

## B1029017 歐靜嬪

河內塔 (Tower of Hanoi) 是根據一個傳說形成的數學問題：

有三根杆子 A, B, C。A 杆上有 N 個 ( $N > 1$ ) 穿孔圓盤，盤的尺寸由下到上依次變小。  
要求按下列規則將所有圓盤移至 C 杆：

1. 每次只能移動一個圓盤；
2. 大盤不能疊在小盤上面。

提示：可將圓盤臨時置於 B 杆，也可將從 A 杆移出的圓盤重新移回 A 杆，但都必須遵循上述兩條規則。

問：如何移？最少要移動多少次？

## 傳說

---

最早發明這個問題的人是法國數學家愛德華·盧卡斯。

傳說越南河內某間寺院有三根銀棒，上串 64 個金盤。寺院裡的僧侶依照一個古老的預言，以上述規則移動這些盤子；預言說當這些盤子移動完畢，世界就會滅亡。

這個傳說叫做梵天寺之塔問題 (Tower of Brahma puzzle)。但不知道是盧卡斯自創的這個傳說，還是他受他人啟發。

若傳說屬實，僧侶們需要

$\{displaystyle 2^{64}-1\}$

2 的 64 次方 - 1 步才能完成這個任務；若他們每秒可完成一個盤子的移動，就需要 5849 億年才能完成。整個宇宙現在也不過 137 億年。

這個傳說有若干變體：寺院換成修道院、僧侶換成修士等等。寺院的地點眾說紛紜，其中一說是位於越南的河內，所以被命名為「河內塔」。另外亦有「金盤是創世時所造」、「僧侶們每天移動一盤」之類的背景設定。

## 解答

---

如取  $N=64$ , 最少需移動  $2^{64}-1$  次。即如果一秒鐘能移動一塊圓盤, 仍將需 5849.42 億年。目前按照宇宙大爆炸理論的推測, 宇宙的年齡僅為 137 億年。

在真實玩具中, 一般  $N=8$ ;最少需移動 255 次。如果  $N=10$ , 最少需移動 1023 次。

如果  $N=15$ , 最少需移動 32767 次;這就是說, 如果一個人從 3 歲到 99 歲, 每天移動一塊圓盤, 他最多僅能移動 15 塊。如果  $N=20$ , 最少需移動 1048575 次, 即超過了一百萬次。

```
int conf[HEIGHT]; /* Element conf[d] gives the current position
of disk d. */

void move(int d, int t) {
    /* move disk d to peg t */
    conf[d] = t;
}

void hanoi(int h, int t) {
    if (h > 0) {
        int f = conf[h-1];
        if (f != t) {
            int r = 3 - f - t;
            hanoi(h-1, r);
            move(h-1, t);
        }
        hanoi(h-1, t);
    }
}
```