

Chap 5. 應用幾何

5.7圓錐曲線

各種曲線產生的由來說明如下：

- 圓：切割平面與圓錐中心軸垂直。
- 橢圓：切割平面與圓錐中心軸呈傾斜，且角度大於中心軸與元線之夾角。
- 拋物線：切割平面與圓錐中心軸夾角等於中心軸與元線之夾角。
- 雙曲線：切割平面與圓錐中心軸平行。
- 等腰三角形：切割平面與圓錐中心軸平行且通過圓錐頂點。

5.7 圓錐曲線

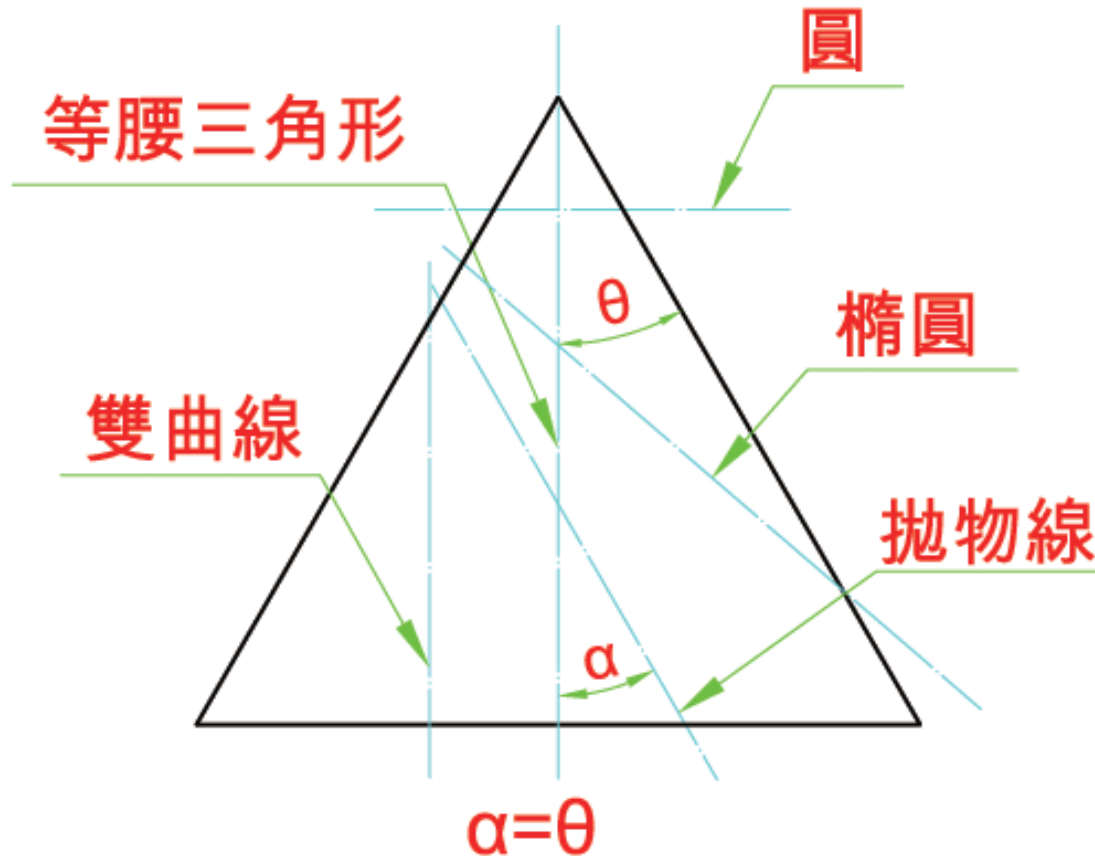
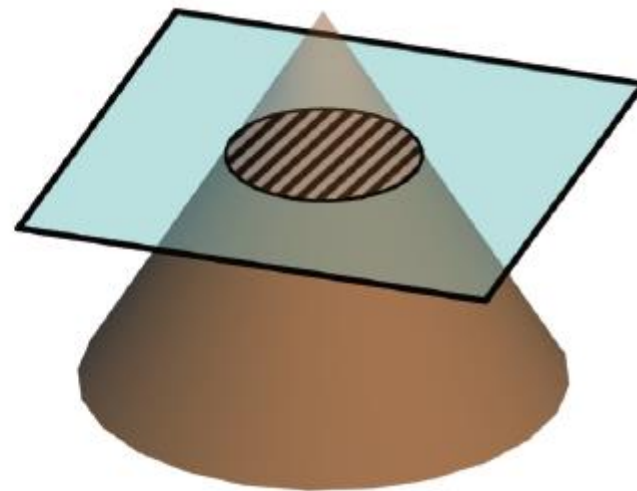
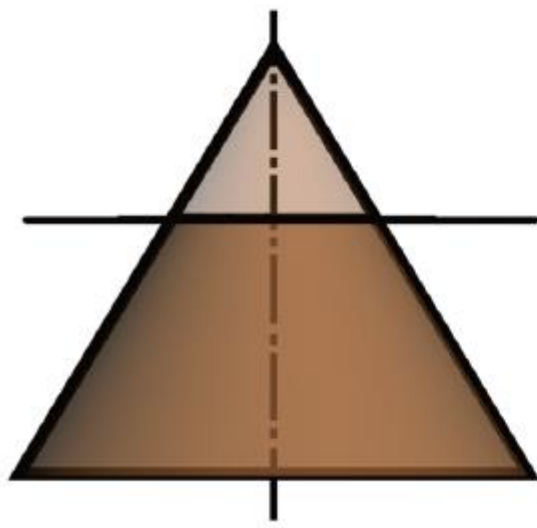
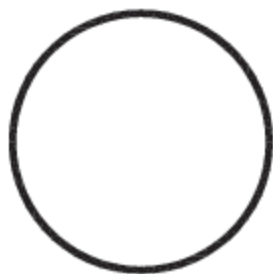


圖5.44 剖面位置與圓錐曲線之關係

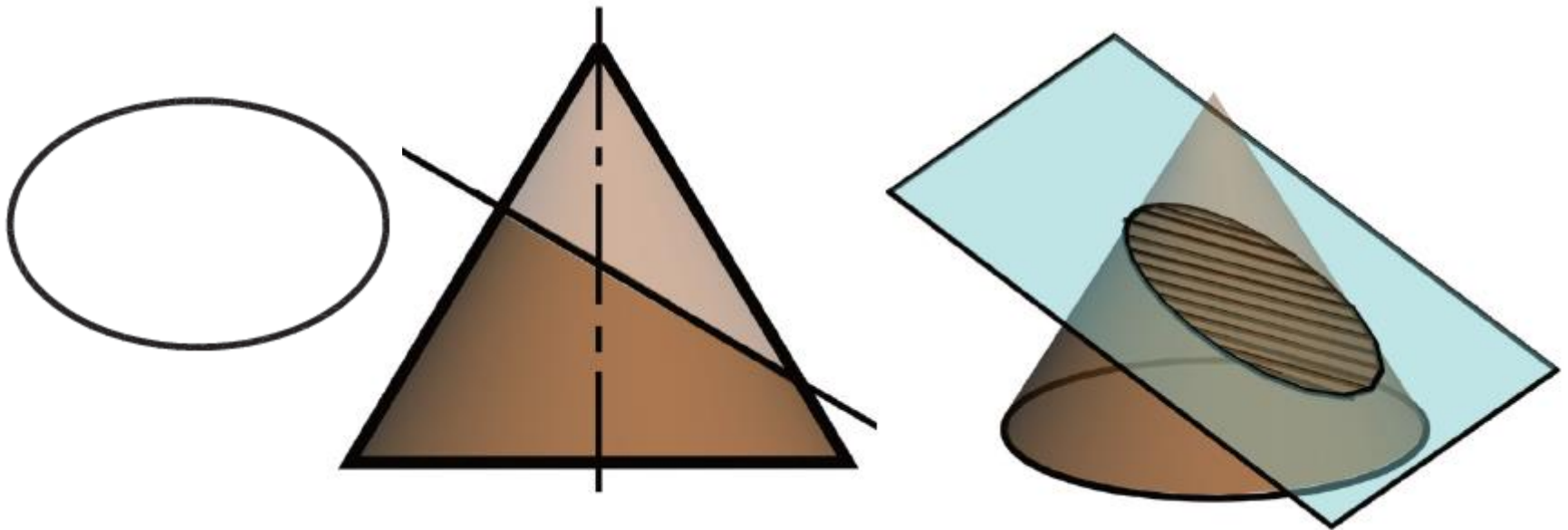
5.7圓錐曲線

■ 圓



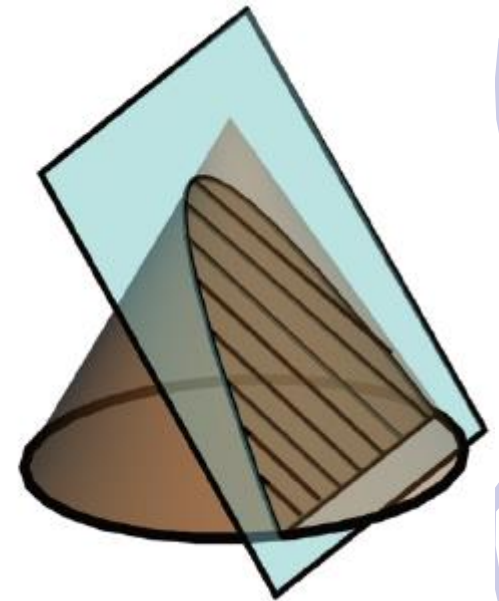
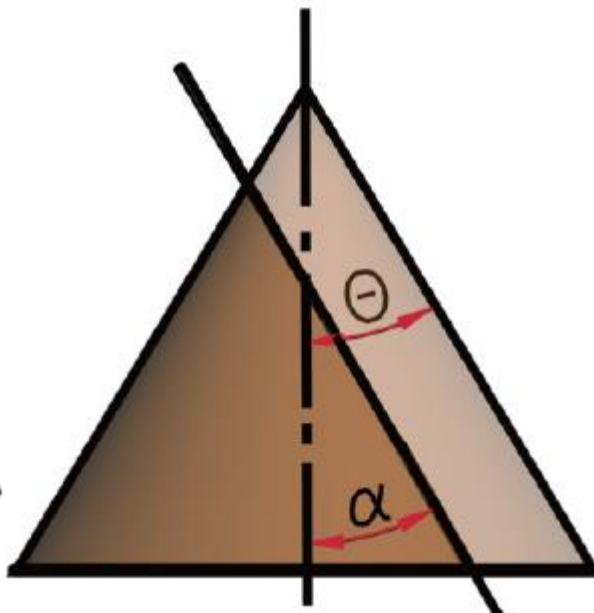
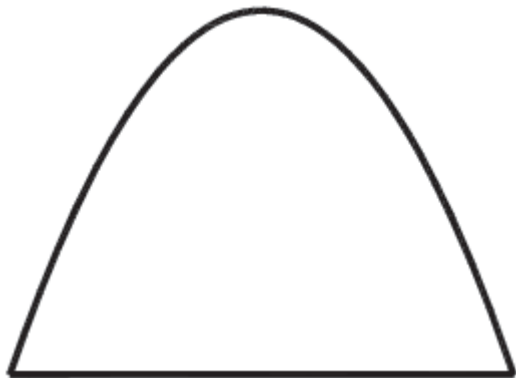
5.7 圓錐曲線

■ 橢圓



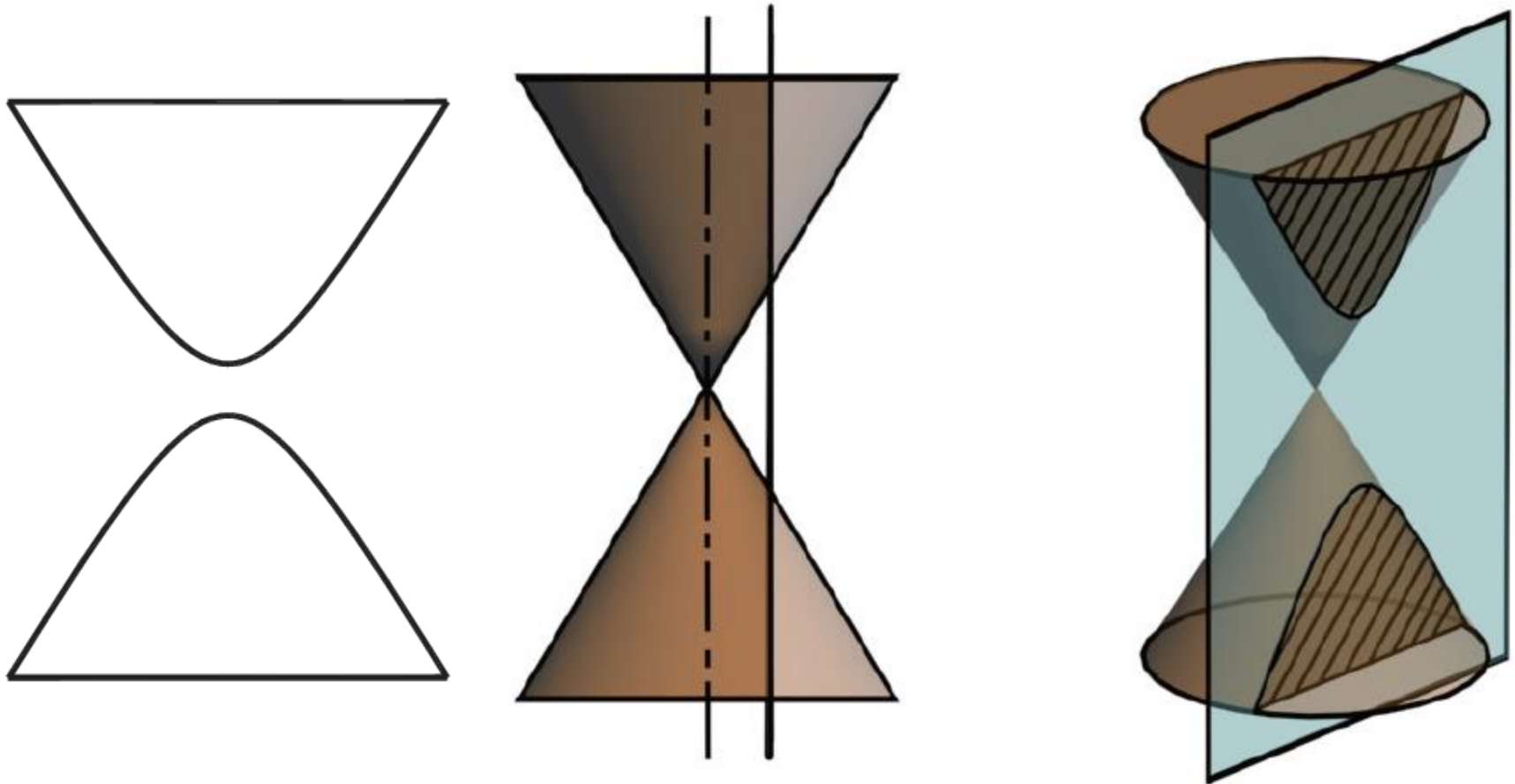
5.7 圓錐曲線

■ 拋物線



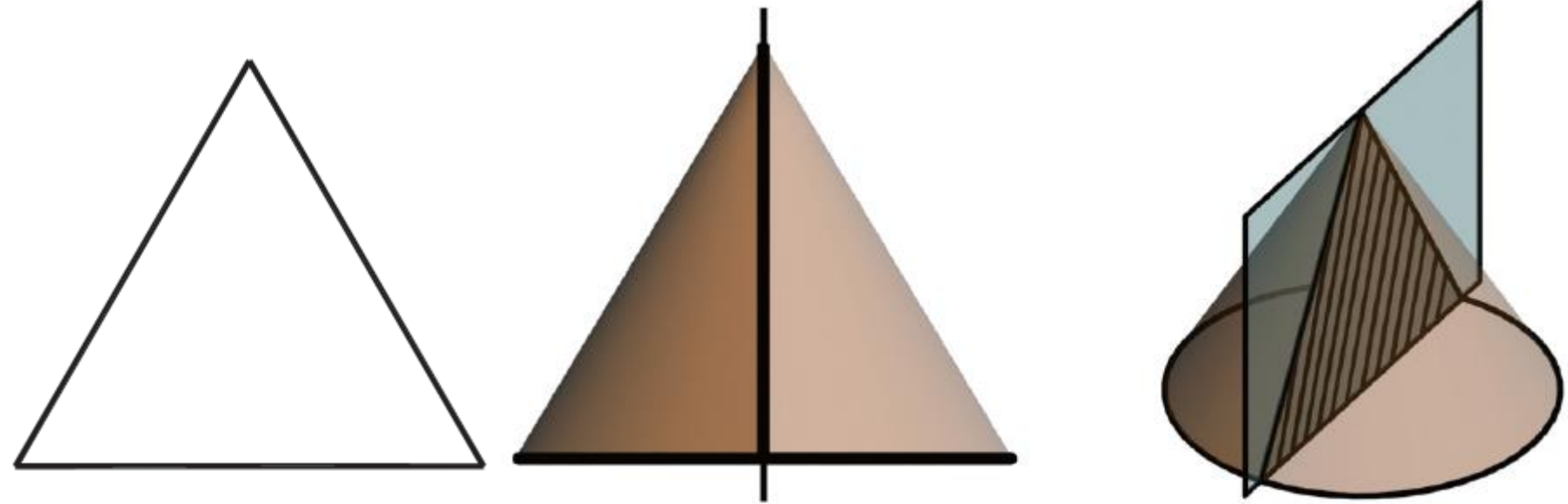
5.7 圓錐曲線

■ 雙曲線



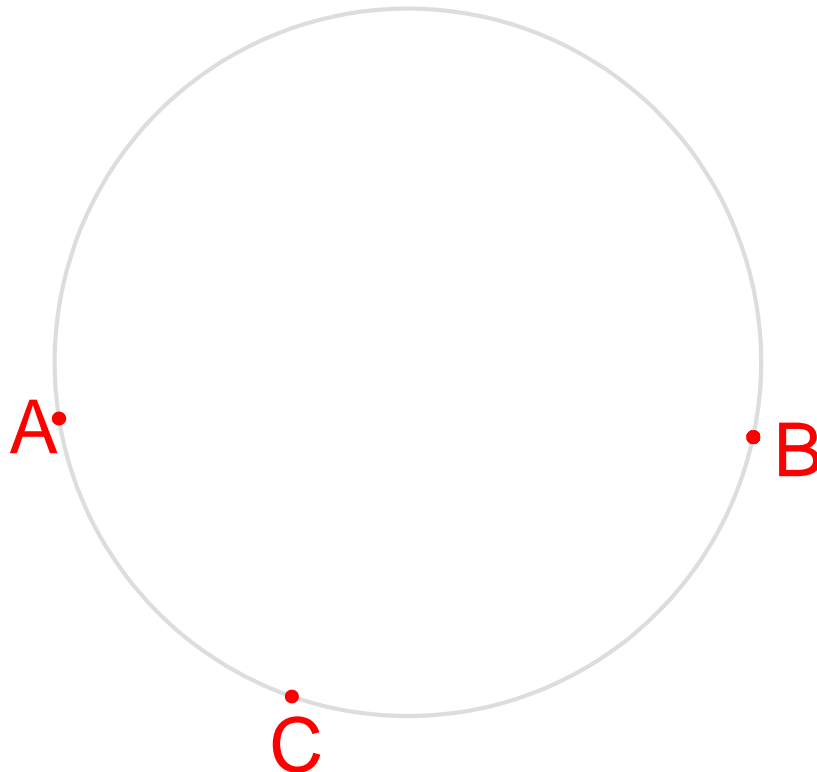
5.7圓錐曲線

■ 等腰三角形



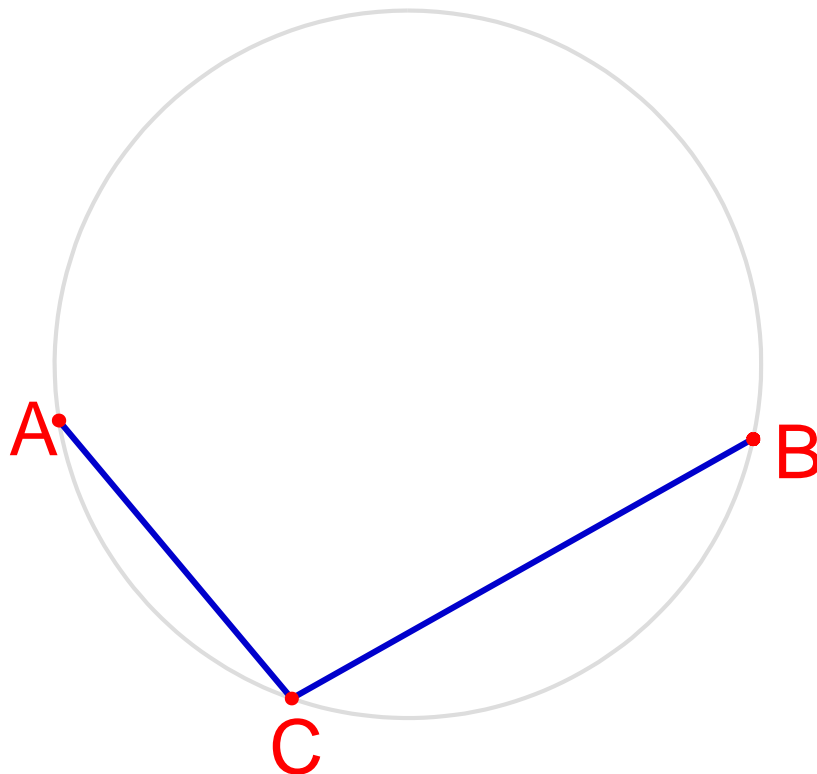
作一圓通過不在同一直線上之三點-1/5

- 已知：A、B、C三點。
- 求作：通過A、B、C三點的圓。



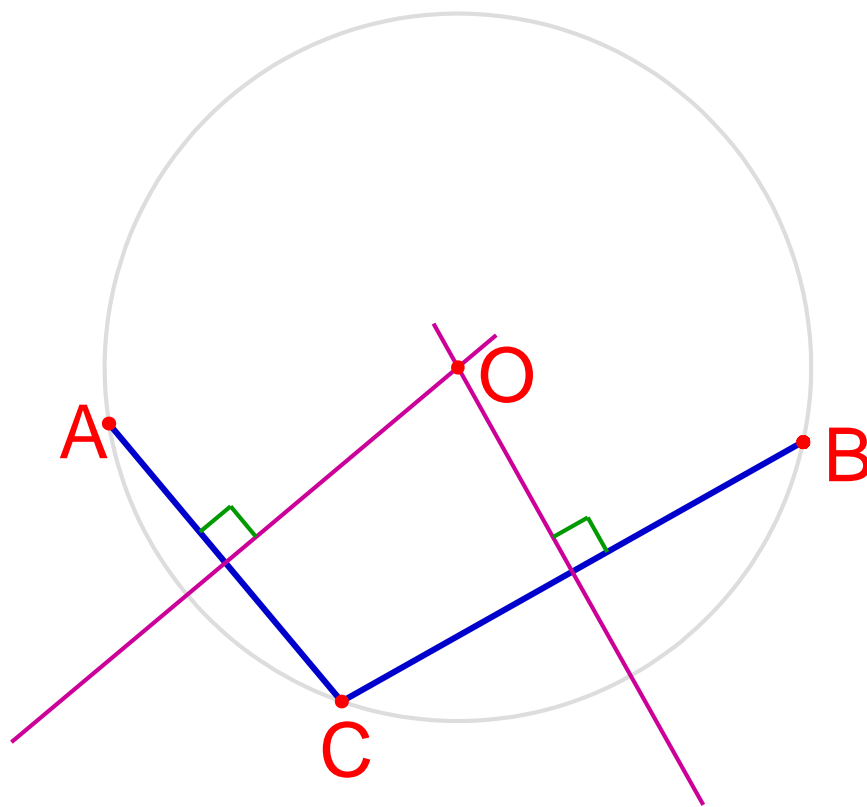
作一圓通過不在同一直線上之三點-2/5

- 連接AB與BC線段。



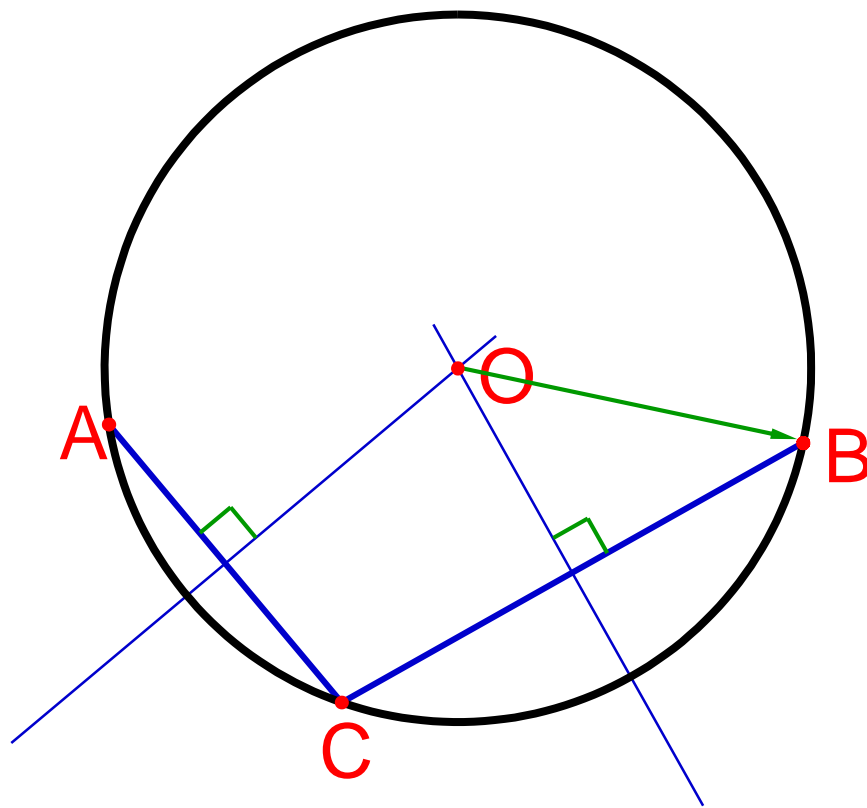
作一圓通過不在同一直線上之三點-3/5

- 分別作AB、BC線段之垂直平分線，得兩垂直平分線之交點O，O即為所求圓心。



作一圓通過不在同一直線上之三點-4/5

- 以O為圓心OA（或OB，或OC）畫圓即為所求。



作一圓通過不在同一直線上之三點-5/5

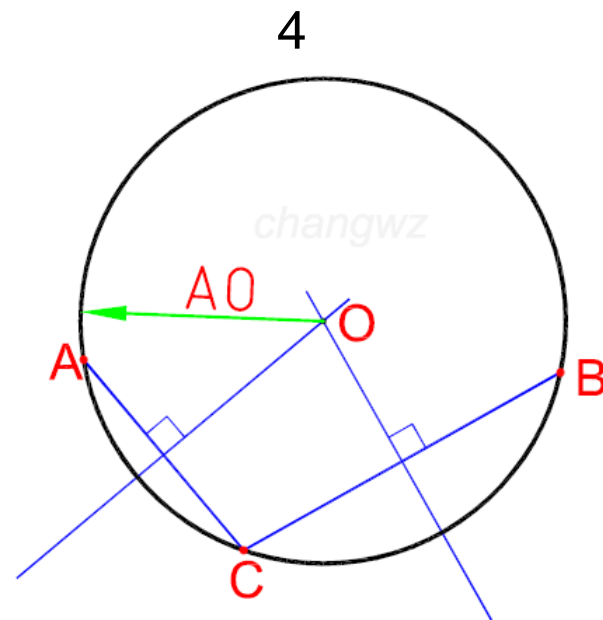
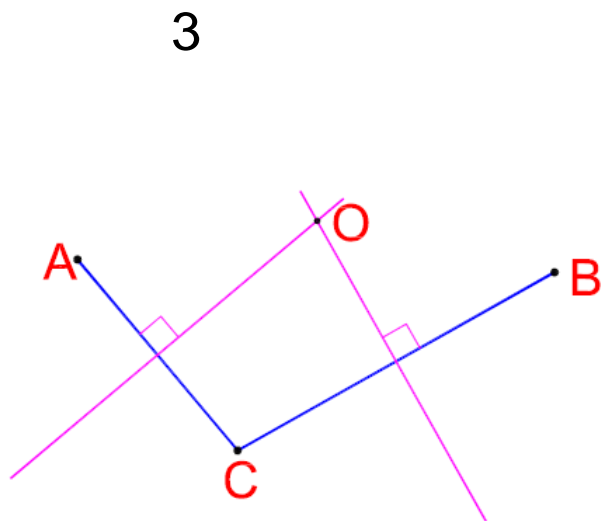
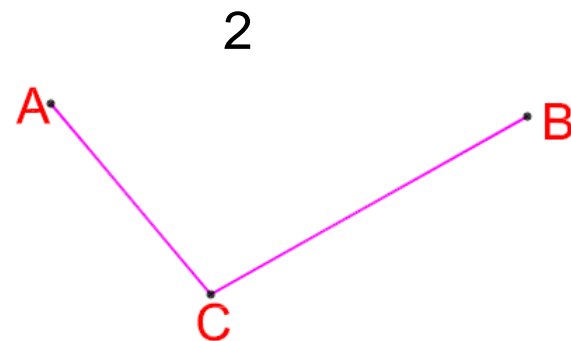
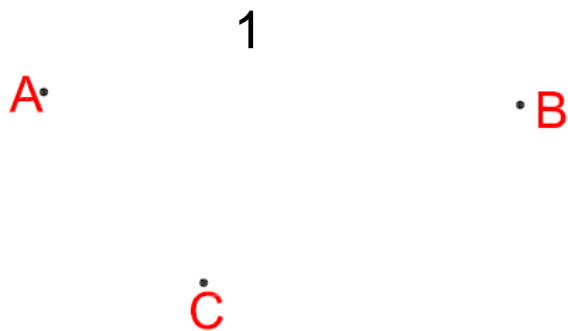


