)$ 的時間（固定時間）內取出 stack 中的最小資料。

D. 解題邏輯

如果一個個去看哪筆資料最小，會需要 $O(n)$，所以我們需要使用兩個 stack

A. 第一個 stack 叫做 data，記錄了原本的資料

B. 第二個 stack 叫做 min，它紀錄了到目前為止 stack 裡面的最小值

用下面的例子說明，從最底端的 6 開始新增

| data | min | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | // data 中不高於此的資料，最小值是 1 |
| 7 | 4 | // data 中不高於此的資料，最小值是 4 |
| 8 | 4 | // data 中不高於此的資料，最小值是 4 |
| 4 | 4 | // data 中不高於此的資料，最小值是 4 |
| 12 | 6 | // data 中不高於此的資料，最小值是 6 |
| 6 | 6 | // data 中不高於此的資料，最小值是 6 |

min 中記載了對應到 data 堆疊中，目前高度之下出現過的最小值，要取出資料時，從 data 堆疊取用，只有在取出最小值時，改取用 min。

| 最小值堆疊 Min Stack | |
|---|---|
| 1 | class MinStack{ |
| 2 | stack<int> data; |
| 3 | stack<int> min; |
| 4 | public: |
| 5 | |
| 6 | // 建構式，不需實作 |
| 7 | MinStack(){}; |
| 8 | |
| 9 | // 新增資料到兩個 stack 中 |
| 10 | void push(int val){ |
| 11 | |
| 12 | // data 這個 stack 中，val 按照一般規則直接新增在最上端 |
| 13 | data.push(val); |
| 14 | |
| 15 | // min 的例外處理：目前沒有資料時，min 中要放 val |
| 16 | if (min.empty()){ |
| 17 | min.push(val); |
| 18 | return ; |
| 19 | } |
| 20 | |
| 21 | // min 的一般情形 |
| 22 | // 取出新增目前 val 之前下面有最小值的資料 |
| 23 | int current_min = min.top(); |
| 24 | |
| 25 | // 如果新的資料 val 比之前的最小值還小，才改放 val |
| 26 | if (val < current_min){ |
| 27 | min.push(val); |
| 28 | // 否則繼續放 current_min |
| 29 | } else { |
| 30 | min.push(current_min); |

```
31              }
32
33      }
34
35      // 刪除最上端資料
36      void pop(){
37              // 例外處理：空 stack
38              if(data.empty())
39                      return ;
40              // 一般情形：兩個 stack 都去掉最上端資料
41              data.pop();
42              min.pop();
43      }
44
45      // 回傳最上端的資料
46      int top(){
47              return data.top();
48      }
49
50      // 回傳目前資料中最小值
51      int getMin(){
52              // 從 min 中取最上端的值
53              return min.top();
54      }
55
56  }
```

4. LeetCode#20. 判斷括號合法性 Valid Parentheses

A. 題目

給定一個字串 s，其中只含有以下六種字元：「( 、) 、{ 、} 、[ 、] 」，根據一定的法則，判斷該字串是否合法。

一個字串合法的條件為：

a. 左括號必須被對應的右括號關閉
b. 右括號的順序要正確對應左括號出現的順序

B. 出處：https://leetcode.com/problems/min-stack/

C. 說明

利用堆疊 Stack 撰寫除錯工具，除錯工具可以確認某字串中的括號是否有成對，例如：

A. { [3 + 6] × 8 } + 9 -> True
B. { [(3 + 6] × 8 } + 9 -> 小括號不成對，False
C. { 3 + 6 ] × 8 } + 9 -> 中括號不成對，False

撰寫程式時，編譯器都會幫我們檢查括號是否有成對，這個應用很常見。

D. 解題邏輯

先準備一個 stack，裡面的資料代表上一個遇到的左括號類型，從左邊開始依序取出字元，如果是左括號 {、[、( ，把它放到 stack 裡面，如果是右括號 )、]、}，則檢查是否和 stack 最上方的左括號正確對應。

