Ch2. 複雜度估算 Complexity

緊接著我們來看我們要如何分析或運算複雜度。

首先我們會說明我們為什麼要分析複雜度以及評估複雜度的方式，再來我們會介紹複雜度裡最重要的符號 Big-O 要怎麼運算與證明，之後，我們會以高中數學學過的「極限」來化簡 Big-O 的證明方式，再來我們會介紹除了 Big-O 以外，還有哪些估計複雜度的符號，最後，我們會來看遞迴（或遞迴式）的複雜度應該如何計算。

在這章中，我們會用到一些數學工具，建議同學可以動手實際運算一次。

第一節：複雜度簡介

1. 為什麼要評估複雜度

在上一章中，我們已經有稍微提過為什麼要評估複雜度，因為電腦並非無所不能，雖然電腦運算比人腦運算快很多，但實際上它還是有限制的，在特定的狀況下，即使是超級電腦也無法算出所有答案，這時如果我們有更好的演算法，就能在單位時間內取得更好的解答。

再來，記憶體雖然很便宜，但也不是免費的，特別是在處理圖像或影片的時候，需要耗費許多記憶體空間。

當我們無法直接取得最佳解時，越有效率的算法可以帶我們找到越好的解答。這就像是在走迷宮時，通常只能看到眼前的路，但是我們如果能夠站得位置越高，就能夠看得越遠，也因此可以找到越好（最有效率）的路徑，讓我們更快走出迷宮。

(1) 如何評估複雜度

在評估複雜度之前，有一些前提條件（Criteria）。我們在檢視一個算法的複雜度前，要先看看它的「正確度」與「可讀性」：如果算法沒有正確度，也就是

算法是「錯的」，無法被執行或達成設定好的目標，那自然沒有評估複雜度的意義，再來，程式碼至少要可以被閱讀，使其之後可以被其他人維護與修改。

進入效能評估（Performance Analysis）的階段後，大抵而言會看兩個方向：「空間複雜度」與「時間複雜度」。空間複雜度通常代表的是一段程式執行時會佔用多少記憶體空間；時間複雜度則代表了它的運算次數與時間。

2. 空間複雜度

(1) 空間複雜度的描述

$$S(I) = C + S_p(I)$$

S(I)：需要的總記憶體空間
C：需要的固定空間
$S_p(I)$：需要的變動空間

如上式所示，S(I)，也就是演算法需要的總記憶體空間，是由兩部分構成的：C 與 $S_p(I)$。

C 是一個常數，並不會因為輸入的資料量大小而改變，這部分包含了程式碼中的常數（constant）或全域變數（global variable）等；$S_p(I)$ 則會根據輸入資料量 I 的大小而改變，如果輸入的資料量 I 大，就會花費更大的空間，這部分包含了遞迴式的堆疊（recursive stack space）、局部變數（local variable）等，因為呼叫的函式越多，就會產生越多的局部變數。

(2) 費波那契數列的空間複雜度

計算費波那契數 Fibonacci(n)

```
int Fibonacci (int n)
{
    if (n <= 2)
        return 1;
    else
```

```
        return Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2);
}
```

第 n 個費波那契數 Fibonacci (n) 會被拆解成第 n-1 個費波那契數 Fibonacci (n-1) 和第 n-2 個費波那契數 Fibonacci (n-2) 的和，所以如果用遞迴式來運算費波那契數，需要的空間大概是取決於 2^n。

舉例來說，F(50) = F(49) + F(48)，後面這一項又成立 F(48) = F(47) + F(46)。每個費波那契數都被拆解成兩次對於這個同樣的函式的呼叫，也因此對這個函式的總呼叫次數大約是 2^n。

一個函式被呼叫 2^n 次，就會產生 2^n 個局部變數（在遞迴全部完成前這些變數佔用的空間是不能被釋放掉的），所以所需的總空間大小，就會取決於 2^n 這個值的大小。

$$S_p(I) \propto 2^n$$
$$\begin{aligned} S(I) &= C + S_p(I) \\ &= C + k2^n \end{aligned}$$

用空間複雜度的公式來看，我們知道 C 仍然是一個常數，無論我們想得到的是第幾個費波那契數，都必定需要花費這個空間大小，但是 $S_p(I)$ 則會被資料量 I 的大小影響，由於我們知道所需空間「大概」等於 2^n，所以我們可以加上一個係數 k，讓 $S_p(I)$ 和 2^n 成正比關係。

3. 時間複雜度

(1) 時間複雜度的描述

$$T(I) = C + T_p(I)$$

T(I)：需要的運算總時間
C：需要的固定時間
$T_p(I)$：需要的變動時間

時間複雜度也是一樣，所需的總時間會由兩個部分構成：第一部分是不會因為輸入資料大小而改變的時間 C，第二部分則是會因為輸入資料大小而改變的時間 $T_p(I)$。

兩種數字 1 到 N 的和的算法	

int sum = 0;
for (int i=1 ; i<=N ; i++)
        sum += i;
	$\text{int sum} = \frac{N(N+1)}{2}$

$T_p(I) \neq 0$ $T_p(I) \propto N$ $T(I) = C + T_p(I)$ $= C + kN$	$T_p(I) = 0$ $T(I) = C$

舉例而言，我們有左右這兩個程式碼，都可以得到 1 加到 N 的整數和。左邊是由 1 開始加 2、加 3、…，一路加到 N；右邊則是公式解，面積等於（上底+下底）乘以高除以 2。

左邊的程式碼中，N 越大，運算的次數就越多（迴圈執行 N 次），因此運行的時間取決於 N；公式解需要的時間則不會因為輸入的 N 值大小而改變，是一個常數 C。

(2) 費波那契數的時間複雜度

計算費波那契數 Fibonacci(n)

```
int Fibonacci (int n)
{
    if(n<=2)
        return 1;
    else
        return Fibonacci(n-1) + Fibonacci(n-2);
}
```

至於費波那契數的時間複雜度，因為函式總共會被呼叫 2^n 次，所以總共需要的時間一樣是由一個常數 C，加上正比於 2^n 的 $T_p(I)$。

$$T_p(I) \propto 2^n$$
$$T(I) = C + T_p(I)$$
$$= C + k2^n$$

第二節：複雜度的估計法

1. 估計複雜度

(1) 估計複雜度的前提

首先，我們會假設包括但不限於下列的所有運算都花費一樣的時間。

A. 加減乘除
B. 取餘數
C. 位運算、存取記憶體
D. 判斷、邏輯運算子
E. 賦值運算子

實際上它們所需的時間當然不一樣，這是為了方便我們運算跟統計。在上面的假設下，我們只要統計出總共需要的運算「次數」，看「次數」的數量級的大小，就可以得到複雜度，也就可以評估執行需要的時間。

在我們的假設下，做 10 次運算就會需要做 1 次運算的 10 倍時間，不過實際上當然會有誤差存在。

(2) Step Count Table

我們如果設計一個如下的函式，它的功能是可以把一個陣列裡的值全部加起來，傳入值是陣列開頭的指標 *p 和一個整數長度 len，接著用一個 for 迴圈幫我們把每一筆資料都加到 sum 裡。