圖5.47 橢圓原理

- 橢圓任一點到兩焦點之距離和為定值

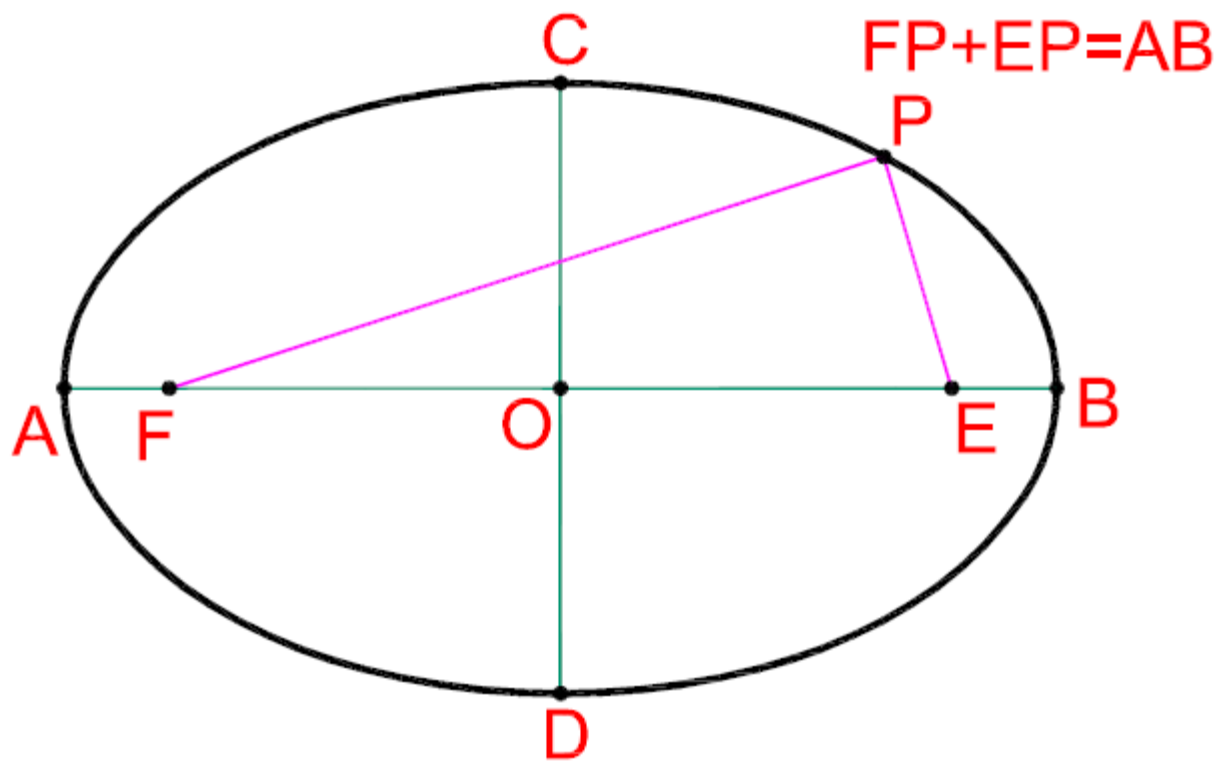


圖5.47 橢圓原理

- 橢圓任一點到兩焦點之距離和為定值

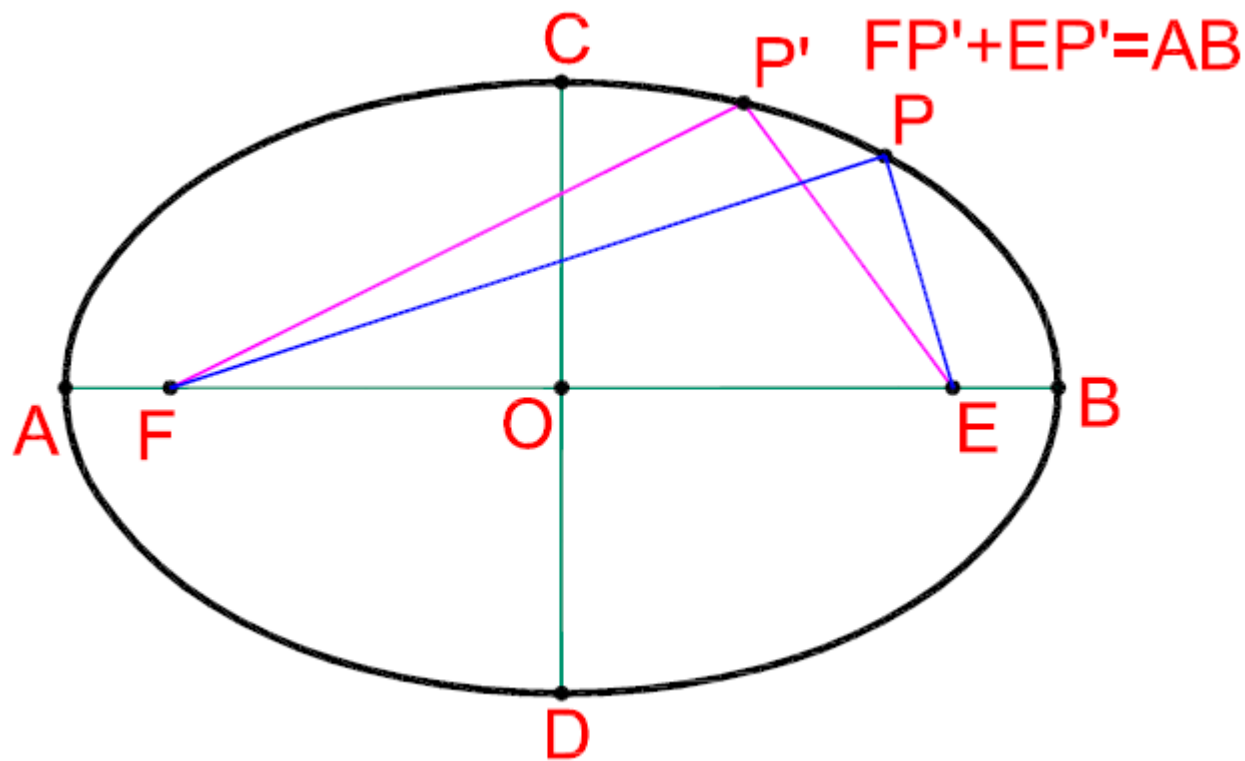


圖5.47 橢圓原理

- 以短軸之一端點為圓心，以二分之一長軸為半徑畫弧，與長軸之焦點即為橢圓之焦點。

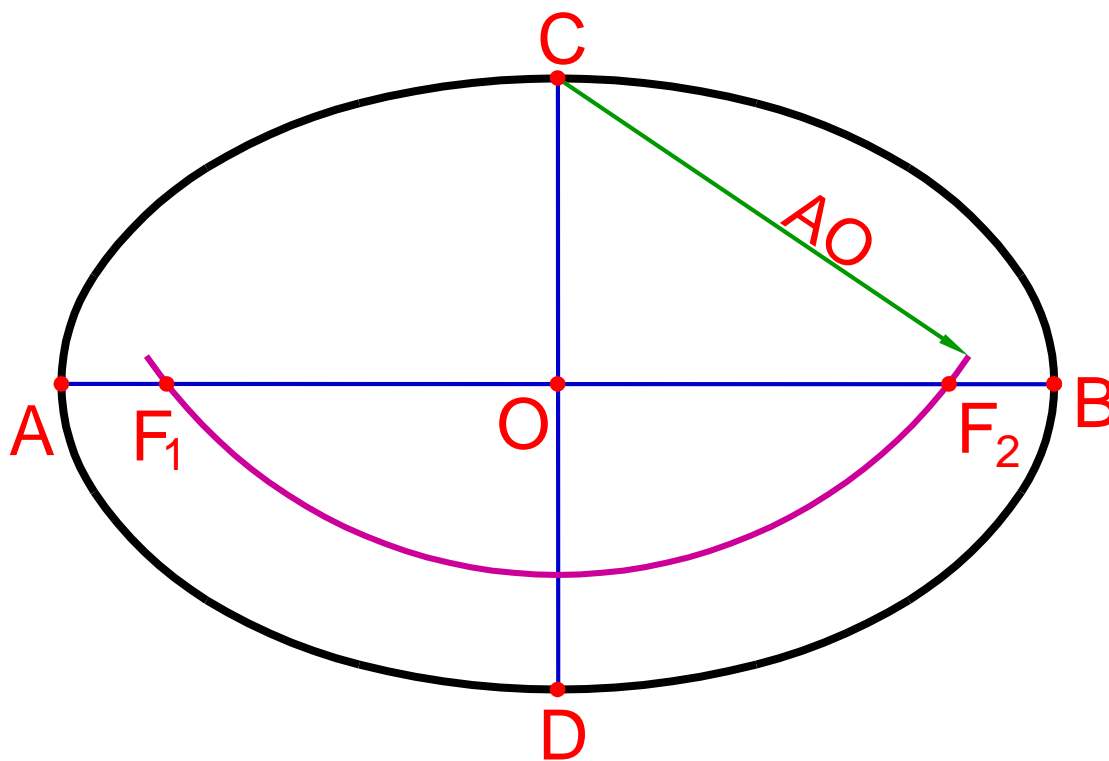
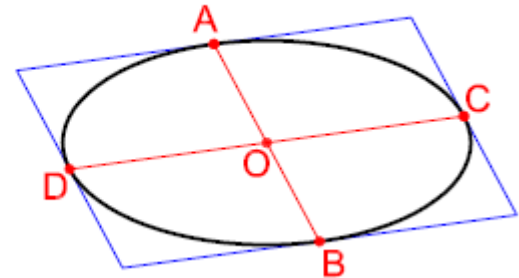
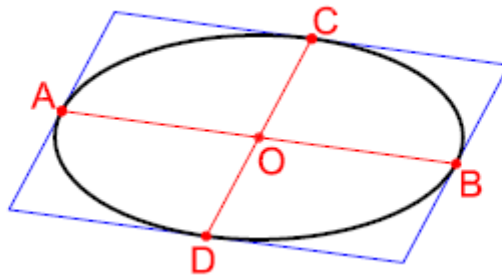
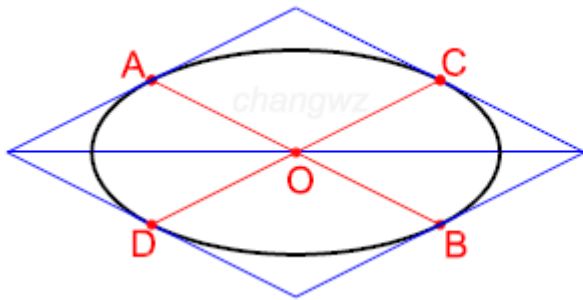


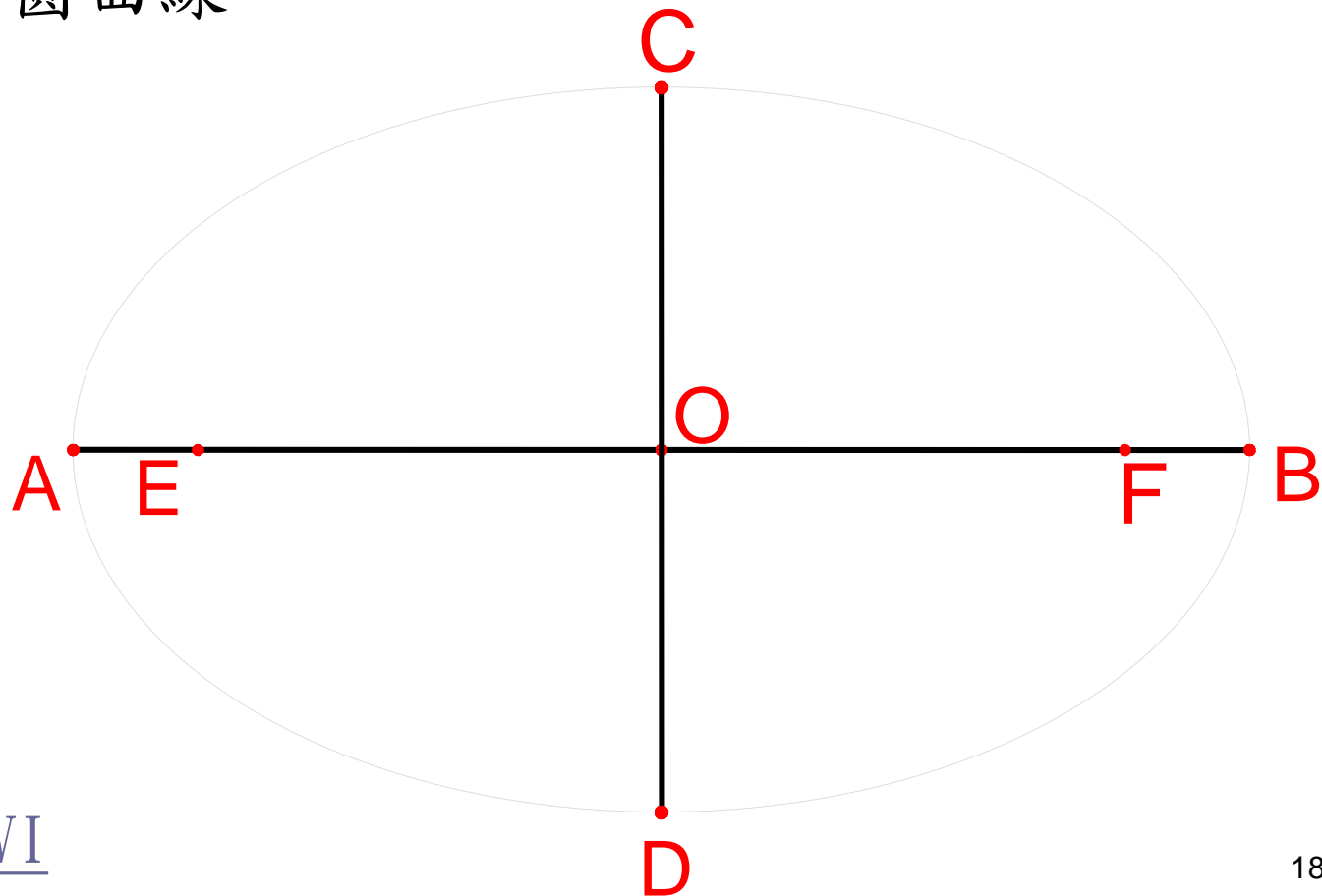
圖5.48 橢圓之共軛軸

- 橢圓之兩直徑若具有下列性質則稱此為一對共軛軸：一直徑平行於過另一直徑端點之橢圓切線，如圖AB與CD為一對共軛軸。



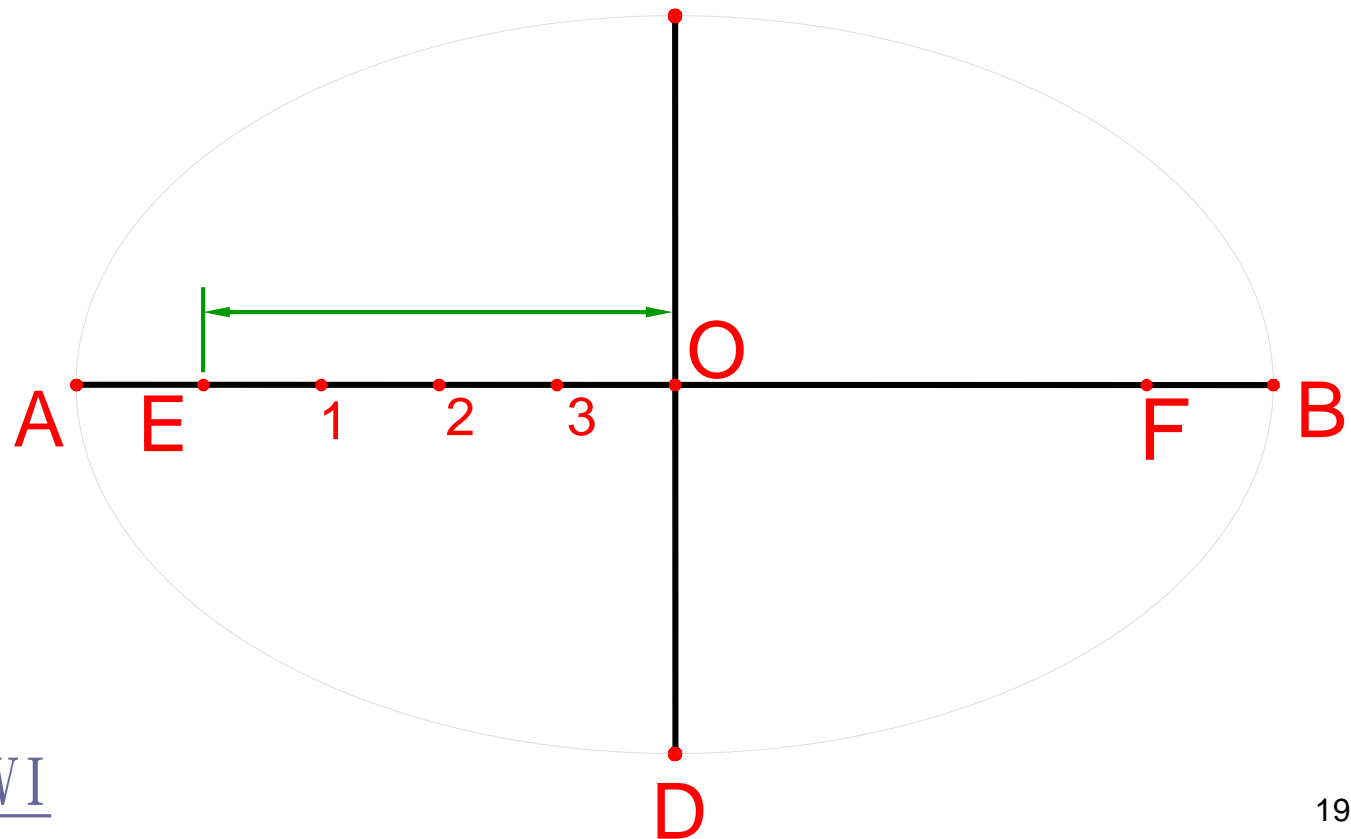
焦點法畫橢圓曲線-1/6

- 已知長軸AB與短軸CD，其交點O為橢圓之圓心，E、F為橢圓之兩焦點。
- 求作：橢圓曲線。



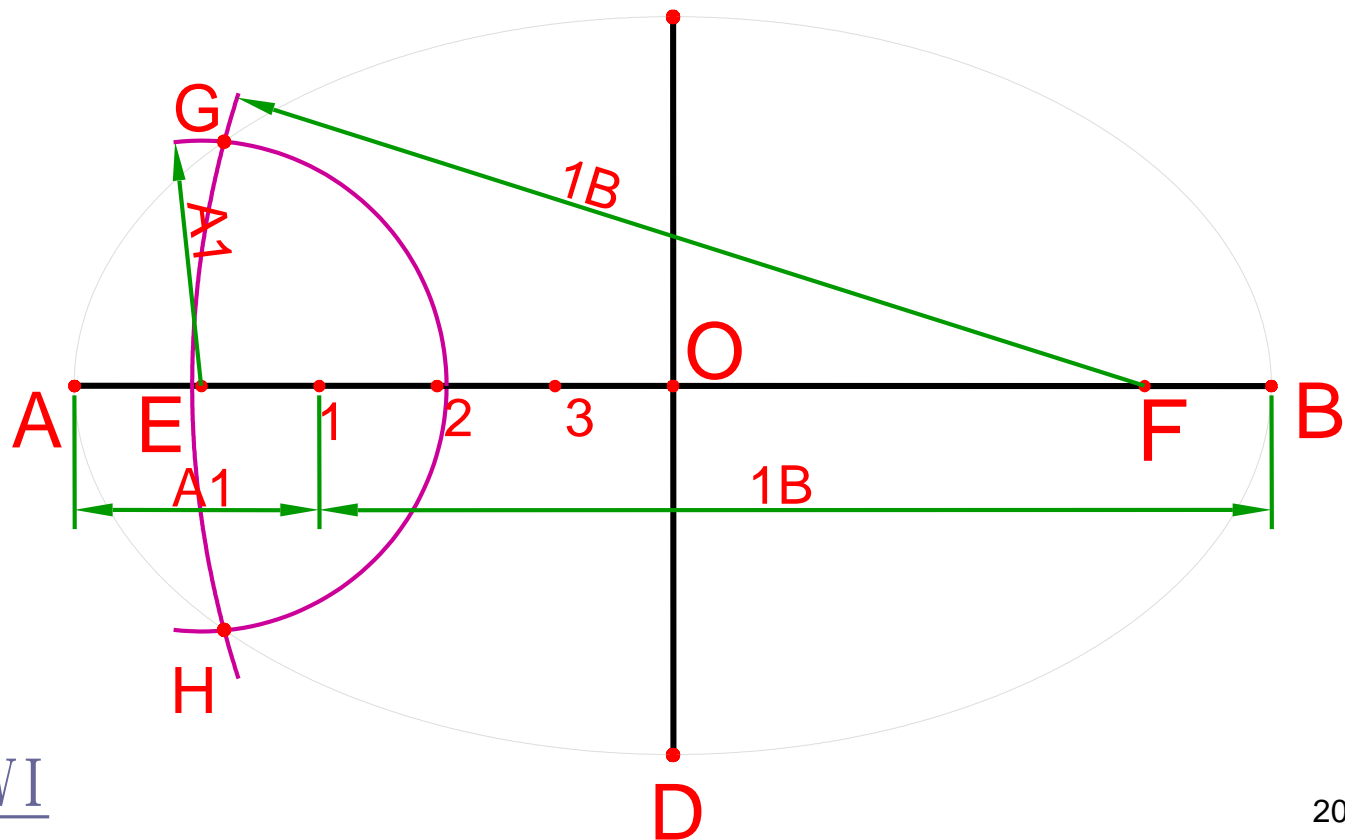
焦點法畫橢圓曲線-2/6

- 過OE兩點間取任意數點：1、2、3各點。



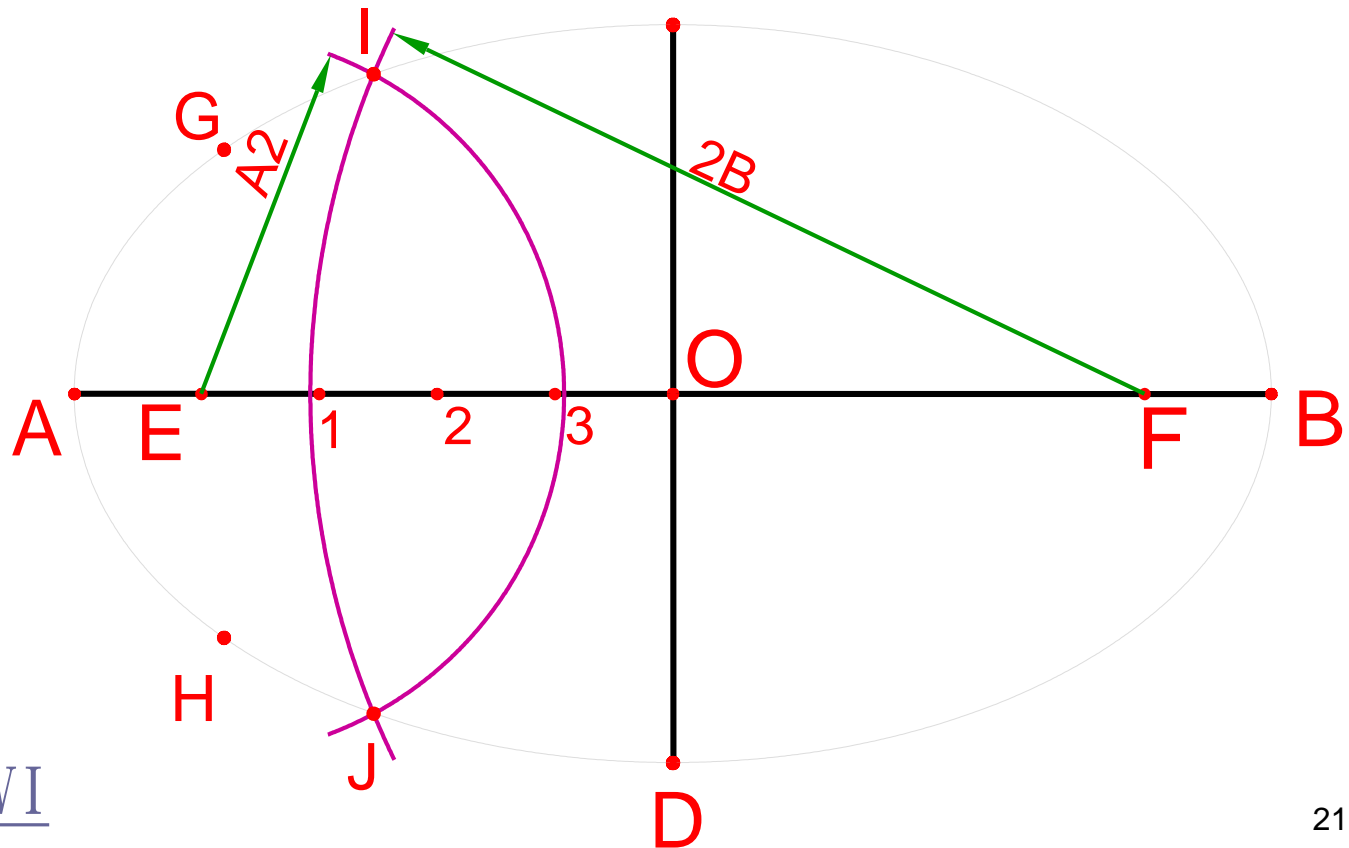
焦點法畫橢圓曲線-3/6

- 以E為圓心A1長為半徑畫弧，與以F為圓心1B長為半徑畫弧得交點G、H，即為橢圓上的點。



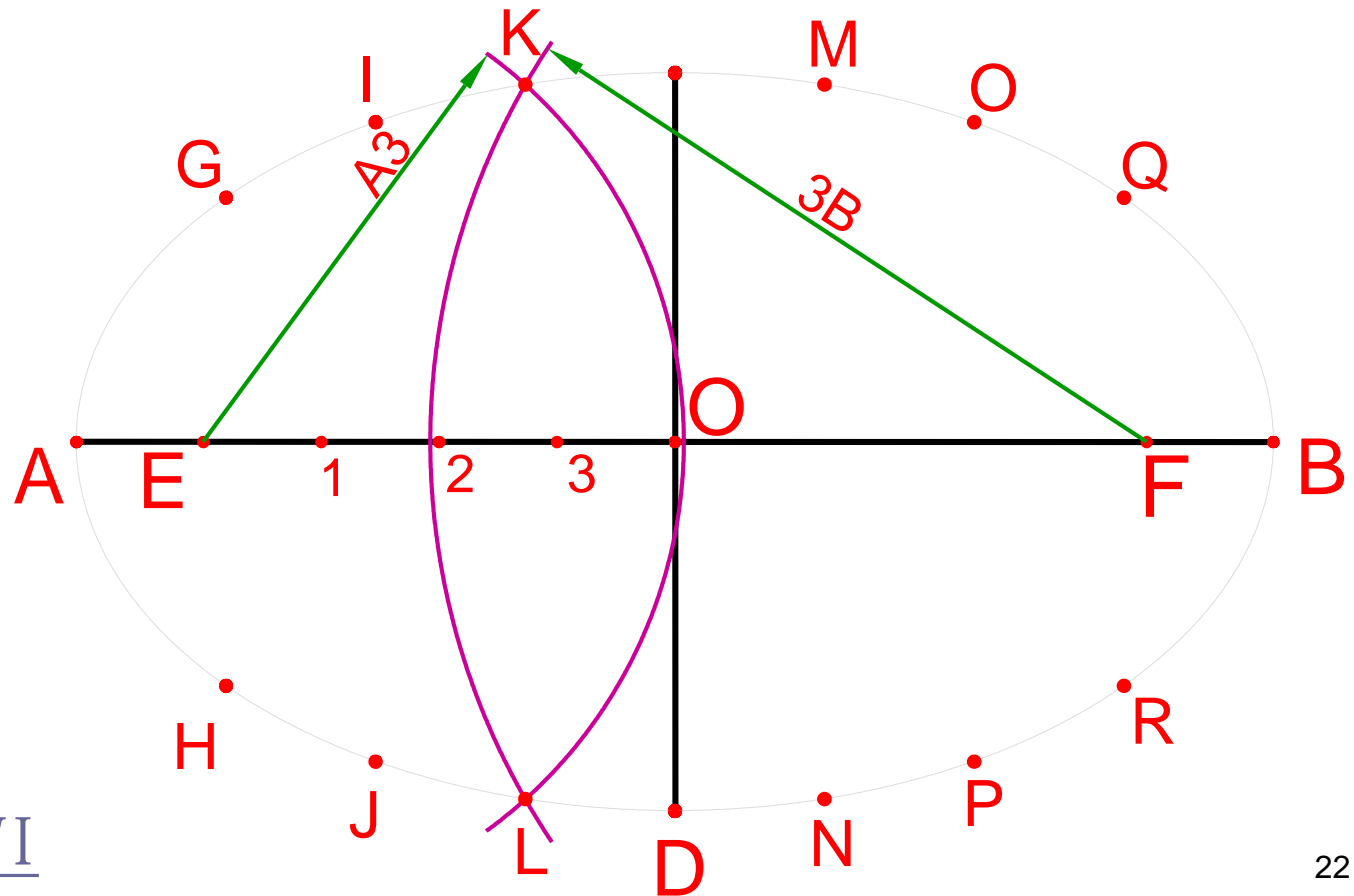
焦點法畫橢圓曲線-4/6

- 以E為圓心A2長為半徑畫弧，與以F為圓心2B長為半徑畫弧得交點I、J，即為橢圓上的點。



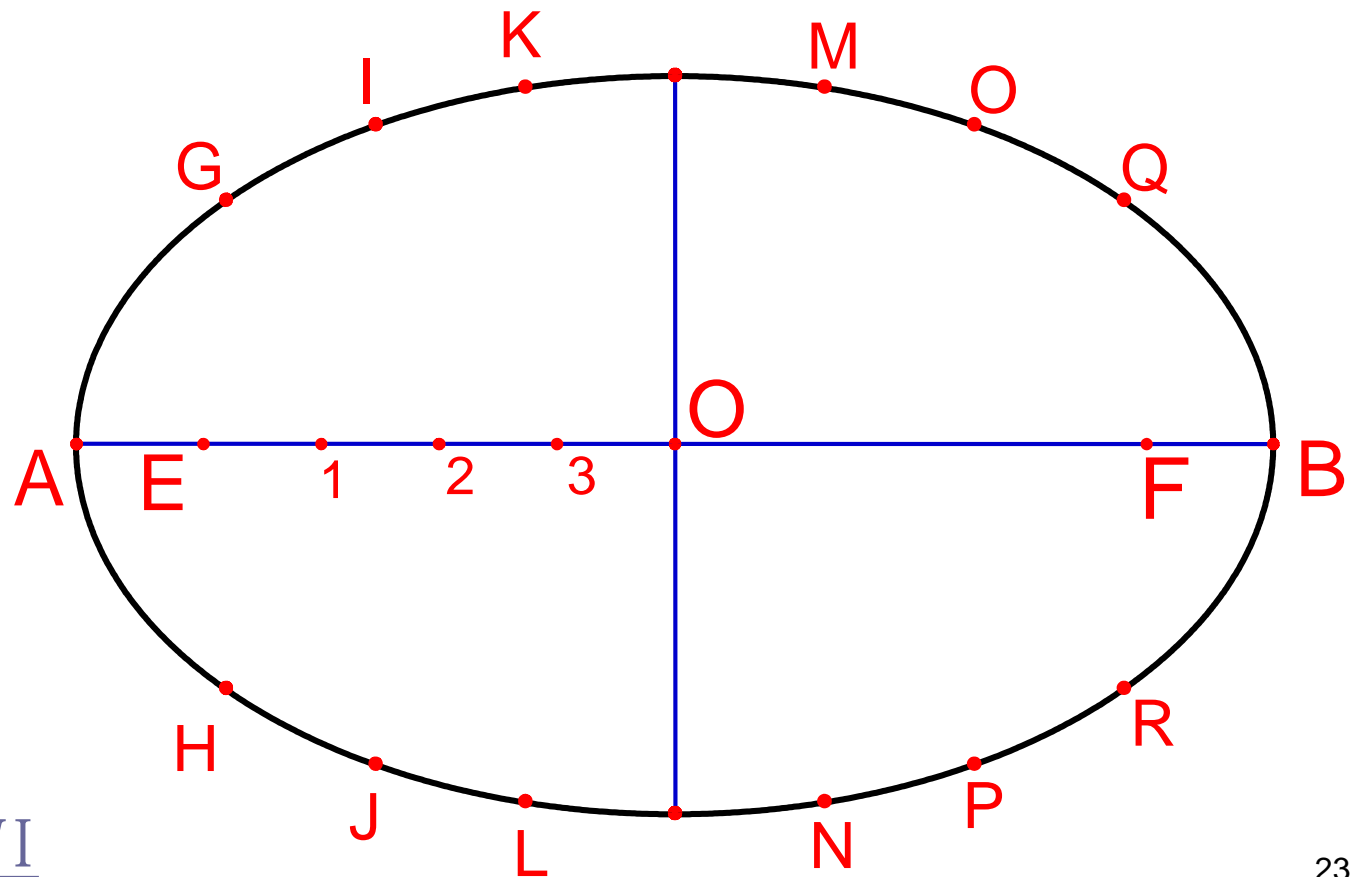
焦點法畫橢圓曲線-5/6

- 同理可繪出K、L...R其他各點。



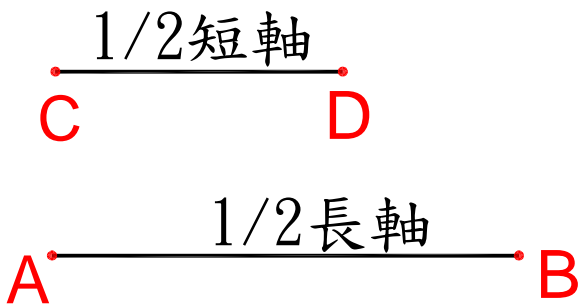
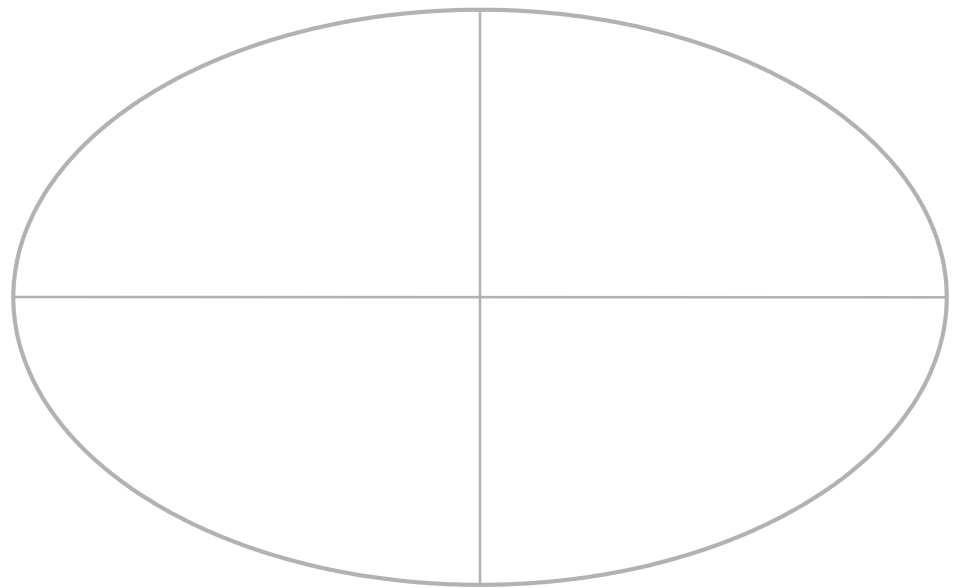
焦點法畫橢圓曲線-6/6

- 最後以曲線板連接各點即為所求。



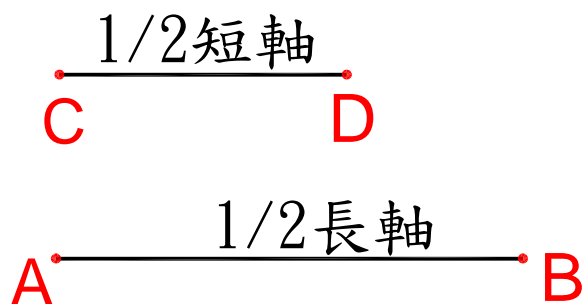
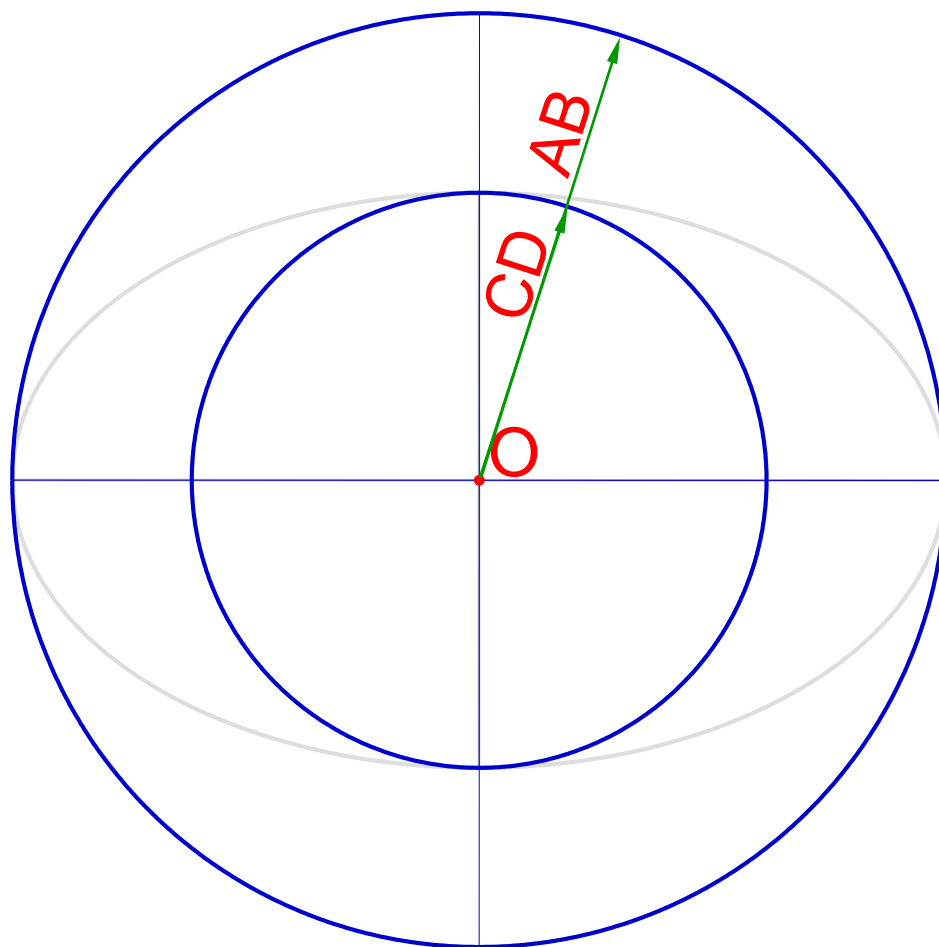
同心圓法畫橢圓-1/8