{ [(3 + 6)] × 8 } + 9中，左括號依序是 {、[、(，因此 stack 從下到上也依序是 {、[、(。

往右處理的過程中，數字與加減乘除符號可以忽略，遇到第一個右括號的時候（上例中是右小括號），把之前最後遇到的左括號拿出來看，因為正好是左小括

號，代表這組兩個括號有成對，接下來，把這個左小括號拿掉，繼續向右比對，發現下一個右括號是右中括號時，檢查 stack 此刻最上面的資料是不是對應的左中括號。

依此繼續進行，若 stack 可以剛好被完全消完，就代表字串中的括號有成對。

判斷括號合法性 Valid Parentheses

```
1  class Solution{
2
3      // 建立可以存放字元的堆疊   data
4      stack<char> data;
5
6  public:
7      bool isValid(string s){
8
9          // 把字串 s 中的字元一個個取出來放到 c 裡面
10         for (char c:s){
11
12             // 遇到左括號時，放到陣列 data 當中
13             if (c=='(' || c =='[' || c='{'){
14                 // 字元 c 加到陣列當中
15                 data.push(c);
16                 // 繼續執行下一輪迴圈，處理下個字元
17                 continue;
18             }
19
20             // 例外處理：
21             // 出現右括號，但堆疊中還沒有加入過小括號
22             // 或者堆疊中的左括號已經全部被消掉了
23             if ((c==')' || c==']' || c=='}')&& data.empty())
24                 // 沒有成對
25                 return false;
26
27             // 一般情形
```

```
28
29                  //  遇到右小括號
30                  if (c==')') {
31
32                      // stack  頂端要是左小括號才有成對
33                      if (data.top=='('){
34                          data.pop();
35                      }
36                      //  否則一定不成對
37                      else {
38                          return false;
39                      }
40                  }
41
42                  //  遇到右中括號
43                  else if (c==']') {
44                  // stack  頂端要是左中括號才有成對
45                      if (data.top=='['){
46                          data.pop();
47                      }
48                      //  否則一定不成對
49                      else{
50                          return false;
51                      }
52                  }
53
54                  //  遇到右大括號
55                  else if (c=='}') {
56
57                  // stack  頂端要是左大括號才有成對
58                      if (data.top=='{'){
59                          data.pop();
60                      }
61                      //  否則一定不成對
```

```
62                          else{
63                                  return false;
64                          }
65                  }
66
67          }
68
69          // 右括號使用完後，檢查結果
70          // stack 中的左括號都被使用完，代表成對
71          if (data.empty())
72                  return true;
73          // 左括號沒有全部消完，代表沒有成對
74          else
75                  return false;
76
77      }
78  }
```

5. Leetcode#143. 改變鏈結串列順序 Reorder List

A. 題目

給定一個單向鏈結串列，可以表示為：

$L_0 -> L_1 -> L_2 -> \cdots -> L_{n-2} -> L_{n-1} -> L_n$

把該串列的順序改為：

$L_0 -> L_n -> L_1 -> L_{n-1} -> L_2 -> L_{n-2} -> \cdots$

本題規定不能透過修改節點內的值完成，只能修改節點間指標的指向。

B. 出處：https://leetcode.com/problems/reorder-list/

C. 說明

這題把 stack 跟之前的 linked list 做結合，題目的要求是把給定的順序重新做排序，如果是 1 2 3 4，要變成 1 4 2 3，如果是 1 2 3 4 5，要變成 1 5 2 4 3。

D. 解題邏輯

準備一個 stack，依序把想要的順序放到 stack 當中，思考一下如何放進 stack 中才會符合題目要求的順序。

因為其中 $L_n$、$L_{n-1}$、$L_{n-2}$、... 這部分與原本的順序是倒過來的，所以要有一種方法來「逆著順序取用」。剛好堆疊就有這個特性，如果放資料進去的順序是 1 2 3 4 5，取出的順序會是 5 4 3 2 1（右進右出），可以把資料逆向取用。

| 改變鏈結串列順序 Reorder List | |
|---|---|
| 1 | class Solution { |
| 2 | // 利用一個堆疊 data 來儲存所有節點的記憶體資料 |
| 3 | stack<ListNode*> data; |
| 4 | public: |
| 5 | |
| 6 | void reorderList(ListNode* head){ |
| 7 | |
| 8 | // current 從 list 的開頭出發 |
| 9 | ListNode* current = head; |
| 10 | // 用整數 len 來計算 list 資料的總筆數 |
| 11 | int len = 0; |
| 12 | |
| 13 | // 把 list 中的資料依序放到堆疊中 |
| 14 | // 注意取用時會是反向的（從尾項到頭項） |
| 15 | while(current!=nullptr){ |
| 16 | // 在 data 中儲存當前 current 節點的記憶體位置 |
| 17 | data.push(current); |
| 18 | current = current->next; |
| 19 | len++; |
| 20 | } |
| 21 | |

```
22          // 重新從開頭處理，開始改變節點順序
23          current = head;
24
25          // 要把後半的節點插入前半，
26          // 迴圈只需要處理到長度 len 的一半即可
27          for (int i=0 ; i<len/2 ; i++){
28
29              // 從剛才的堆疊中取出一筆資料
30              // 注意取到的順序會是從尾端節點開始
31              ListNode* last_node = data.top();
32              data.pop();
33
34              // 要插入資料到兩筆資料之間
35              // 比如在 A->B 中插入一筆資料 C，變成 A->C->B
36              // 步驟如下（A: current, B: current->next, C: last_node）:
37
38              // 把 C 的 next 指向 A 的 next（也就是 B）
39              last_node->next = current->next;
40
41              // 把 A 的 next 改指向 C
42              current->next = last_node;
43
44              // current 往後一格從 A 到 B
45              // 因為中間已經插入了 C，要移動到 current->next->next
46              current = current->next->next;
47
48          }
49
50          // current 處理完成後，尾端資料的 next 指向空指標
51          current->next = nullptr;
52      }
53
54  };
```

