第四章 機率論

4-1 樣本空間及事件

1.樣本空間 (Sample Space)

統計實驗所有可能結果之集合，稱為樣本空間 (Sample Space); 並以 S 為其代表符號。而每一個實驗的可能的結果，稱之為「樣本點」 (sample point)或「出象」(outcome)。

(例 1)：
(1)擲一顆骰子，其樣本空間為何？
(2)擲二顆骰子，其樣本空間為何？

解：

(1)

S={1, 2, 3, 4, 5, 6}，其中的 1、2、3、4、5、6 為樣本點。

(2)

S={(1, 1)，(1, 2)，(1, 3)，(1, 4)，(1, 5)，(1, 6)，(2, 1)，(2, 2)，(2, 3)，…，(6, 3)，(6, 4)， (6, 5)，(6, 6)} ，共 36 個樣本點。

2.事件(Event)

事件是樣本空間的子集合(部份集合)。以 E 為其代表符號。事件又可分為以下兩種：

(1)簡單事件 (simple event)：只包含一個樣本點的事件。

(2)複合事件 (composite event) ：包含二個或二個以上樣本點的事件。

例如：

◎令 A 表投擲一顆骰子點數為 5 的事件,B 表投擲一顆骰子點數大於 5 的事件，則 A={5}，B={5, 6}，A、B 均為樣本空間 S＝{1, 2, 3, 4, 5, 6}之子集合，故 A、B 為不同的兩個事件，且 A 為簡單事件，B 為複合事件。

◎令 C 表投擲二顆骰子點數總和為 9 的事件，則 C＝{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)}為一複合事件。

4-2 排列與組合

1.排列(permutation)

自一含有 n 個元素的集合中，一次抽取 r 個元素(或每抽取一個，抽出不放回，連續抽取 r 個)，則共有p_r^n個不同排列的樣本點，公式為：

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

(例 2)：
王先生的銀行存款欲設定四個不相同的數字的密碼，問共有幾種方式可設定？

解：

$$P_4^{10} = \frac{10!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

2.組合(combination)

自一含有 n 個元素的集合中，一次抽取 r 個元素，不考慮 r 個被抽中元素的順序，共有 C_r^n 個組合，其公式為：

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

(例 3)：
自 5 位科長中，隨機抽取 2 位，則共有多少樣本點？

解：

$$C_2^5 = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

4-3 機率理論

1.古典機率理論:機會均等 P(E)=$\frac{1}{N}$

2.客觀機率理論：相對次數 P(E)=$\lim_{n\to\infty} \frac{n(E)}{n}$

3.主觀機率理論：對事件的信心度 P(E)=對此事件所認定的機率

◎機率之定理：

1.$0 \le P(E) \le 1$

2.P(S)=1

古典機率方法 (classical probability method)：
在一隨機試驗中，在每一個結果產生的可能性一致的條件下，事件的機率為事件的元素個數除以樣本空間之樣本點的個數，即事件 E 的機率

$$P(E)=n(E)/n(S)$$

其中 n(E)、n(S)分別代表事件 E 及樣本空間 S 的元素個數。

(例 4)：
投擲一顆骰子兩次，點數和為 6 的機率為何？

解：
S={(1,1),(1,2)….(6,6)}， n(S)=36
E={(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)}，n(E)=5
P(E)=5/36

<速解>

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	
3	4	5	6	7		
4	5	6	7			
5	6	7				
6	7					

(例 5)：
擲二枚硬幣，出現一枚正面的機率？

解：
因為 S={正正，正反，反正，反反}
E={正反，反正}

所以 P(E)= 2 / 4 = 0.5

4-4 事件機率

1.事件之集合運算
◎A 與 B 之交集(Intersection) 記作 $A\cap B$
◎A 與 B 之聯集(Union) 記作 $A\cup B$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

2.互斥事件(mutually exclusive events)
對任何二個事件 A、B，若 $A\cap B=\varnothing$ (空集合) ，則稱 A、B 為「互斥事件」。
3.餘事件(complement)
不包含事件 A 之樣本點所形成的集合，稱之為事件 A 之「餘事件」，記為 A^c

或$\bar{A}$。

4.獨立事件

當事件 B 的發生與事件 A 的發生無關時，我們稱 A、B 為「獨立事件」(independent events)。

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

5.$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)$ $P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)$

(例6)

$P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，$P(A\cap B)=0.3$，求：

(1)$P(A\cup B)$ (2)$P(\bar{A}\cup\bar{B})$ (3)$P(\bar{A}\cup B)$ (4)$P(A\cap\bar{B})$

解：

(1)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.5-0.3=0.6$

(2)$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1-0.3=0.7$

(3) $P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}\cap B)=\left(1-P(A)\right)+P(B)-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)=0.6+0.5-(0.5-0.3)=0.9$