- 已知：橢圓之長軸與短軸。
- 求作：橢圓曲線。



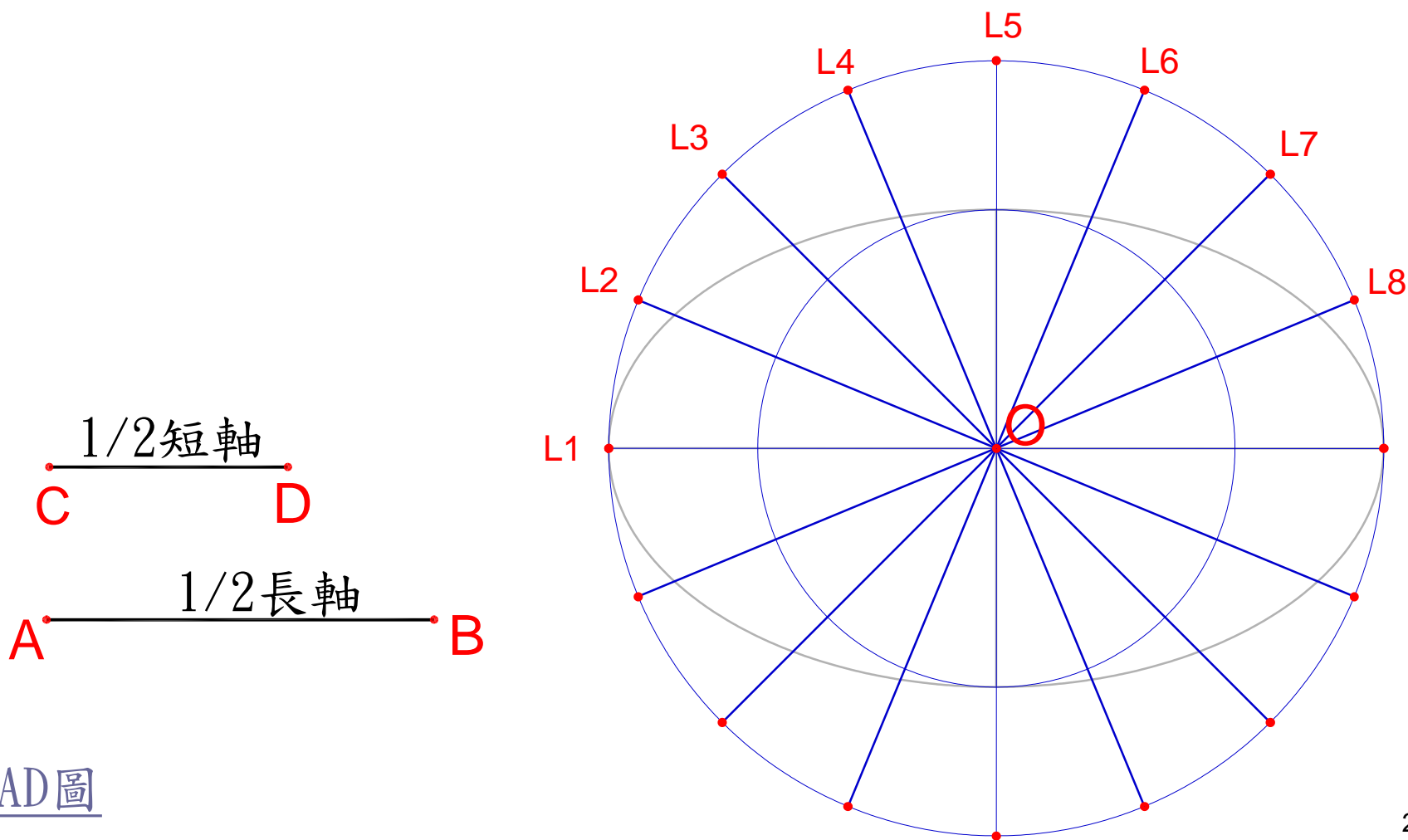
同心圓法畫橢圓-2/8

- O為橢圓之圓心，以O點為圓心，分別以AB與CD為半徑畫圓。



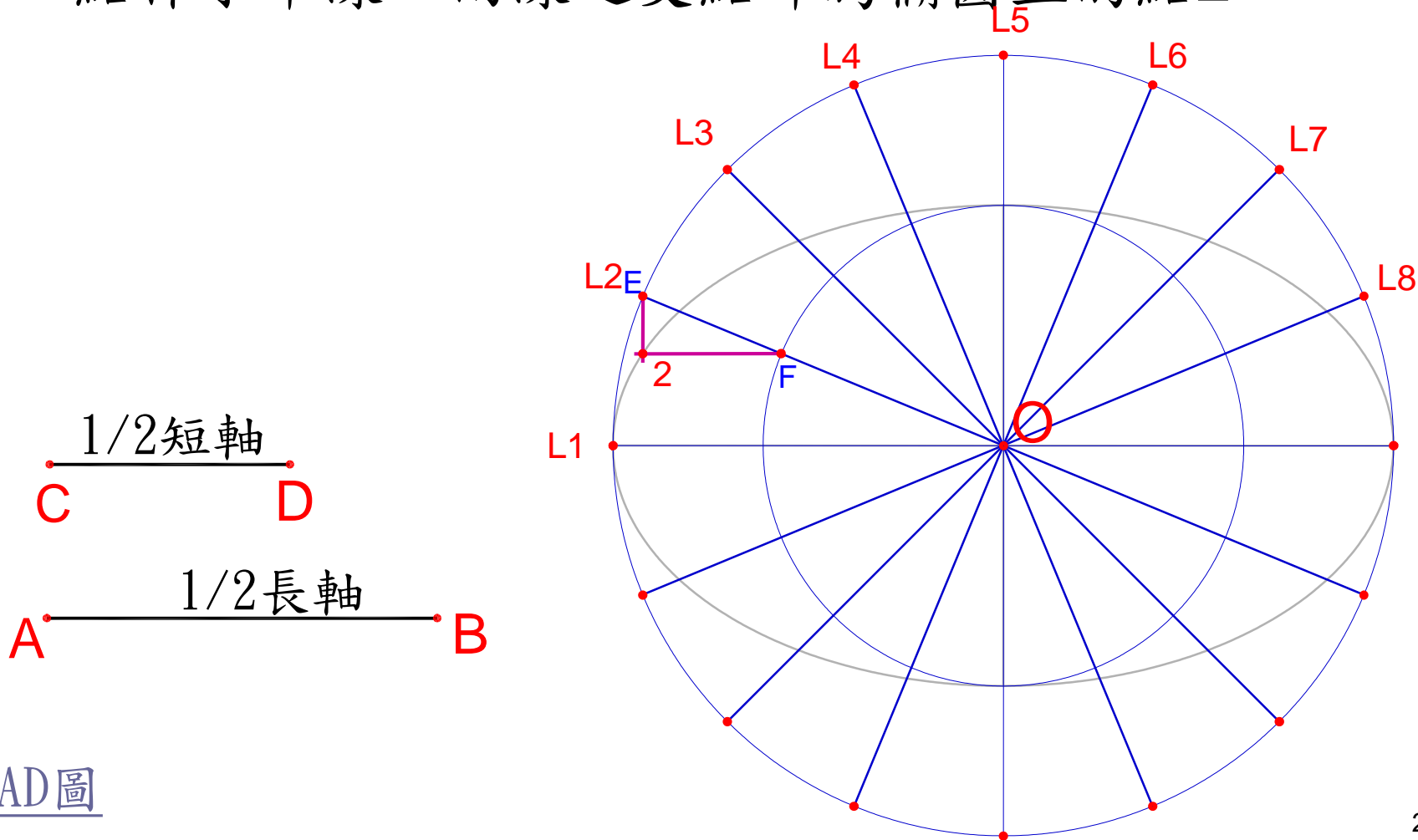
同心圓法畫橢圓-3/8

- 將兩同心圓作相同之等分（例如皆16等分）。



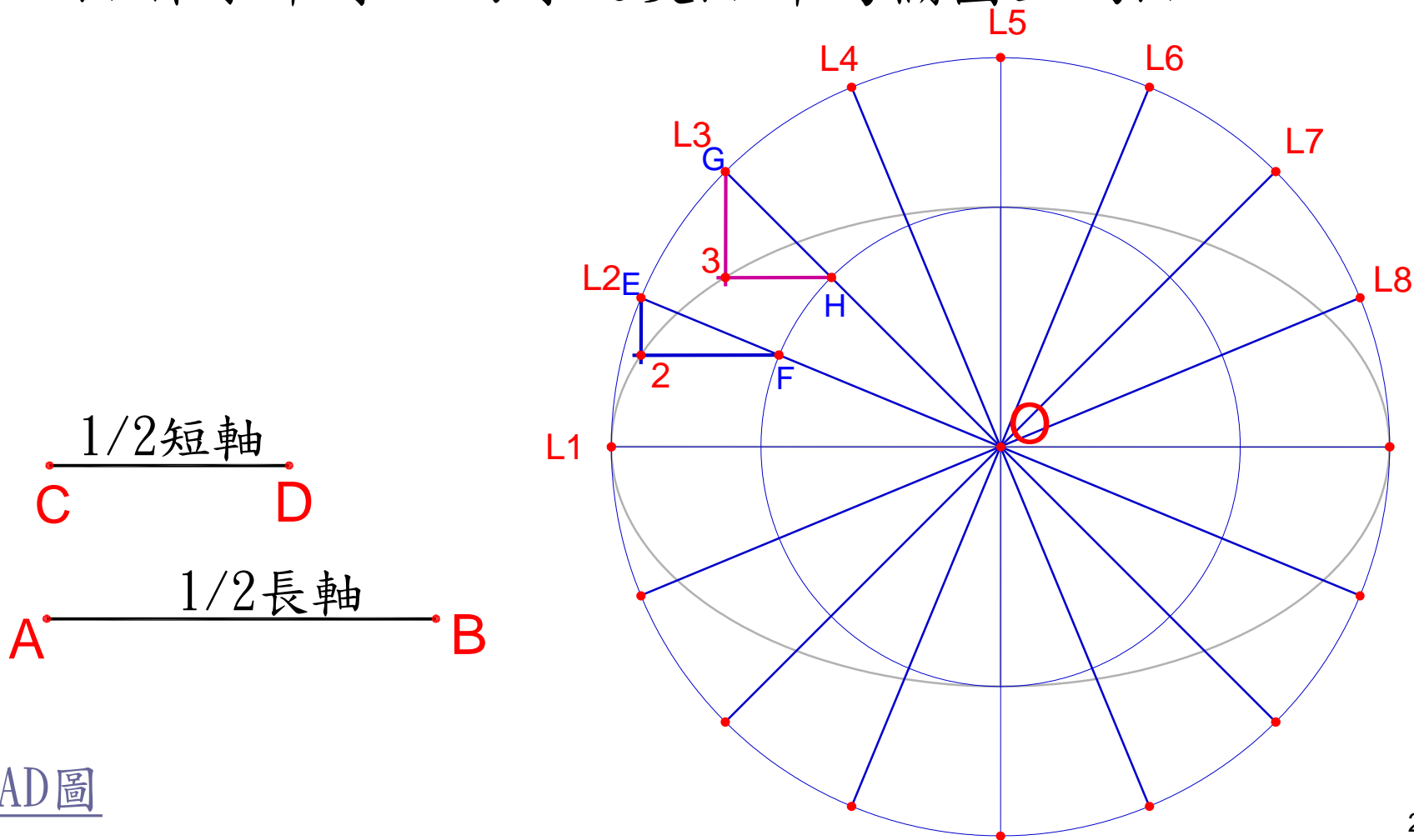
同心圓法畫橢圓-4/8

- 過等分線L2與大圓之交點作垂直線，與小圓之交點作水平線，兩線之交點即為橢圓上的點2。



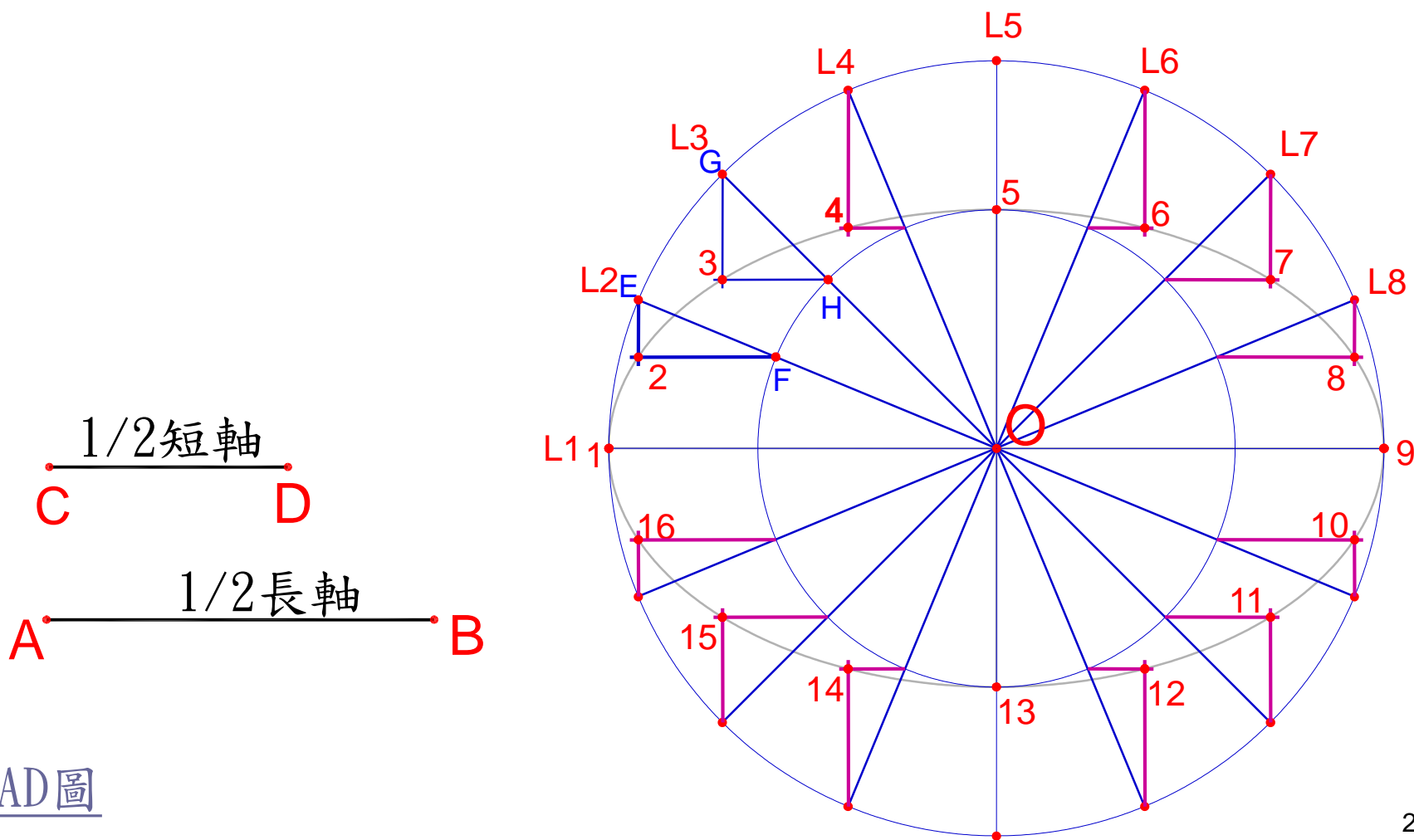
同心圓法畫橢圓-5/8

- 過等分線L3與大圓之交點作垂直線，與小圓之交點作水平線，兩線之交點即為橢圓上的點3。



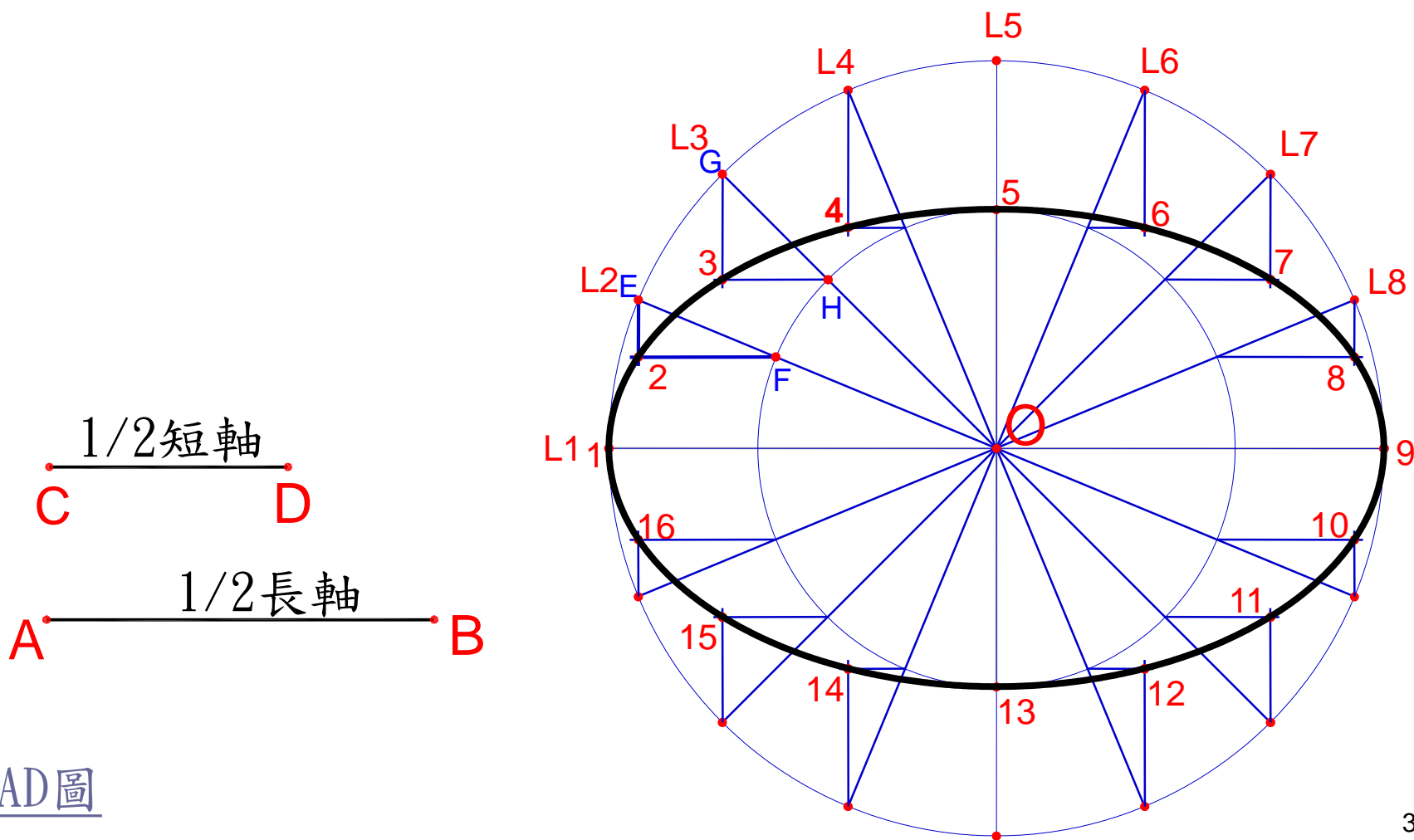
同心圓法畫橢圓-6/8

- 同法求其他等分線之交點。



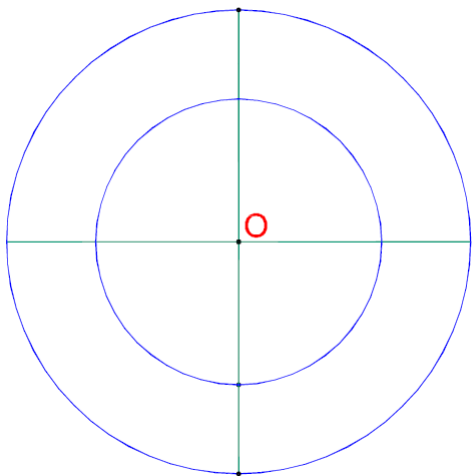
同心圓法畫橢圓-7/8

- 同法求其他等分線之交點。

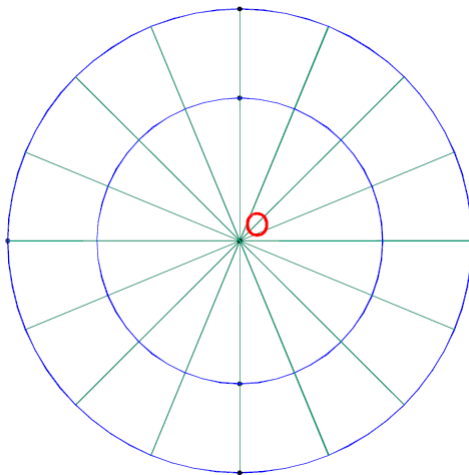


同心圓法畫橢圓-8/8

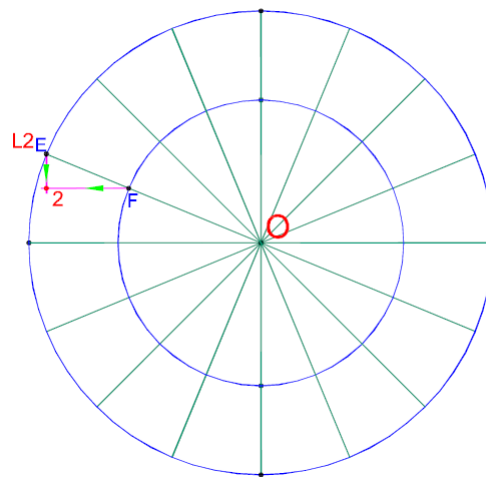
1



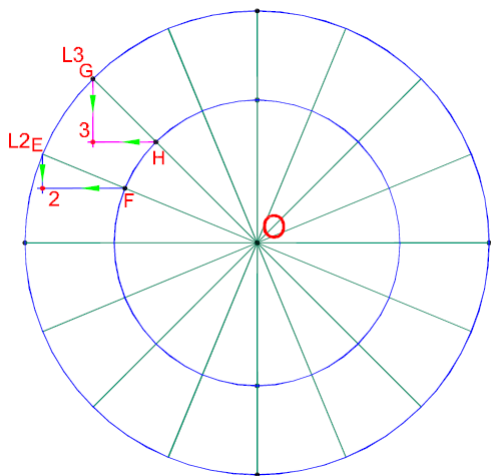
2



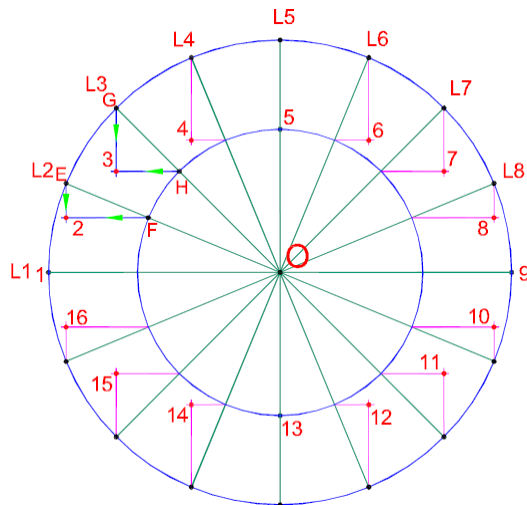
3



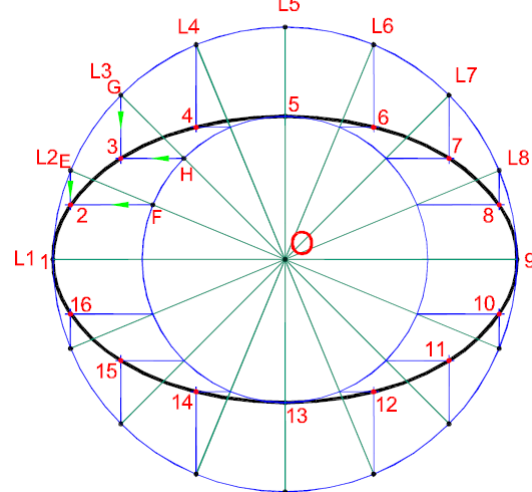
4



5

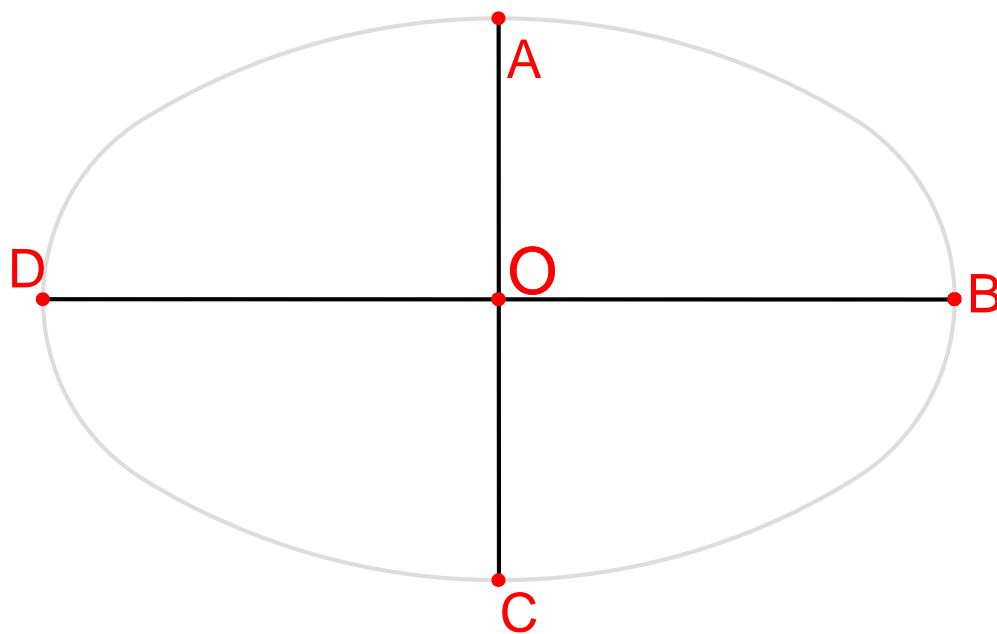


6



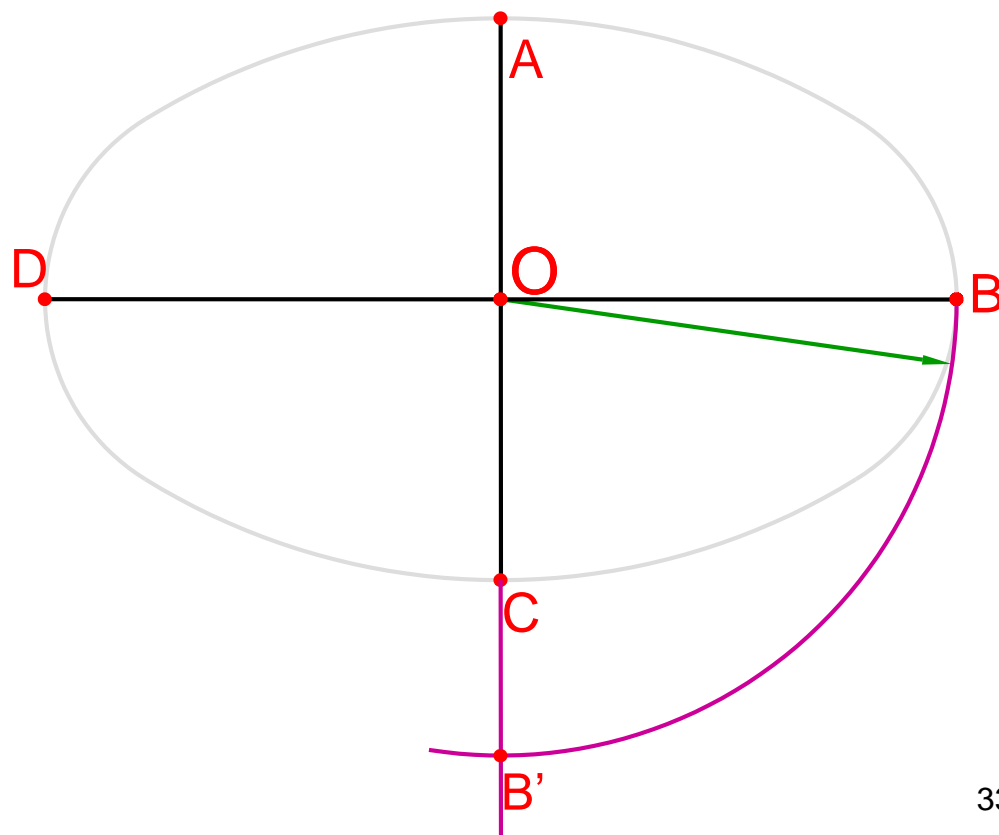
四心法畫橢圓-1/10

- 已知長軸BD與短軸AC，兩者交點O為橢圓之圓心。



