機率期末報告 - 「我是神射手」遊戲分析

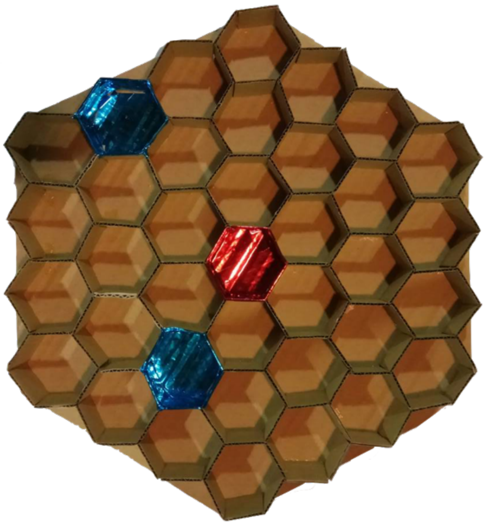
資工二　B04902009 蕭千惠、 B04902077 江緯璿

壹、遊戲介紹

一、遊戲名稱：我是神射手

二、道具：

盤面 *1　　　　圓盤數個



三、玩家數：2 人

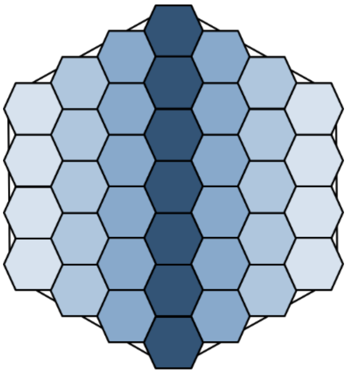
四、回合數：自訂（至少十次以上，以下分析都採十回合）

五、進行方式

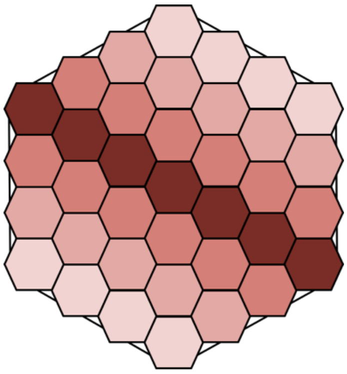
雙方玩家輪流依次丟擲一個圓盤至盤面中，若其圓盤掉落進一個格子中，則不論該格原先是否已被佔有，該格之所有權都將轉移至該玩家。意即，一格之所有權歸屬決定於「最後」進入該格子之圓盤。若該圓盤未進入任何一個格子中但仍位於全盤面之垂直投影面內，則可重丟一次，若該圓盤停止位置已超出全盤面之垂直投影面，則該圓盤無效，遊戲繼續進行至下一回合。如此交互進行一定回合數後，遊戲中止，進入分數結算。

六、分數計算方式

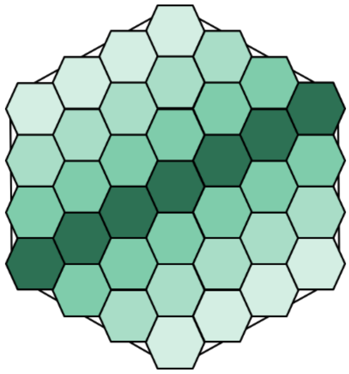
在結束所有回合後，進行分數結算並決定每一格的所有權歸屬。玩家的分數定義為「下圖一、二、三所表示之二十一條直線之中，單一直線具有所有權格子數的最大值」。雙方各自結算分數後，分數較高者勝。