		Steps	Frequency	Sum of steps
1	int sum (int *p, int len)	0	1	0
2	{	0	1	0
3	int sum = 0;	1	1	1
4	if (len > 0){	1	1	1
5	for (int i=0 ; i<len ; i++)	1	len+1	len+1
6	sum += *(p+i);	1	len	len
7	}	0	1	0
8	return sum;	1	1	1
9	}	0	1	0
		Total steps：2len+4		

這時我們要怎麼計算複雜度呢？首先，我們可以看每一行程式碼需要的運算「步數（Steps）」，以及這行程式碼執行的頻率，將這兩項相乘，就是這段程式碼運算的總步數（Sum of steps）。

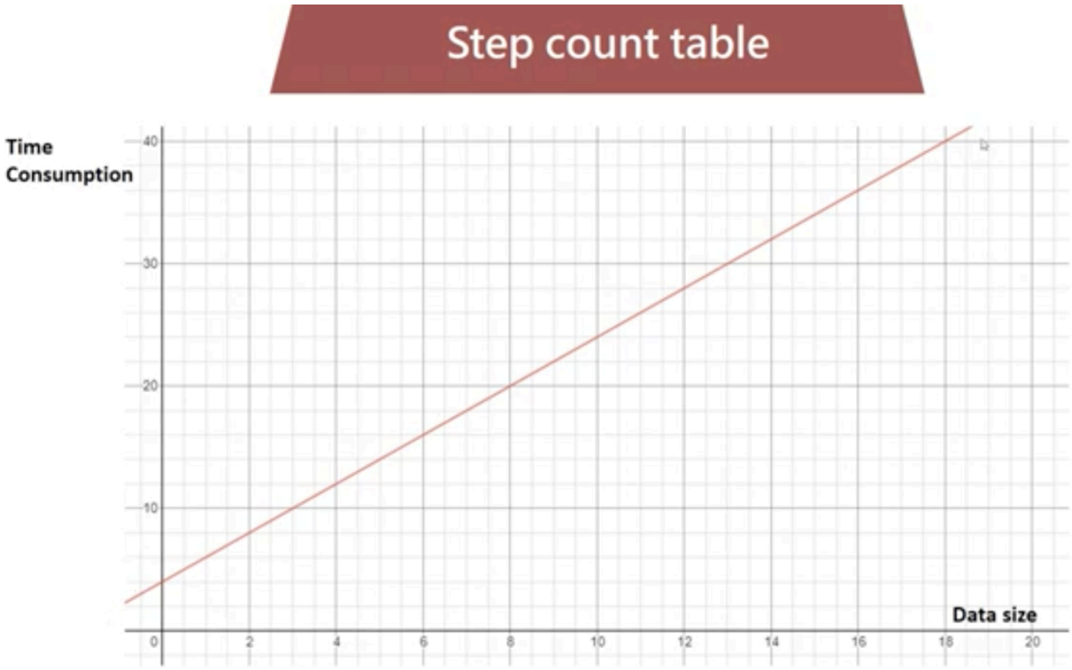
以第三行為例，int sum = 0 需要的步數（Step）是 1，且這行總共執行的次數是 1 次，所以這行得到的總步數是 1；第六行的 sum += *(p+i) 一樣需要一步，總執行次數是 len 次（i 從 0 遞增到 len-1），因此所需總步數為 1 x len = len 步。

其中，注意到第 5 行總共會執行 len+1 次，而非 len 次，因為當 i = len 時，它仍然需要把 i 和 len 比較後，才能決定跳出迴圈往下執行。

將每一行需要的步數加總，我們發現整段程式碼需要的總時間是 2len + 4 次。

我們可以把 2len+4 畫在一個圖表上，橫軸是資料大小，也就是 len，縱軸指的則是所需要的時間，數學是 T(len) = 2len+4 是一個二元一次方程式。

圖中的 y 截距 4 是剛剛講的 C，不會跟著資料量改變；$T_p(I)$ 的部分則會隨著資料量增加而變大，因此需要的總時間與資料量大致呈正比關係。



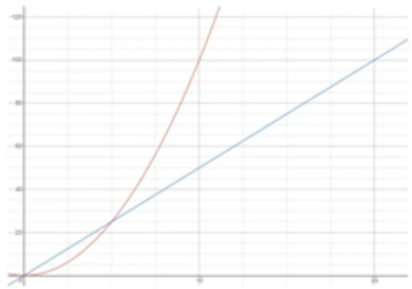
(3) 「小時候胖不是胖」

對於一個特定的演算法而言，資料量小和資料量大時的優劣不一定相同，通常我們比較在意資料大的時候演算法的表現，因為資料小的時候所耗費的時間原本就不多，所以我們不做考慮。

int sum = 0;
for (int i=1 ; i<=N ; i++)
    sum += i;
	int sum $= \dfrac{N(N+1)}{2}$

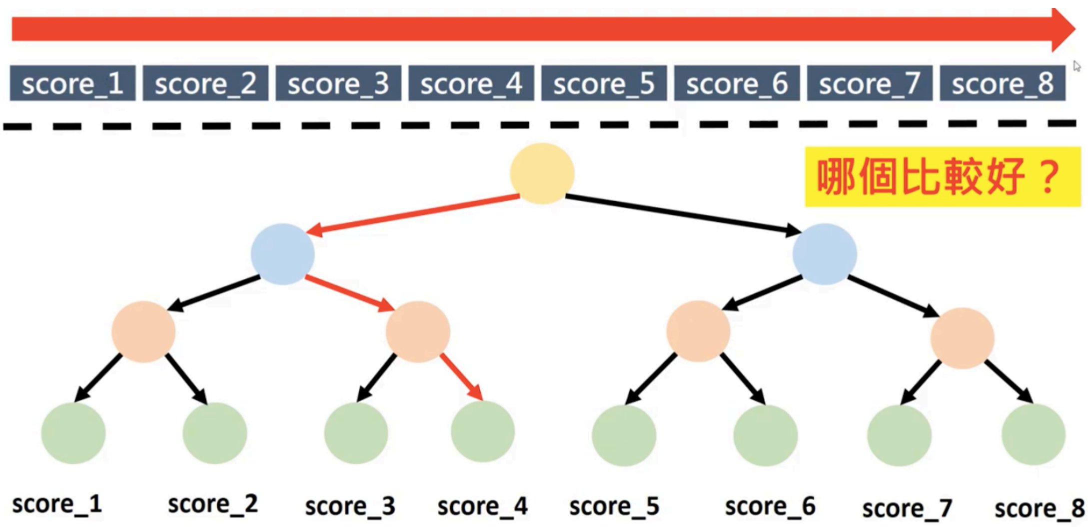
以剛剛看過的程式碼而言，左邊是由 1 加到 N，右邊則是利用公式解。

這兩種方法在資料量小與資料量大時有固定的優劣關係嗎？在極端的情況，n 是 1 的時候，其實右邊比左邊要花更久的時間，因為右邊的算法需要進行乘法和除法，而左邊只有加法而已，也就是說資料量小的時候，左邊比較快，右邊比較慢，但是資料量一大，很明顯的右邊的算法就比較快。