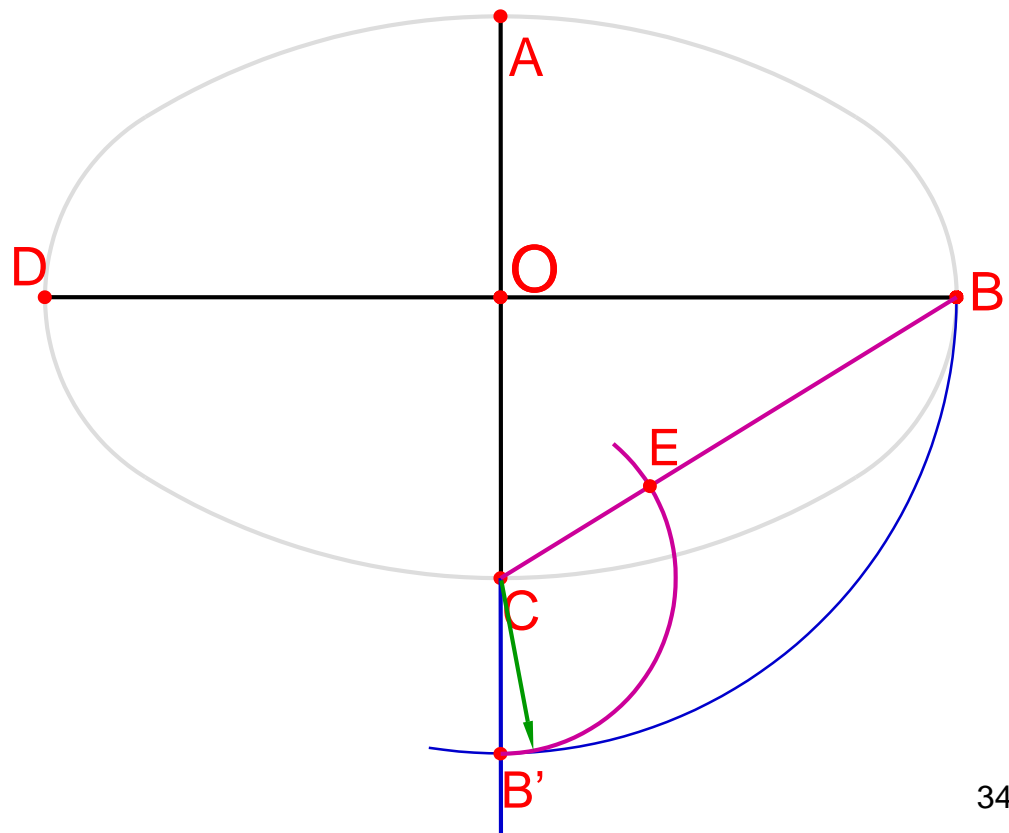
四心法畫橢圓-2/10

- 以O點為圓心OB為半徑畫弧，交AC之延長線於B'。



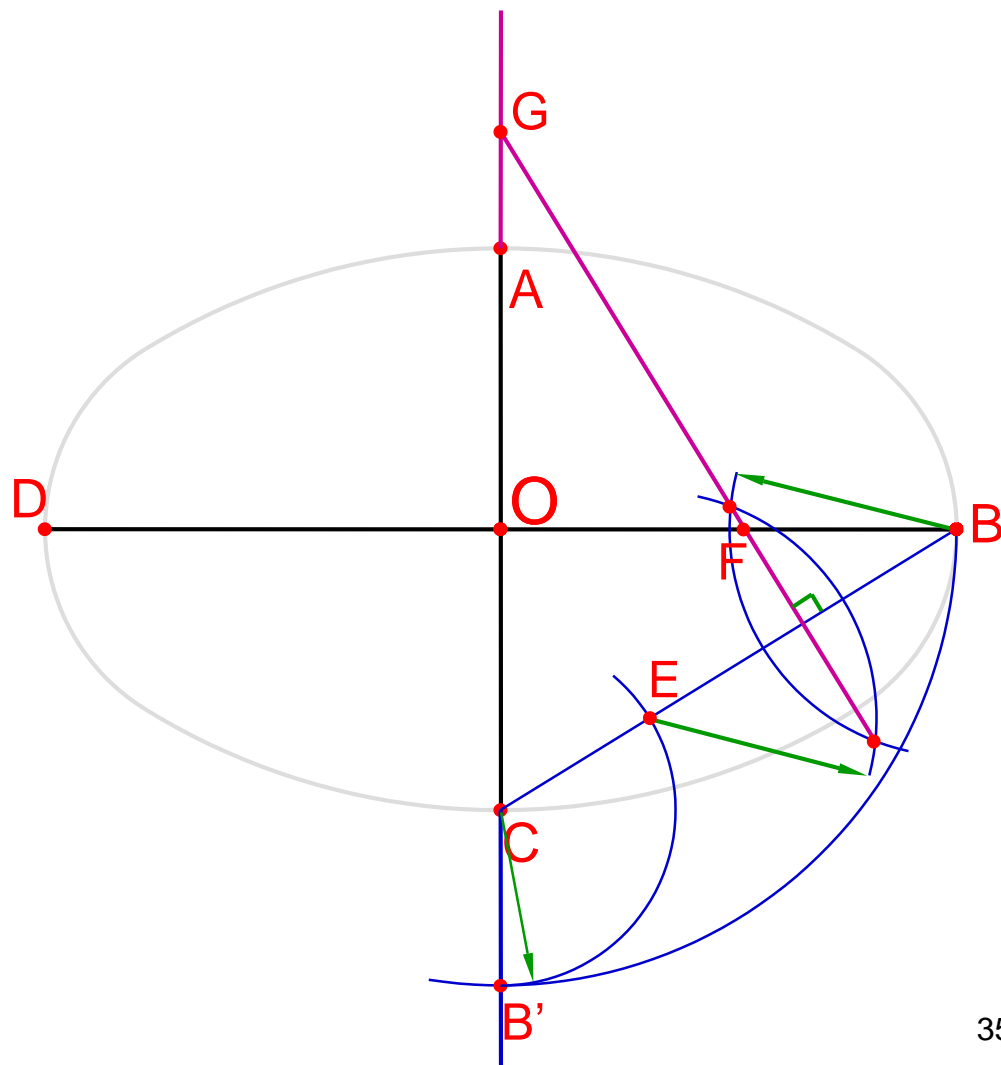
四心法畫橢圓-3/10

- 連接B、C。
- 以C點為圓心CB'為半徑畫弧，交BC於E。



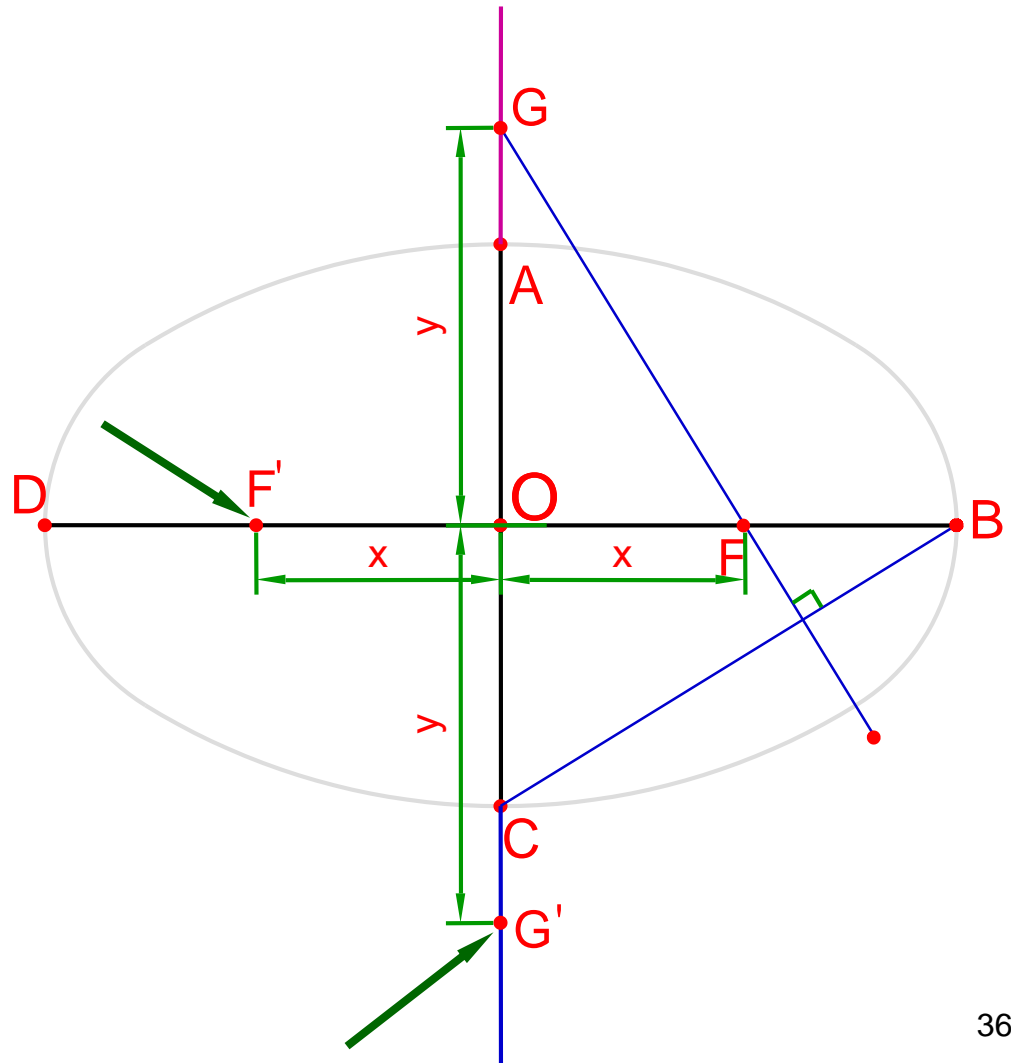
四心法畫橢圓-4/10

- 作BE之垂直平分線交BD於F，交CA延長線於G。



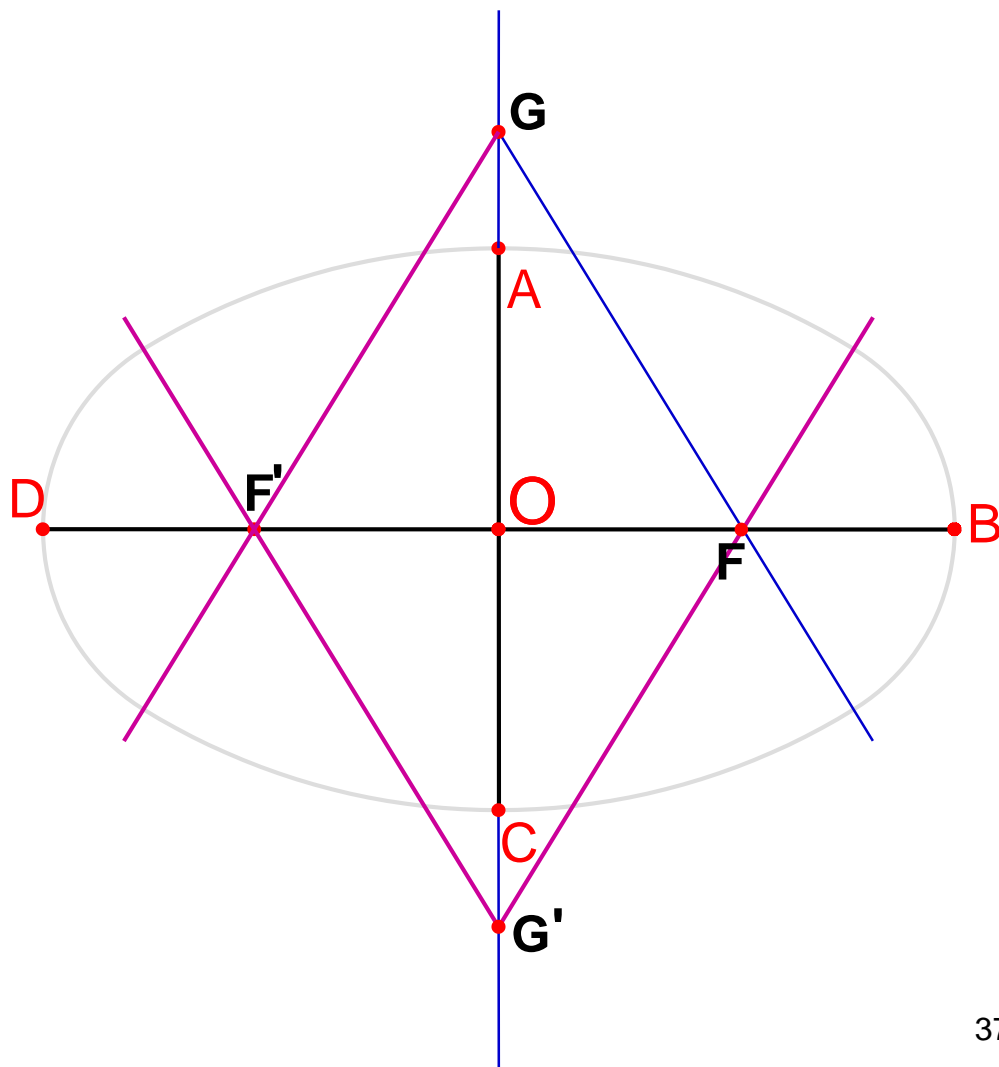
四心法畫橢圓-5/10

- 取OF'等於OF，OG'等於OG。



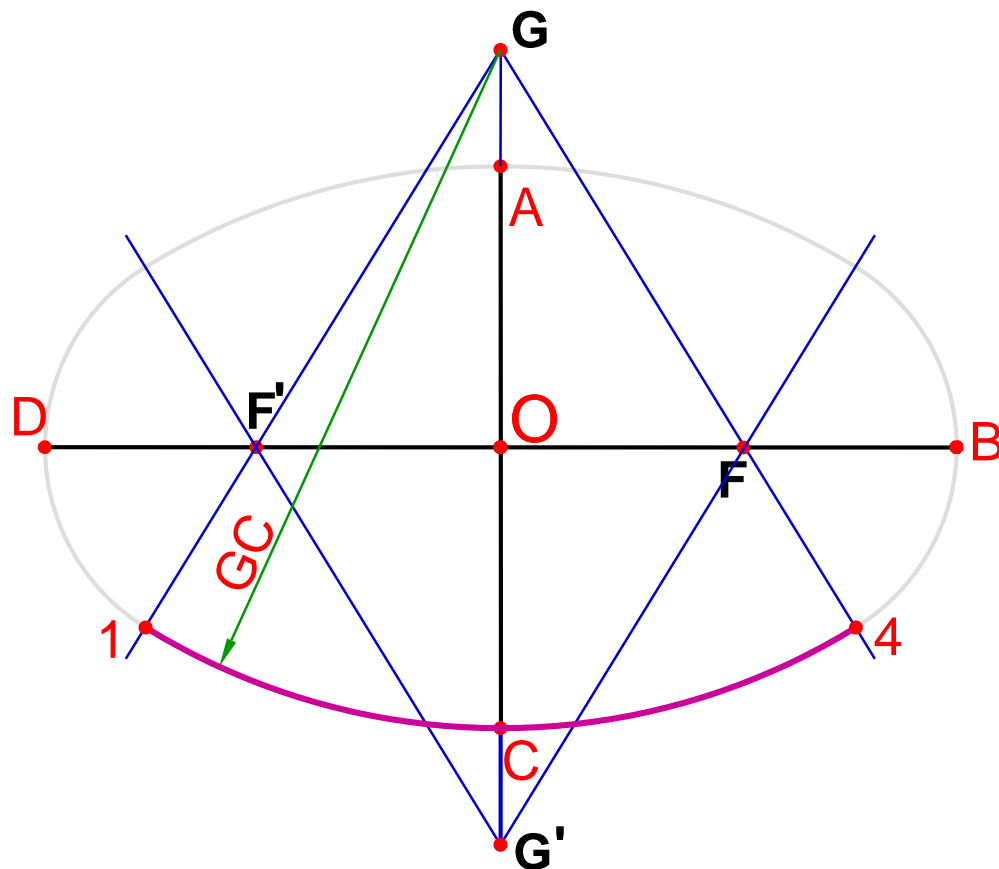
四心法畫橢圓-6/10

- F 、 F' 、 G 、 G' 即為四圓心畫法之四個圓心。



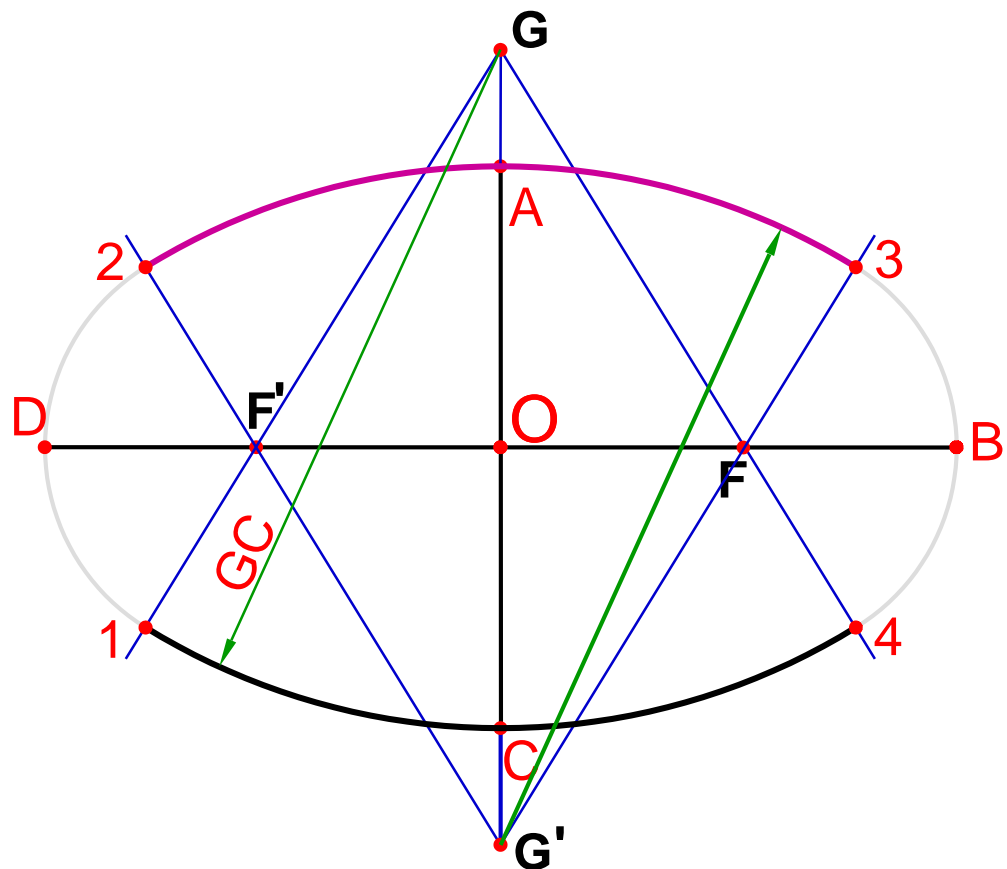
四心法畫橢圓-7/10

- 以G為圓心，以GC為半徑畫弧。



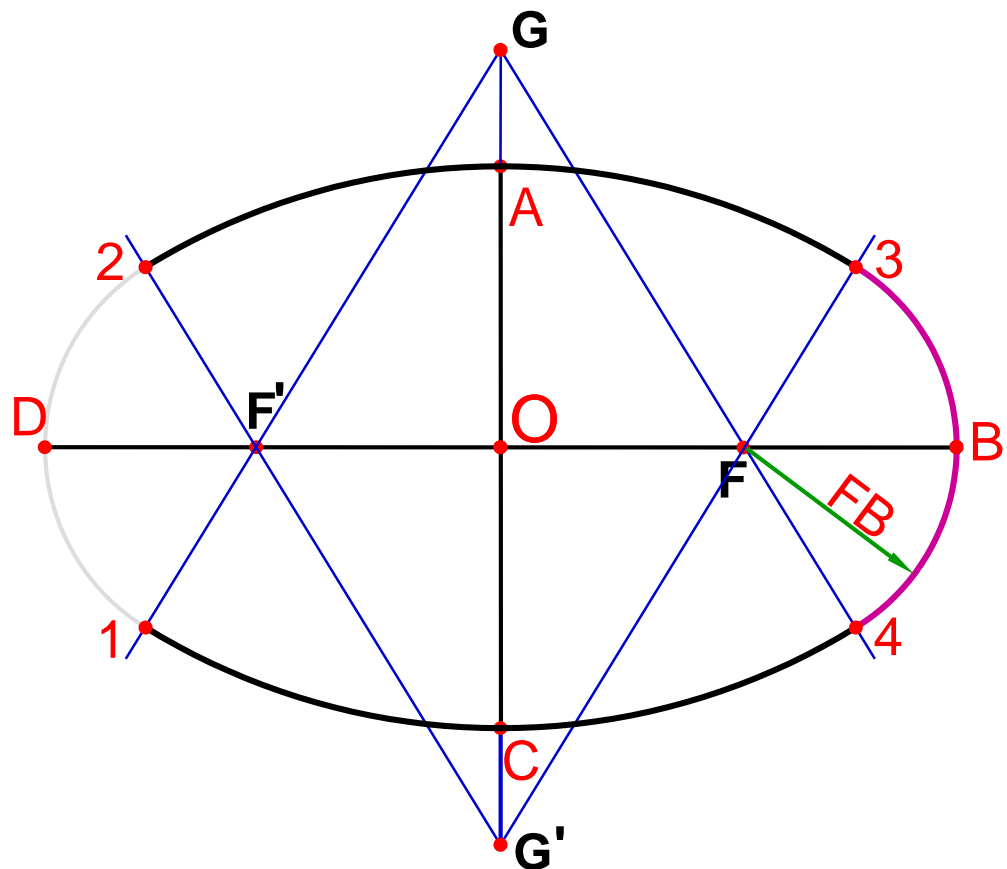
四心法畫橢圓-8/10

- 以 G' 為圓心，以 $G'A$ 為半徑畫弧。



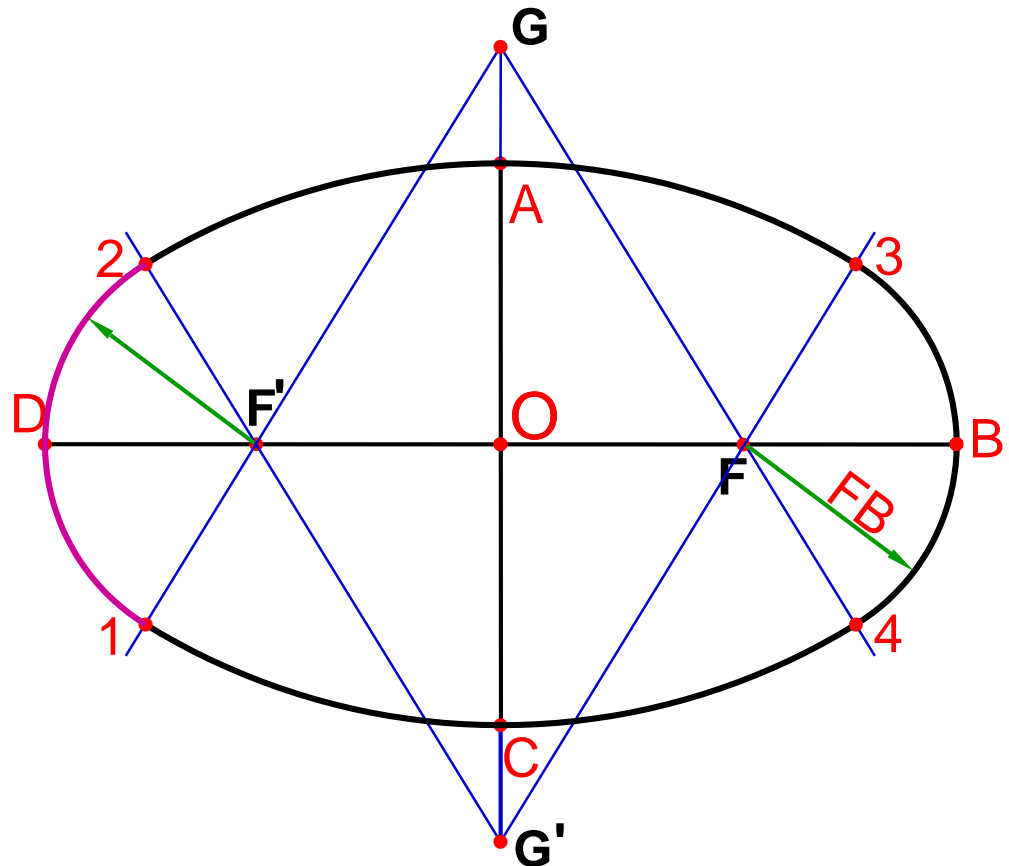
四心法畫橢圓-9/10

- 以F為圓心，以FB為半徑畫弧。



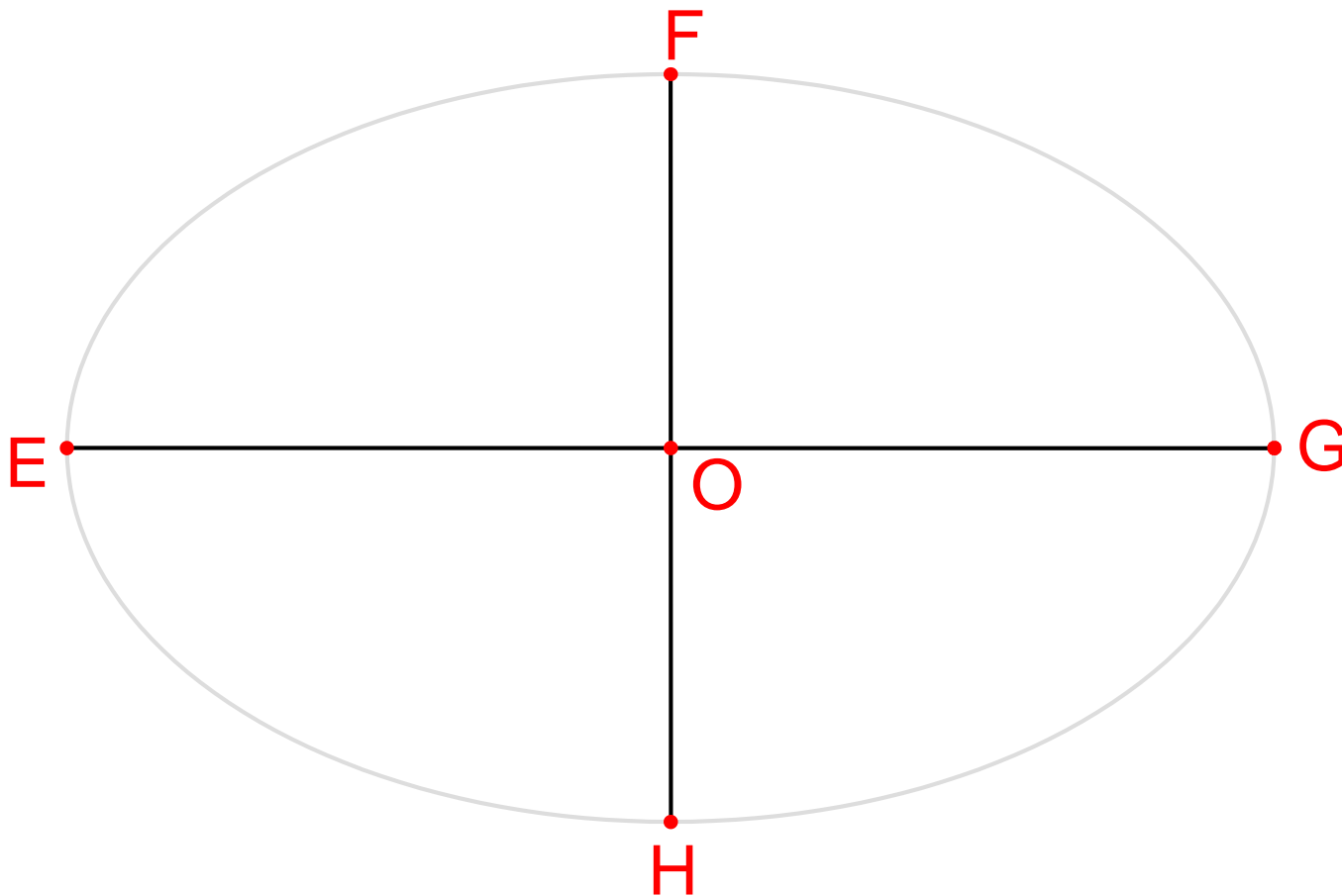
四心法畫橢圓-10/10

- 以 F' 為圓心，以 $F'D$ 為半徑畫弧，四圓弧相切於各圓心連線 FG 、 FG' 、 $F'G$ 、 $F'G'$ 上。



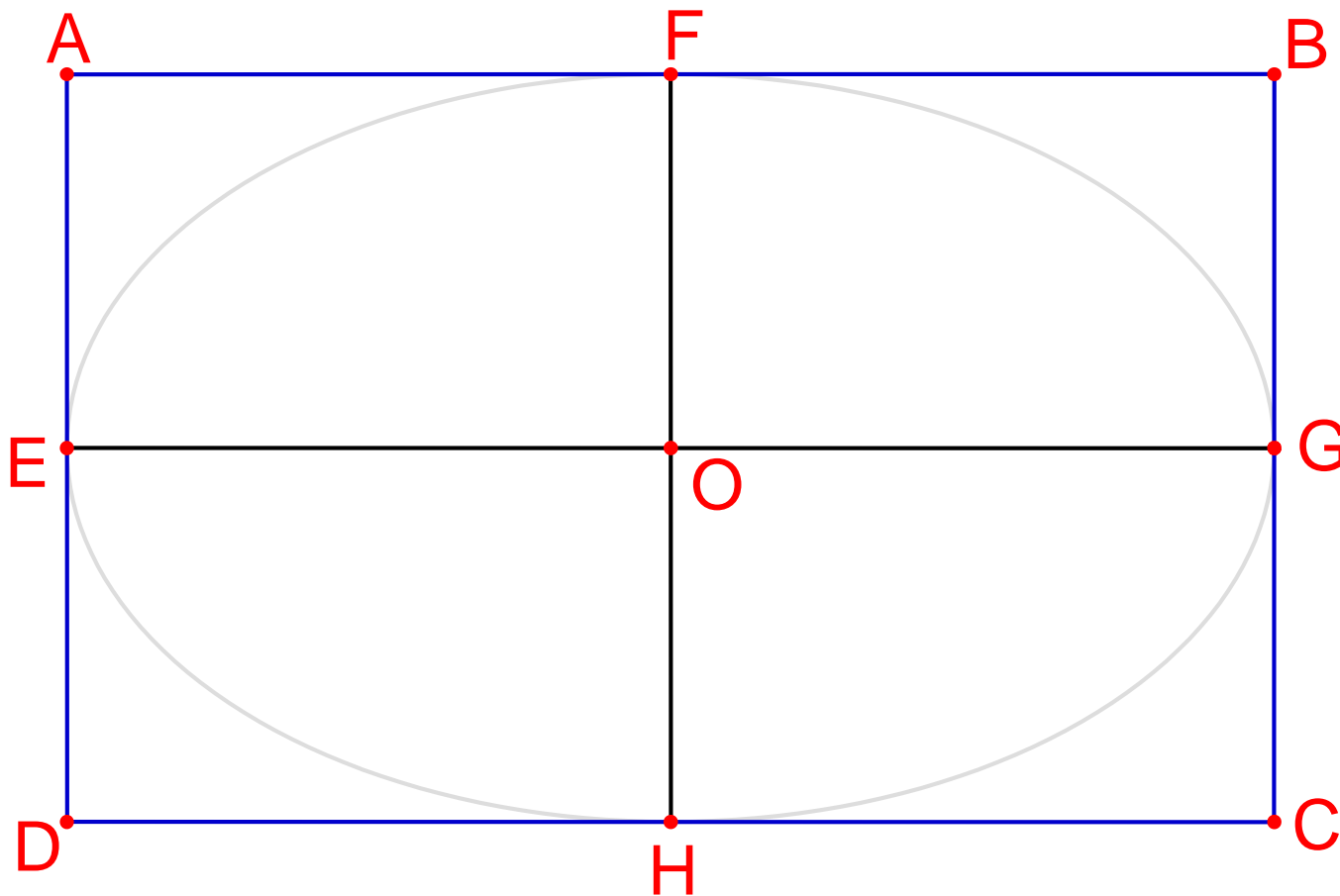
平行四邊形法畫橢圓-1/8

- 已知：橢圓之長短軸或共軛軸。
- 求作：橢圓曲線。



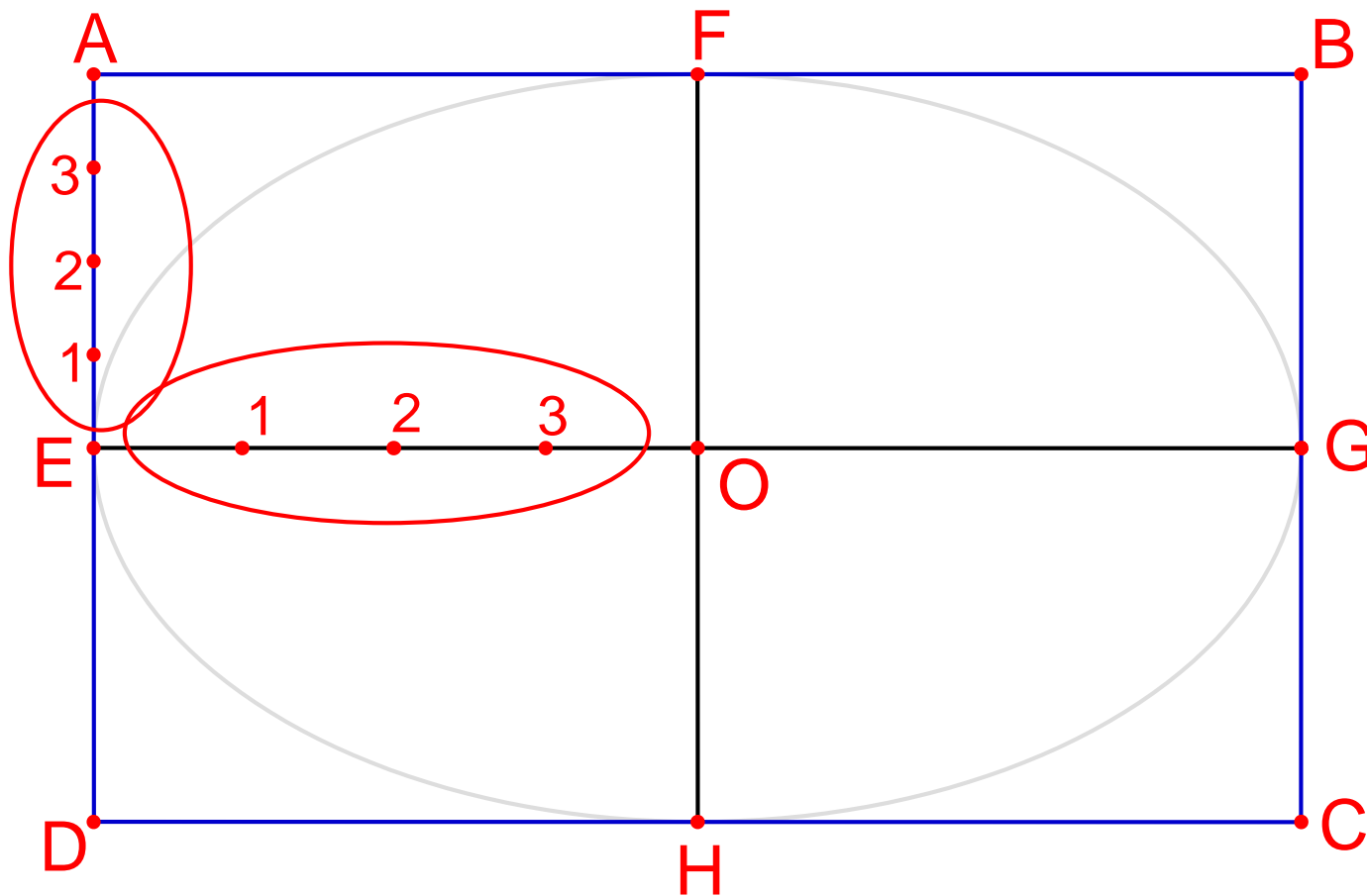