圖一



圖二



圖三

七、獲勝方式：分數較高的一方獲勝

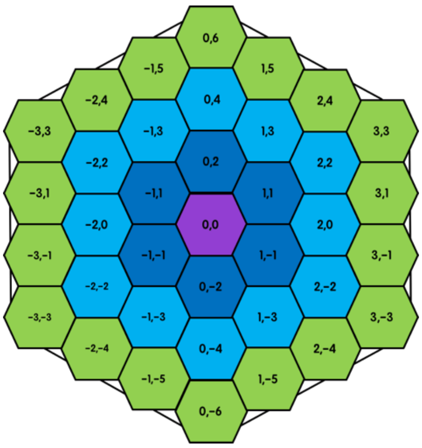
貳、目標

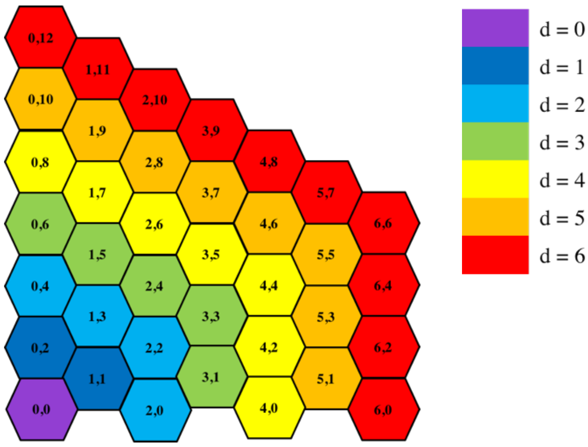
給定一個盤面，我們的目標是推論出丟哪一格可以得到當回合最佳解（使結束當回何時可以得到最高分）。因此，我們需要先推論出瞄準目標格子時丟中目標格子和其周圍格子的機率分佈情形。

參、名詞、符號定義

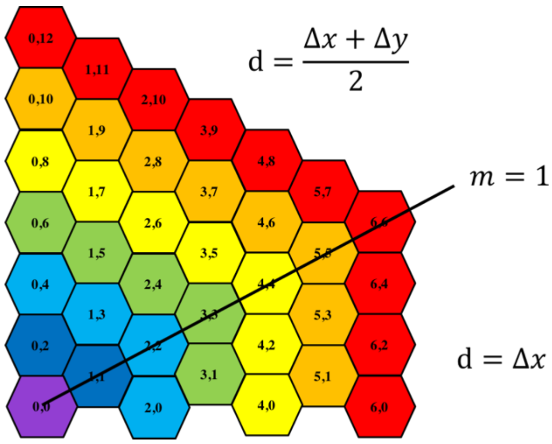
一、d：兩格子間的距離（單位：格）

計算方式：以其中一格當作中心（即下圖紫色原點），判斷另一格位在離中心最近的第幾個圓上。



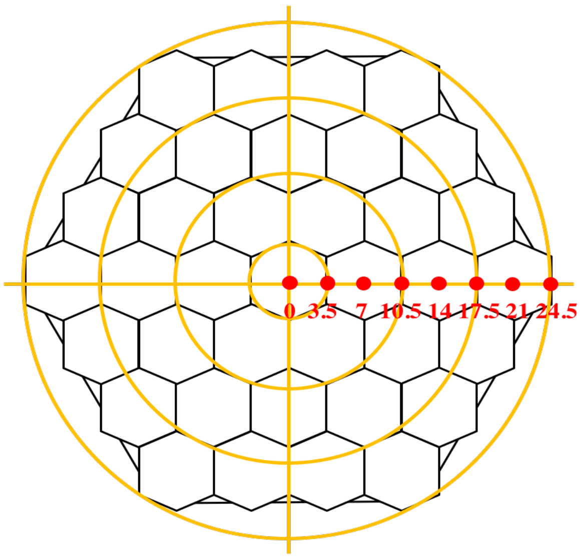


公式解：



$$d = \begin{cases} \dfrac{\Delta x + \Delta y}{2}, & \Delta x \leq \Delta y \\ \Delta x & , otherwise \end{cases}$$

二、x：實際上距離盤面中心點的距離



d	x
-4	[-31.5,-24.5)
-3	[-24.5,-17.5)
-2	[-17.5,-10.5)
-1	[-10.5,-3.5)
0	[-3.5,3.5)
1	[3.5,10.5)
2	[10.5,17.5)
3	[17.5,24.5)
4	[24.5,31.5]

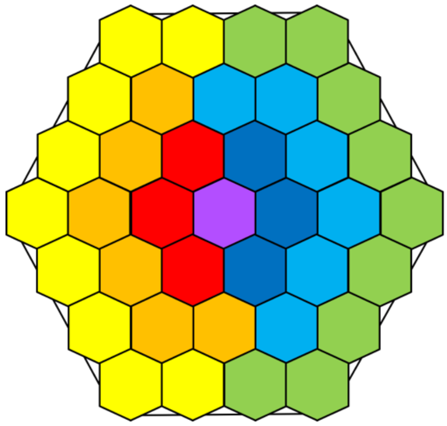
肆、檢定 – 驗證資料是否成常態分佈

H_0：以瞄準的格子為中心，進行多次投擲，投到的位置以目標為中心成常態分配（因為盤面是二維的，故我們要推論的是其分佈會成 bivariate normal distribution）