上圖可以做一個類比，當資料量小的時候，紅線表現得比較好（速度快、需要的時間短），但是資料量一大，藍線就表現得比較好（速度快、需要的時間短）。因為我們在意的通常是資料量大的時候，所以藍線對應的就是較佳的演算法。

(4) 比較兩種狀況



上面的陣列搜尋裡，我們需要從第一個搜尋到最後一個，這叫「循序搜尋」，下面的方法中，我們則把資料用二元樹的形式儲存，叫做二元搜尋樹，這種方法每次搜尋可以去除一半的可能位置。

上面的方法裡，我們最少需要搜尋 1 次（目標在資料開頭），最多則需要搜尋 8 次（目標在資料結尾）；下面的方法裡，則不管怎樣都需要 3 次搜尋（n 次搜尋可以找遍 2^n，$2^3 = 8$）。哪一種方法比較好，其實沒有一定。

(5) 什麼才是「好」？

究竟是時間花的少，還是記憶體空間花的少更重要？又或是精準度或正確率較高才是我們所關注的？

進行某些工程運算時，我們可以藉由犧牲部分精準度來節省運算時間，我們之後會提到利用「二分搜尋法」進行根號運算的時候，如果能容忍的誤差越大，所花的時間也就可以越少。因此，「速度快」、「節省空間」、「精準度高」和「開發成本低」之間並沒有哪個一定更重要，我們隨時需要進行「平衡」。

之前我們舉的例子是以抽樣代替普查，雖然抽樣的精準度比普查差，但是這個例子裡時間比精準度來得更重要，7 年才做出的普查已經沒有意義了。在我們的課程裡，由於 CPU 運算資源通常更珍貴，所以大多時候我們看的都是時間複雜度。

(6) 時間換取空間 v.s. 空間換取時間

「時間換取空間」的策略是指用 CPU 的運算時間來節省記憶體空間的使用，具體而言，就是每次運算完後，不要把結果存下來，下次要用到就重新再算一次。

「空間換取時間」的策略則是每次運算完都將得到的結果存起來，下次要用到時直接查表就好，如果表上沒有，則使用內插法。這種做法會產生一個很大的表，佔用許多記憶體空間，但是把表格建出來後，未來就能節省許多運算時間。

因為 CPU 運算資源比記憶體空間珍貴，我們更常使用「空間換取時間」。

(7) 時間 = 資料量 x 複雜度

資料量	1	N	N^2	N^3	2^N
1	1 毫秒(ms)	1	1	1	1
10	1	10	10^2	10^3	$1024 \sim 10^3$
100	1	10^2	10^4	10^6	$\sim 10^{30}$
1000	1	10^3	10^6	10^9	$\sim 10^{300}$

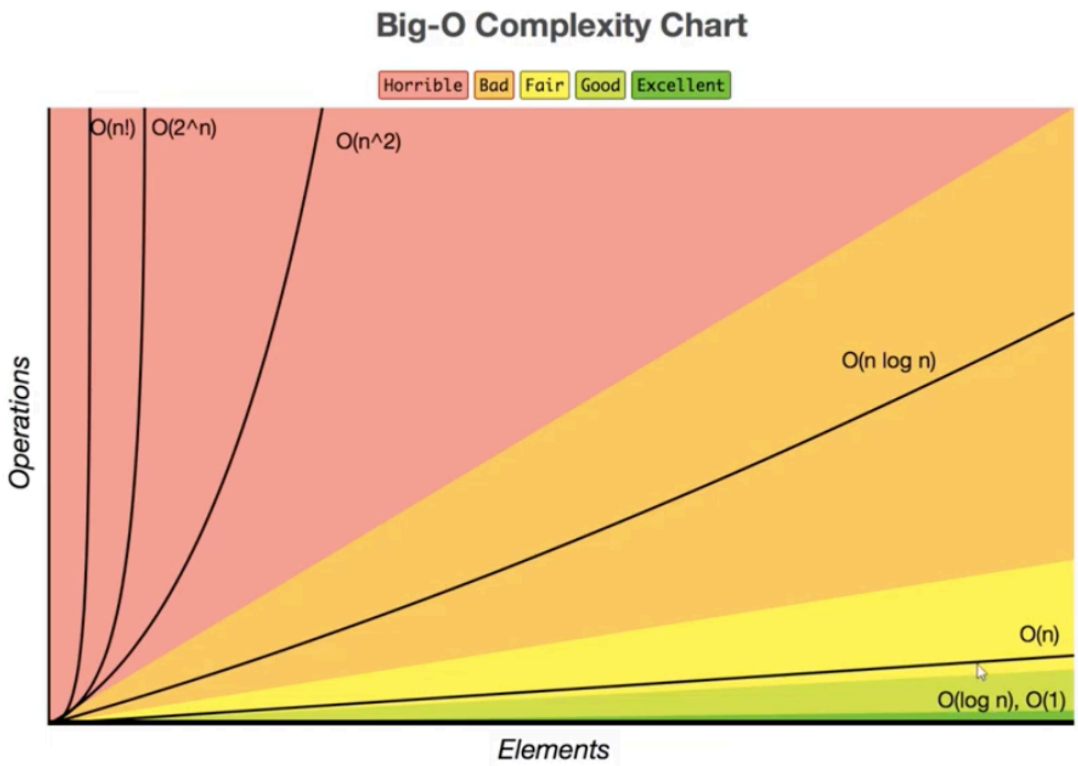
			(~15 分鐘)	(~12 天)	
10000	1	10^4	10^8 (~25 小時)	10^{12} (~30 年)	$\sim10^{3000}$

從上面的表格裡我們可以看出，當資料量從 1 變成 1,000，成長 10^3 倍時，如果演算法的複雜度是 N^2，那麼所需時間就變成 10^6 倍，如果複雜度是 N^3，所需時間則變成 10^9 倍，這代表運算總次數會隨著 N 改變而有巨幅波動。

假設一次運算需要耗費 1 毫秒（10^{-3} 秒），那麼如果有 10,000 筆資料，而複雜度是 N，我們總共就需要花費 10 秒（$10 = 10^{-3} \times 10^4$），如果複雜度是 N^2，會需要大約 25 小時，N^3 需要 30 年的時間，2^N 更是根本算不完。

這也是我們描述複雜度時習慣以 N 的次方數來表示的原因。當 N 的次方數增加，只要資料量變大一個數量級，所需的時間就會呈指數成長，差距非常大。

(8) 複雜度的優劣之分



討論複雜度的時候，我們可以用幾種不同的等級來表達。如果複雜度是 O(1) 或 O(log n)，就是相當好的演算法，如果是 O(n)，也就是需要的時間大致上與資料量 n 成正比，那我們認為是「普普通通」。

O(nlogn) 大概是可接受的邊緣，如果複雜度到達 $O(n^2)$、$O(2^n)$，甚至 O(n!)，那麼在資料量大時，幾乎不可能用電腦將結果算出來。評估複雜度就可以大致瞭解演算法的複雜度落在較好或較差的區間，也決定了資料量大時，還有沒有可能用電腦來解決問題。