觀察一下上面的程式碼，如果輸入是一個空的 list 時也可以處理：因為一開始 current 會被設定成 head，在空的 list 中也就是空指標，因此 len 會被設定為 0，第二個迴圈不會被執行，最後處理的結果仍然是一個空的 list，所以上面的程式碼也能夠正確處理這個邊界狀況。

## 第四節：堆疊常見的應用

接下來，我們會來介紹三個堆疊常見的應用

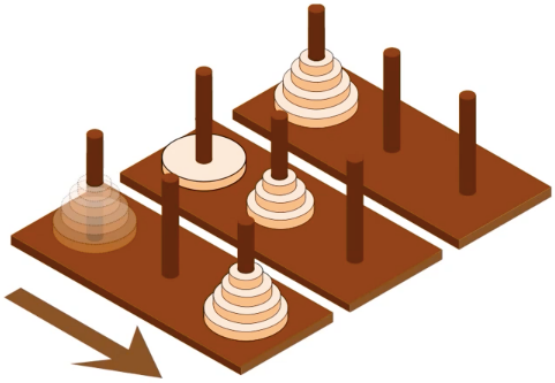
A. 河內塔：一個經典的古老遊戲
B. 深度優先搜尋：老鼠走迷宮
C. 中序轉後序運算

### 1. 河內塔

A. 河內塔遊戲的規則可以表示為：

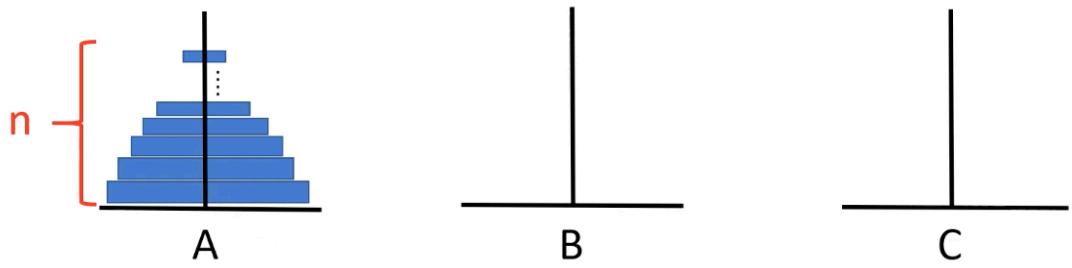
a. 讓使用者輸入一正整數 N，輸出將 N 層河內塔從一根棍子移到另一根棍子的所有過程。

b. 共有三根棍子，每根棍子上可以擺放盤子。開始至完成間，每次只能移動一個盤子，且移動前後，所有棍子上，較上方的盤子都必須較下方的「所有盤子」來得小，也就是說，對於每根棍子而言，只要上面有盤子，盤子就必須是從底層開始由大到小依序擺放。