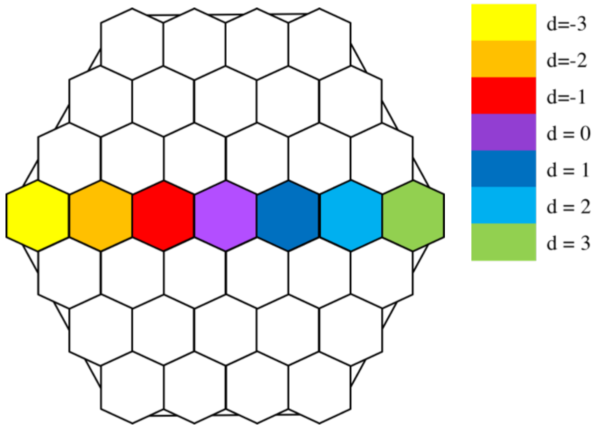
H_a：資料不成常態分配。

一、樣本取得方式

總共做 45 次投擲，目標為盤面中心點（即下方紫色格子），投擲後依照圖四的顏色表示記錄下所投擲到格子的 d 值。



圖四



圖五

二、計算出資料 x 的平均和標準差

d	x	中間值	實際次數 (o)	o*middle	o*(mid-mean)^2
-4	[-31.5,-24.5)	-28	0	0	0
-3	[-24.5,-17.5)	-21	1	-21	441
-2	[-17.5,-10.5)	-14	7	-98	1372
-1	[-10.5,-3.5)	-7	11	-77	539
0	[-3.5,3.5)	0	7	0	0
1	[3.5,10.5)	7	11	77	539
2	[10.5,17.5)	14	7	98	1372
3	[17.5,24.5)	21	1	21	441
4	[24.5,31.5)	28	0	0	0
		sum	45	0	2352

平均	0
變異數	53.45454545
標準差	7.31126155

三、理論次數的計算

先按照圖五的表示方式，以常態分配計算出在一維各格子上的理論機率，接著再按照各個 d 值對應的面積去調整不同 d 值的理論機率，最後再把各 d 值對應的理論機率乘上實驗次數（亦即 45），即可求各 d 值對應的理論次數。

四、一維上各 d 值的理論機率

x	z-score	p-value	d	一維上的理論機率(p)
-31.5	-4.30842	0.00001	-4	0.00039439
-24.5	-3.35099	0.00040	-3	0.00794009
-17.5	-2.39357	0.00834	-2	0.06713846
-10.5	-1.43614	0.07548	-1	0.24059005
-3.5	-0.47871	0.31607	0	0.36785758
3.5	0.47871	0.68393	1	0.24059005
10.5	1.43614	0.92452	2	0.06713846
17.5	2.39357	0.99166	3	0.00794009
24.5	3.35099	0.99960	4	0.00039439
31.5	4.30842	0.99999		

首先把個邊界值（即上表 x 值）利用先前算出的樣本平均（0）和樣本標準差（7.311）做標準化，並以此算出個邊界值對應的 p-value。

接著利用各 d 值所對應 x 區間去計算一維上該 d 值的理論機率，以 x 值上界的 p-value 減去 x 值下界的 p-value 即可求得。例如：d = 0 的 x 上界為 3.5，下界為 -3.5，其所對應的 p-value 分別為 0.31607 和 0.68393，故 d= 0 在一維上的理論機率即為 0.68393 - 0.31607 = 0.36785758。

五、用面積調整後的理論機率和理論次數

d	p	面積	p*面積	理論機率	理論次數 (e)
-4	0.00039439	615.7521601	0.485690264	0.00186359	0.083861563
-3	0.00794009	461.8141201	7.333691665	0.028139326	1.266269664
-2	0.06713846	307.8760801	41.34065213	0.158623806	7.13807126
-1	0.24059005	153.93804	74.07192186	0.284213469	12.7896061
0	0.36785758	19.242255	14.15681864	0.054319618	2.44438283
1	0.24059005	153.93804	74.07192186	0.284213469	12.7896061
2	0.06713846	307.8760801	41.34065213	0.158623806	7.13807126
3	0.00794009	461.8141201	7.333691665	0.028139326	1.266269664
4	0.00039439	615.7521601	0.485690264	0.00186359	0.083861563
		sum	130.3103652		