平行四邊形法畫橢圓-2/8

- 畫平行於長短軸或共軛軸之平行四邊形。



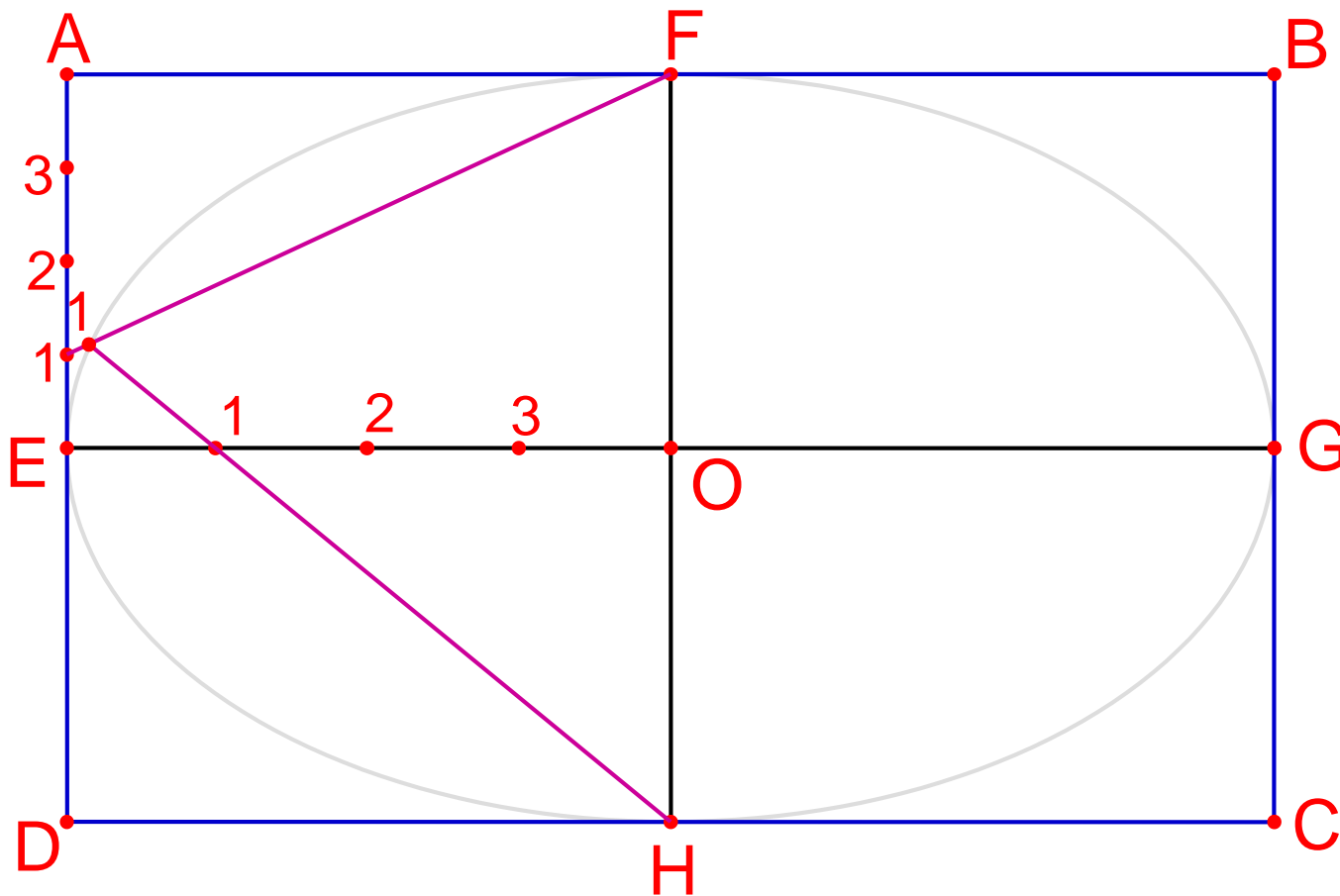
平行四邊形法畫橢圓-3/8

- 將OE與EA任意分成相等之等份，兩邊之等分點皆由E點開始依序編號。



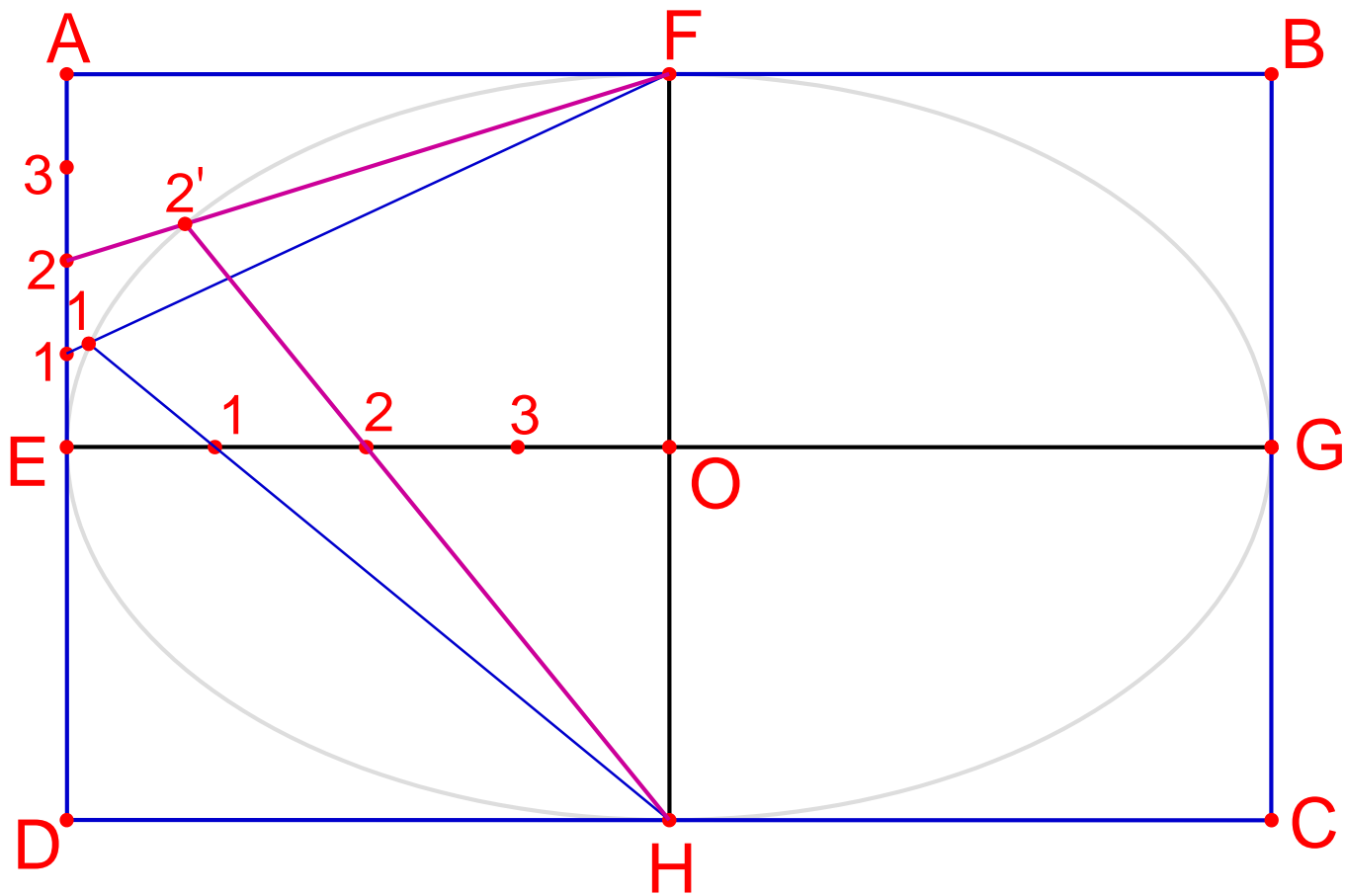
平行四邊形法畫橢圓-4/8

- 連接H與OE之等分點1，連接F與EA之等分點1，延長後得交點1'即為橢圓上的點。



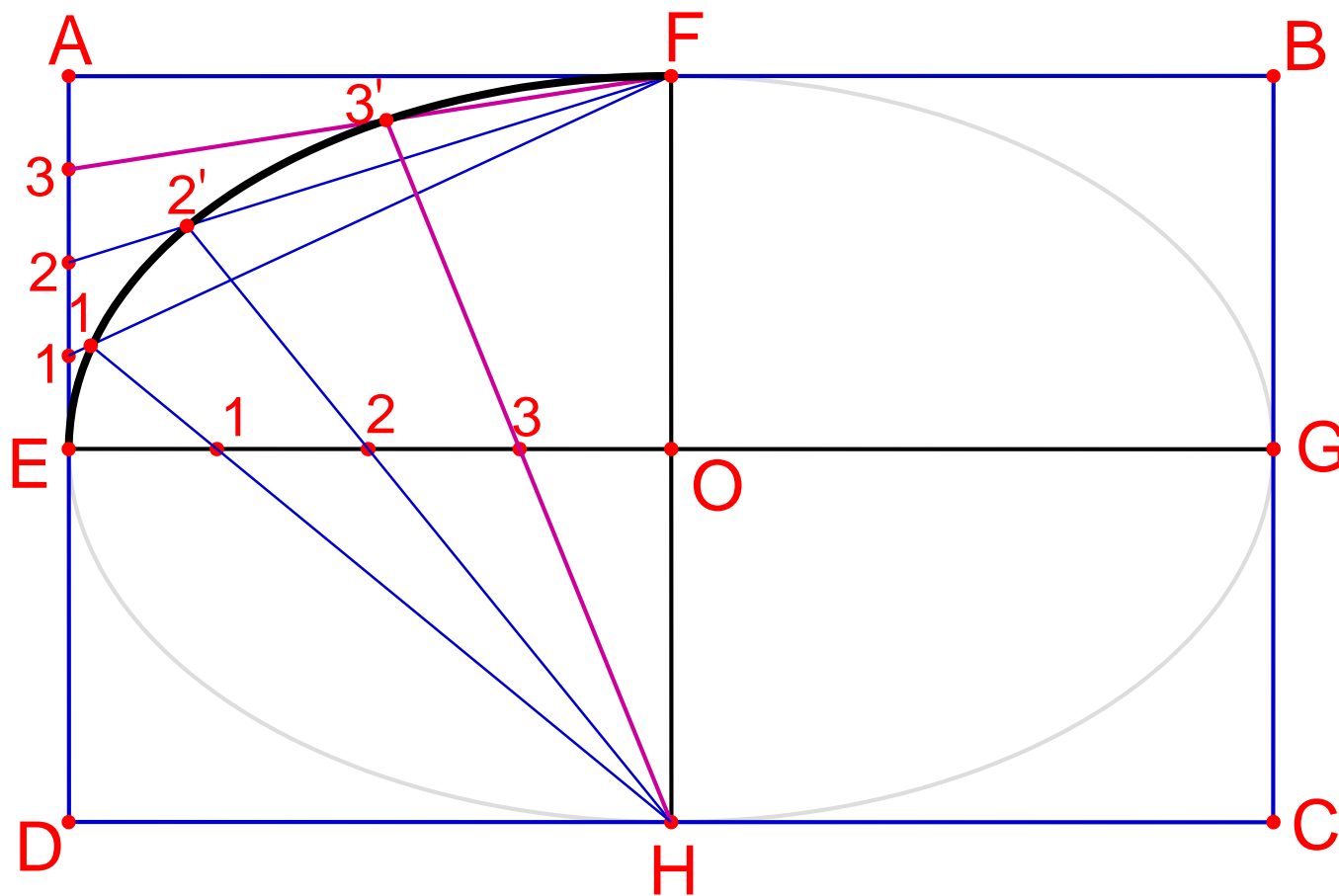
平行四邊形法畫橢圓-5/8

- 同理求出2'點。



平行四邊形法畫橢圓-6/8

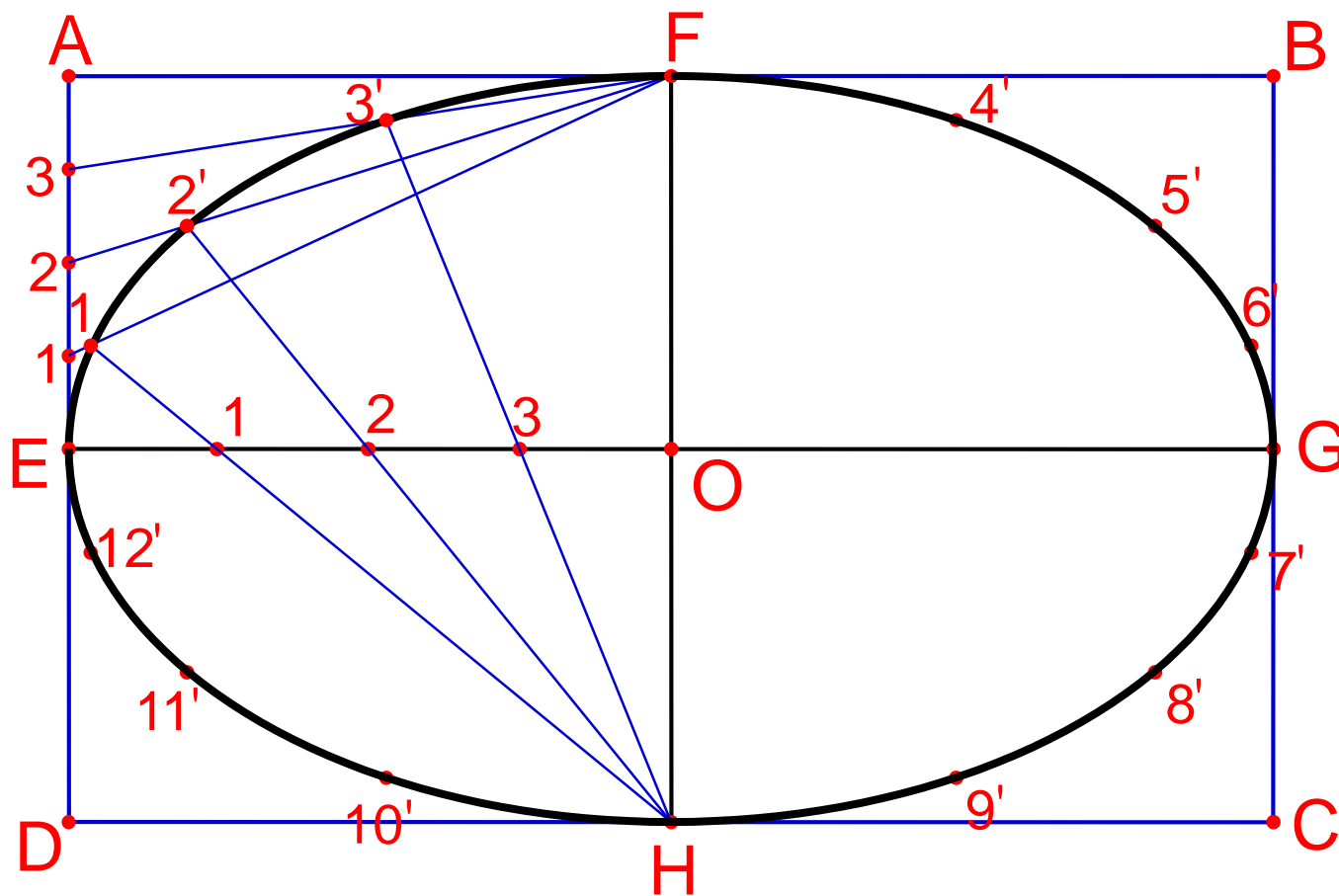
- 同理求出3'點，以曲線板連接各點即為所求1/4橢圓。



平行四邊形法畫橢圓-7/8

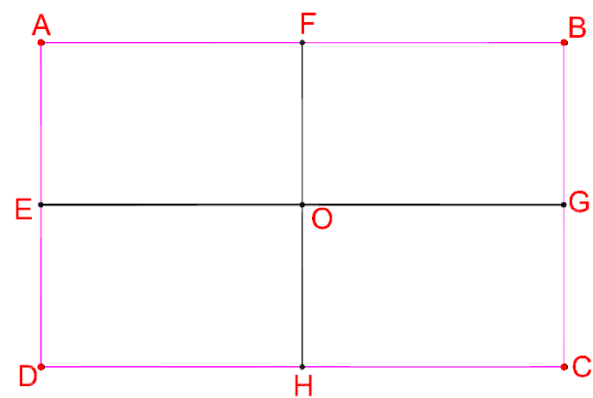
■ 同理求出其他各點，以曲線板連接各點即為所求

。

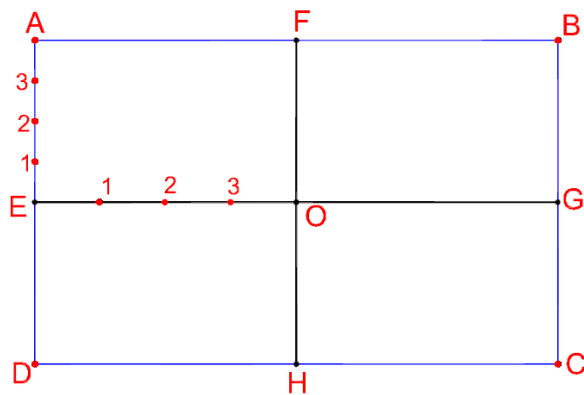


平行四邊形法畫橢圓-8/8

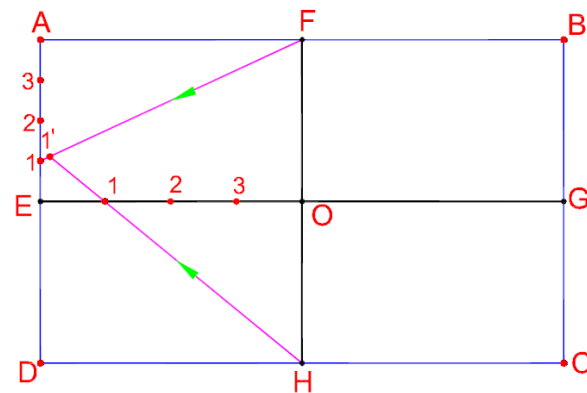
1



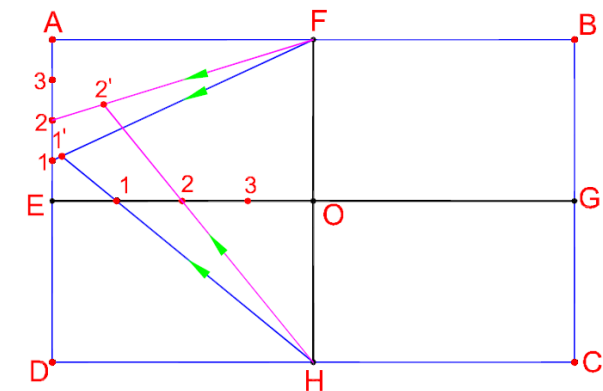
2



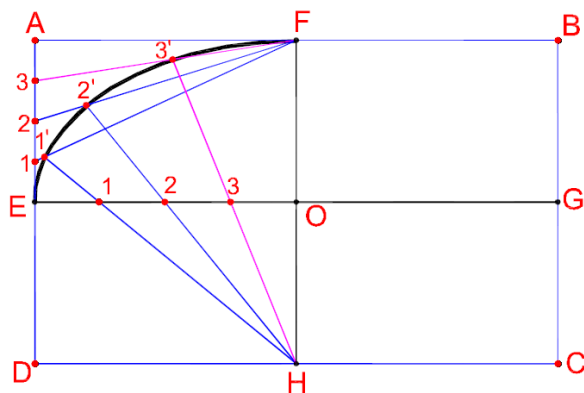
3



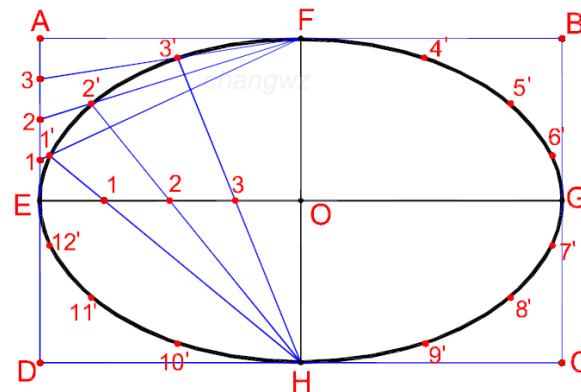
4



5



6



CAD圖

5.7.3拋物線及其繪法

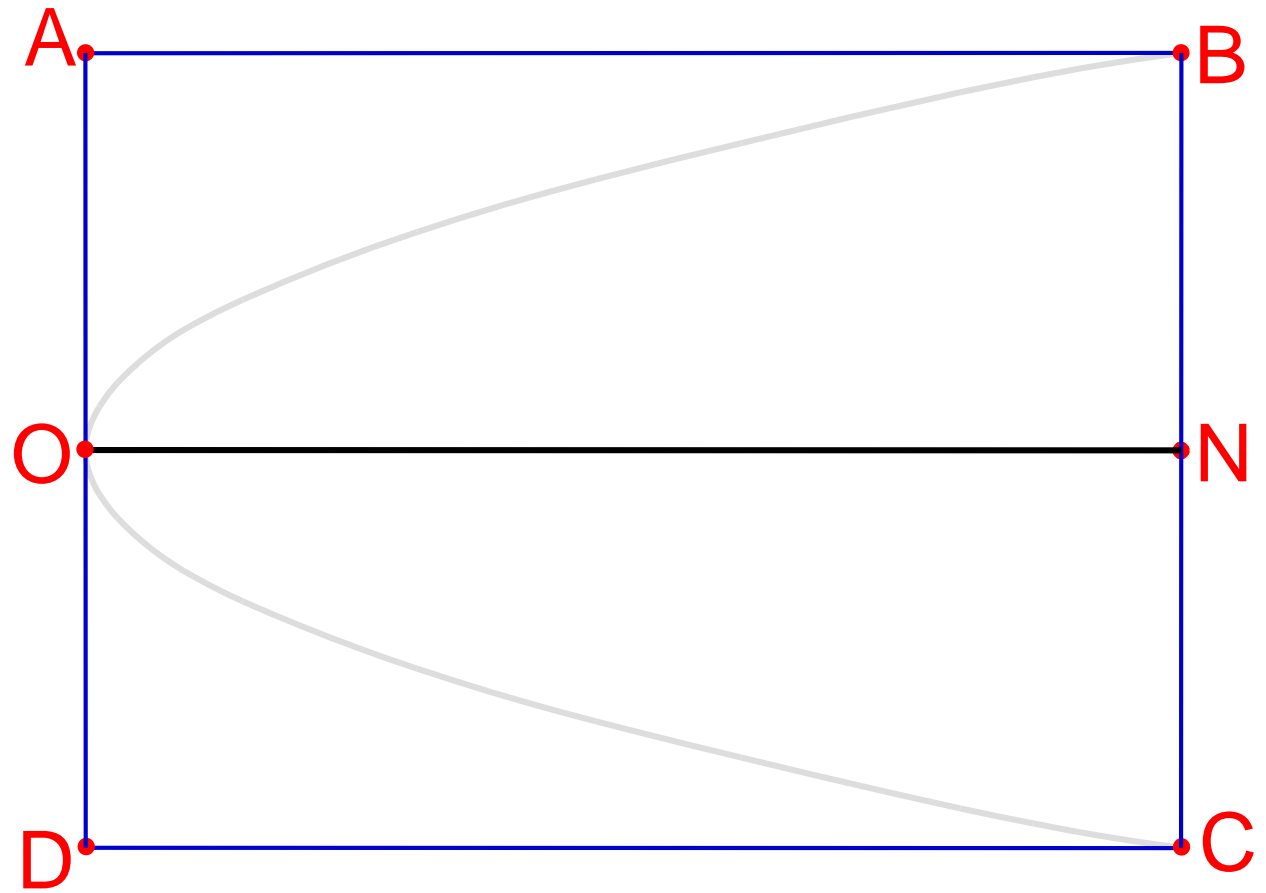
- 平面上一動點與一固定點（焦點）之距離恆等於與一直線（準線）之距離，該動點所衍生之軌跡即為拋物線
- 探照燈之燈罩即為由拋物線所構成之曲面
- 當拋物線之頂點在直角座標之原點上，焦點在X軸時，數學方程式為