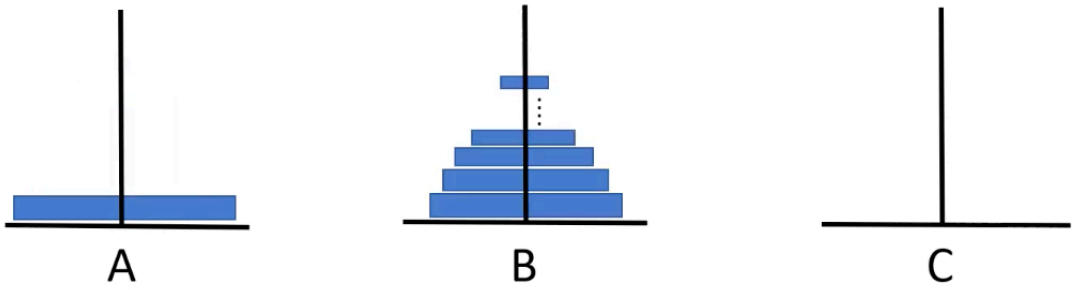


c. 提示：因為大的盤子一定要放在小盤子的下面，所以最下面 / 最大的盤子必須先移動到目標的棍子上。

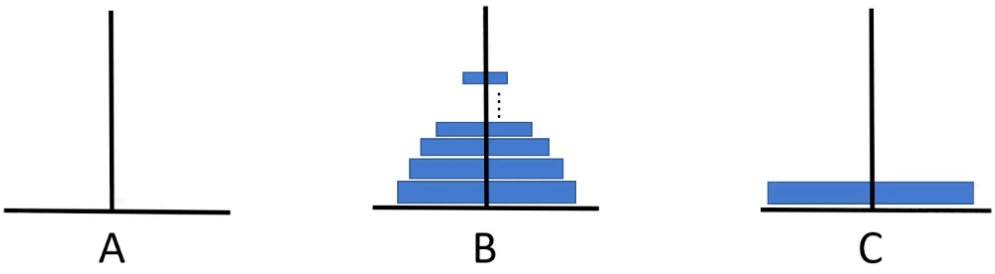
B. 解題邏輯




目標是要把所有盤子從 A 移到 C，那麼「最大的盤子」必定要最先從 A 移到 C。然而如果想要移動這個目前位於 A 底部的最大的盤子，在它上方的 n-1 個盤子都必須先移動到其他兩根棍子之一上。




假設找到一個方法，把上面的 n-1 個盤子都移動到 B 了，那麼緊接著，就可以用「一次」移動把最大的盤子從 A 棍子移動到 C 棍子上。



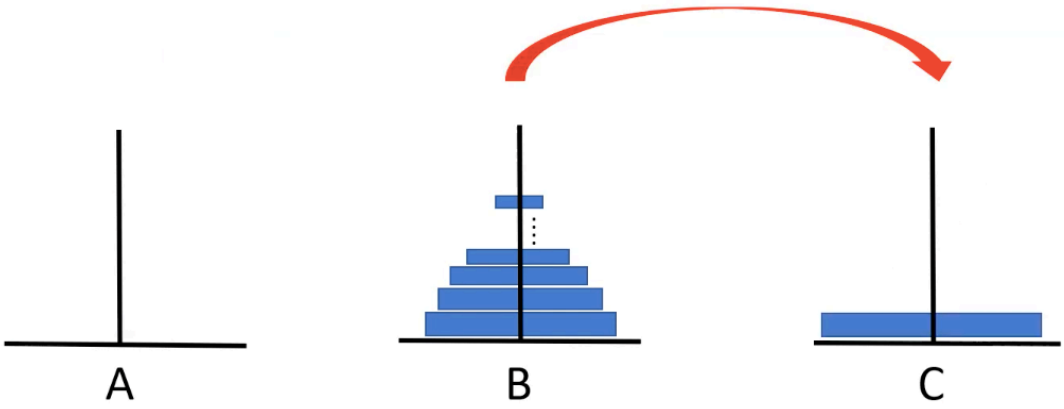
經過上面的處理，目前的情況是：

A：沒有盤子

B：除了最大盤子外的 n-1 個盤子

C：最大的盤子

從目前的情況開始，繼續把 B 上的 n-1 個盤子移動到 C 棍子，就可以達成遊戲的目標。




然而這同樣需要經過「把 n-1 個盤子移動到另一個棍子」的步驟，因此我們可以列出下面的等式：

```
// 把 n 個盤子從 A 移到 C =
// 把 n-1 個盤子從 A 移到 B +
// 把最大的盤子從 A 移到 C
// 把 n-1 個盤子從 B 移到 C
```

$$Hanoi(n) = Hanoi(n-1) + Hanoi(1) + Hanoi(n-1)$$

這也就是說：n 層河內塔的問題可以被拆分表示為「n-1 層河內塔的問題」與「1 層河內塔的問題」與另一個「n-1 層河內塔的問題」。

河內塔的問題與堆疊有什麼關係呢？當要從棍子上把盤子取走的時候，是從上方取走盤子，要把盤子放下時，也是從棍子上方放下，因為「新增盤子」與「刪除盤子」是同向，所以三個棍子就等同於三個堆疊，在進行河內塔遊戲的過程，也是對三個 stack 進行操作。