因為盤面上的每個 d 值對應的面積近似於中空圓形，故上表面積的計算是以中空圓形做計算。以 d= 1 為例，其 d 值位於 3.5 和 10.5 之間，故其面積為 $(10.5^2 - 3.5^2) * \pi \cong 153.93804$。

把各 d 值對應的一維理論機率乘上面積，就可推算出各 d 值理論機率的比，依此比值調整即可算出二維的理論機率，進而推估出各 d 值的理論次數。

六、合併

o	e	$\frac{(o-e)^2}{e}$
0	0.083861563	0.083861563
1	1.266269664	0.055990865
7	7.13807126	0.002670704
11	12.7896061	0.250413497
7	2.44438283	8.490342655
11	12.7896061	0.250413497
7	7.13807126	0.002670704
1	1.266269664	0.055990865
0	0.083861563	0.083861563

o	e	$\frac{(o-e)^2}{e}$
8	8.488202487	0.028079169
18	15.23398893	0.502220218
11	12.7896061	0.250413497
8	8.488202487	0.028079169
	Sum	0.808792052

做 Chi-Square 適合度檢定時要確保每組的理論次數都大於 5，故上表資料需要進行合併。左邊的表格是合併前的情形，右邊是合併後的情形，同顏色的資料代表被合併在一起。

七、依照上面計算出來的 ψ 值決定是否要拒絕 H_0

$$\chi^2{}_{(0.1,3)} = 6.251$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{3} \frac{(o-e)^2}{e} = 0.8088$$

因為 $\psi < \chi^2{}_{(0.1,3)}$，因此不拒絕 H_0，我們相信資料成常態分配。

伍、策略分析與公平性檢測

我們假定玩家決定瞄準點時的策略可分為兩種：「自我分數最大化」與「與對方分差最大化」。另外，再加上是否要使得對方下一手獲益最小，可統整出各種策略，如下圖。其中，我們最多只考慮一層的未來性，且因為自我分數最大化的策略顯然不會與未來產生任何關聯，故綜合來說可歸結至以下四種整體決策的策略：

	玩家策略		對手策略	
	考慮未來	最佳化策略	考慮未來	最佳化策略
1	Yes	分差最大化	No	自我分數最大化
2	Yes	分差最大化	No	分差最大化
3	No	自我分數最大化	X	X
4	No	分差最大化	X	X