(4)$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)=0.4-0.3=0.1$

<速解>

	A	$\bar{A}$	
B	0.3	0.2	0.5
$\bar{B}$	0.1	0.4	0.5
	0.4	0.6	1.0

<速解>

(2)$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\cap\bar{B})=0.6+0.5-0.4=0.7$

(3)$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}\cap B)=0.6+0.5-0.2=0.9$

(4)$P(A\cap\bar{B})=0.1$

(例7)

若A、B是獨立事件，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.5$，求：

(1)$P(A\cap B)$ (2)$P(A\cup B)$ (3)$P(\bar{A}\cup B)$

解：

(1)$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=0.4\times 0.5=0.2$

(2)$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.5-0.2=0.7$

(3)$P(\bar{A}\cup B)=P(\bar{A})+P(B)-P(\bar{A}\cap B)=\left(1-P(A)\right)+P(B)-\left(P(B)-P(A\cap B)\right)=0.6+0.5-(0.5-0.2)=0.8$

4-5 聯合機率(Joint probability)

二個或二個以上事件同時發生的機率

例如事件 A 與事件 B 發生的機率為 $P(A\cap B)$

4-6 邊際機率(Marginal probability)

二個或二個以上事件，若只計算單一事件發生的機率，不管其他事件發生的機率。

例如事件 A 的邊際機率為：

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap \overline{B})$$

4-7 條件機率(Conditional probability)

已知事件 B 發生下，事件 A 發生之機率，記作 P(A|B)。

$$P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$$

(例8)：

已知某公司有 A、B 兩種產品，其良品與不良品個數如表

	產品 A	產品 B
良品	480	450
不良品	20	50

(1)任選一件產品為 A 產品的機率為何？ (邊際機率)

(2)任選一件產品為 A 產品且不良品的機率為何？ (聯合機率)

(3)隨機抽取一件 B 產品，其結果為不良品的機率為何？ (條件機率)

解：

樣本空間 S 代表所有產品所成的集合，事件 F 表不良品事件，則

$P(A)=n(A)/n(S)=(480+20)/(480+20+450+50)=500/1000=0.5$

$P(A\cap F)=20/1000=0.02$

$P(F|B)=P(B\cap F)/P(B)=(50/1000)/(500/1000)=50/500=0.1$

<速解>

	產品 A	產品 B	
良品 G	480	450	930
不良品 F	20	50	70
	500	500	1000

	A	B	
G	0.48	0.45	0.93
F	0.02	0.05	0.07
	0.5	0.5	1.0

(例 9)：
準時飛之機率 0.83，準時到之機率 0.92，準時飛且準時到之機率 0.78
(1)若已知準時飛，則準時到之機率
(2)若已知準時到，則準時飛之機率

解：

	準時飛	不準時飛	
準時到	0.78	0.14	0.92
不準時到	0.05	0.03	0.08
	0.83	0.17	1.00

P(準時到|準時飛)=P(準時到∩準時飛)/P(準時飛)=0.78/0.83=0.94
P(準時飛|準時到)=P(準時到∩準時飛)/P(準時到)=0.78/0.92=0.85

綜合練習 4

1.擲二顆骰子
(1)出現點數和為 7 的機率？
(2)出現點數和為 7 或第一顆為 4 點的機率？

2.令 A、B 分別表示擲一顆骰子兩次點數和為 6 及點數和為奇數的事件，請問 A、B 是否為獨立事件？或為互斥事件？

3.若A、B是獨立事件，P(A)=0.6，P(B)=0.3，求：
(1)$P(A|B)$與$P(\bar{A}|B)$
(2)$P(A\cap B)$與$P(A\cap \bar{B})$
(3)$P(A\cup B)$與 $P(A\cup \bar{B})$

4.若 p(A)=0.3，p(B)=0.2，p(A∪B)=0.4
(1)P(A∩B)=?
(2)$P(\bar{A}\cup \bar{B})$=？

5.某公司有員工 50 人，其性別及婚姻狀況之資料如下：

婚姻狀況 性別	已婚	未婚
男	16 人	14 人
女	12 人	8 人

今隨機由該公司抽取一員工，則，

(1)為女員工的機率？

(2)為男員工且已婚者的機率？

(3)已知為女員工，則已婚者的機率？

6.某工廠生產 A、B 兩產品，已知 A、B 兩種產品分別占總產品數的 60％及 40 ％，且 A 產品的不良率為 0.01，B 產品的不良率為 0.05。試問，

(1)此工廠生產出不良品的機率？

(2)此工廠生產出的不良品中，A 產品的機率？

7.公司需 2 名職員，報考者有四位，其資料如下：

姓名	趙一	錢二	孫三	李四
性別	男	男	女	男
畢業學校	高餐	景文	高餐	文化

(1)已知錄取至少有一名為高餐，則是趙一的機率為何？

(2)兩位高餐皆被錄取的機率為何？

(3)已知有男生被錄取，則是趙一的機率為何？