$$y^2 = 2hx$$

h 為焦點到準線之距離。

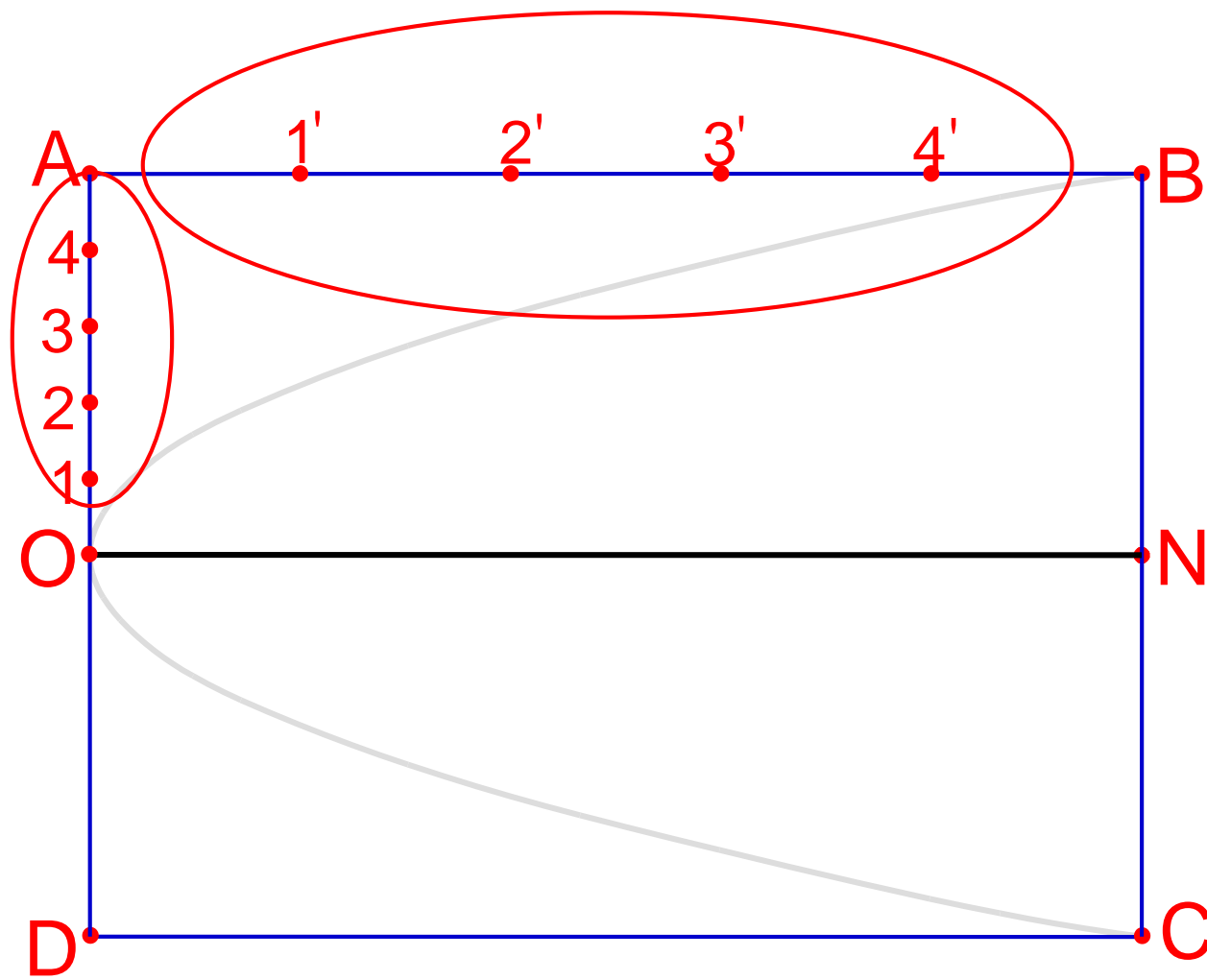
平行四邊形法繪拋物線-1/7

- 已知：拋物線之外圍矩形。
- 求作：拋物線。



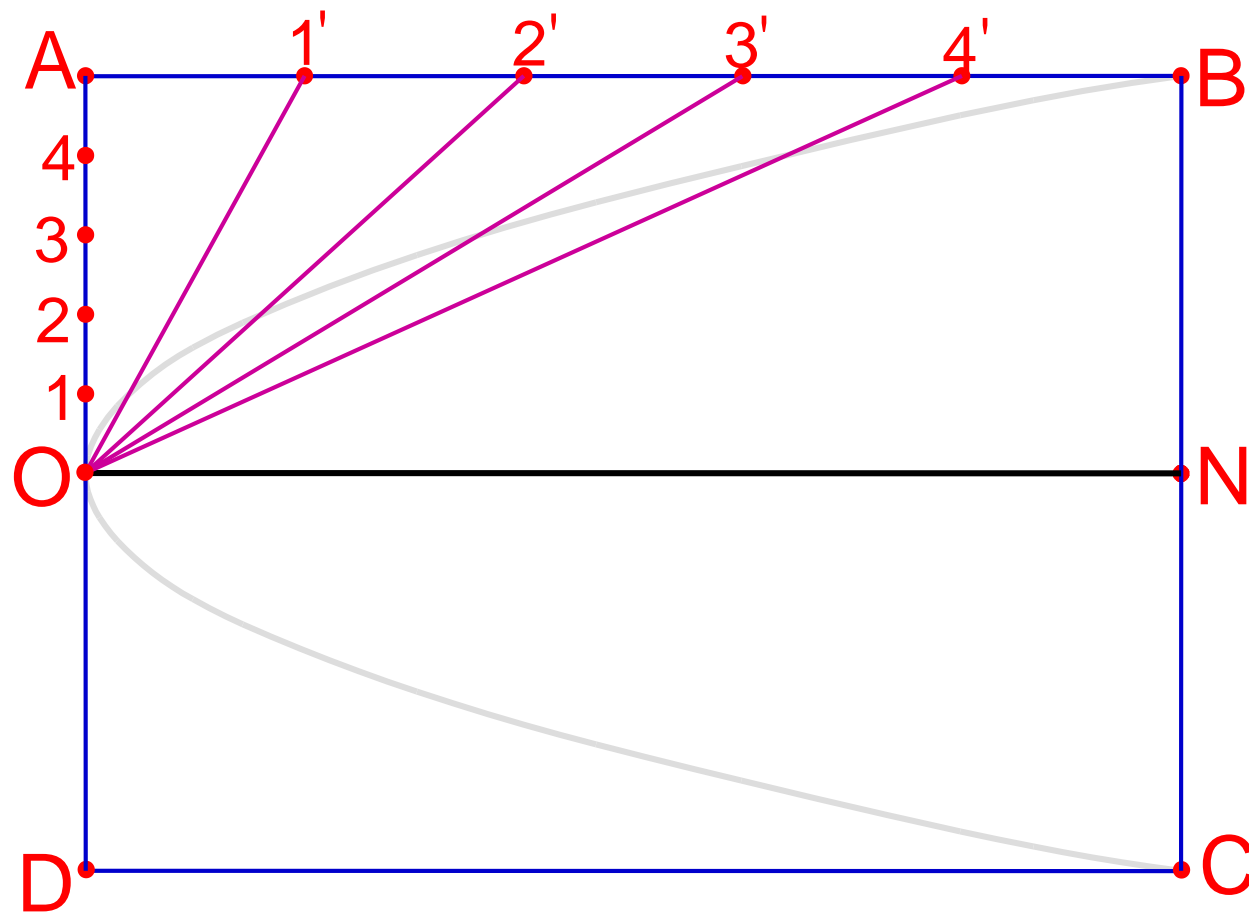
平行四邊形法繪拋物線-2/7

- 將OA與AB作相同之等份（如4等份），並標註各等分點。



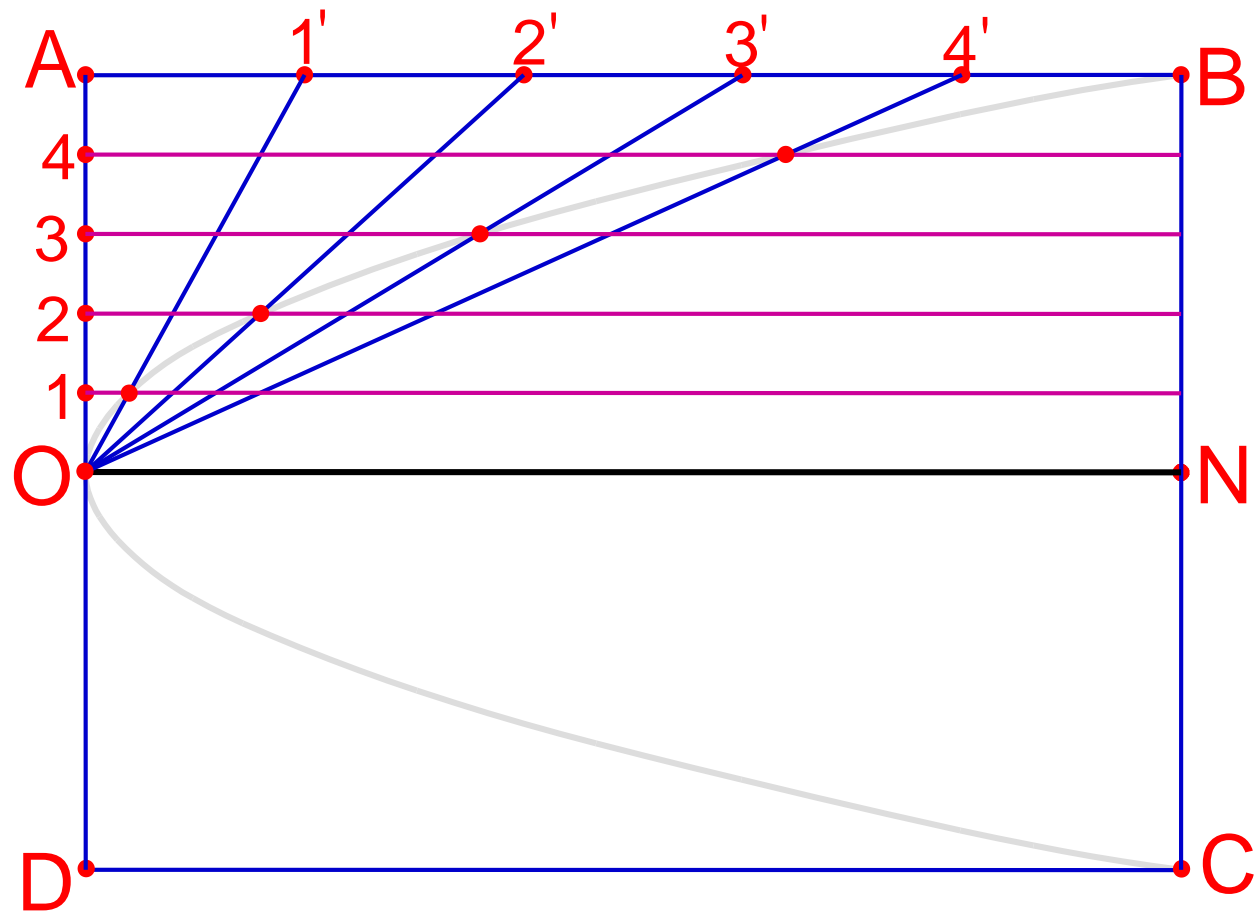
平行四邊形法繪拋物線-3/7

- 分別連接O與AB上之各等分點。



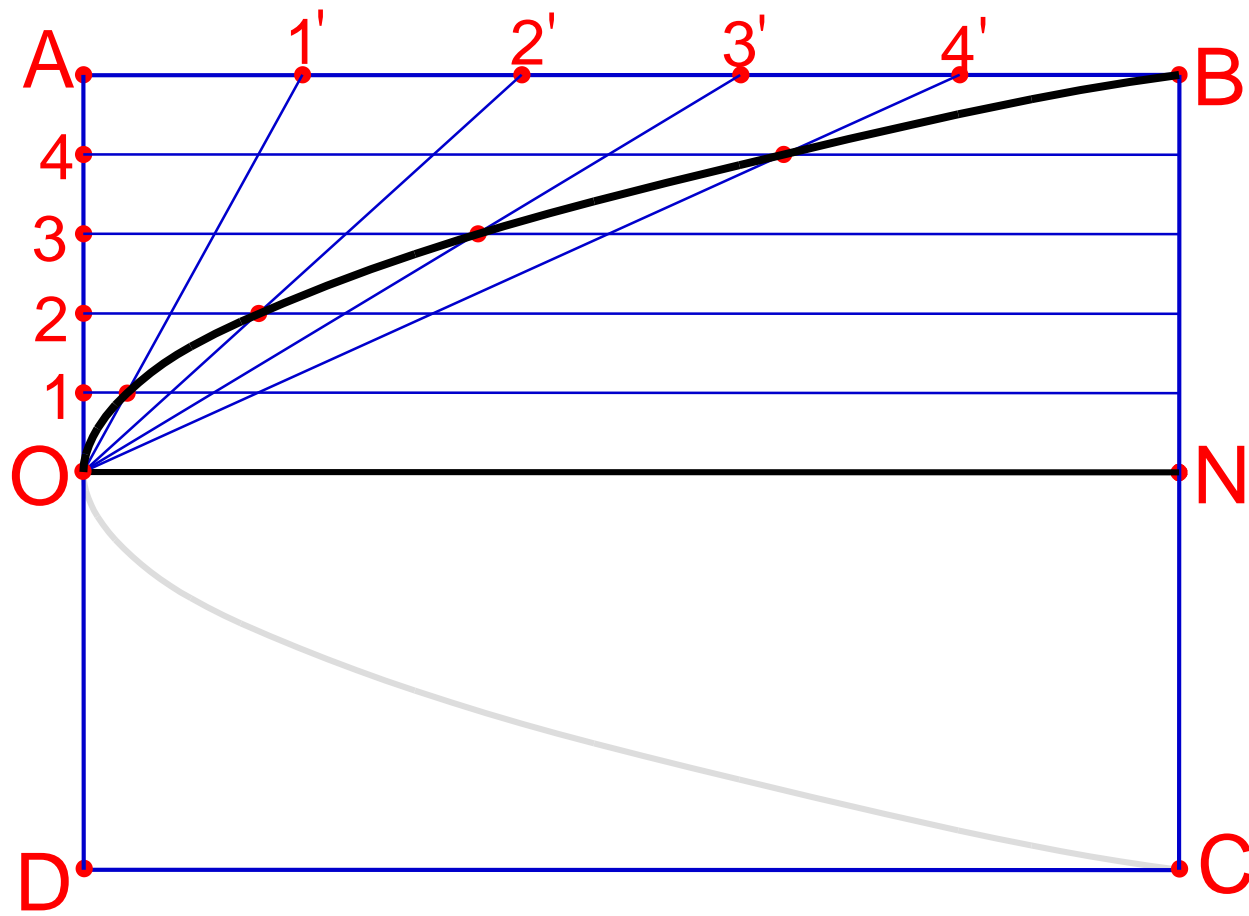
平行四邊形法繪拋物線-4/7

- 過OA上之各等分點作ON之平行線。
- 各對應線之交點即為拋物線上的點。



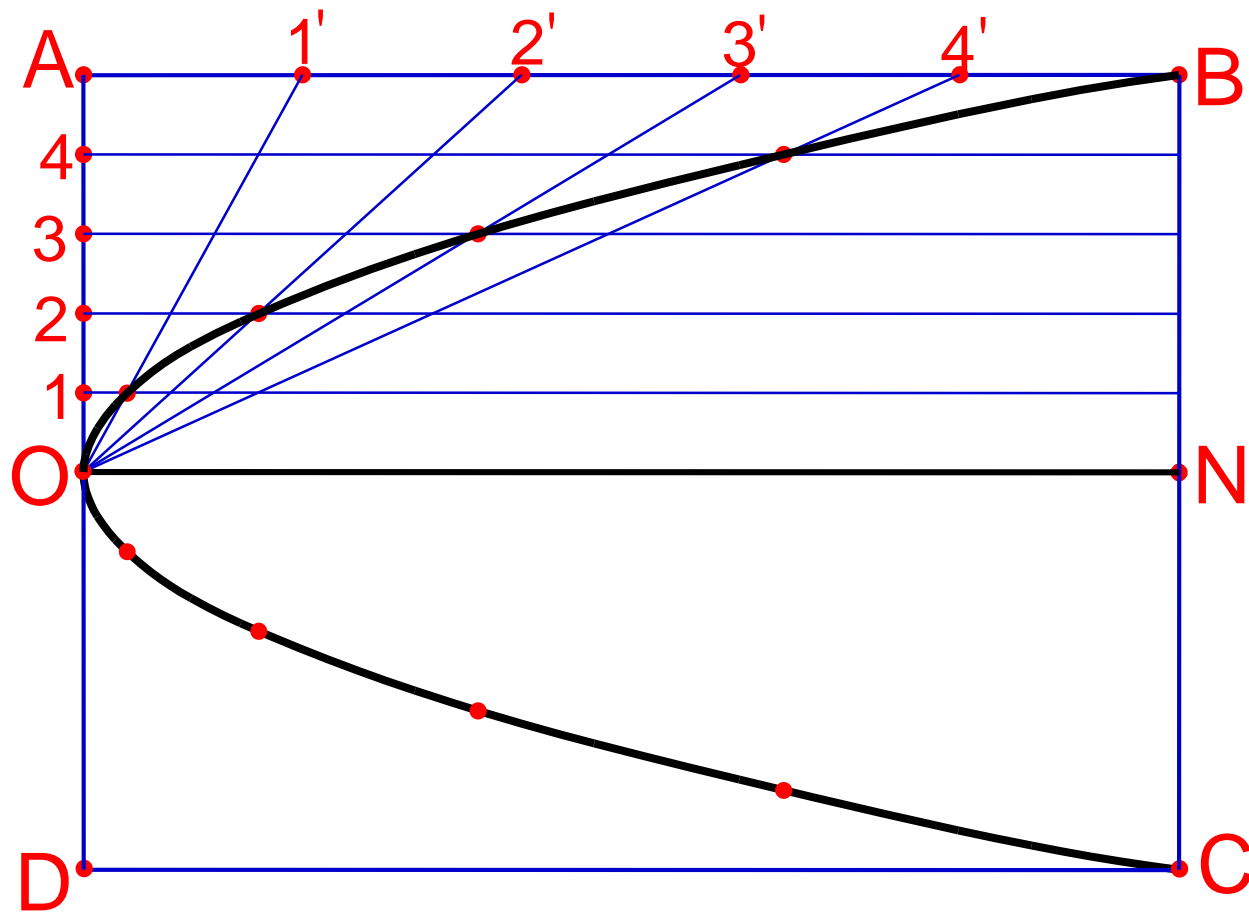
平行四邊形法繪拋物線-5/7

- 以曲線板連接各點即為所求拋物線。



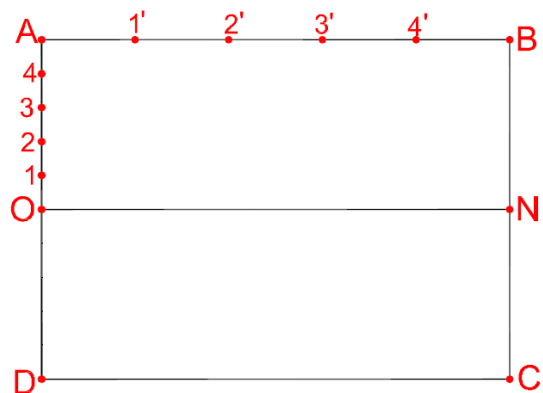
平行四邊形法繪拋物線-6/7

- 同法繪對稱曲線。

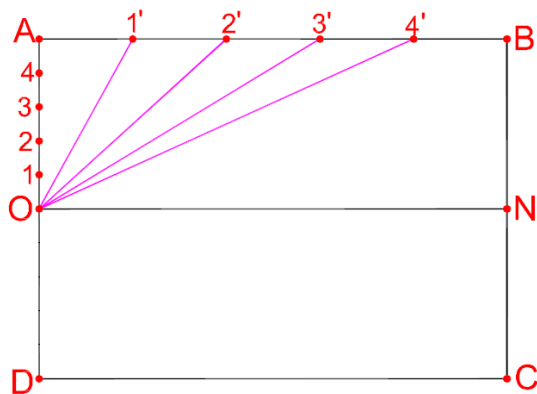


平行四邊形法繪拋物線-7/7

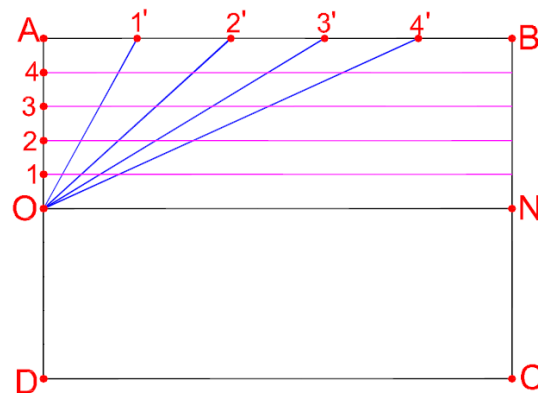
1



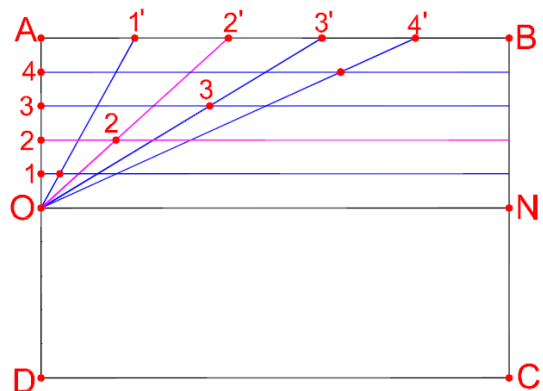
2



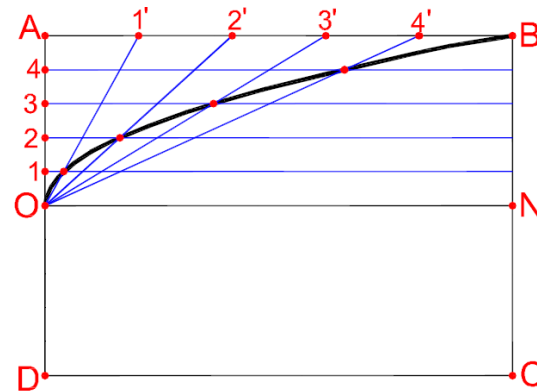
3



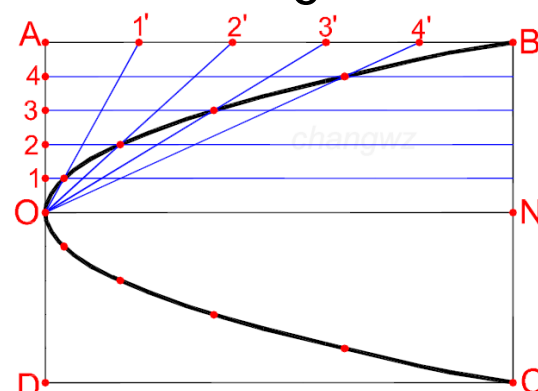
4



5

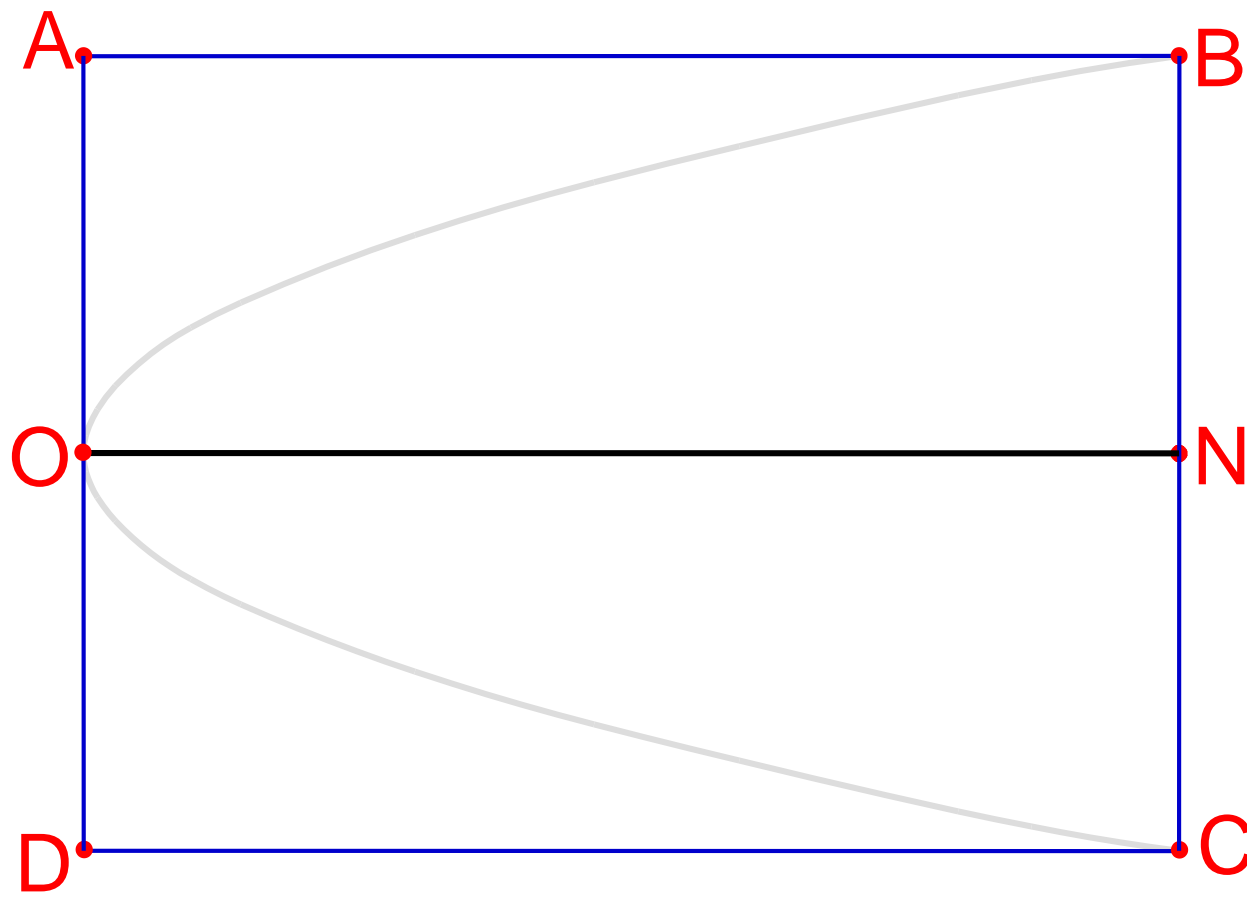


6



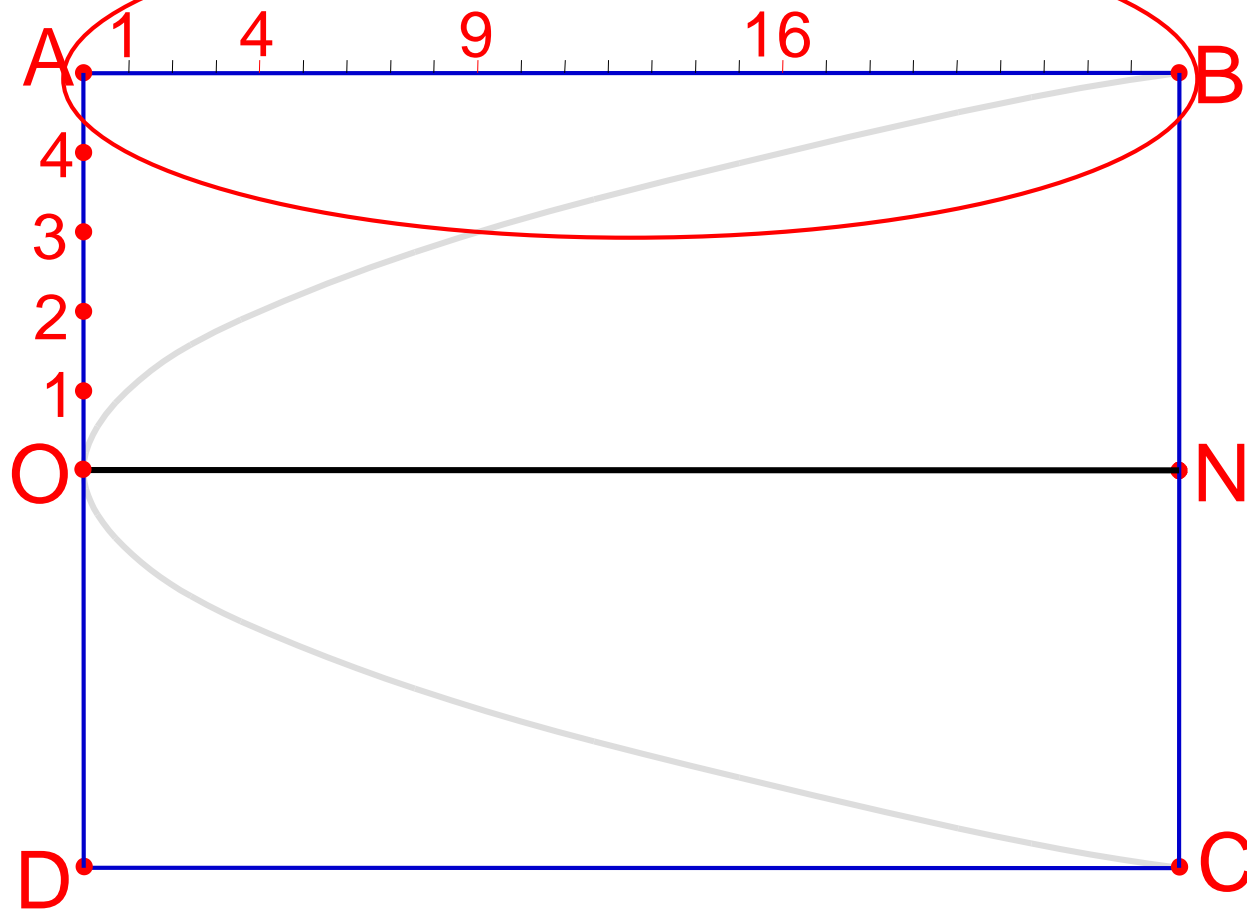
支距法繪拋物線-1/7

- 已知：拋物線之外圍矩形。
- 求作：支距法繪拋物線。



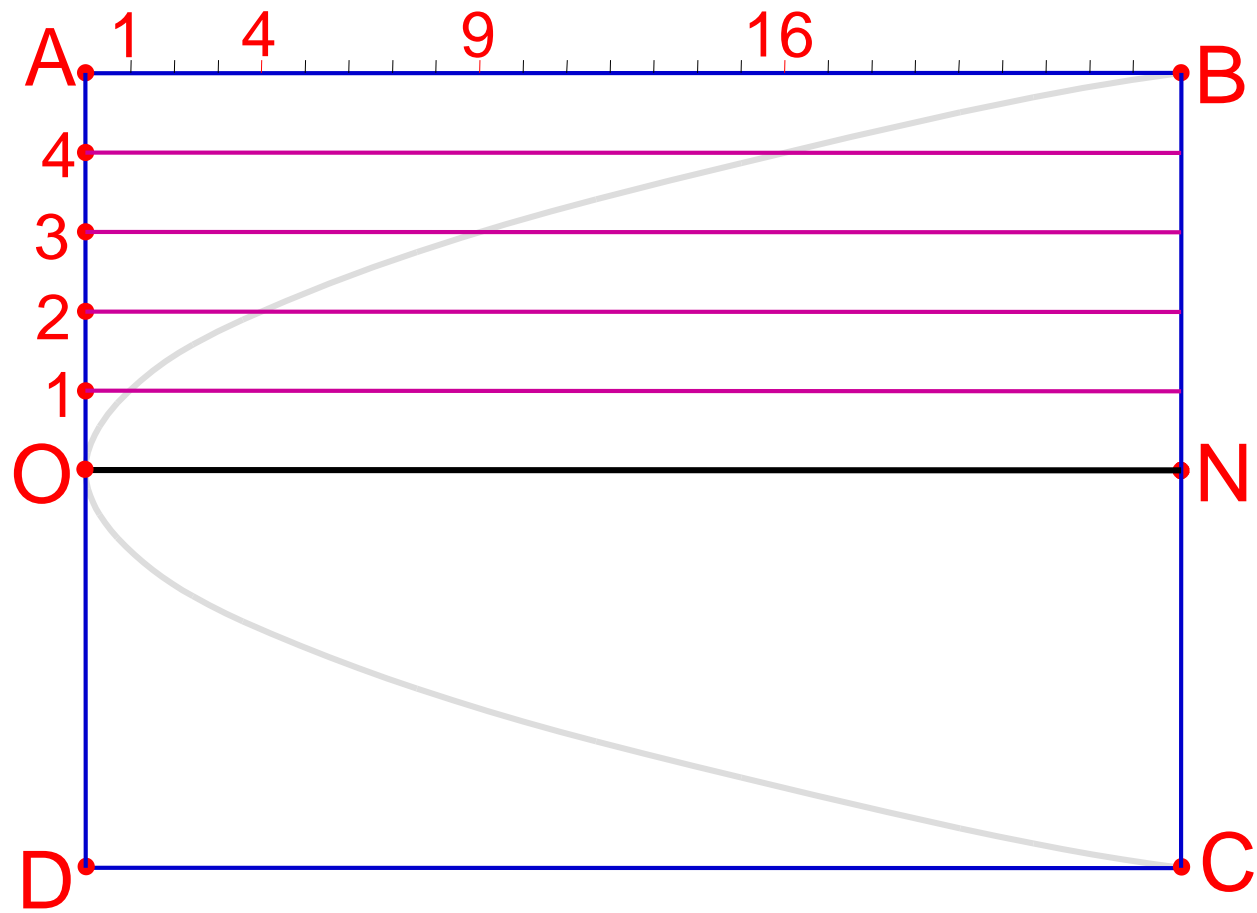
支距法繪拋物線-1/7

- 作AB之等分數為OA之等分數的平方（如OA作5等份，AB作25等份），並標註各等分點。



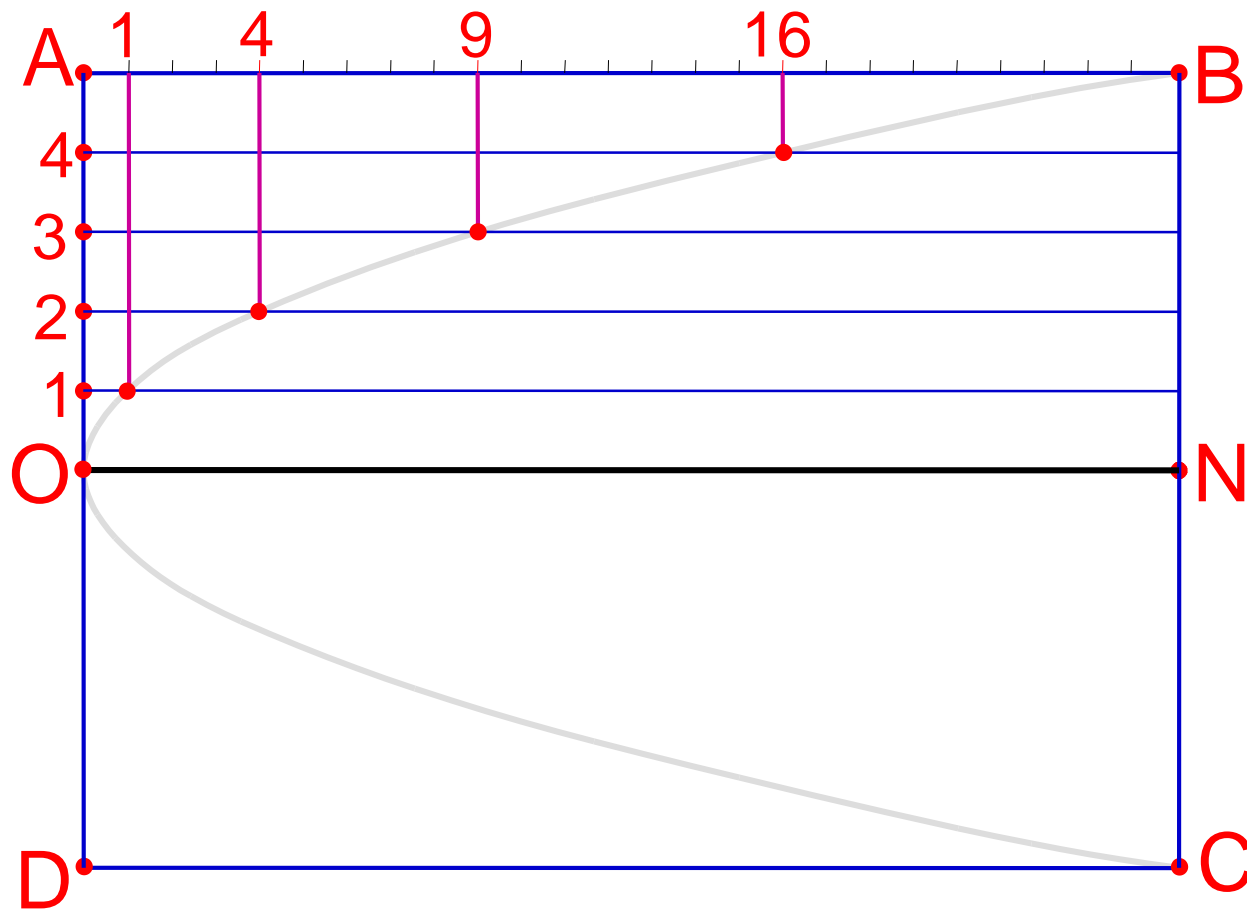
支距法繪拋物線-3/7

- 過OA上之各等分點作ON之平行線。



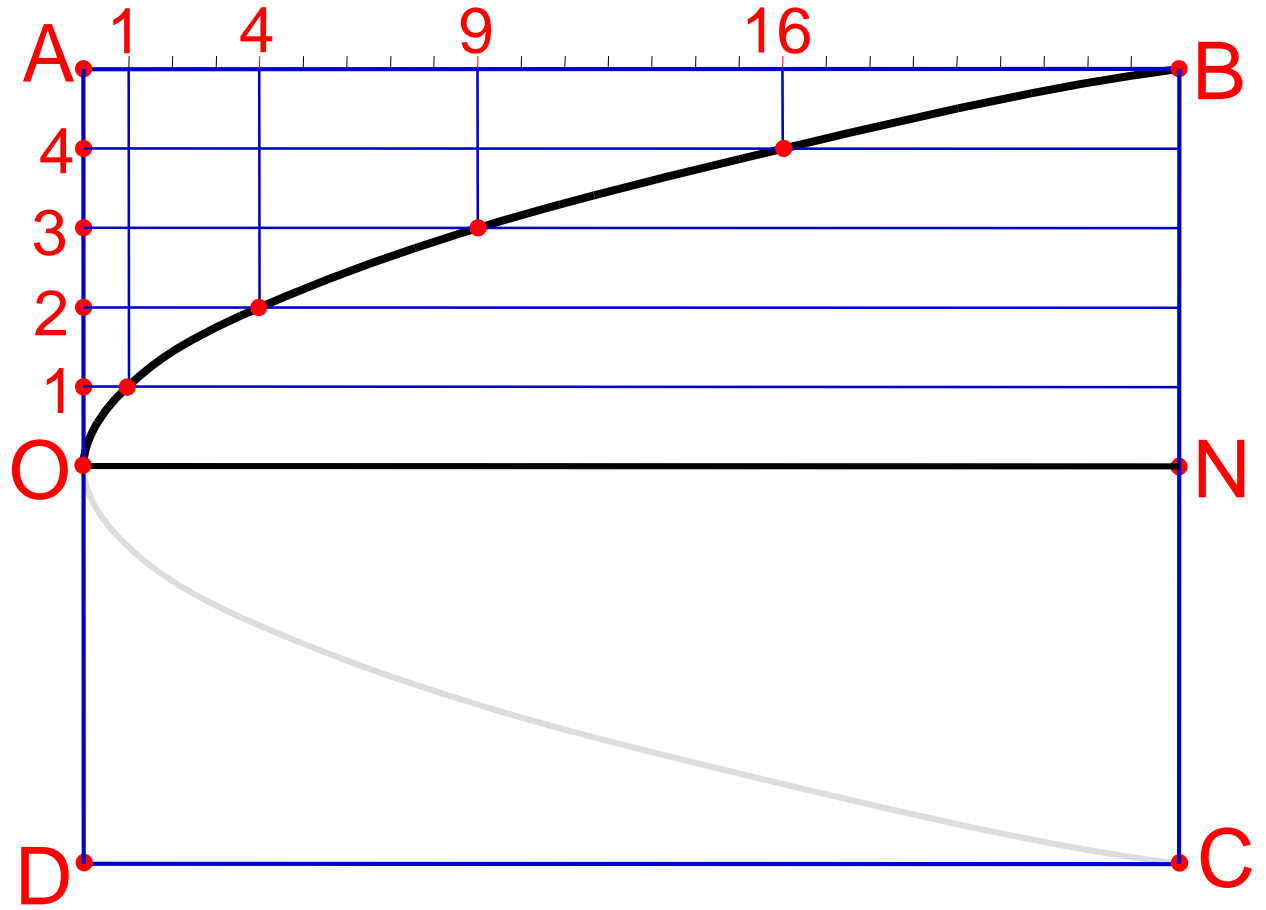
支距法繪拋物線-4/7

- 過AB上之各等分點作ON之垂線，各對應線之交點即為拋物線上的點。



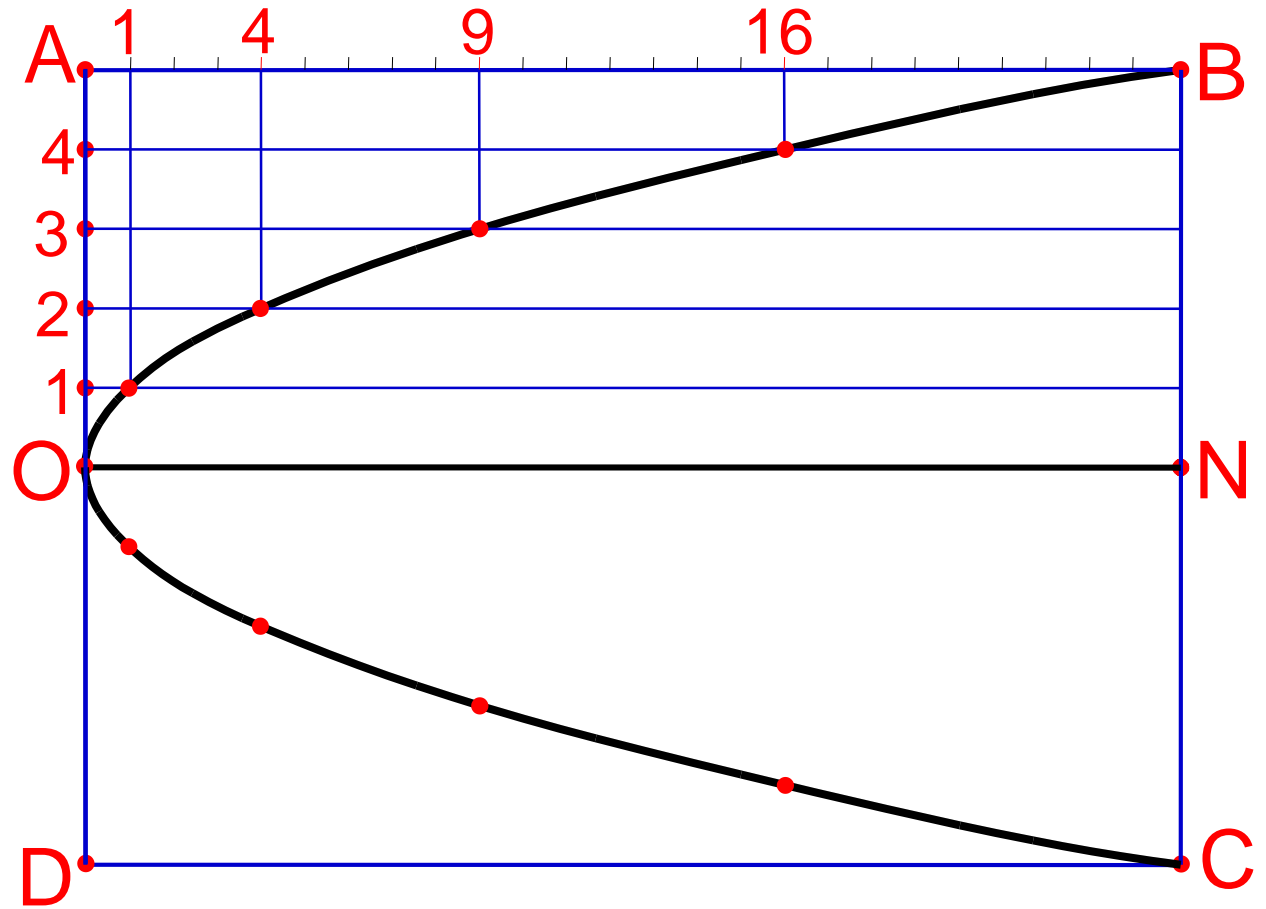
支距法繪拋物線-5/7

- 以曲線板連接各點即為所求拋物線。



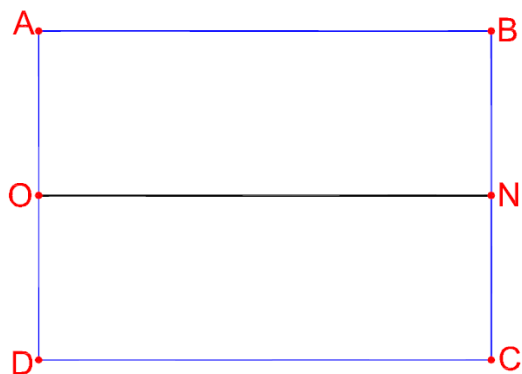