而「自我分數最大化」與「與對方分差最大化」的兩種策略決定瞄準點的公式如下。

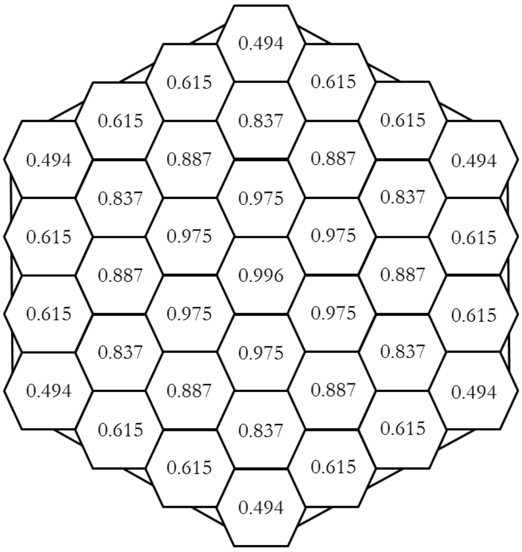
一、自我分數最大化：

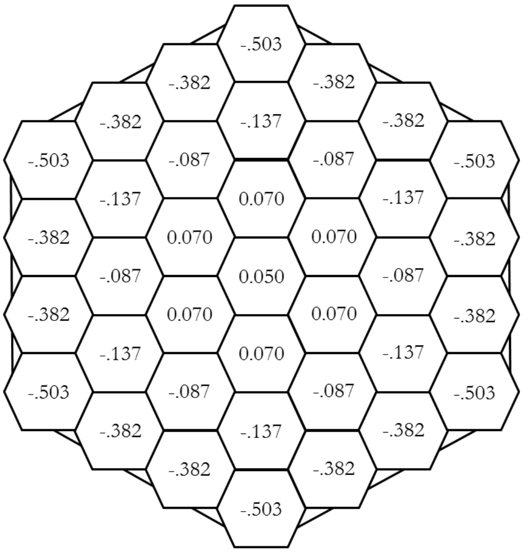
$$\boldsymbol{AIM_A = MAX\left(\forall X \in grid, \left(\sum_{Y \in grid} prob_{d(X,Y)} * score_{A_{after}}\right) + (1 - prob_{sum}) * score_{A_{miss}}\right)}$$

二、與對方分差最大化：

$$\boldsymbol{AIM_A = MAX(\forall X \in grid, \left(\sum_{Y \in grid} prob_{d(X,Y)} * \left(score_{A_{after}} - score_{B_{after}}\right)\right) + (1 - prob_{sum}) * \left(score_{A_{miss}} - score_{B_{ori}}\right))}$$

以下提供一個例子：若此時盤面僅有玩家一之圓盤位於座標(0,0)，此時輪到玩家二丟擲，則對於玩家二的每一個瞄準點，其策略三下分數的期望值如下圖左；策略四下分差之期望值如下圖右。取最大值後可得出在玩家二採取策略三的狀況下，玩家二會選擇(0,0)做為瞄準點，自我得分期望值為 0.996；玩家二採取策略四的狀況下，玩家二會選擇任一與(0,0)距離(d)為 1 的點，分差期望值為+0.070。



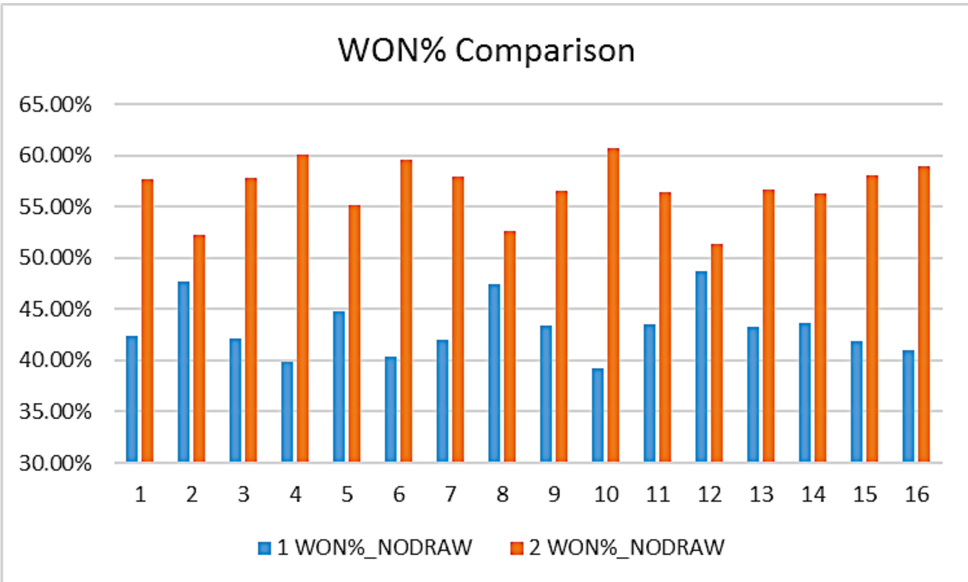


依照此假設與評估公式，我們利用程式模擬共 16 種雙方策略組合下之勝率，模擬次數因計算量差異，由 3708 至 10000 次不等。模擬結果之統計表請見**附表一**。模擬程式之原始碼請見 http://codepad.org/cxfaf8rC。