C. 目標輸出

A B C 代表三根棍子，每次移動後，分別輸出 A B C 上的每個盤子。

一開始 A 從下而上有三個盤子 3、2、1 時的目標輸出：

A:3 2
B:
C:1
---
A:3
B:2
C:1
---
A:3
B:2 1
C:
---
A:
B:2 1
C:3
---
A:1
B:2
C:3
---
A:1
B:
C:3 2
---
A:
B:
C:3 2 1
---

河內塔

```
1  #include <iostream>
2  #include <stack>
3  using namespace std;
4
5  // 宣告三個 stack 為全域變數，可使用的空間會較大
6  stack<int> A;
7  stack<int> B;
8  stack<int> C;
9
10 // 仿照上面的邏輯，寫出搬動河內塔的函式
11 // 把代表三根棍子的三個堆疊分為 from、to 和 others
12 // 每次呼叫函式，藉由傳入時的順序表示要從哪個堆疊移動到哪個堆疊
13 void Hanoi(int N, stack<int>& from, stack<int>& to, stack<int>& others){
14
15     // 邊界條件：只有一個盤子（最大的盤子）要搬動
16     if (N==1){
17         // 把這個盤子由 from 搬到 to
18         to.push(from.top());
19         from.pop();
20         // 每次移動完都印出目前狀態
21         print_all();
22         return;
23     }
24     // 一般情形
25     else {
26
27         // 把 N-1 個盤子從 from 移動到 others
28         // 在剛才的說明裡，為 A->B
29         Hanoi(N-1, from, others, to);
30
31         // 把 1 個盤子從 from 移動到 to
32         // 剛才的說明裡，為 A->C
33         to.push(from.top());
```

```
34              from.pop();
35              print_all();       // 移動完要印出目前狀態
36
37              // 把 N-1 個盤子從 others 移動到 to
38              // 剛才的說明裡，為 B->C
39              Hanoi(N-1, others, to, from);
40
41          }
42
43  }
44
45  // 寫兩個印出資料的函式
46  // print_stack 印出任一個堆疊中的資料
47  // print_all 利用 print_stack 來印出 A B C 三個堆疊全部的資料
48
49  // 與先前介紹的 print_stack 做法相同
50  void print_stack(stack<int>& s){
51          if (s.empty())
52              return ;
53          int data = s.top();
54          s.pop();
55          print_stack(s);
56          cout << data << " ";
57          s.push(data);
58  }
59
60  void print_all(){
61          cout << "\nA:";
62          print_stack(A);
63          cout << "\nB:";
64          print_stack(B);
65          cout << "\nC:";
66          print_stack(C);
67          cout << "\n----------";
```

```
68  }
69
70  int main(){
71
72      // 輸入 N，代表要移動 N 層河內塔
73      int N;
74      cout << "Please enter N:" << endl;
75      cin >> N;
76
77      // 設定初始狀態
78      // 堆疊 A 從底層開始，有編號 N 到 1 的盤子的 N 個盤子
79      for (int i=N;i>0;i--)
80          A.push(i);
81
82      // 第一次呼叫 Hanoi 函式，其中 from 是 A，to 是 C
83      Hanoi(N, A, C, B);
84
85      return 0;
86  }
```

執行結果

```
Please enter N:
>> 3
A:3 2
B:
C:1
--------------
A:3
B:2
C:1
--------------
...
```

2. 老鼠走迷宮

A. 題目

給定一個二維陣列，二維陣列中 1 代表牆壁，0 代表可以走的路徑，起點是 (1,1)，終點是 (8,10)，請找一條可以從起點通到終點的路徑，並把該可行路徑在陣列中用 2 這個值標出。

B. 初始狀態與目標輸出

```
int MAZE[10][12] = {              // 初始狀態
        {1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1},
        {1,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1},
        {1,1,1,0,1,1,0,0,0,0,1,1},
        {1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1},
        {1,1,1,0,0,0,0,1,1,0,1,1},
        {1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1},
        {1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1},
        {1,1,1,1,1,1,0,1,1,0,1,1},
        {1,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1},
        {1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1},
};

int MAZE[10][12] = {              // 目標輸出
        {1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1},
        {1,2,2,2,1,1,1,1,1,1,1,1},
        {1,1,1,2,1,1,2,2,2,2,1,1},
        {1,1,1,2,1,1,2,1,1,2,1,1},
        {1,1,1,2,2,2,2,1,1,2,1,1},
        {1,1,1,0,1,1,2,1,1,2,1,1},
        {1,1,1,0,1,1,2,1,1,2,1,1},
        {1,1,1,1,1,1,0,1,1,2,1,1},
        {1,1,0,0,0,0,0,0,1,2,2,1},
        {1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1},
};
```

C. 解題邏輯

利用一個堆疊 stack 儲存目前走過的路徑，並開另外一個二維陣列紀錄已經嘗試過的路徑（以使之後走時不要重複），不斷往下搜索直到無路可走的時候（代表目前路徑的尾端若干個不在正確路徑上），回頭退到分岔口找別的路徑。