當我們在做競賽題目時，通常複雜度會落在 O(nlogn)，這是因為許多常見的演算法如排序、插入、刪除等，都屬於 O(nlogn) 的複雜度。在寫題目時，我們可以計算一下，檢查自己的答案是不是落在 O(nlogn) 以下，如果超過了，比如複雜度是 $O(n^2)$ 或 $O(2^n)$ ，可能就代表有問題，少數狀況 $O(n^2)$ 可以接受，到了 $O(n^3)$ 以上，基本上就無法接受了。

Example 1：計算下列程式碼的迴圈執行次數

```
for (int i=0 ; i<N ; i++)
      for (int j=0 ; j<N ; j++)
            for (int k=0 ; k<M ; k++)
                  cout << i *j*k << " ";
```

我們知道最內層的迴圈會優先執行，k 從 0 增加到 M-1，總共執行了 M 次，中間這層的 j 從 0 到 N-1，總共執行了 N 次，最外層的 i 也從 0 到 N-1，總共執行了 N 次。

綜合起來，這個巢狀迴圈總共會執行 $M \times N \times N = M \times N^2$ 次。

Example 2：計算下列程式碼的迴圈執行次數

```
for (int j=1 ; j<N ; j+=2)
      cout << i << " " << j;
```

我們知道 j 會從 1 開始執行，每次執行迴圈後 j 就會增加 2。如果限制最大值是 N，代表最後 j 會停留在某個 1+2(n-1)，其中 n 是正整數。

第一次執行時 j 是 1，第二次執行時 j = 3，第三次執行時 j = 5，以此類推，因此若我們將迴圈目前執行的次數以 n 表示，那麼 j 的值就可以寫成 1+2(n-1)，當然這個 1+2(n-1) 也需要小於 N，才會滿足迴圈的條件而繼續執行。

移項一下，我們就可以得到 $n < \frac{N+1}{2}$。

Example 3：計算下列程式碼的迴圈執行次數

```
for (i=M ; i>1 ; i/=2){
    cout << i << endl;
}
```

迴圈從 i = M 時開始執行，i 必須大於 1，每次執行完 i 會除以 2。所以第一次執行時 i = M，第二次執行 i = $\frac{M}{2}$ ，第三次執行時 i = $\frac{M}{4}$，第 n 次執行時 i = $\frac{M}{2^{n-1}}$。

因為 $\frac{M}{2^{n-1}}$ 要滿足大於 1 的要求，所以：

$$\frac{M}{2^{n-1}} > 1$$

$M > 2^{n-1}$

$n < \log_2 M + 1$。

Practice 1：計算下列程式碼的時間與空間用量

```
for (j=0 ; j<M ; j++){
    cout << j << endl;
}
for (i=0 ; i<N ; i++){
    cout << i << endl;
}
```

空間複雜度：不管輸入的 M 和 N 是多少，都會使用同樣的記憶體空間。
時間複雜度：上面的迴圈中，j 會從 0 到 M-1，總共跑 M 次；下面的迴圈中，i 會從 0 到 N-1，總共跑 N 次，上下加起來，總時間需求是 M+N。

Practice 2：計算下列程式碼的迴圈執行次數

```
for (int j=1 ; j<N ; j*=2)
    cout << j;
```

j 從 1 開始執行，j 需要小於 N 才會繼續執行，而 j 每次執行都會乘以 2。假設執行第 n 次，此時 j 是 2^{n-1}。

由於 $2^{n-1} < N$ 才會執行，兩邊取 $\log_2$，可以得到 $n < \log_2 N + 1$。

Practice 3：計算下列程式碼的迴圈執行次數

```
for (int i=1 ; i<N ; i++)
    for (int j=1 ; j<N ; j*=2)
        cout << i << " " << j;
```

內圈與剛才的例題完全相同，會執行 $\log_2(N+1)$ 次。外圈的 i 則從 1 跑到 N-1，總共執行 N-1 次。

內外圈結合起來，總共執行 $(\mathrm{N}-1)\,(\log_2 \mathrm{N}+1)$ 次。

第三節：Big-O 的運算證明

1. Big-O 的運算與證明

(1) 用 Big-O 來描述演算法的複雜度

我們來看看要如何用 Big-O 來描述演算法的複雜度。描述演算法「工作效率」的函數，稱為複雜度(Complexity)。

演算法會依資料散布情形的不同而有不同的處理次數：
最壞的情況 (Worst-case) 下需要的處理次數叫做「上界 (upper bound)」，因為最壞的狀況下需要的時間是最多的，所以實際執行需要的時間一定不會超過這個「上界」。

另外還有平均的情況 (Average-case) 和最好的情況 (Best-case)。最好的情況下需要的處理次數是「下界 (lower bound)」，「下界」對應的時間也就是最少需要的時間。

(2) 搜尋的複雜度

如果要在一個長度為 Len 的陣列裡搜尋我們要的資料，通常會使用「循序搜尋」，從陣列開頭一筆一筆資料確認。

在最壞的狀況下，我們搜尋到最後一筆才找到所需的資料，因此搜尋了 Len 次，這個 Len 就是我們的「上界 (upper bound)」；最好的情況則是第一筆資料就是我們所要的資料，這時只要搜尋一筆資料，1 就是我們的「下界 (lower bound)」。

平均 (Average-case) 來說，我們需要搜尋 $\frac{Len+1}{2}$ 次。

(3) Big-O 的理想條件

通常我們會想知道的是某一算法在最壞情形下會跑多久，也就是最差的狀況下需要多少時間，這樣我們才能事先把時間準備好。因此我們通常在意的是 Worst-case，或是資料增加時，所需時間的成長幅度，也就是 Growth rate。

另外我們希望複雜度不會受到單位的影響，不管我是用 Byte 還是 Bit 為單位，或者時間上我用秒、分、小時為單位都相同。

最後，我們不在乎小資料時的狀況（也就是「小時候胖不是胖」），小資料差了幾毫秒我們並不在意。

(4) Big-O 的數學定義

將上面提到的要求結合起來，我們就能構造出 Big-O 的數學定義：

$\mathrm{f(n)} \in \mathrm{O}\big(\mathrm{g(n)}\big) \Leftrightarrow \exists \mathrm{c} > 0, \exists \mathrm{n}_0, \forall \mathrm{n} > n_0,$
$\mathrm{f(n)} \leq \mathrm{cg(n)}$
[存在 c>0、n_0，使得所有 $\mathrm{n} > n_0$ 都滿足 $\mathrm{f(n)} \leq \mathrm{cg(n)}$]

其中：
c 是一個常數，以它作為係數可以使我們可以不受單位影響
$n > n_0$ 代表資料量大於 n_0 的時候

如果 $\mathrm{f(n)} \in \mathrm{O}\big(\mathrm{g(n)}\big)$，那麼某個「所需時間可用 f(n) 來表示」的演算法，它的複雜度就是 O(g(n))。也就是說，存在一個 c > 0 和 n_0，使得對於所有的 $n > n_0$ 來說，都滿足 $\mathrm{f(n)} \leq cg(n)$。