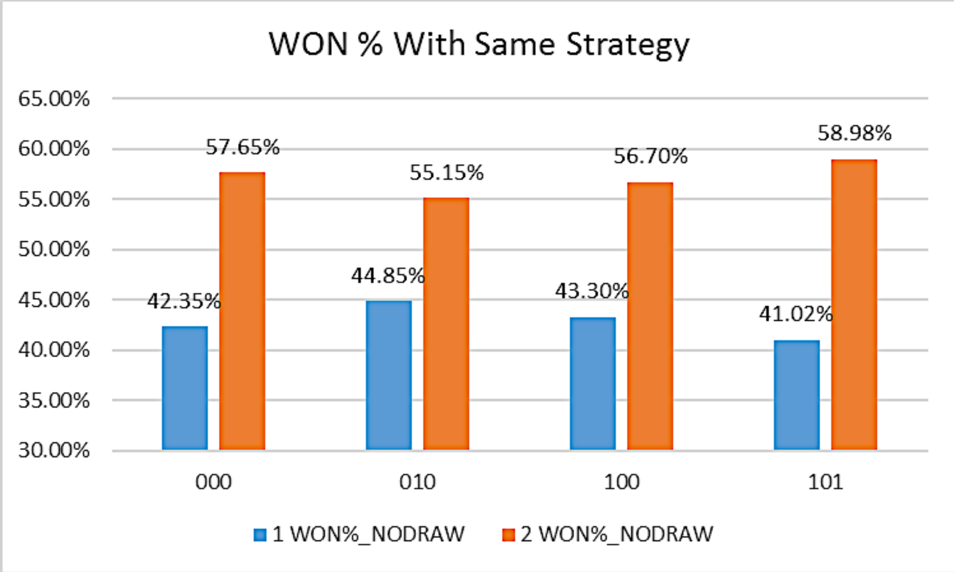
根據模擬的結果，關於此遊戲的策略分析與公平性，我們提出二個宣稱

一、此遊戲對後手有利

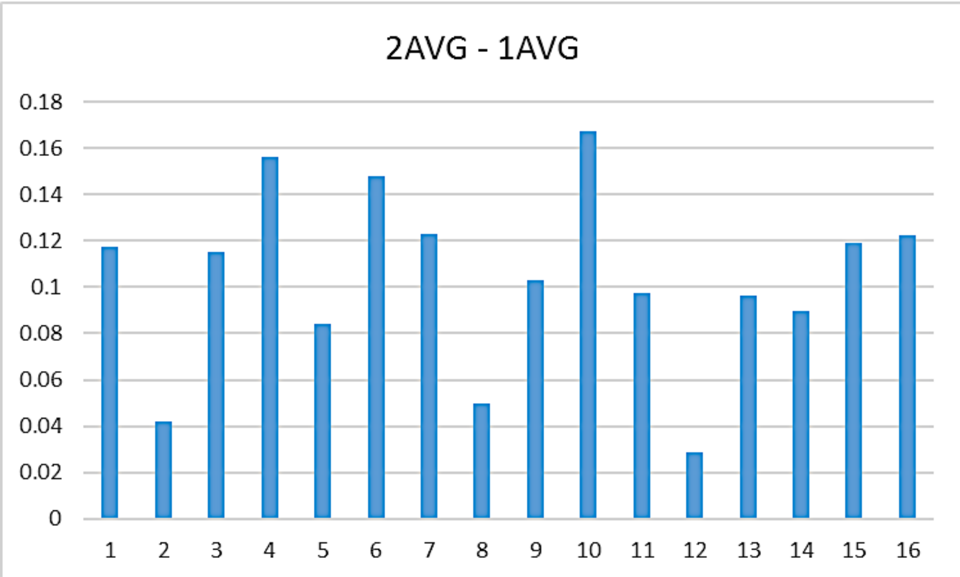
在 16 種的策略模擬結果中，後手的勝率皆較先手高，如下圖。



此外，先後手採取相同策略時，後手的勝率皆明顯高過先手超過 10 個百分點，如下圖，其中"000","010"等 X 軸標籤為附表一中之策略代號。



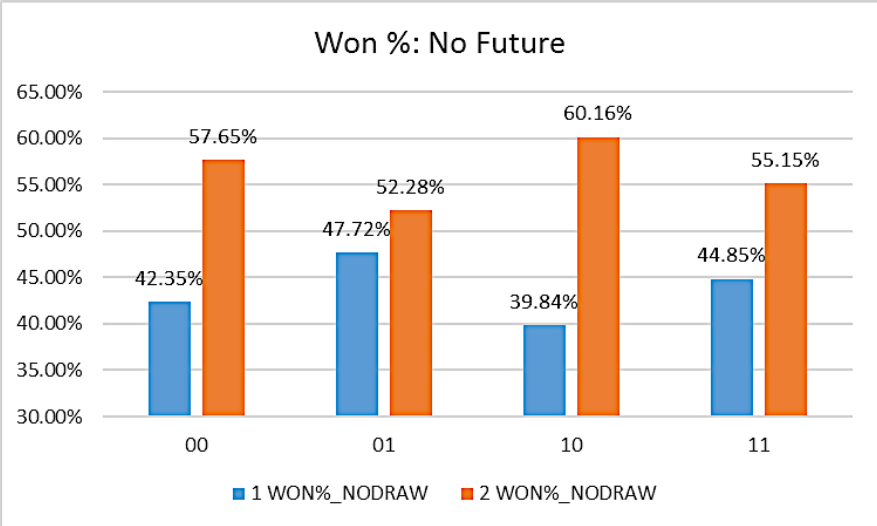
若比較先後手的得分平均，後手也皆較先手高，如下圖。



綜上所述，我們認為此遊戲後手在任何情況下皆具有優勢，故此遊戲後手較先手有利，為一不平衡之賽局。

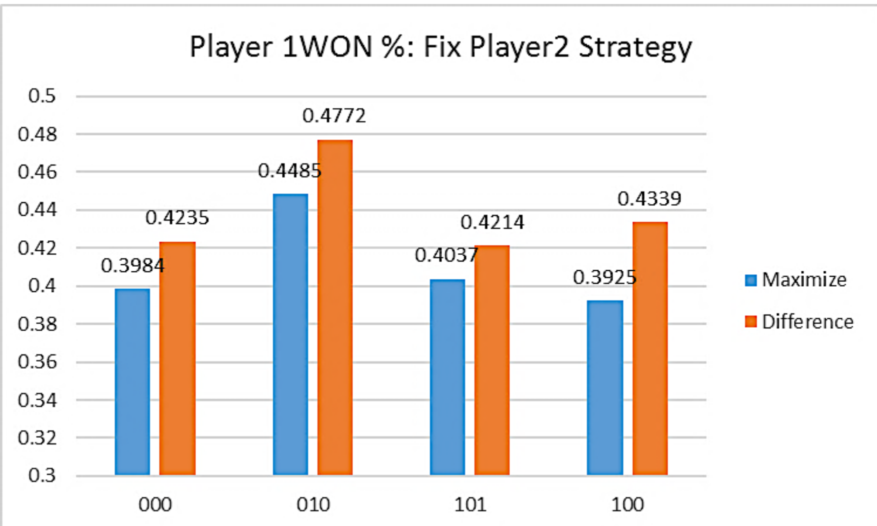
二、「分差最大化」策略比「自我分數最大化」策略來得更好

在不考慮未來的策略中，固定一方的策略時，「分差最大化」策略的勝率不論如何皆較「自我分數最大化」策略的勝率有所提升。例如玩家一固定採取「自我分數最大化」策略時，玩家二採取「自我分數最大化」策略時的勝率為 55.15%；玩家二採取「分差最大化」策略時的勝率則提升為 60.16%，其他狀況則同理，如下圖。



此外，在此狀況下，不論是玩家一或玩家二，在所有可能的策略組合中，皆傾向選擇「分差最大化」策略以最大化自己的勝率(Max Profit)，此時達到賽局理論中所稱的「納許均衡」(Nash Equilibrium)。

另外，當固定先手玩家的策略為「自我分數最大化」與「分差最大化」之一時，不論後手玩家採取的策略為何，在先手玩家採取「分差最大化」之策略時，先手玩家的勝率都較高。如下圖，”000”,”010”等 X 軸標籤為附表一中之策略代號，代表後手玩家的策略。



綜上所述，我們認為「分差最大化」策略是對玩家相對較為有利之策略選項。同時，採取較好的策略，確實可以對自身的勝率有提升，然而如同第一點所提到的，不論先手方採取再怎麼好的策略，皆無法使勝率超過百分之五十。

