第五章 離散型隨機變數

5-1 離散型機率分配

以擲二枚硬幣為例，隨機變數 x 為出現正面的次數。因此，x ＝0, 1, 2，此隨機變數的機率函數為：

$$f(x)=\begin{cases}1/4 & X=0,2\\ 2/4 & X=1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

隨機變數 x 的機率分配表為：

x	f(x)
0	1/4
1	2/4
2	1/4

(例1)：

x	1	2	3	4
f(x)	1/4	3/8	1/4	1/8

求(1)$P(1\le X\le 3)$ (2)$P(X>3)$

解：

(1)$P(1\le X\le 3)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=1/4+3/8+1/4=7/8$

(2)$P(X>3)=P(X=4)=1/8$

5-2 期望值及變異數

1.期望值

重複進行多次實驗預期會出現的值或結果。

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i f(x_i)=\mu$$

2.變異數

$$V(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 f(x_i)=E[(X-\mu)^2]=E(X^2)-[E(X)]^2$$

(例2)：

x	0	1	2
f(x)	1/4	1/2	1/4

求(1)E(X) (2)V(X) (3)σ(X)

解：

$E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{4}=1$

$E(X^2)=0^2\times\frac{1}{4}+1^2\times\frac{1}{2}+2^2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$

$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{3}{2}-1^2=\frac{1}{2}$

$\sigma(X)=\sqrt{0.5}=0.7071$

<速解>

①		②
X	f(x)	X^2
0	1/4	0
1	2/4	1
2	1/4	4

E(X)=①=兩兩相乘再相加

$E(X^2)$=②=兩兩相乘再相加

V(X)=②-$①^2$

5-3 二項分配(Binomial distribution)

◎二項分配又稱二項實驗，其特性如下：

(1)實驗共進行 n 次，每次實驗過程均相同

(2)每次實驗的結果只有二種，成功或失敗

(3)每次實驗成功的機率為 p， 失敗的機率為 q=1-p

(4)每次實驗互相獨立

◎X 為二項分配，在 n 次實驗中恰有 x 次成功的之機率密度函數為：

$$P(X=x)=C_x^n p^x(1-p)^{n-x}$$

◎二項分配之平均數及變異數分別為：

$$E(X)=np$$
$$V(X)=np(1-p)$$

(例 3):

假設產品之瑕疵比例為 20%，從中隨機抽取 3 個產品，抽中 2 個瑕疵品之機率為何?若抽 20 個，則平均多少個為瑕疵品?

解：

(1)$P(X=2)=C_2^3(0.2)^2(0.8)^1=0.096$

(2)E(X)=np=20×0.2=4 個

5-4 卜式分配(Poisson distribution)

◎卜式分配之機率密度函數為：

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

λ=區間內之平均數
e=2.71828(自然指數)

◎卜式分配之平均數及變異數分別為：

$$E(X)=\lambda$$
$$V(X)=\lambda$$

(例 4):
假設某人平均打一頁的字會出現 3 個錯字
(1)打一頁的字出現錯字 2 個字的機率為何？
(2)打三頁的字沒有出現錯誤的機率為何？
(3)打五十頁的字，平均錯字有幾個?

解：

(1)$P(X=2)=\frac{e^{-3}3^{2}}{2!}=0.2240$

(2)λ=3×3=9

$P(X=0)=\frac{e^{-9}9^{0}}{0!}=0.0001$

(3)E(X)=λ=50×3=150 個

5-5 超幾何分配(Hypergeometric distribution)

在母體中，有 K 個物件被歸類為成功，N-K 個物件被歸類為失敗，則在 n 次實驗中，恰有 x 次成功的機率，其機率密度函數為：

$$P(X=x)=\frac{C_{x}^{K}C_{n-x}^{N-K}}{C_{n}^{N}}$$

n=試驗次數
N=母體個數
K=母體中成功個數

◎超幾何分配之平均數及變異數分別為：

$$E(X)=K\times\frac{n}{N}$$

$$V(X)=K\times\frac{n}{N}\times\frac{N-K}{N}\times\frac{N-n}{N-1}$$

(例 5):
袋中有 3 紅球 2 白球，每次抽一球，抽出不放回，若抽 2 次，則抽中 1 紅 1 白的機率為何？

解：
設抽中紅球為 x

$$P(X=1)=\frac{C_1^3C_1^2}{C_2^5}=\frac{6}{10}=0.6$$

綜合練習 5

1.已知 X 機率分配表如下：

X	1	2	3	4
f(X)	1/5	2/5	1/5	?

求(1)f(4)=?
(2)σ(X)=？

2.隨機投擲一顆骰子二次，令 X 表投擲此骰子二次的點數和，試求隨機變數 X 之機率函數。

3.隨機投擲一個銅板三次，令 X 表出現正面的次數，試求隨機變數之機率函數及累積機率分配。

4.設有三男二女，隨機抽出二人組委員會，求男生之期望值？

5.已知一班級中有男生 10 人，女生 40 人。今隨機抽取 4 位同學作調查，
(1)全部為女生的機率為何？
(2)男生 3 人及女生 1 人的機率為何？

6.假設校門口平均每分鐘有 5 部汽車通過。求，
(1)每分鐘有 10 部汽車通過的機率為何？
(2)平均每小時有多少汽車通過？

7.袋中有 3 紅球 2 白球，每次抽一球，抽出放回，若抽 2 次，則抽中 1 紅 1 白的機率為何？