堆疊的重要功能之一就是「復原狀態」，當發現目前走的路徑不是正確的，可以從堆疊取出資料以找到退回上一個路口（有其他方向可以選擇）的路徑。

程式的結束條件是已經走到終點，或者 stack 是空的，該題沒有可行的路徑。

| 老鼠走迷宮 | |
|---|---|
| 1 | #include <iostream> |
| 2 | #include <stack> |
| 3 | #include <vector> |
| 4 | using namespace std; |
| 5 | |
| 6 | int main(){ |
| 7 | int MAZE[10][12] = { |
| 8 | {1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}, |
| 9 | {1,0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1}, |
| 10 | {1,1,1,0,1,1,0,0,0,0,1,1}, |
| 11 | {1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1}, |
| 12 | {1,1,1,0,0,0,0,1,1,0,1,1}, |
| 13 | {1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1}, |
| 14 | {1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1}, |
| 15 | {1,1,1,1,1,1,0,1,1,0,1,1}, |
| 16 | {1,1,0,0,0,0,0,0,1,0,0,1}, |
| 17 | {1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}, |
| 18 | }; |
| 19 | |
| 20 | // 需要二維陣列（這裡使用二維 vector）來記錄哪些點走過 |
| 21 | // 哪些點還沒有走過，以避免陷入無窮迴圈 |

```
22      // 10 個 row，12 個 column，初始值都是 false 的布林陣列
23      vector<vector<bool>> visited(10, vector<bool>(12,false));
24
25      // 記錄走過的路徑，每個點用 x 和 y 座標組成的 pair 來表示
26      stack<pair<int, int>> path;
27
28      // 起點 (1,1) 放到堆疊中，make_pair 函式可以用來創造出 pair
29      path.push(make_pair(1,1));
30      // 記錄起點 (1,1) 這個點已經走過
31      visited[1][1] = true;
32
33      // 當 path 中還有可行路徑的時候繼續進行
34      while(!path.empty()){
35
36          // 取出當前座標 (x,y)
37          pair<int, int>current = path.top();
38          int x = current.first;
39          int y = current.second;
40          // 檢查是否已經到達終點，本題中為 (8,10)
41          if(x == 8 && y == 10)
42              break;
43
44          // 找尋可以走的路徑
45          // 試試看能不能往「下方」走一格
46          // 兩個條件：一是下面一格在迷宮裡是可以走的數字 0
47          // 二是那一格不是已經走過的路徑
48          //（因為我們希望產生的路徑不會有回頭走的情形）
49          if (MAZE[x+1][y]==0 && visited[x+1][y] == false){
50              // 往下走一格並記錄到 path 當中
51              path.push(make_pair(x+1),y);
52              // 把 visited 設定成 true，避免重複走到
53              visited[x+1][y] = true;
54          }
55
```

```
56              // 如果「下方」不能走，試試往「上方」走
57              else if (MAZE[x+1][y]==0 && visited[x-1][y] == false){
58                      path.push(make_pair(x-1),y);
59                      visited[x-1][y] = true;
60              }
61
62              // 如果前幾個方向不能走，試試往「右方」走
63              else if (MAZE[x][y+1]==0 && visited[x][y+1] == false){
64                      path.push(make_pair(x),y+1);
65                      visited[x][y+1] = true;
66              }
67
68              // 如果前幾個方向不能走，試試往「左方」走
69              else if (MAZE[x][y-1]==0 && visited[x][y-1] == false){
70                      path.push(make_pair(x),y+1);
71                      visited[x][y-1] = true;
72              }
73
74              // 發現上下左右都不是可行的方向
75              // 代表目前的這點不在正確的路徑上
76              else{
77                      // 把目前這一點從我們想要找到的正確路徑上去除
78                      path.pop();
79              }
80      }
81
82      // 根據得到的正確 path，把 MAZE 當中路徑文字改成 2
83      while (!path.empty()){
84              pair<int, int> current = path.top();
85              int x = current.first;
86              int y = current.second;
87              MAZE[x][y] = 2;
88              // 繼續修改堆疊的下一筆資料
89              path.pop();
```

```
90          }
91
92          // 印出已經標出路徑的 MAZE 陣列
93          for(int i=0;i<10;i++){
94                  for(int j=-;j<12;j++){
95                          cout << MAZE[i][j] << " ";
96                  }
97                  cout << endl;
98          }
99
100         return 0;
101 }
```