陸、未來展望

此份報告中我們將此遊戲簡化，僅就其中一種規則及計分方式討論並分析，然而，此遊戲之原創者尚有提出其他的遊戲規則，例如：組隊競賽、覆蓋連續最大面積者勝等等變化。在各種不同的變化之中，先手與後手間的公平性仍是個值得探討的問題。再者，就此報告提出之規則而言，該如何小幅度的修改規則或是使先手有某種特殊能力才能使得遊戲雙方的不平衡性得以化解呢？這部分也是可以繼續深入探討的議題。另外，進行程式模擬時，程式運行的效率並不佳，使得無法於合理的時間內完成所有策略組合的一萬筆模擬，造成某些組合的樣本數較少，雖然於統計上仍可說是有足夠大的樣本，但此部分尚能補強，例如平行化的程式運行將可大幅縮短運算時間，如此將能進行更大量的模擬以取得更多樣本，進而使得統計與推論更加有說服力，又或者使得信心水準提高。總體而言，此遊戲能討論的面向極為寬廣，若未來尚有餘力進行更深入的研究，仍是個不錯的題材。

附表一：

Player 1			Player 2														
Future	Self Max	Opp Max	Future	Self Max	Opp Max	1 AVG	2 AVG	2-1AVG	1 WON	1 WON%	1 WON% No Draw	2 WON	2 WON%	2 WON% No Draw	DRAW	DRAW (%)	N
0	0	0	0	0	0	2.3126	2.4303	0.1177	2372	23.72%	42.35%	3229	32.29%	57.65%	4399	43.99%	10000
0	0	0	0	1	0	2.4357	2.4777	0.042	2747	27.47%	47.72%	3010	30.10%	52.28%	4243	42.43%	10000
0	0	0	1	0	1	2.2826	2.3981	0.1155	2333	23.33%	42.14%	3203	32.03%	57.86%	4464	44.64%	10000
0	1	0	0	0	0	2.3485	2.5046	0.1561	2320	23.20%	39.84%	3503	35.03%	60.16%	4177	41.77%	10000
0	1	0	0	1	0	2.4744	2.5588	0.0844	2599	25.99%	44.85%	3196	31.96%	55.15%	4205	42.05%	10000
0	1	0	1	0	1	2.3106	2.4588	0.1482	2324	23.24%	40.37%	3433	34.33%	59.63%	4243	42.43%	10000
1	0	1	0	0	0	2.2839	2.4068	0.1229	2308	23.08%	42.06%	3180	31.80%	57.94%	4512	45.12%	10000
1	0	1	0	1	0	2.3948	2.4444	0.0496	2689	26.89%	47.41%	2983	29.83%	52.59%	4328	43.28%	10000
0	0	0	1	0	0	2.33736	2.44064	0.1033	1851	24.83%	43.39%	2415	32.39%	56.61%	3189	42.78%	7455
0	1	0	1	0	0	2.35266	2.5198	0.1671	1711	22.97%	39.25%	2648	35.55%	60.75%	3090	41.48%	7449
1	0	0	0	0	0	2.35382	2.45105	0.0972	1876	25.23%	43.54%	2433	32.72%	56.46%	3127	42.05%	7436
1	0	0	0	1	0	2.46951	2.49844	0.0289	2080	28.25%	48.67%	2194	29.80%	51.33%	3089	41.95%	7363
1	0	0	1	0	0	2.37567	2.47195	0.0963	908	24.49%	43.30%	1189	32.07%	56.70%	1611	43.45%	3708
1	0	0	1	0	1	2.32429	2.41424	0.09	1206	24.60%	43.63%	1558	31.78%	56.37%	2139	43.63%	4903
1	0	1	1	0	0	2.29965	2.41894	0.1193	1162	23.82%	41.93%	1609	32.98%	58.07%	2108	43.21%	4879
1	0	1	1	0	1	2.24735	2.36953	0.1222	1665	22.63%	41.02%	2394	32.54%	58.98%	3299	44.84%	7358

註：皆設玩家一為先手，回合數=10

策略代號：Future： 0=不考慮未來，1=考慮未來。 Self Max：0=分差最大化，1=自我分數最大化。 Opp Max：對手策略，代號與 Self Max 同

1AVG：玩家一之平均分，2AVG：玩家二之平均分。1 WON% No Draw：扣除和局後，玩家一勝率，2 WON% No Draw：扣除和局後，玩家二勝率

2-1AVG：玩家二之平均分-玩家一之平均分。N：模擬遊戲場數