支距法繪拋物線-6/7

- 同法繪對稱曲線。

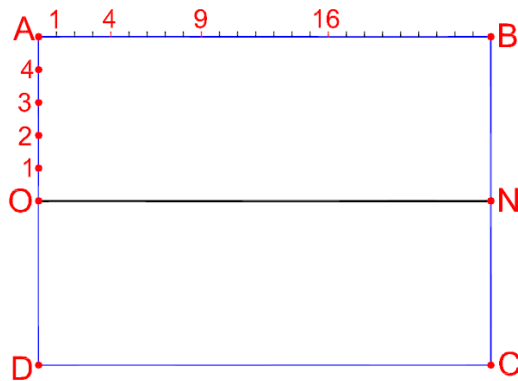


支距法繪拋物線-7/7

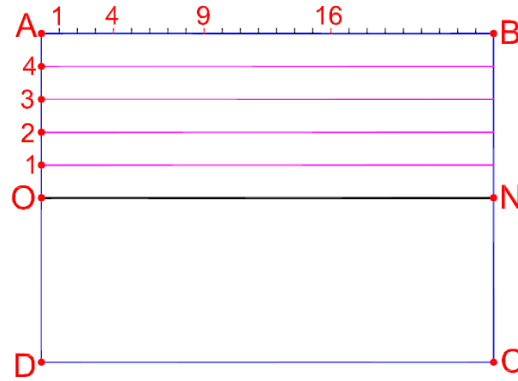
1



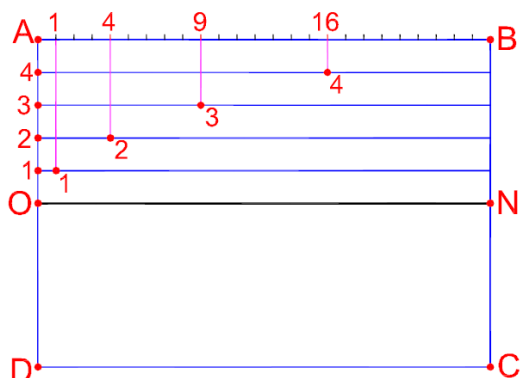
2



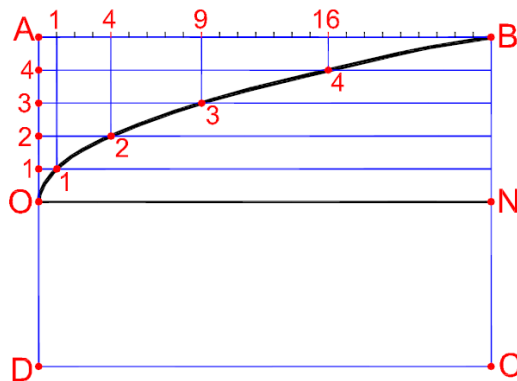
3



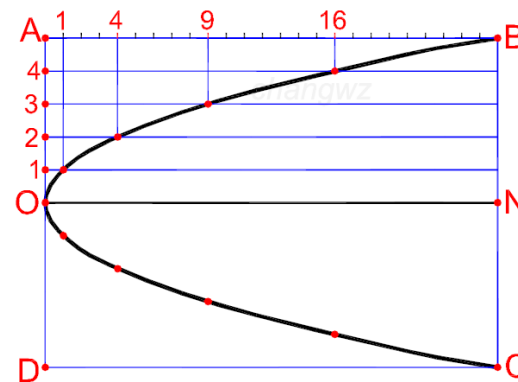
4



5



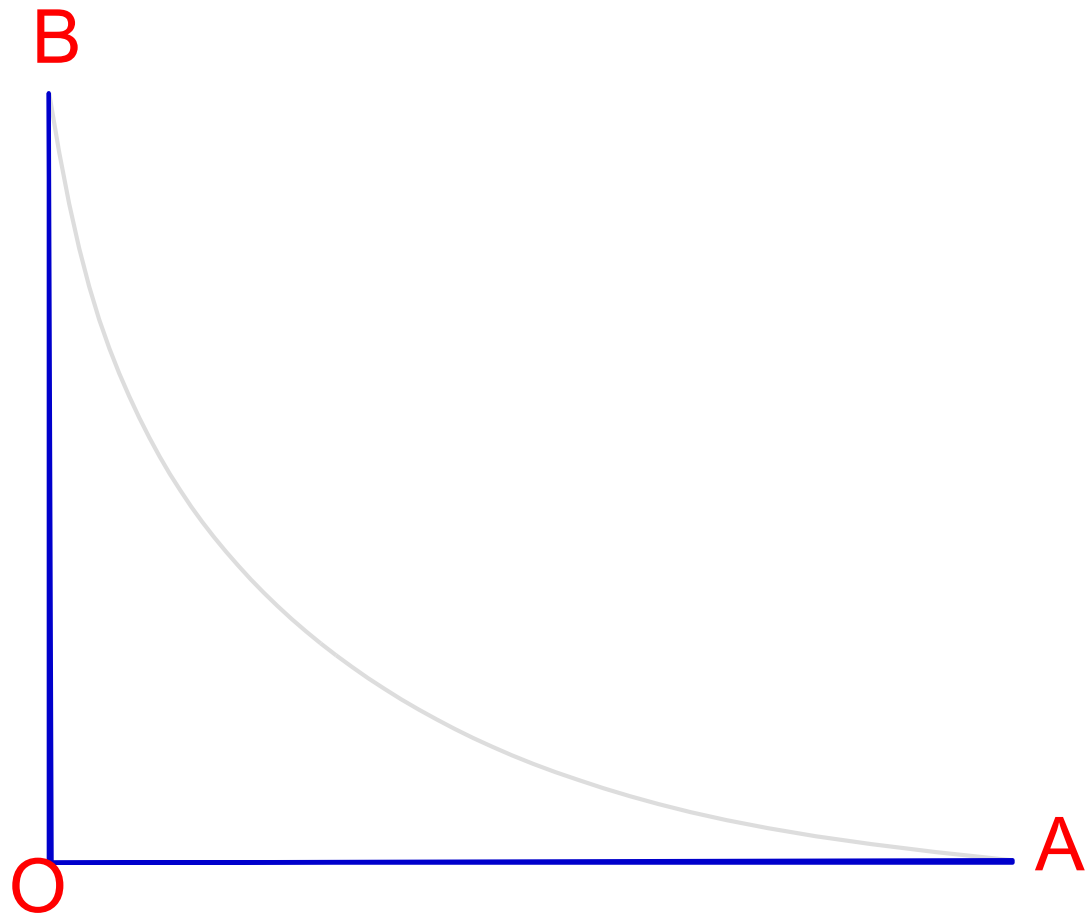
6



CAD圖 CAD-AVI

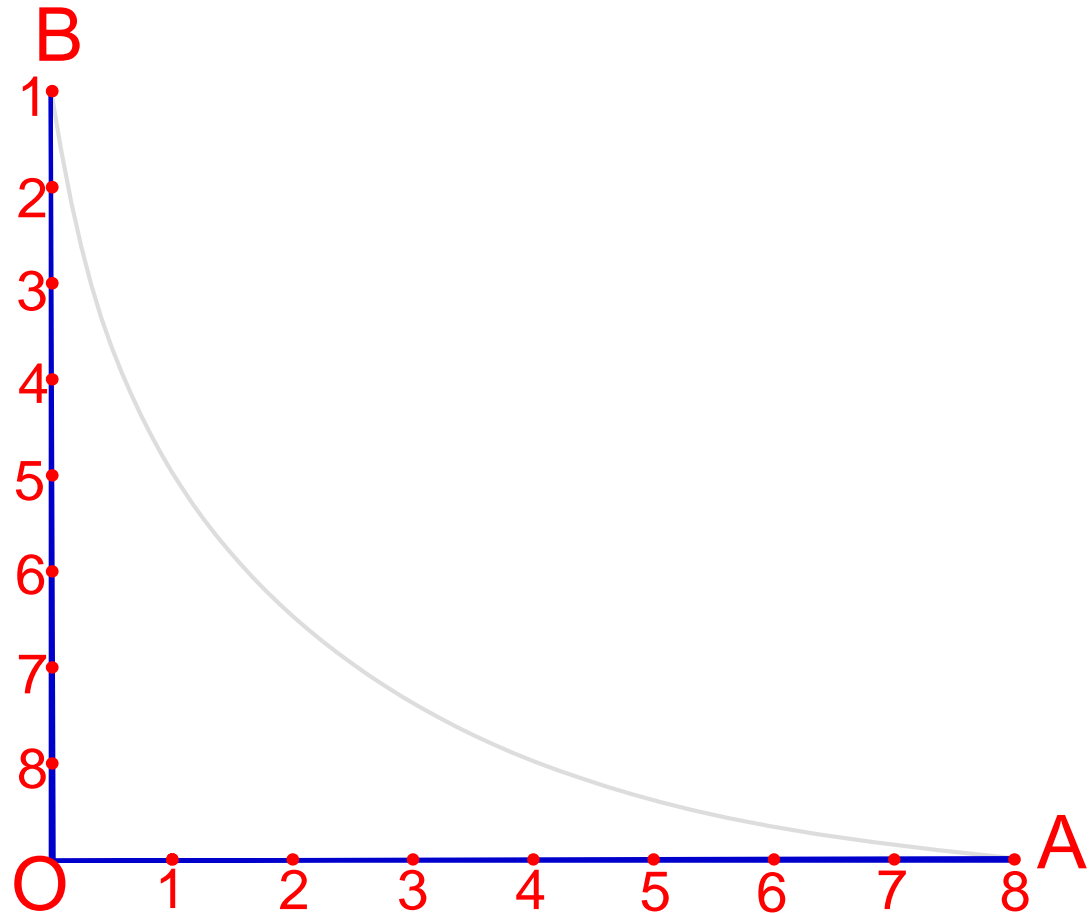
包絡線法繪拋物線-1/6

- 已知：包絡線之兩軸。
- 求作：拋物線。



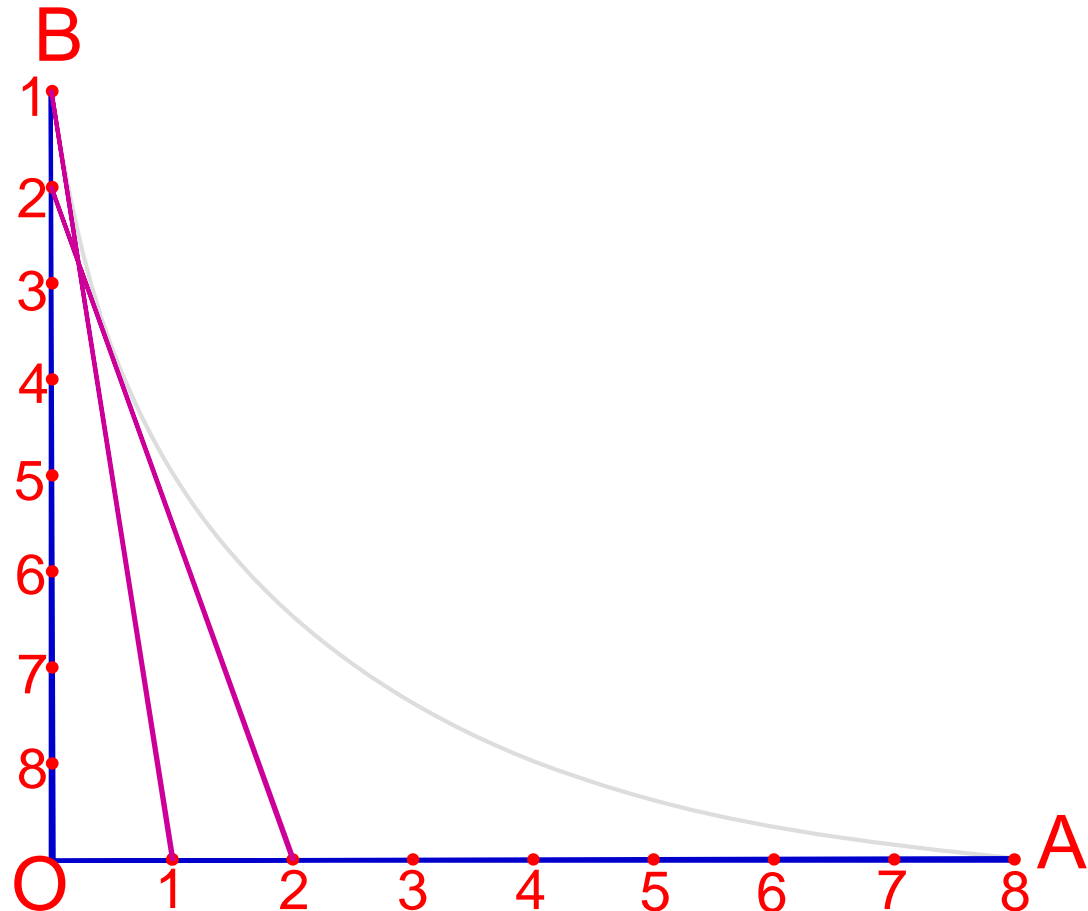
包絡線法繪拋物線-2/6

- 將OA與OB作相同之等分（如9等份），並作如圖之標號。



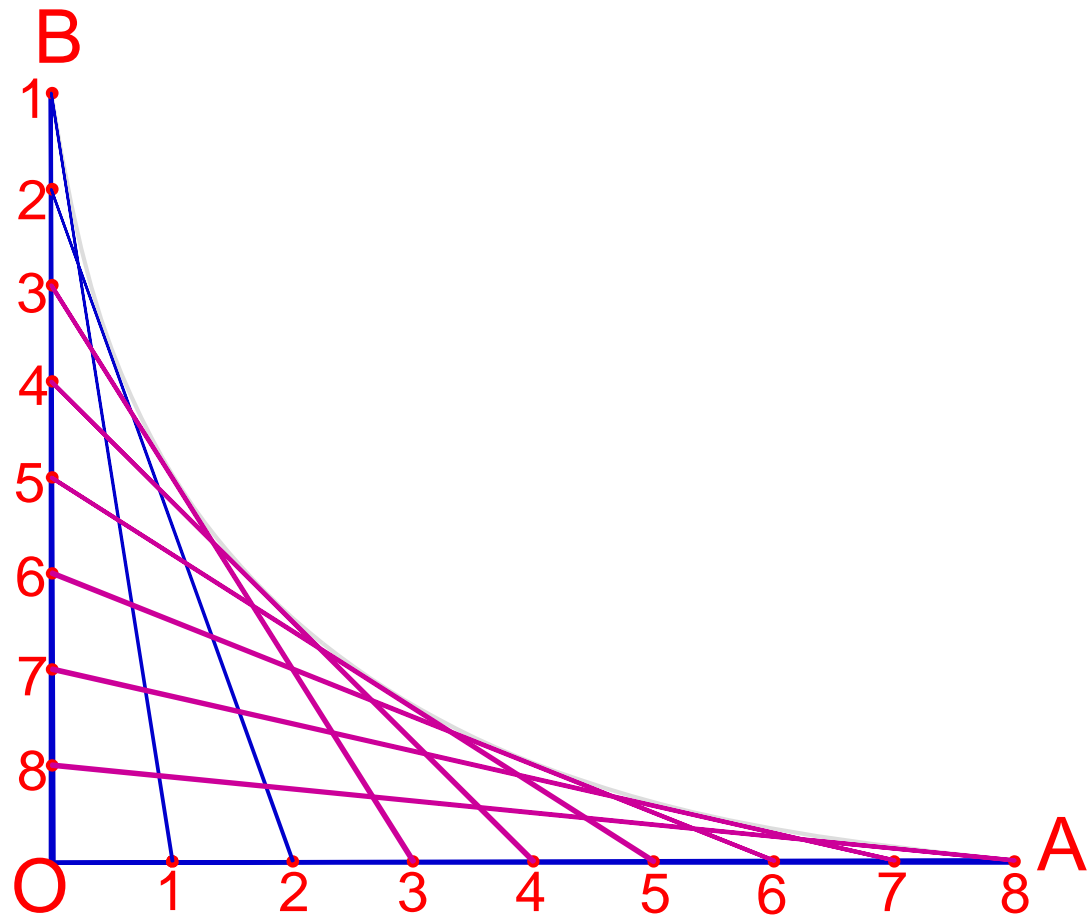
包絡線法繪拋物線-3/6

- 連接OA與OB上之標號1。
- 連接OA與OB上之標號2。



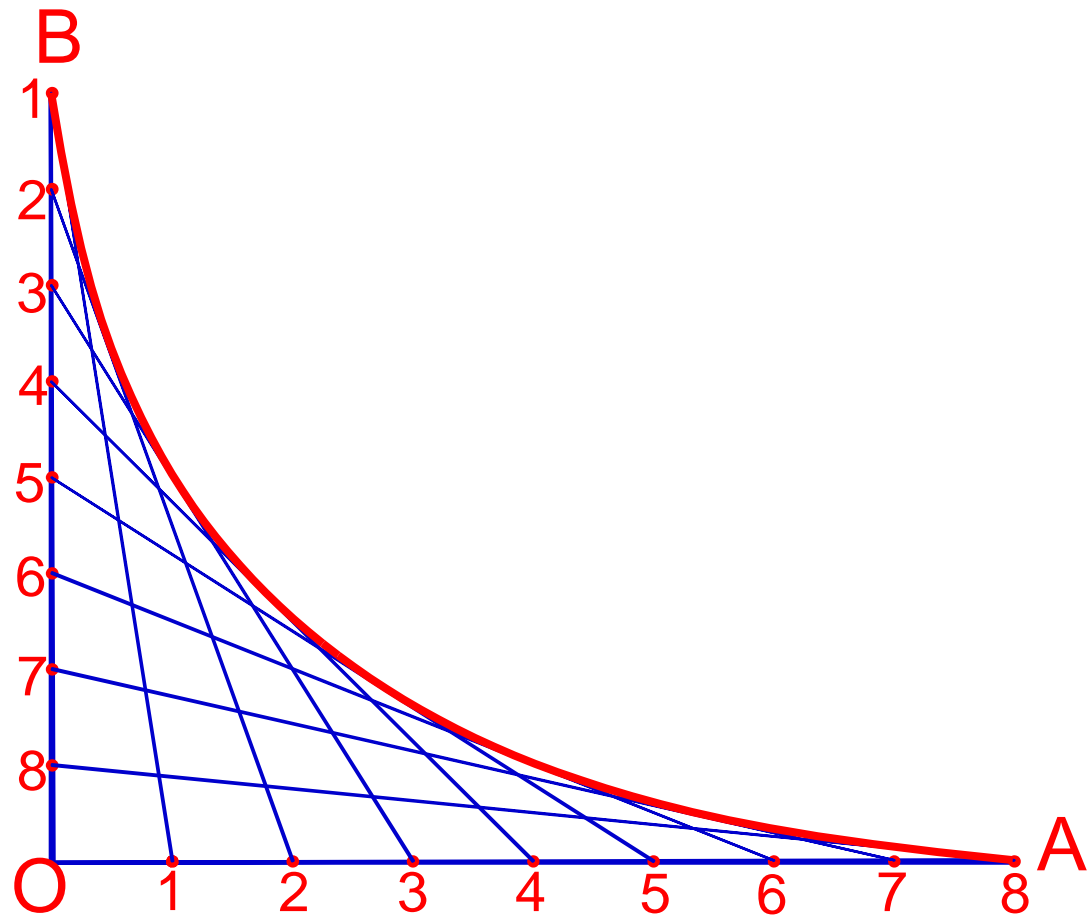
包絡線法繪拋物線-4/6

- 連接OA與OB上之其餘各對應標號。

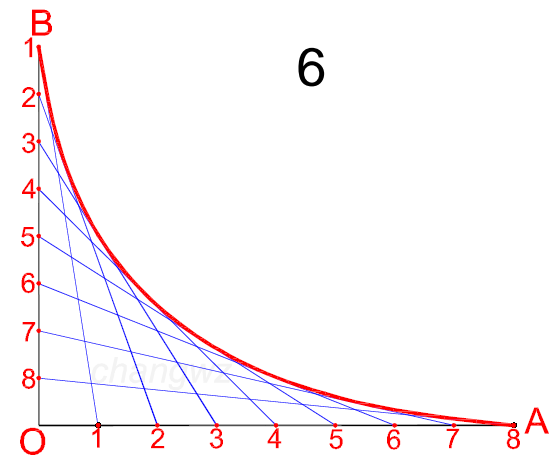
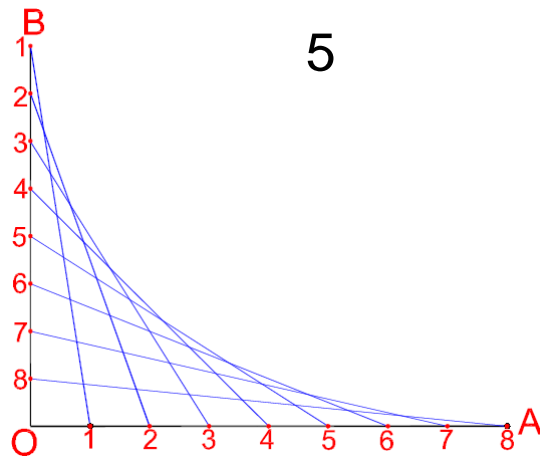
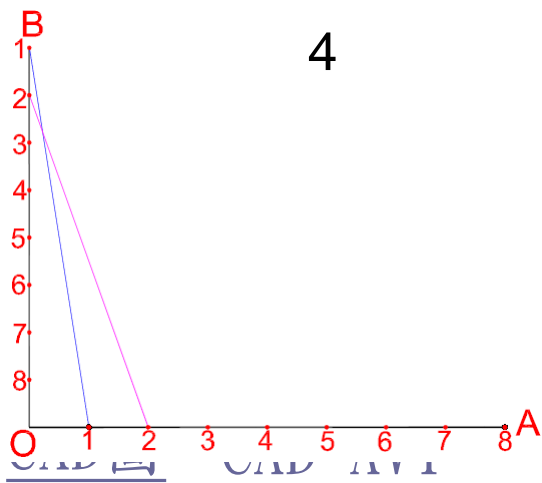
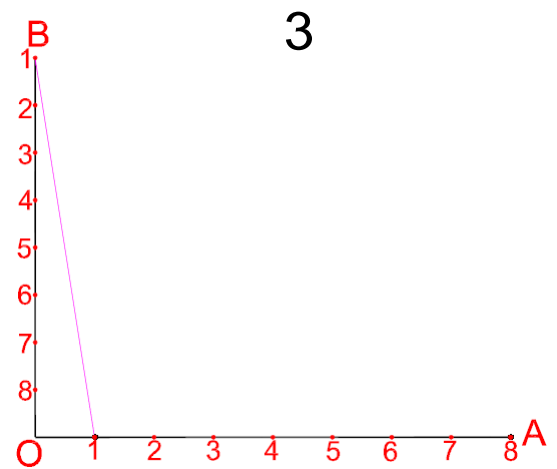
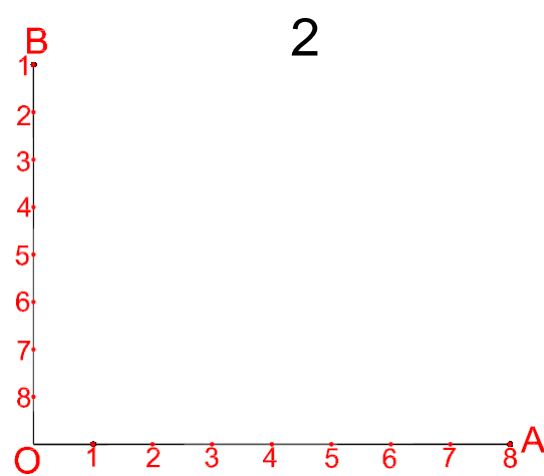
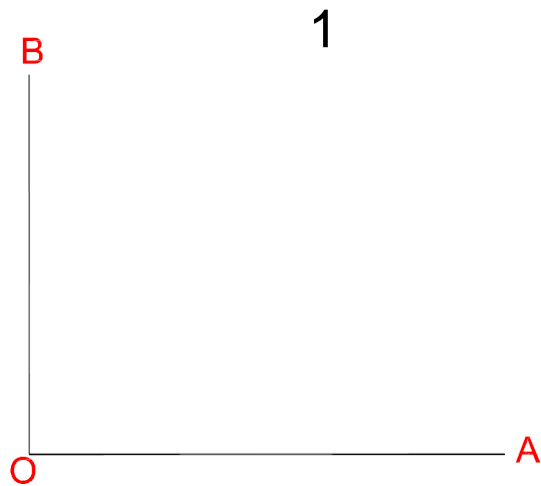


包絡線法繪拋物線-5/6

- 以曲線板作與各線段相切之曲線即為所求拋物線。



包絡線法繪拋物線-6/6



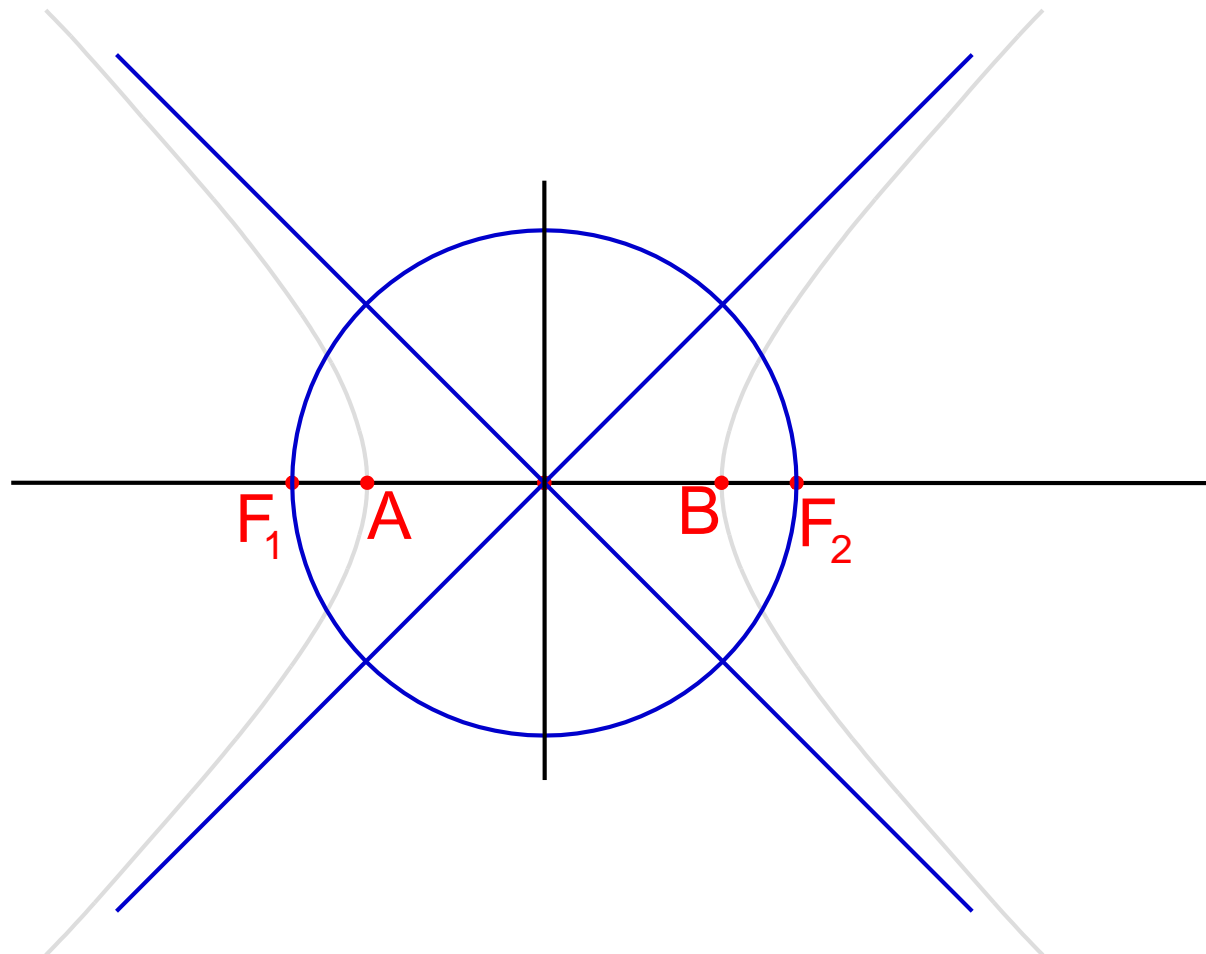
5.7.4 雙曲線

- 平面上—動點與兩固定點（焦點）之距離差恆為一常數，該動點所衍生之軌跡即為雙曲線，雙曲線有一對漸近線，數學方程式為

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

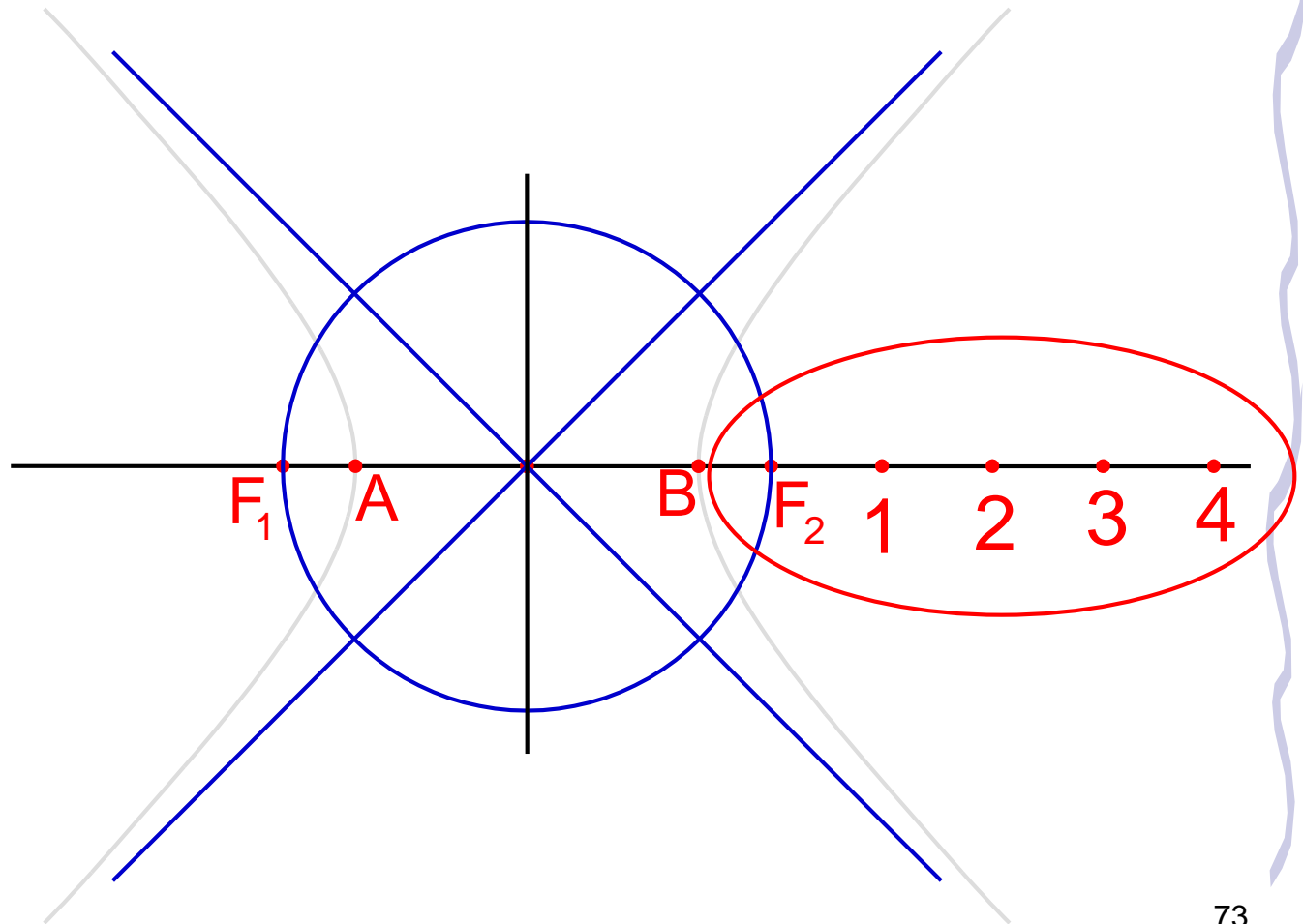
焦點法繪雙曲線-1/8

- 已知：雙曲線之焦點與頂點。
- 求作：雙曲線。



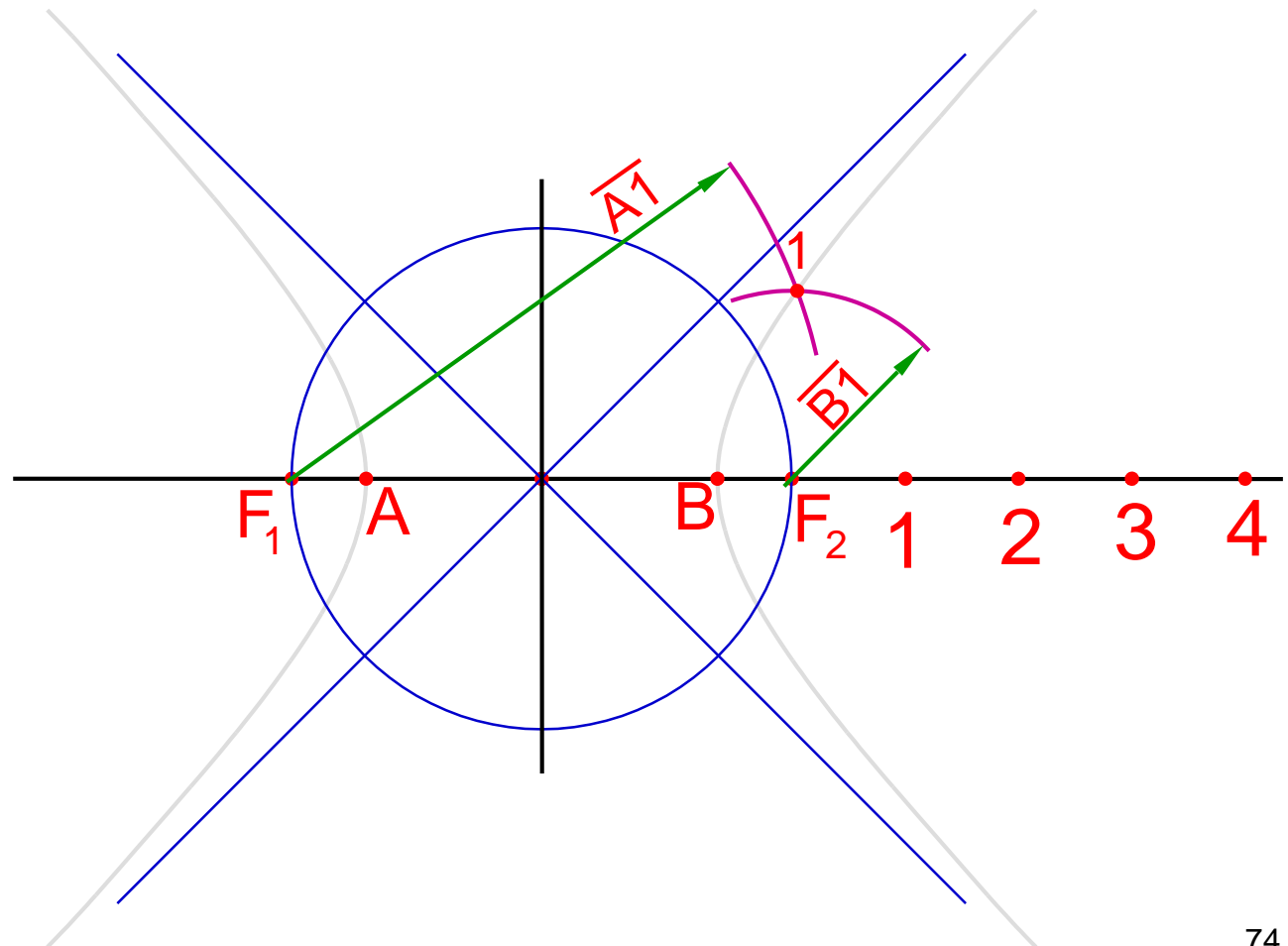
焦點法繪雙曲線-2/8

- 於中心軸上取任意數點1、2、3...