要確保 $\mathrm{f(n)} \in \mathrm{O}\big(\mathrm{g(n)}\big)$ ，我們要找到一組 c 跟 n_0，使得資料量 n 夠大（超過 n_0 ）的時候， $f(n) \leq cg(n)$ 總是成立。

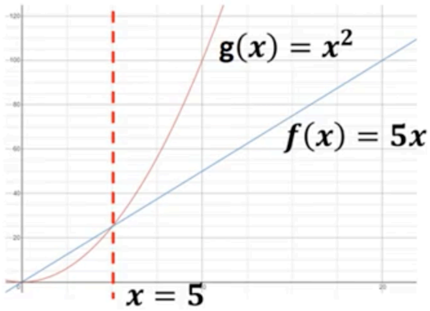
(5) 實際使用 Big-O

如果我想知道 5x 能不能寫成 $O(x^2)$，我就要試著找到一組 c 和 n_0，使得當資料超過某個量，$n > n_0$ 時，都有 $5x < cx^2$，c 可以取我們想要的值。

我們的目標是找到某個情況下（某個 c 和 $x > n_0$ 時），$5x \leq cx^2$ 總是成立：
A. 把等號左右的 x 約掉（因為 x 是資料量，必定是正數），$5 \leq cx$
B. 取 $c = 1$（不是一定，c 可以任意求解），同時取 $n_0 = 5$
D. 當 $x > n_0 = 5$ 時，$5 \leq cx = x$ 總是成立
E. 得證

用數學方式表達：給定 $f(x) = 5x$、$g(x) = x^2$，欲證有一組 $c>0$、n_0，使得對所有 $n > n_0$ 時滿足 $f(n) \leq cg(n)$。
取 $c = 1,\ n_0 = 5$
$\forall x > 5,\ f(x) \leq g(x)$

因此 $f(n) \in O(g(n))$，在這個例子裡指的就是，$5x \in O(x^2)$。



我們把 $f(x) = 5x$ 和 $g(x) = x^2$ 畫在上圖中，紅線是 x^2 需要的時間，藍線是 5x 需要的時間。

當 $x > 5$，意即資料量超過 5 筆時，藍線都低於紅線，$5x < x^2$。

Big-O 相當於「上界」，$f(n) \in O(g(n))$ 也可以說成 g(n) 是 f(n) 的上界。在這個例子當中，x^2 是 5x 的上界，在資料量超過 5 筆的時候，不管資料量再怎麼大，5x 需要的時間都小於 x^2。

Example 1：證明或否證 $5x \in O(x)$

證明過程：

A. 取 $n_0 = 0, c = 6$

B. $\forall x > 0,\ 5x \le 6x$ (這個式子就是 $\forall x > 0,\ f(x) \le cg(x)$)

因為我們找到一組 $n_0 = 0$，$c = 6$ 滿足 Big-O 的條件，所以 $5x \in O(x)$。

Example 2：證明或否證 $5x^2 \in O(x)$

證明過程：

A. 我們要找到一組解滿足 $5x^2 \le cx$ (也就是 $f(n) \le cg(n)$)

B. 等號左右同消掉 x，$5x \le c$

C. $x \le \frac{c}{5}$

只有在 $x \le \frac{c}{5}$ 的時候才會成立，所以無論 c 取多少，都不能找到對應的 n_0（$x \ge \frac{c}{5}$ 的時候就一定不會成立），所以 $5x^2 \notin O(x)$。

Example 3：證明或否證 $100x^2 \in O(x^3 - x^2)$

證明過程：

A. 我們要找到一組解滿足 $100x^2 \le c(x^3 - x^2)$

B. 取 c = 100，$100x^2 \le 100(x^3 - x^2)$

C. $200x^2 \le 100(x^3)$

D. $2 \le x$

E. $\forall x \ge 2$，$100x^2 \le c(x^3 - x^2)$

在 $x \ge 2$ 的情況下，c 取 100 就一定會使條件 $100x^2 \le c(x^3 - x^2)$ 成立，這樣我們就找到一組 c 和 n_0，也就證明了 $100x^2 \in O(x^3 - x^2)$。

這裡我們是用 Big-O 定義來證，似乎有點麻煩，等一下我們會介紹另一種更簡便的方式。

Practice 1：證明或否證 $\mathbf{3x^2} \in \mathbf{O}(\mathbf{x^2})$

A. 找一組 c、n_0，使 $3x^2 \le cx^2$
B. 取 c = 3, $n_0 = 0$
C. $\forall$ x $\ge 0, 3x^2 \le 3x^2$
D. 得證 $3x^2 \in O(x^2)$

Practice 2：證明或否證 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{O}(\sqrt{\boldsymbol{x}})$

A. $x \le c\sqrt{x}$
B. 兩邊平方， $x^2 \le c^2 x$
C. $x \le c$
D. $x \ge c$ 時一定不成立 $x^2 \le c^2 x$
E. 不管 c 取多少，都找不到 n_0 使得定義成立
   no matter what c is, if $n > c$, then x $>$ c$\sqrt{\mathrm{x}}$
F. 否證 $x \in O(\sqrt{x})$

第四節：極限的表達方式

1. 用極限方法證明 Big-O

(1) 另一種觀點

從定義上證明 big-O，就是找到一組 c>0、n_0，使得資料量大於 n_0 的情況下，都一定有 $f(n) \le cg(n)$，也就是 g(n) 是 f(n) 的上界。

$$f(n) \in O(g(n)) \Leftrightarrow \exists c > 0, \exists n_0, \forall n > n_0, \quad \text{--- (1)}$$
$$f(n) \le cg(n) \quad \text{--- (2)}$$

但要找到這樣的 c>0、n_0 不一定很容易。觀察 (2) 式，將不等號左右同除以 g(n)，就可以得到下面的 (3) 式。

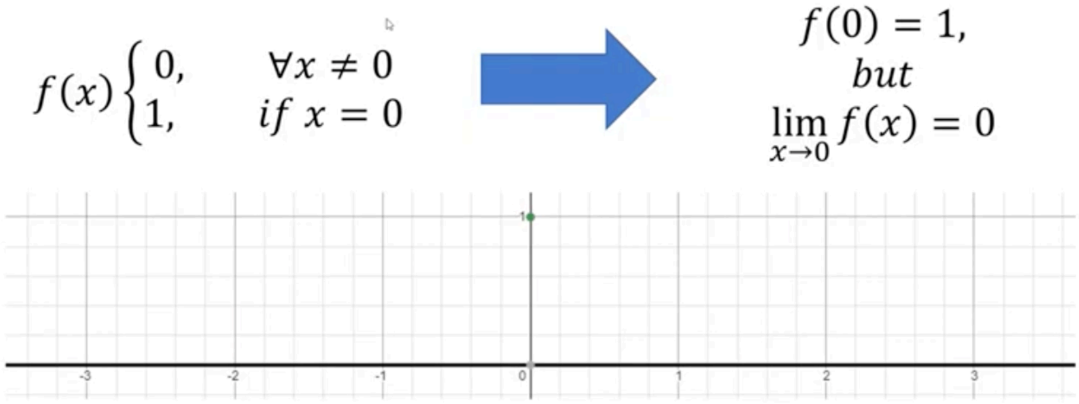
$$\frac{f(n)}{g(n)} \le c \quad \text{--- (3)}$$