執行結果

```
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 2 2 1 1 1 1 1 1 1 1
1 1 1 2 1 1 2 2 2 2 1 1
1 1 1 2 1 1 2 1 1 2 1 1
1 1 1 2 2 2 2 1 1 2 1 1
1 1 1 0 1 1 2 1 1 2 1 1
1 1 1 0 1 1 2 1 1 2 1 1
1 1 1 1 1 1 0 1 1 2 1 1
1 1 0 0 0 0 0 0 1 2 2 1
1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
```

這題的情況比較單純，因為迷宮邊緣正好都是一，不會有路徑超出邊緣的情況，一般來說，還需要處理邊界條件，如往右走一步後「y 座標加一」會不會導致超出邊界等。

3. 中序轉後序運算

(1) 中序與後序

A. 中序（Infix）表示運算子在需要進行運算的兩個數字的中間（比如 x 乘號在 b 和 c 的中間，代表 b 和 c 要相乘），是我們慣用的、數學上的運算順序：

- $a + b \times c + d$

B. 後序（Postfix）表示運算子在後面，是電腦慣用的運算順序：

- $bc\times$
- $a(bc\times) +$
- $(abc\times+)\ d +$

(2) 後序運算的進行方式

電腦之所以使用後序 postfix 這種表達方式，是有運算上的考量。

後序運算可以無須考慮括號造成的優先次序，每當遇到「兩個數字」加上「一個運算子」時，就直接進行運算。

運算時，自左到右把資料取出，遇到「運算元（數字）」時放入堆疊，遇到「運算子」時，則從堆疊中拿出「最近放入」的兩個運算元，並以該運算子加以運算。

(3) 後序運算的例子： $352\times+6+$

(3)：把 3 放入堆疊　　// 堆疊 = {3}
(5)：把 5 放入堆疊　　// 堆疊 = {3,5}
(1)：把 2 放入堆疊　　// 堆疊 = {3,5,2}
(x)：自堆疊中取出兩筆資料 5,2，運算後 5x2 放回堆疊　// 堆疊 = {3,10}
(+)：自堆疊中取出兩筆資料 10,3，運算後 10+3 放回堆疊　// 堆疊 = {13}
(6)：把 6 放入堆疊　　// 堆疊 = {13,6}
(+)：自堆疊中取出兩筆資料 13,6，運算後 13+6 放回堆疊 // 堆疊 = {19}
( )：結束，運算結果即堆疊中的數字 19

(4) 中序轉後序的實作

A. 題目

給定一個中序運算的字串，請利用堆疊 Stack 把中序運算轉換成後序運算。其中運算元（數字）都只有一位數，且運算子間都以小括號包起來。

注意！本題只是產生後序運算的「運算式」，不需算出後序運算的算式結果。

B. 解題邏輯

開一個堆疊 stack 紀錄運算子（+、-、x、/），當遇到數字時直接輸出，遇到運算子則存入堆疊，遇到右括號時，取出一個運算子後輸出。

C. 目標輸出：

中序運算式：$\big(a+(b\times c)\big)+d)$
輸出後序運算式：$abc\times+d+$

| | 輸出 | 堆疊 |
|---|---|---|
| ( | | |
| $a$ | $a$ | |
| $+$ | | $+$ |
| ( | | |
| $b$ | $ab$ | |
| $\times$ | | $+,\times$ |
| $c$ | $abc$ | |
| ) | $abc\times$ | $+$ |
| ) | $abc\times+$ | |
| $+$ | | $+$ |
| $d$ | $abc\times+d$ | |
| ) | $abc\times+d+$ | |

(：左括號，忽略

a：輸出 a，輸出 = a

+：把 + 放入堆疊，堆疊 = {+}

(：左括號，忽略

b：輸出 b，輸出 = ab

x：把 + 放入堆疊，堆疊={+,x}

c：輸出 c，輸出 = abc

)：自堆疊中取出最上方的 x 並輸出，輸出 = abcx

)：自堆疊中取出最上方的 + 並輸出，輸出 = abcx+

+：把 + 放入堆疊，堆疊={+}

d：輸出 d，輸出 = abcx+d

+：自堆疊中取出最上方的 + 並輸出，輸出 = abcx+d+

中序轉後序運算

```
1  #include <iostream>
2  #include <stack>
3  using namespace std;
4
5  int main(){
6
7      // 可以改成給使用者輸入
8      string str = "(a+(b*c)+d)";
9      // 存放運算子的堆疊
10     stack<char> sign;
11
12     for(char c:str){
13         // 遇到左括號時不處理
14         if (c=='(') continue;
15         // 遇到 a-z（代表數字的變數）時直接輸出
16         else if (c<='z' && c>='a') cout << c;
17         // 遇到右括號，從堆疊中取出一個運算子
18         else if (c==')'){
19             cout << sign.top();
20             sign.pop();
```

```
21              }
22              // 遇到運算子（+、-、*、/）， 放入堆疊
23              else sign.push(c);
24
25          }
26          return 0;
27      }
```

