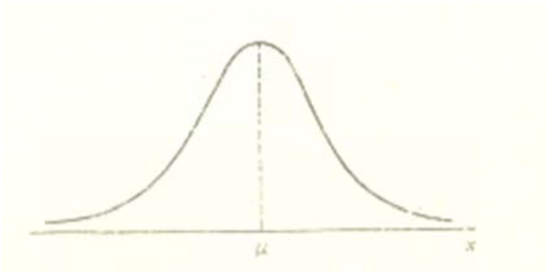
第六章 連續型隨機變數

6-1 常態分配



1.常態分配的特質

(1)常態分配是以μ為中心的對稱分配。

(2)常態分配曲線下面的面積總和等於 1。

(3)常態分配 $f(x)$在 $X=\mu\pm\sigma$時有一轉折點。

(4)常態分配曲線的兩尾無限延伸。

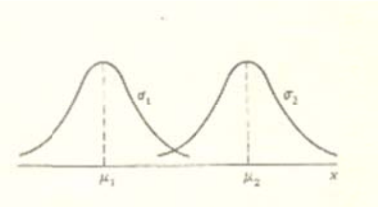
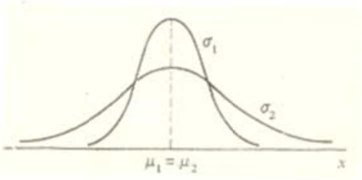
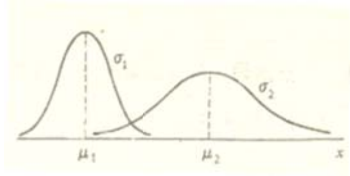
(5)常態分配的機率範圍可分為三種情況。

◎常態隨機變數的值落在離開平均數 1 個標準差等距的範圍(即$\mu\pm\sigma$)之機率為：$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=0.6826$

◎常態隨機變數的值落在離開平均數 2 個標準差等距的範圍(即$\mu\pm2\sigma$)之機率為：$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=0.9544$

◎常態隨機變數的值落在離開平均數 3 個標準差等距的範圍(即$\mu\pm3\sigma$)之機率為：$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=0.9974$

2.平均數與變異數異同之圖形比較

$\mu_1<\mu_2$，$\sigma_1=\sigma_2$ $\mu_1=\mu_2$，$\sigma_1<\sigma_2$ $\mu_1<\mu_2$，$\sigma_1<\sigma_2$

3.若隨機變數為常態分配，以 N(μ，σ^2)表示，其機率密度函數為：

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

μ=平均數，σ=標準差，e=2.71828(自然指數)，π=3.14159

4.標準常態化:

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$$

(例 1): 假設隨機變數 Z 為標準常態分配,利用標準常態分配表求出下列機率值。

(1)$P(0\le Z\le 2)$＝？

(2)$P(Z>1.64)$＝？

(3)$P(-0.5\le Z\le 1.5)$＝？

(4)$P(Z\ge -1.26)$＝？

(5)$P(1\le Z\le 2)$＝？

解：

(1)$P(0\le Z\le 2)=0.4772$

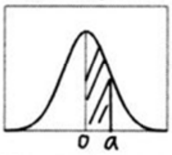
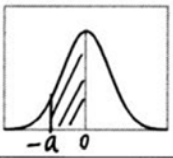
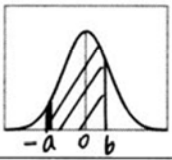
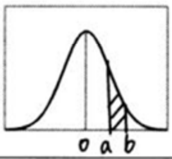
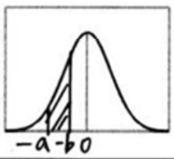
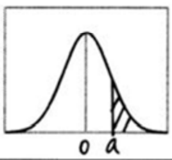
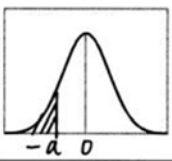
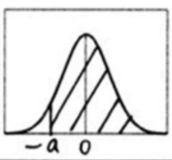
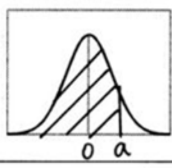
(2)$P(Z>1.64)=0.5-P(0\le Z\le 1.64)=0.5-0.4495=0.0505$