因為 (1) 的條件中要求對「所有」大於 n_0 的 n 而言，(2) 與 (3) 的不等式都應該成立，我們可以直接將 n 推到無限大來進行確認。如果下面的 (4) 式成立，也就是 n 接近無限大時，$\frac{f(n)}{g(n)}$ 收斂到一個常數 c，那麼我們就知道 $f(n) \in O(g(n))$。

$$\lim_{n->\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \le c$$

(2) 極限的複習

我們很快複習一下高中數學中的「極限」。如果 f(x) 在 x 逼近 a 時的極限為 L，可以寫成 $\lim_{x->a} f(x) \le L$，這就是極限的定義。



舉一個例子，有一個 x 的函數 f(x)，當 $x \neq 0$ 時，f(x) 的值是 0，而當 $x = 0$ 時，$f(x) = 1$，因此 (0,1) 在 f(x) 上。

這告訴我們雖然 $f(0) = 1$，但是 x「趨近於」0 的情況下，因為再怎麼接近 0 也不會真的到達 0，所以 f(x) 在 x 趨近於 0 時的值仍然是 0，即 $\lim_{x->0} f(x) = 0$。

(3) 極限的運算規則

給定下面三式：

$$\lim_{n->\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{n->\infty} g(x) = K$$

$$\lim_{n->\infty} h(x) = \infty$$

根據極限的定義，下面的 A 到 E 式成立。意即 f(x) 和 g(x) 之間運算的極限，可以先將 f(x) 與 g(x) 個別的極限值 L、K 取出之後進行相應的運算。

A. $\lim_{n->\infty} (\, f(x) + g(x) \,) = L + K$

B. $\lim_{n->\infty} (\, f(x) - g(x) \,) = L - K$

C. $\lim\limits_{n->\infty}$ (f(x) x g(x)) = L x K

D. $\lim\limits_{n->\infty}$ (f(x) ÷ g(x)) = L ÷ K

E. $\lim\limits_{n->\infty} (\frac{1}{h(x)}) = 0$

特別注意 E 式，$\lim\limits_{n->\infty} h(x) = \infty$ 會使得 $\lim\limits_{n->\infty} (\frac{1}{h(x)}) = 0$，講白話一點就是「無限大分之一 ＝0」。

Example 1：請計算 $\lim\limits_{n->\infty} \frac{3n+2}{2n+5}$

$$\lim_{n->\infty} \frac{3n+2}{2n+5}$$

上下同除以 n，

$$= \lim_{n->\infty} \frac{\frac{3n}{n}+\frac{2}{n}}{\frac{2n}{n}+\frac{5}{n}}$$

因為其中所有形如 $\frac{c}{n}$ (c 是常數) 的值都是 0，所以，

$$= \lim_{n->\infty} \frac{3+0}{2+0}$$

$$= \frac{3}{2}$$

透過這種方法，只要我們計算出 $\frac{f(n)}{g(n)}$ 的極限值，看它是不是無限大，就可以決定是否 f(n) ∈ O(g(n))。比如令 f(n) = 3n+2，g(n) = 2n+5，因為 $\lim_{n->\infty}\frac{3n+2}{2n+5} = \frac{3}{2} \neq \infty$，所以 f(n) ∉ O(g(n))。

Example 2：證明或否證 $5x \in O(x)$

$\exists c > 0,$

$$= \lim_{n->\infty}\frac{5x}{x} = 5 \leq c$$

因為 $\lim_{n->\infty}\frac{5x}{x}$ 的值收斂到 5，而非無限大，得證 $5x \in O(x)$。

Example 3：證明或否證 $100x^2 \in O(x^3 - x^2)$

$\exists c > 0,$

$$\lim_{n->\infty}\frac{100x^2}{x^3 - x^2}$$

上下同除以 x^3，

$$\lim_{n->\infty}\frac{100\frac{x^2}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{x^2}{x^3}}$$

$$\lim_{n->\infty}\frac{100 \text{ x } 0}{1 - 0} = 0 \neq \infty$$

因為 $\lim_{n->\infty}\frac{100x^2}{x^3-x^2}$ 的值收斂到 0，而非無限大，得證 $100x^2 \in O(x^3 - x^2)$。

Example 4：證明或否證 $5x^2 \in O(x)$

$\exists c > 0,$

$$\lim_{n->\infty} \frac{5x^2}{x} = \infty$$

因為 $\lim_{n->\infty} \frac{5x^2}{x}$ ，即 $\lim_{n->\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ 等於無限大，並不會收斂，所以 $5x^2 \notin O(x)$。

Practice 1：證明或否證 $3x^3 + 5x^2 + 2x + 6 \in O(x^3)$

$$\lim_{n->\infty} \frac{3x^3 + 5x^2 + 2x + 6}{x^3} = 3$$

得證 $\mathbf{3x^3 + 5x^2 + 2x + 6 \in O(x^3)}$。

Practice 2：證明或否證 $f(x) \in O(x^2) \Leftrightarrow f(x) \in O(x^2 + x)$

(⇒)

假設左邊成立， $\lim_{n->\infty} \frac{f(x)}{x^2} = c$，即 $f(x) = cx^2$。

此時右邊是否成立？

$$\lim_{n->\infty} \frac{f(x)}{x^2 + x} = \frac{cx^2}{x^2 + x} = c$$

因此右邊也成立。

(⇐)

假設右邊成立，$\lim\limits_{n->\infty}\frac{f(x)}{x^2+x}=c$，即 $f(x)= cx^2+cx=c(x^2+x)$。

此時左邊是否成立？

$$\lim_{n->\infty}\frac{f(x)}{x^2} = \frac{c(x^2+x)}{x^2}=c$$

因此左邊也成立，兩個寫法等價。

第五節：複雜度的其他符號

我們來看看除了 Big-O 以外，還有哪些符號可以拿來表示複雜度。

1. Big-O 存在的問題

Big-O 是上界，也就是最壞的情況，這代表把 Big-O 裡面任意放一個非常大的數字，$f(x) \in O(g(x))$ 都會成立：

$f(x) \in O(x^2)$
$f(x) \in O(x^2+x)$
$f(x) \in O(3x^2+2x)$
$f(x) \in O(x^3+1)$
$f(x) \in O(2x^4+x)$
$f(x) \in O(x^5+x^2+2)$
...