執行結果

```
abc*+d+
```

4. Practice：LeetCode#224. 簡單計算機 Basic Calculator

A. 題目

給定一個字串 s，內容為合法的運算式。請寫出一個簡單的計算機來判斷該運算式結果並回傳。
注意：不可使用任何內建的運算式相關函式，如 eval() 來解題。

B. 出處：https://leetcode.com/problems/basic-calculator/

C. 說明
給定一個正確的算式（運算子只會出現加號 + 和減號 -），請算出該算式的結果，這題需要用到堆疊，但是不一定要先轉成後序運算，也可以直接從左到右讀取運算出結果。

D. 解題邏輯

使用兩個 stack，一個用來儲存運算元（數字），一個用來儲存加號和減號（分別用 1 和 -1 表達，避免需要資料轉型）。

| 簡單計算機 Basic Calculator | |
|---|---|
| 1 | class Solution{ |
| 2 | public: |
| 3 | int calculate(string s){ |
| 4 | |
| 5 | stack<int> numbers; |
| 6 | // +1：+ , -1：- |
| 7 | stack<int> signs; |
| 8 | |
| 9 | // 為了處理大數，使用 long long |
| 10 | long long int value = 0; |
| 11 | // +1：+ , -1：- |
| 12 | int sign = +1; |
| 13 | // 因為與上一題不一樣，沒有小括號 |
| 14 | // a+b+c 時從左到右運算需要儲存中間值 |
| 15 | long long int result = 0; |
| 16 | |
| 17 | for(char c:s){ |
| 18 | |
| 19 | // 遇到數字 0 到 9 |
| 20 | if (c<='9' && c>='0'){ |
| 21 | // 把 value 從 ascii 碼轉為 int，'9'->9 |
| 22 | // 26 會變成 2*10 + 6 |
| 23 | // 依序遇到 2、6 時，把 2 乘以 10 倍後再加上 6 |
| 24 | value = value*10 +(c-'0'); |
| 25 | } |
| 26 | |
| 27 | // 遇到左括號，代表先前的運算結果暫告一段落 |
| 28 | // 把 result 放到 numbers 中 |
| 29 | else if (c=='('){ |
| 30 | numbers.push(result); |
| 31 | // 把括號前出現的 + 或 - 放到 signs 中 |
| 32 | signs.push(sign); |
| 33 | // 把 value, result, sign 回復到預設的狀態 |

```
34                      value = result = 0;
35                      sign = 1;
36                  }
37
38                  // 遇到右括號
39                  else if(c==')'){
40
41                      // sign 是目前這對括號裡面最後一個運算子
42                      // value 是最後一個數字，比如 -6)
43                      result += sign*value;
44                      // 乘以目前這對括號前面出現的正負號
45                      // 比如 -(8-6)，result 要從 2 變成 -2
46                      result *= signs.top();
47                      signs.pop();
48
49                      // 把進入這次括號之前的數字重新加到 result 裡
50                      // 注意遇到左括號的時候我們把 result 歸零了
51                      // 左括號前面的結果是存進 numbers 裡
52                      result += numbers.top();
53                      numbers.pop();
54
55                      // 把 value 和 sign 回復初始值
56                      value = 0;
57                      sign = 1;
58
59                  }
60
61                  // 遇到加號 '+'
62                  else if (c=='+'){
63
64                      // result 加上或減掉 + 號前面出現的數字
65                      result += sign*value;
66                      // 重新設定 value 和 value
67                      value = 0;
```

```
68                          sign = 1;
69
70                  }
71
72                  // 遇到減號 '-'
73                  else if (c=='-'){
74
75                      // result 加上或減掉 - 號前面出現的數字
76                      result += sign*value;
77                      // 重新設定 value 和 value
78                      value = 0;
79                      // 注意要把 sign 換成 -1
80                      // 減號後面的數字會受到影響，-2 可以看成 +(-2)
81                      sign = -1;
82                  }
83
84              }
85
86              // 字串最後面如果是以數字而非右括號結尾
87              // 則最後一個數字還沒有被處理
88              // 上面遇到數字只會存到 value 裡，沒有影響到 result
89              if (value){
90                  // (a+b)+c
91                  result += sign*value;
92              }
93              return result;
94
95          } // end of function solution
96
97  }; // end of class Calculate
```