(3)$P(-0.5\le Z\le 1.5)=P(-0.5\le Z\le 0)+P(0\le Z\le 1.5)=P(0\le Z\le 0.5)+P(0\le Z\le 1.5)$

$=0.1915+0.4332=0.6247$

(4)$P(Z\ge -1.26)=P(-1.26\le Z\le 0)+0.5=P(0\le Z\le 1.26)+0.5=0.3962+0.5=0.8962$

(5)$P(1\le Z\le 2)=P(0\le Z\le 2)-P(0\le Z\le 1)=0.4772-0.3413=0.1359$

	圖形	機率
1		$=P(0\le Z\le a)$
2		$=P(0\le Z\le a)$
3		$=P(0\le Z\le a)+P(0\le Z\le b)$
4		$=P(0\le Z\le b)-P(0\le Z\le a)$
5		$=P(0\le Z\le a)-P(0\le Z\le b)$
6		$=0.5-P(0\le Z\le a)$
7		$=0.5-P(0\le Z\le a)$
8		$=0.5+P(0\le Z\le a)$
9		$=0.5+P(0\le Z\le a)$

(例 2):假設隨機變數 X 具有常態分配且$\mu=10$、$\sigma^2=25$，則
(1)P(X＜15)＝？
(2)P(12≤X≤15)＝？

解：

(1)$P(X<15)=P\left(\frac{X-\mu}{\sigma}<\frac{15-10}{5}\right)$ =P(Z<1)=0.5+P(0≤Z≤1)=0.5+0.3413=0.8413

(2)$P(12\le X\le 15)=P\left(\frac{12-10}{5}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{15-10}{5}\right)=P(0.4\le Z\le 1)$

=P(0≤Z≤1)-P(0≤Z≤0.4)=0.3413-0.1554=0.1859

(例 3):某校 500 名學生基礎統計成績為常態分配，平均 80 分，變異數 16 分，求成績在 68 分與 86 分間的機率為多少？

解：

$$P(68\le X\le 86)=P\left(\frac{68-80}{4}\le\frac{X-\mu}{\sigma}\le\frac{86-80}{4}\right)=P(-3\le Z\le 1.5)$$

=P(-3≤Z≤0)+P(0≤Z≤1.5)=P(0≤Z≤3)+P(0≤Z≤1.5)=0.4987+0.4332=0.9319

第六章之 EXCEL 應用

(實例 1):假設隨機變數 Z 為標準常態分配，求出下列機率值。
(1)P(0≤Z≤2)＝？
(2)P(-0.5≤Z≤1.5)＝？

解:

(1)

=NORMDIST(2,0,1,TRUE)-0.5

=0.47725

(2)

=NORMDIST(1.5,0,1,TRUE)-NORMDIST(-0.5,0,1,TRUE)

=0.624655

(實例 2):假設隨機變數 X 具有常態分配且μ＝10、σ^2＝25，則 (1)P(X＜15)＝？ (2)P(12≤X≤15)＝？

解:

$\boxed{\text{=NORMDIST(15,10,5,TRUE)}}$

=0.841345

$\boxed{\text{=NORMDIST(15,10,5,TRUE)-NORMDIST(12,10,5,TRUE)}}$

=0.185923

綜合練習 6

1.假設隨機變數 Z 為標準常態分配，求出下列機率值。

(1)P(Z ≤-2)＝？

(2)P(-1.5≤ Z ≤-0.5)＝？

(3)P(Z ≥－1.5)＝？

(4)P(-1.25≤ Z ≤0)＝？

(5)P(Z ≤1.5)＝？

2.假設隨機變數 X 具有常態分配且μ＝2、σ^2＝25，求出下列機率值

(1)P(X＜10)＝？

(2)P(X≥6)＝？

(3)P(4＜X＜7)＝？