這就像如果媽媽和你說：「只要你比任一個學生成績好，我就給你獎金」，那麼我就去和全班甚至全學年成績最差的同學比，很容易就可以達成。

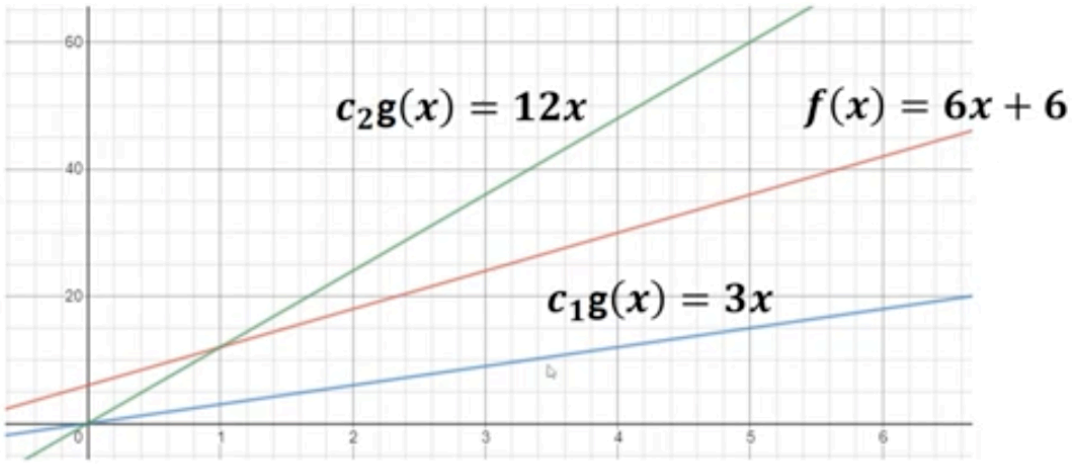
只要 $f(x) \in O(x^2)$，f(x) 也就可以寫成 $O(x^3)$、$O(x^4)$、$O(x^5)$、…，繼續把 Big-O 中 x 的指數任意增加後都仍會成立。

2. Big-Theta Θ

(1) Big-Theta Θ 的定義

$f(n) \in \Theta\big(g(n)\big) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, \exists n_0, \forall n > n_0,$
$s.t.\ 0 \le c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$

Big-Theta Θ 代表 f(n) 會被 $c_1 g(n)$ 和 $c_2 g(n)$ 上下包夾在一起，g(x) 在乘以兩個相異常數後，會使 f(x) 介在其間。



$6x + 6 \in \Theta(x)$ 是否成立？

當我們取 g(x) = x、兩個常數 c_1 與 c_2 分別為 3 與 12，由上圖可以看出紅線 f(x) 在 x>1 時被包夾在藍線 $c_1 g(n)$ 和綠線 $c_2 g(n)$ 之間，因此 $6x + 6 \in \Theta(x)$ 明顯成立。

(2) Big-O 和 Big-Theta 的差異

Big-O 的 x 次方數可以不斷往上寫，Big-Theta 則要求特定 x 的最大次方數，如下表所示：

Big-O	Big-Theta
$6x + 6 \in O(x^2)$	$6x + 6 \in \Theta(\mathrm{x})$
$6x + 6 \in O(x^2 + \mathrm{x})$	$6x + 6 \in \Theta(2\mathrm{x})$
$6x + 6 \in O(3x^2 + 2\mathrm{x})$	$6x + 6 \notin \Theta(3x^2 + 2\mathrm{x})$
$6x + 6 \in O(x^3 + 1)$	$6x + 6 \notin \Theta(x^3 + 1)$
$6x + 6 \in O(2x^4 + \mathrm{x})$	$6x + 6 \notin \Theta(2x^4 + \mathrm{x})$
$6x + 6 \in O(x^5 + x^2 + 2)$	$6x + 6 \notin \Theta(x^5 + x^2 + 2)$
…	…

(3) 使用極限證明 Big-Theta Θ

$\mathrm{f(n)} \in \Theta\big(\mathrm{g(n)}\big) \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0, \exists \mathrm{n}_0, \forall \mathrm{n} > n_0,$ ---(1)
$\mathrm{s.t.}\, 0 \leq c_1 \mathrm{g(n)} \leq \mathrm{f(n)} \leq c_2 \mathrm{g(n)}$ ---(2)

上面 (2) 式各項同除以 g(n)：

$$0 < \lim_{n->\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \leq c$$

只要 $\frac{f(n)}{g(n)}$ 的極限值不是無限大而且大於 0，則 $\mathrm{f(n)} \in \Theta\big(\mathrm{g(n)}\big)$。

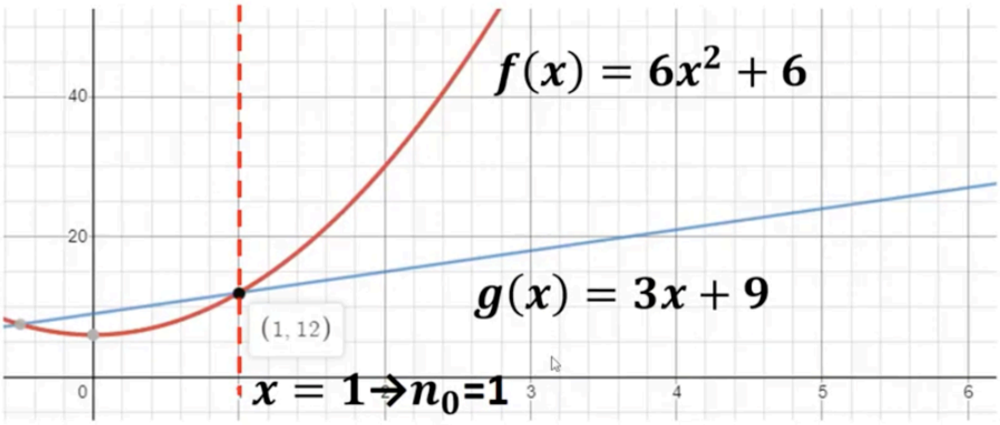
注意：g(n) 只跟 f(n) 的最大次方有關。

3. Big-Omega Ω

(1) Big-Omega Ω 的定義

$\mathrm{f(n)} \in \Omega\big(\mathrm{g(n)}\big) \Leftrightarrow \exists \mathrm{c} > 0, \exists \mathrm{n_0}, \forall \mathrm{n} > n_0,$
$\mathrm{s.t.}\, 0 \leq \mathrm{cg(n)} \leq \mathrm{f(n)}$

即 f(n) $\in \Omega\big(\mathrm{g(n)}\big)$ 代表 g(x) 是 f(x) 的下界 (Big-O 則是上界)。



$6x^2 + 6 \in \Omega(3\mathrm{x} + 9)$ 是否成立？

取 $n_0 = 1$，藍線 g(x) = 3x+9 都小於紅線 f(x) = $6x^2 + 6$，因此 $6x^2 + 6 \in \Omega(3\mathrm{x} + 9)$ 成立。

(2) 使用極限證明 Big-Omega Ω

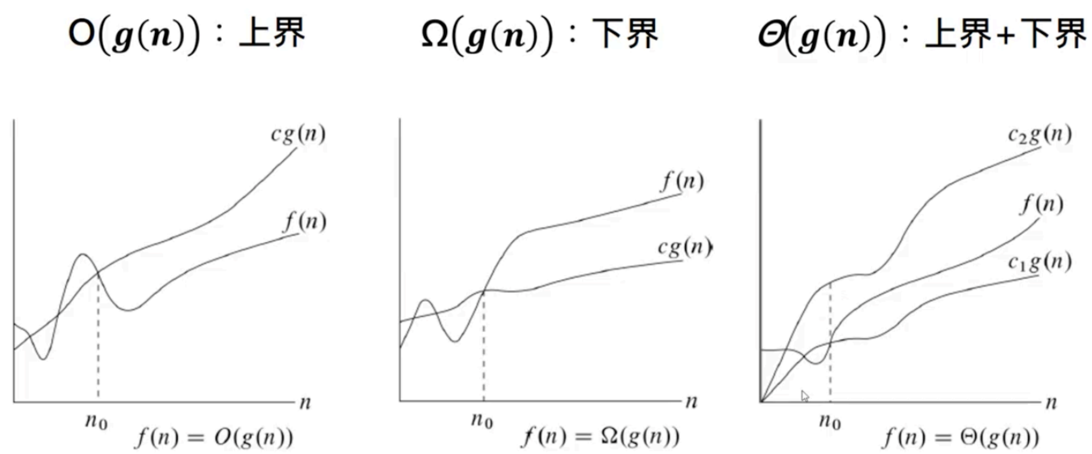
$\mathrm{f(n)} \in \Omega\big(\mathrm{g(n)}\big) \Leftrightarrow \exists \mathrm{c} > 0, \exists \mathrm{n_0}, \forall \mathrm{n} > n_0,$ ---(1)
$\mathrm{s.t.}\, 0 \leq \mathrm{cg(n)} \leq \mathrm{f(n)}$ ---(2)

上面 (2) 式中各項同除以 g(n)，

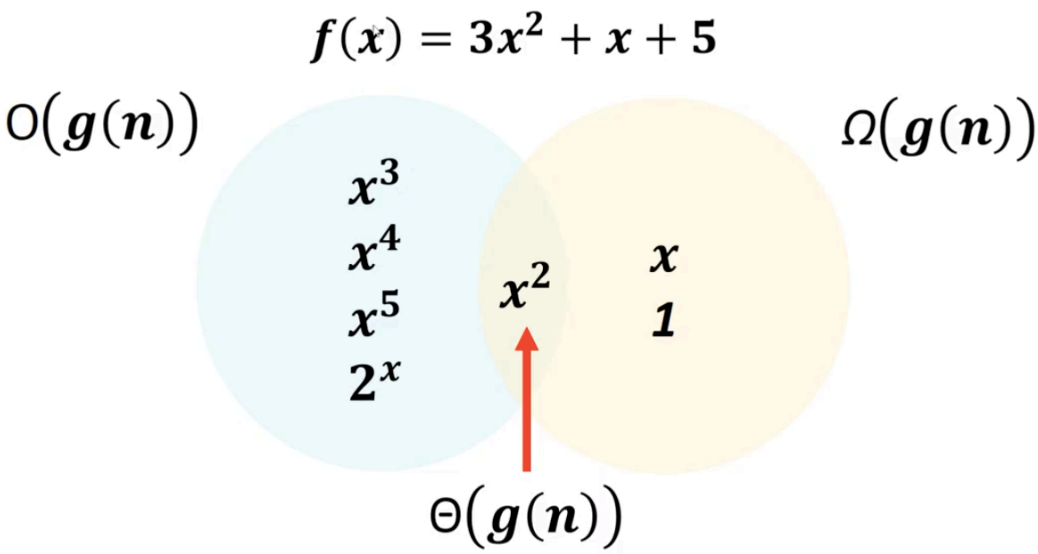
$$c \leq \lim_{n->\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$$

只要 $\frac{f(n)}{g(n)}$ 的極限值大於 0（c 可以取任意大於 0 的小值），則 $f(n) \in \Omega(\mathrm{g(n)})$。

4. 各個符號的比較



舉例來說，如果時間複雜度 $f(x) = 3x^2 + x + 5$，Big-O 可以取 x^3、x^4、x^5、2^x 等等，因為這些函數都是 f(x) 的上界，Big-Omega 則是 f(x) 的下界，可以取 x、1 等，但 Big-Theta 則是上界與下界的交集，最大次方項必須與 f(x) 中 x 的最大次方項 x^2 的次方相同。



第六節：遞迴的複雜度計算

如何計算遞迴式的時間複雜度？

1. 三種計算方法

這裡先只介紹三種方法，之後介紹分治法後會再介紹第四種方法。

A. 數學解法 Mathematics-based Method
   直接以遞迴的觀念算出複雜度

B. 代換法 Substitution Method
   猜一個數字後代入看是否成立

C. 遞迴樹法 Recurrence Tree Method
   畫出遞迴樹後加總

2. 計算遞迴式的複雜度

計算下列程式碼的時間複雜度：

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1) + 3, if\ n > 1 \\ 1, otherwise \end{cases}$$

(1) 數學解法：直接以遞迴的觀念算出複雜度

T(n)
= T(n-1) + 3
= T(n-2) + 3 + 3
= T(n-3) + 3 + 3 + 3
= ...
= T(1) + 3(n-1) // 共有 n-1 個 3，且 T(1) = 1
= 3n - 2

T(n) = 3n-2 ∈ O(n)

(2) 代換法：猜一個數字後代入

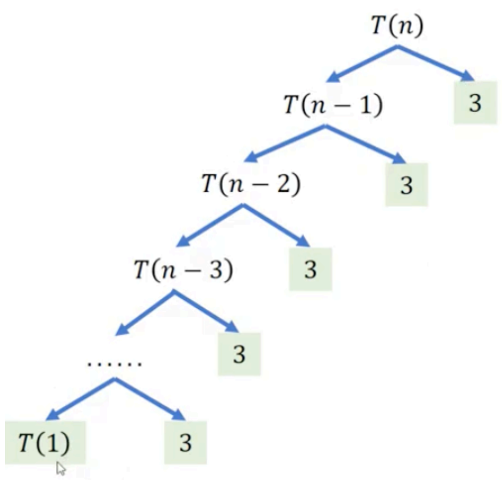
猜 $T(n) \in O(n)$ ，即 T(n) = cn，
取 c = 3，T(n) = 3n。

代入檢驗：
$T(n) \leq c(n-1)+3$ // 等號成立
$T(n) \leq cn - c + 3$ // 等號成立
$T(n) \in O(n)$

先猜一個複雜度之後，把數字代進去檢驗，看是否產生矛盾，如果沒有矛盾則得證。

(3) 遞迴樹法：畫出遞迴樹後加總之

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1)+3, if\ n>1 \\ 1, otherwise \end{cases}$$



把遞迴樹畫出來後，發現每個 T(n) 都可以拆成兩個部分：T(n-1) 和 3，又 T(1) = 1。

T(n)
$= T(1) + 3 \times (n-1)$

$= 3n - 2$

得證 $T(n) \in O(n)$。

Practice 1：使用任一方法計算下列程式碼的時間複雜度

$$T(n) = \begin{cases} 2T(n-1), if\ n > 0 \\ 1, otherwise \end{cases}$$

推薦：數學解法/遞迴樹

T(n)

= 2 T(n-1)

= 2^2 T(n-2)

= 2^3 T(n-3)

= ...

= 2^n T(0)

= $2^n \in O(2^n)$

T(n) 可以被寫成 2 x T(n-1)，T(n-1) 又可以換成 2 x T(n-2)，一直換下去，可以換成 2^n x T(0)，又 T(0) = 1，所以 T(n) = 2^n，時間複雜度是 $O(2^n)$。