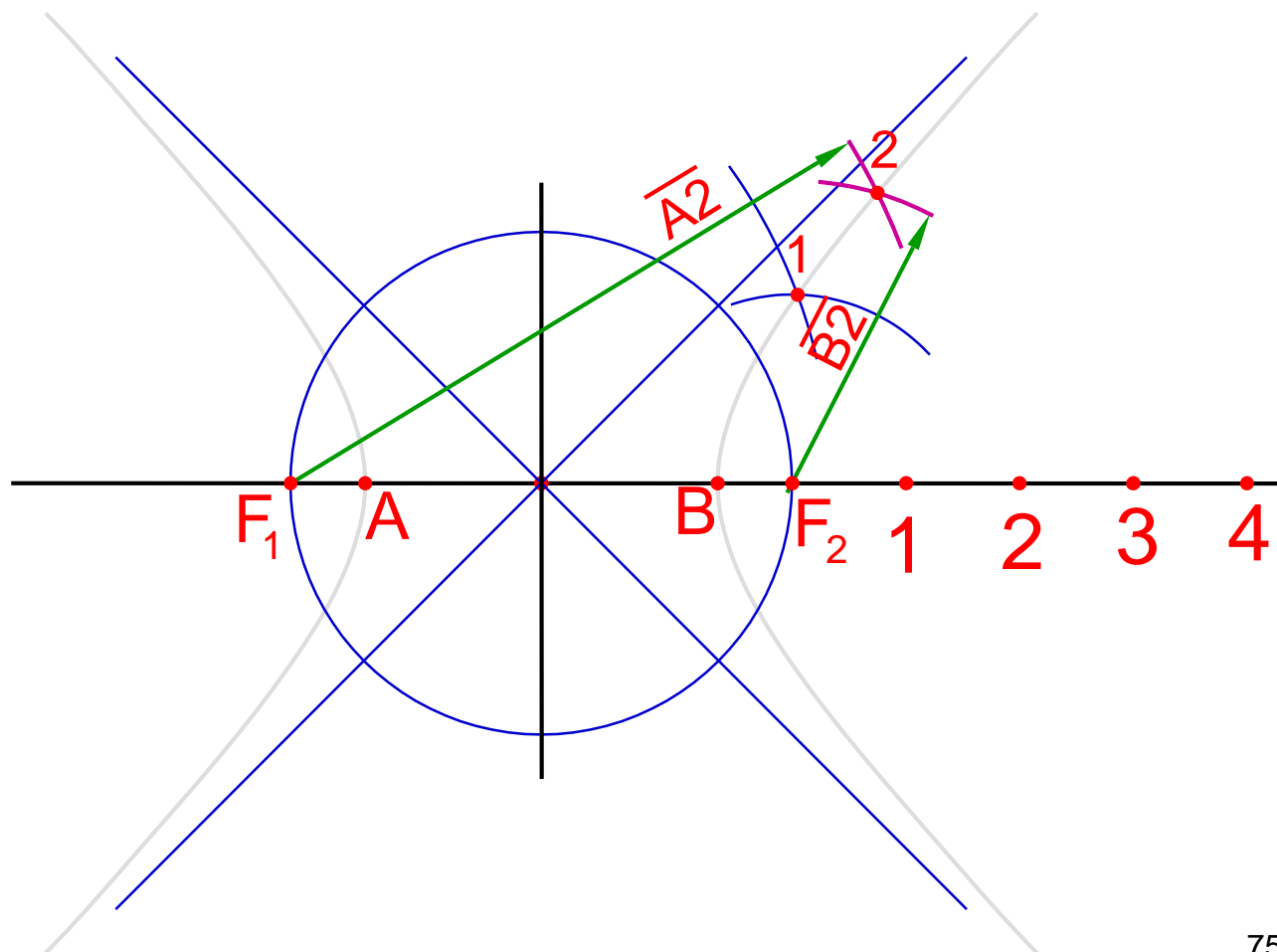
焦點法繪雙曲線-3/8

- 分別以焦點 F_1 、 F_2 為圓心，如圖以 A_1 及 B_1 為半徑畫弧相交得交點1



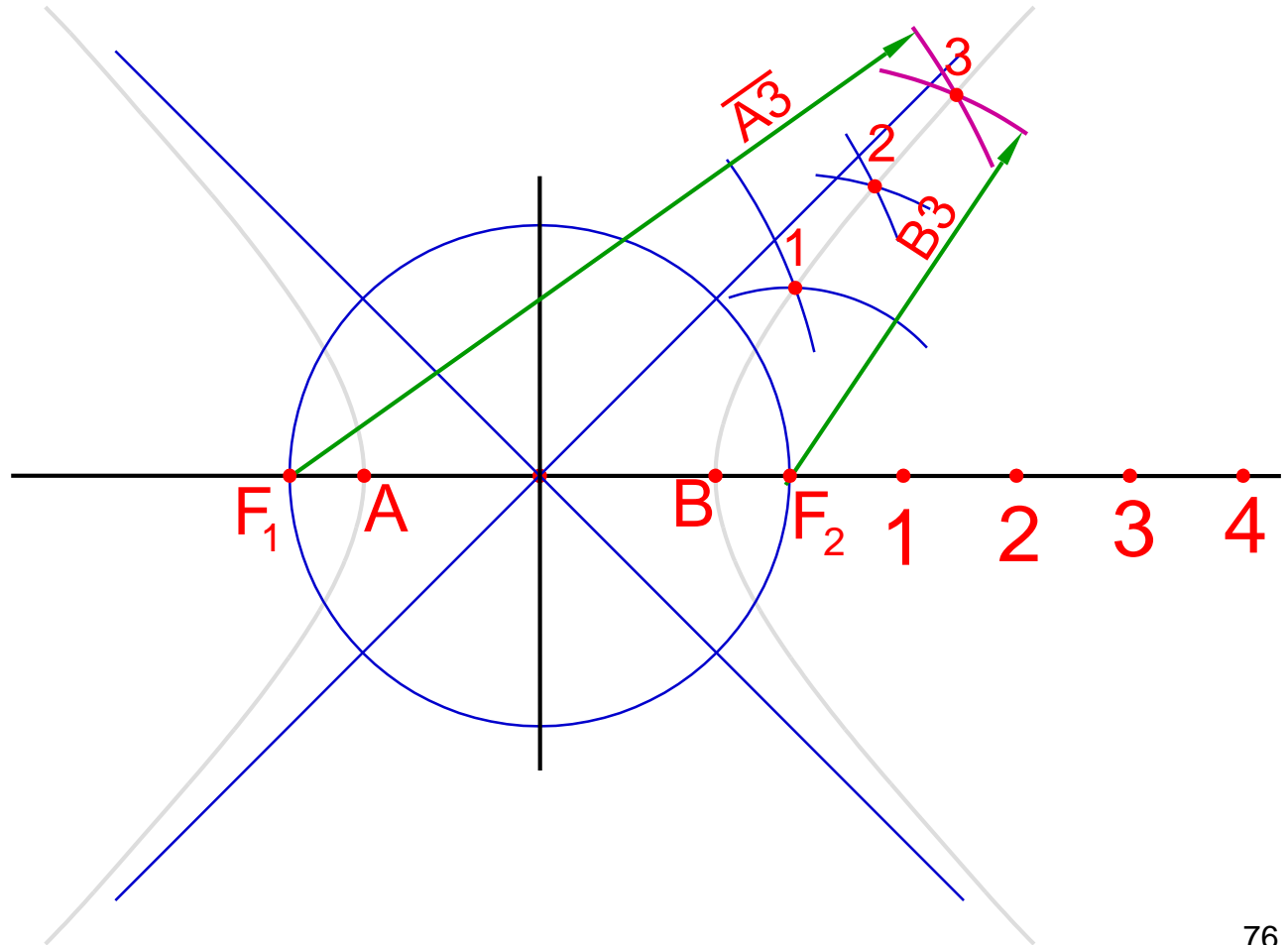
焦點法繪雙曲線-4/8

- 以焦點 F_1 、 F_2 為圓心，如圖以 A_2 及 B_2 為半徑畫弧相交得交點2



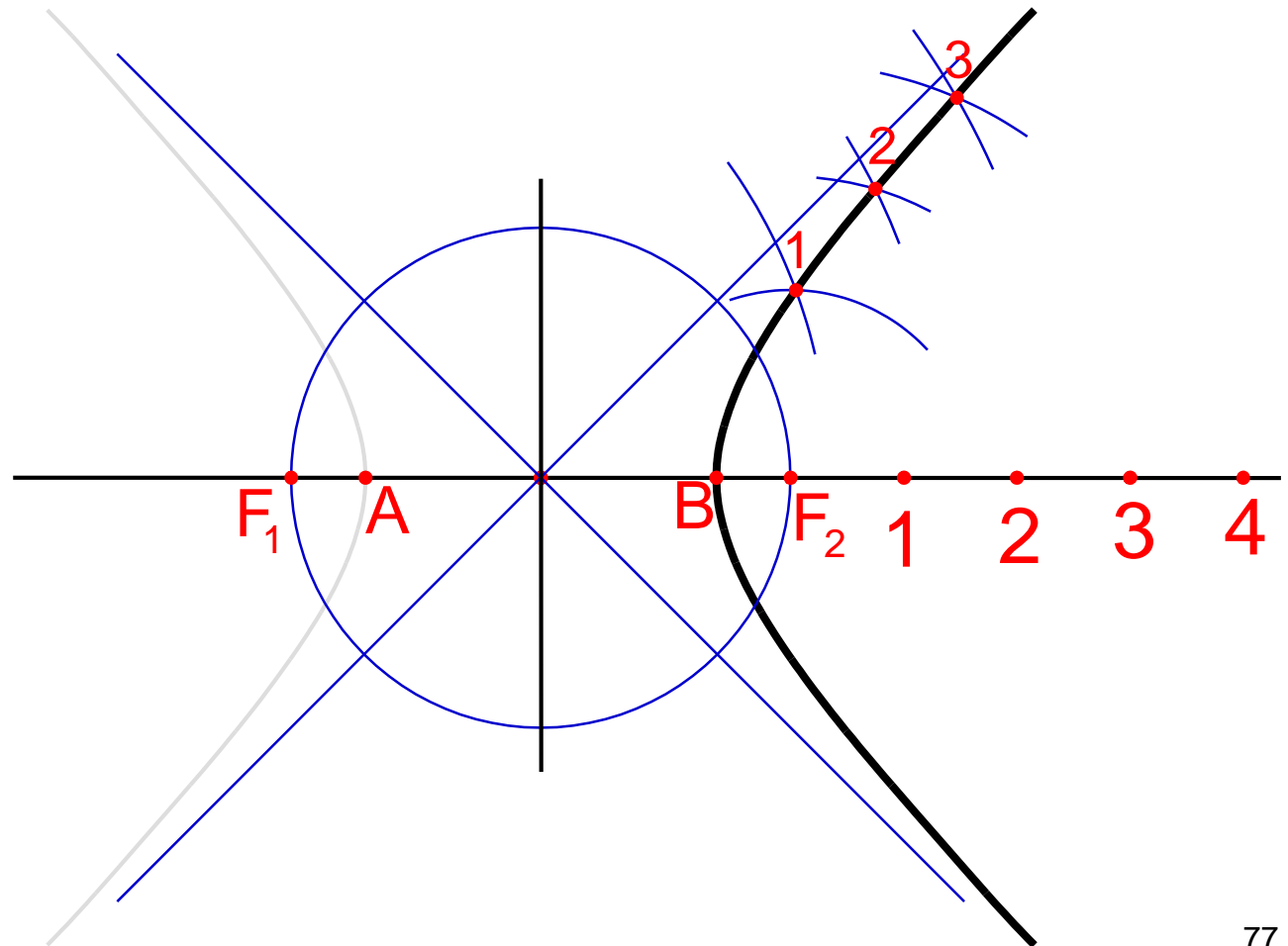
焦點法繪雙曲線-5/8

- 以焦點 F_1 、 F_2 為圓心，如圖以A3及B3為半徑畫弧相交得交點3



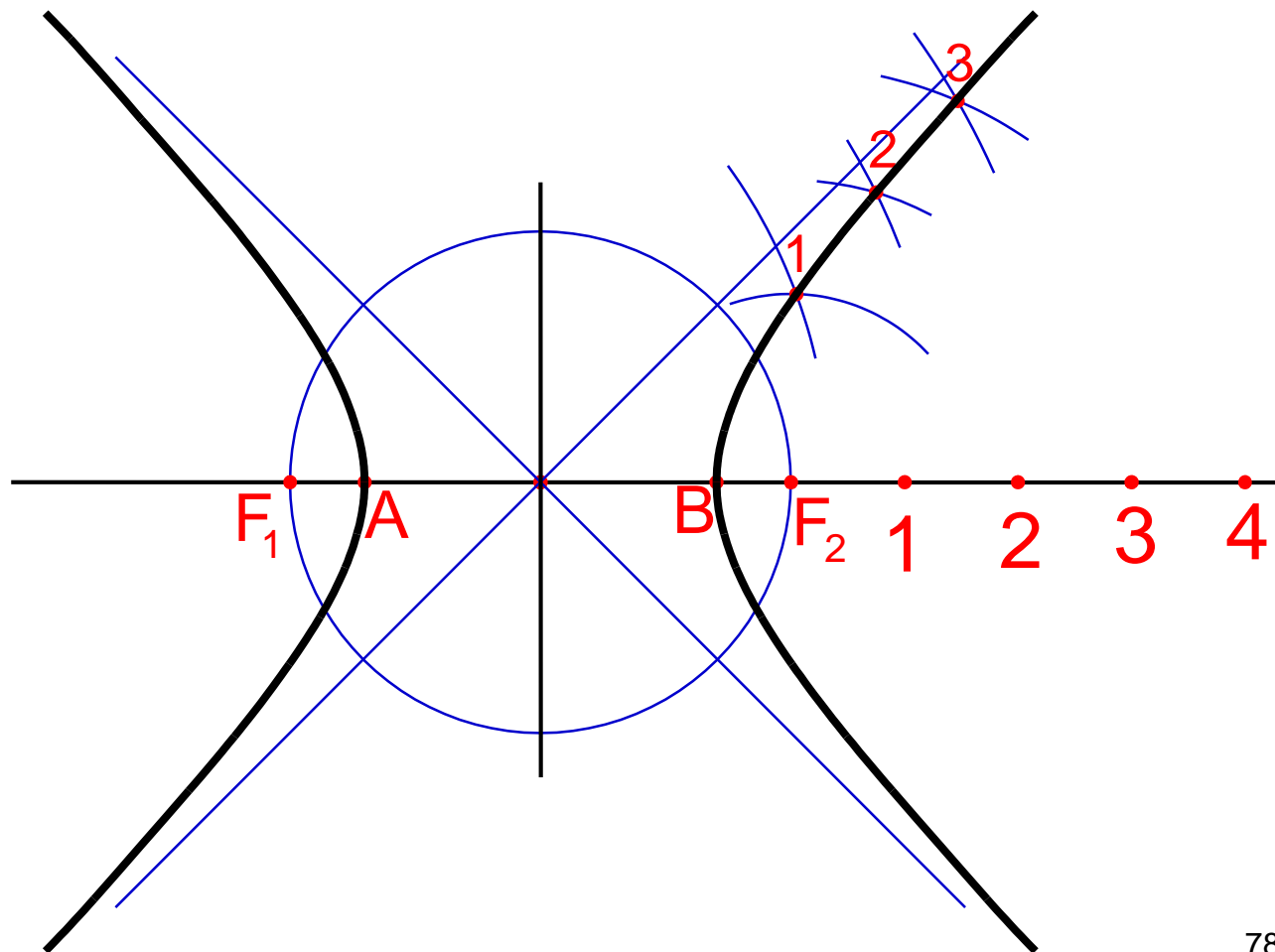
焦點法繪雙曲線-6/8

- 同理可繪出其他各等分點對應之交點，最後以曲線板連接各點即為所求。



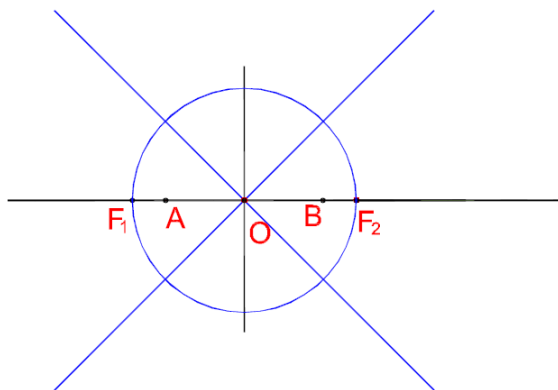
焦點法繪雙曲線-7/8

- 同法繪對稱曲線。

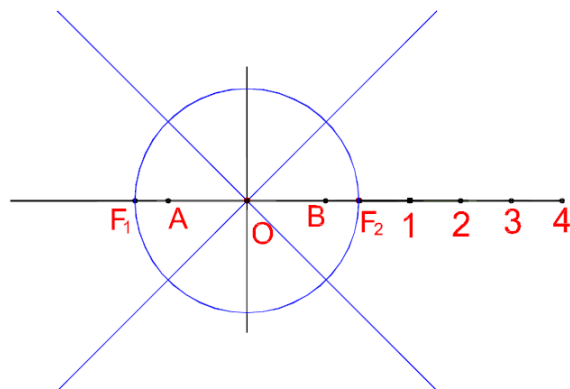


焦點法繪雙曲線-8/8

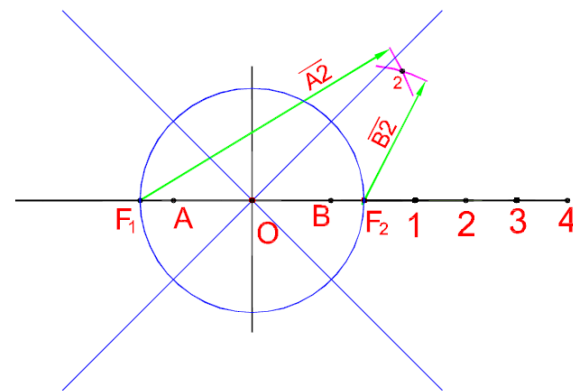
1



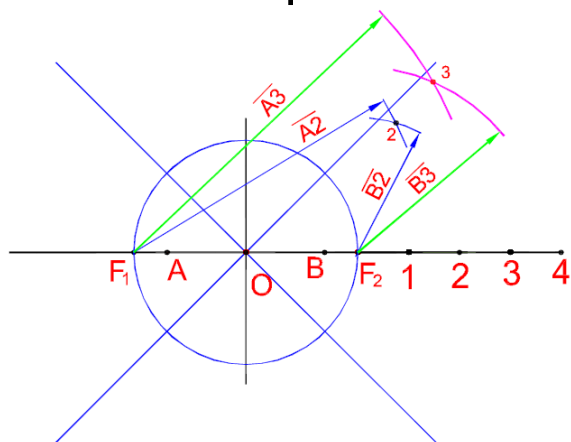
2



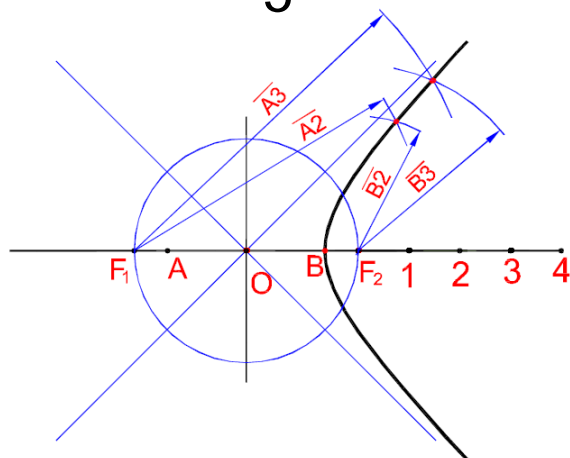
3



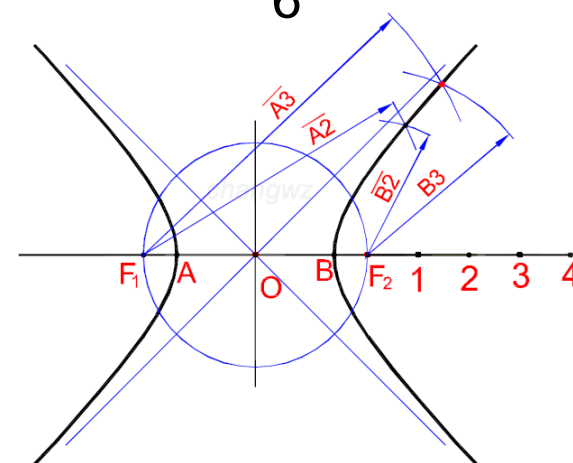
4



5



6

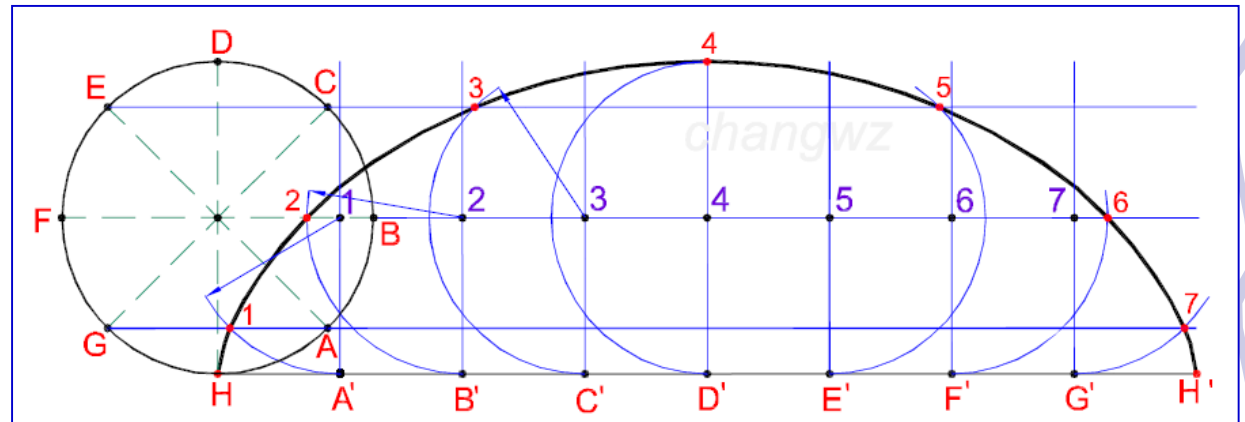
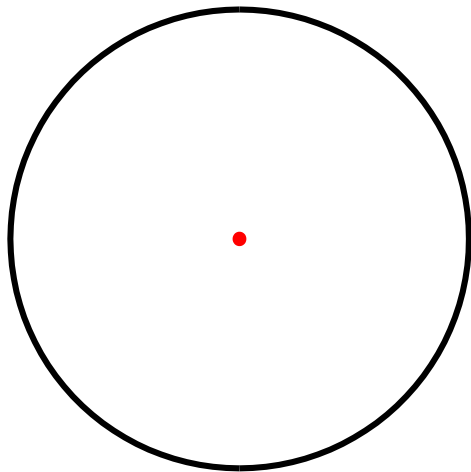


5.8 擺線與其畫法

- 當一圓沿一直線或圓弧滾動時，圓上一點的軌跡稱之為擺線。
- 當沿直線滾動時所產生的軌跡稱之為正擺線
- 沿一圓周內側滾動時所產生的軌跡稱之為內擺線
- 沿一圓周外側滾動時所產生的軌跡稱之為外擺線。

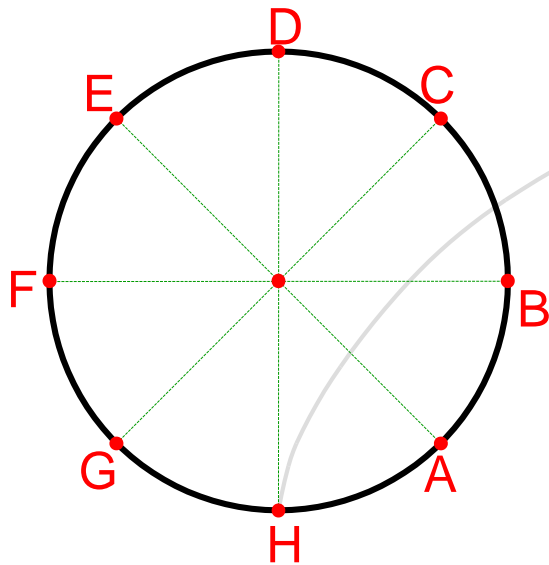
5.8.1 畫正擺線-1/9

- 已知：一滾動圓。
- 求作：正擺線。



5.8.1 畫正擺線-2/9

- 將滾動圓分成適當之等分。

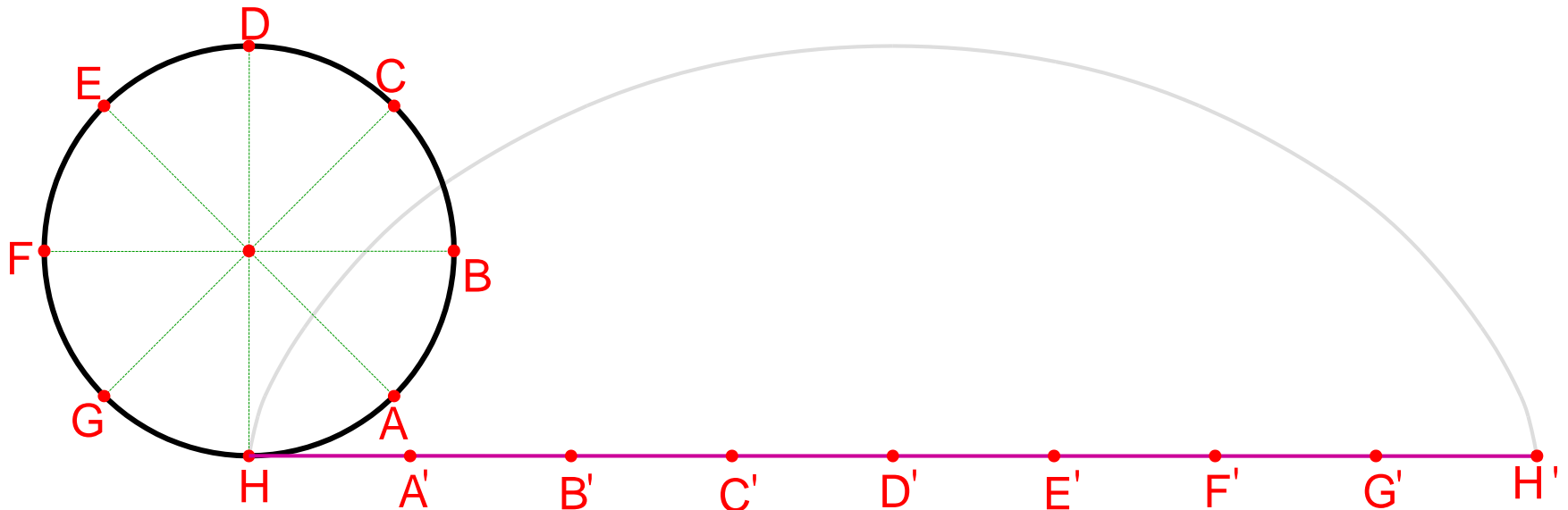


CAD圖

CAD-AVI

5.8.1 畫正擺線-3/9

- 畫滾動圓之切線，將各等分之弧長展開於切線上。

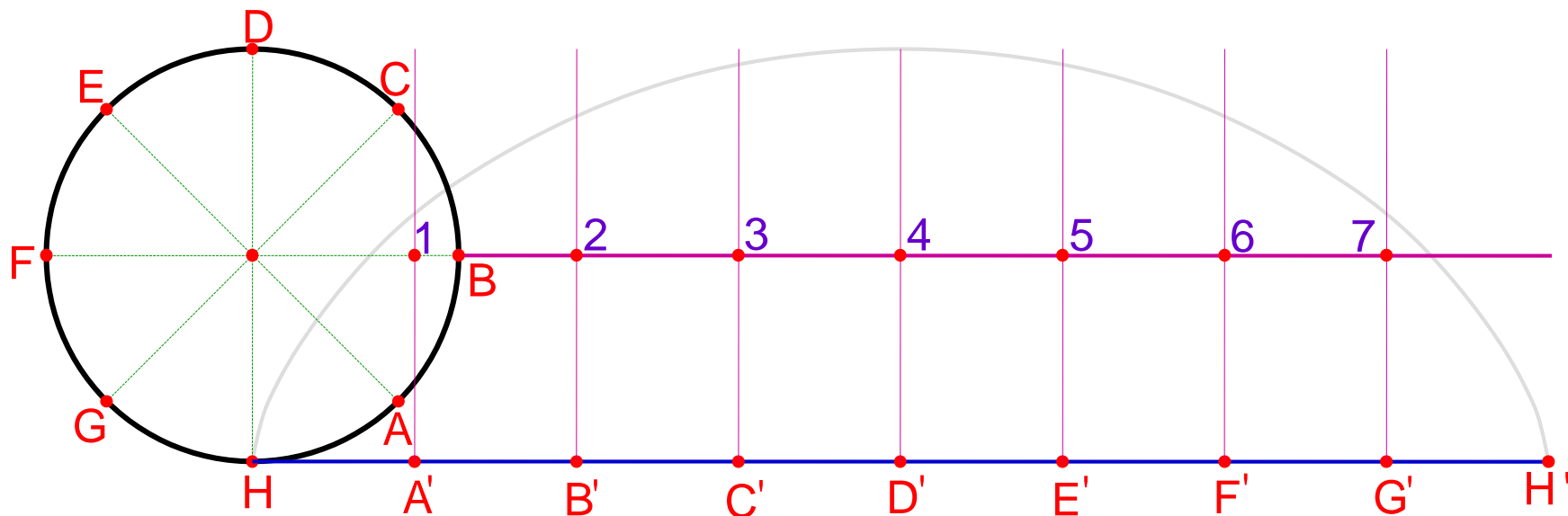


CAD圖

CAD-AVI

5.8.1 畫正擺線-4/9

- 過圓心O作水平線，與過切線上各等分點作垂線相交，得交點1、2、3...，表示滾動圓之圓心的不同位置。

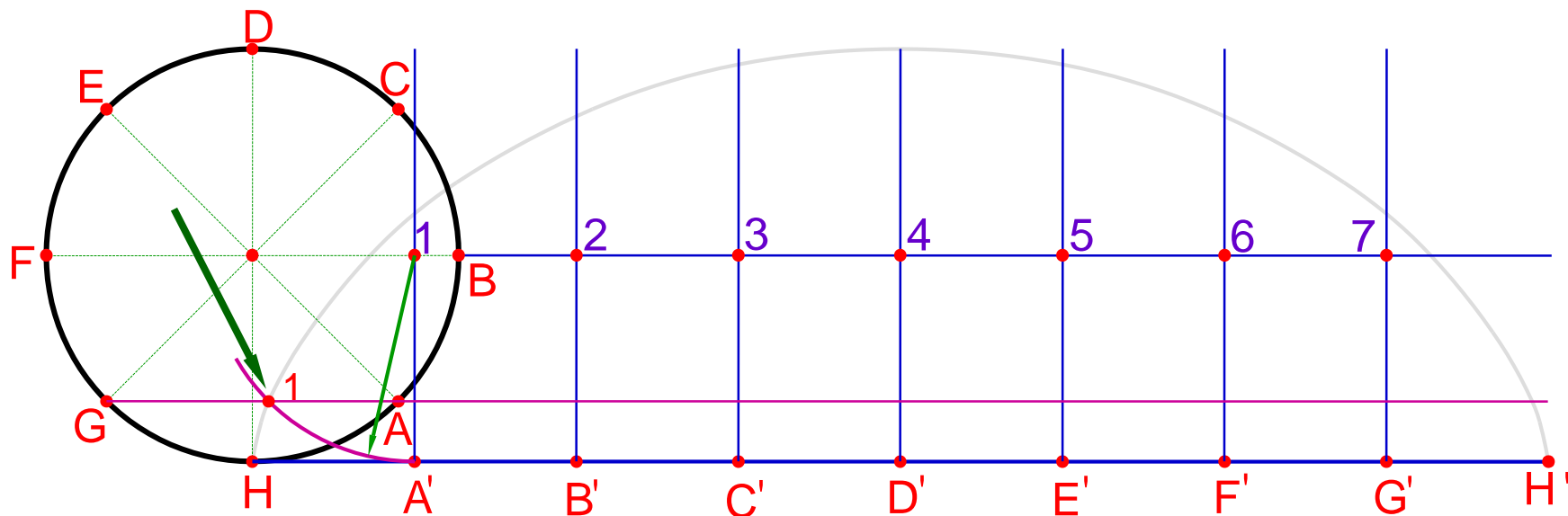


CAD圖

CAD-AVI

5.8.1 畫正擺線-5/9

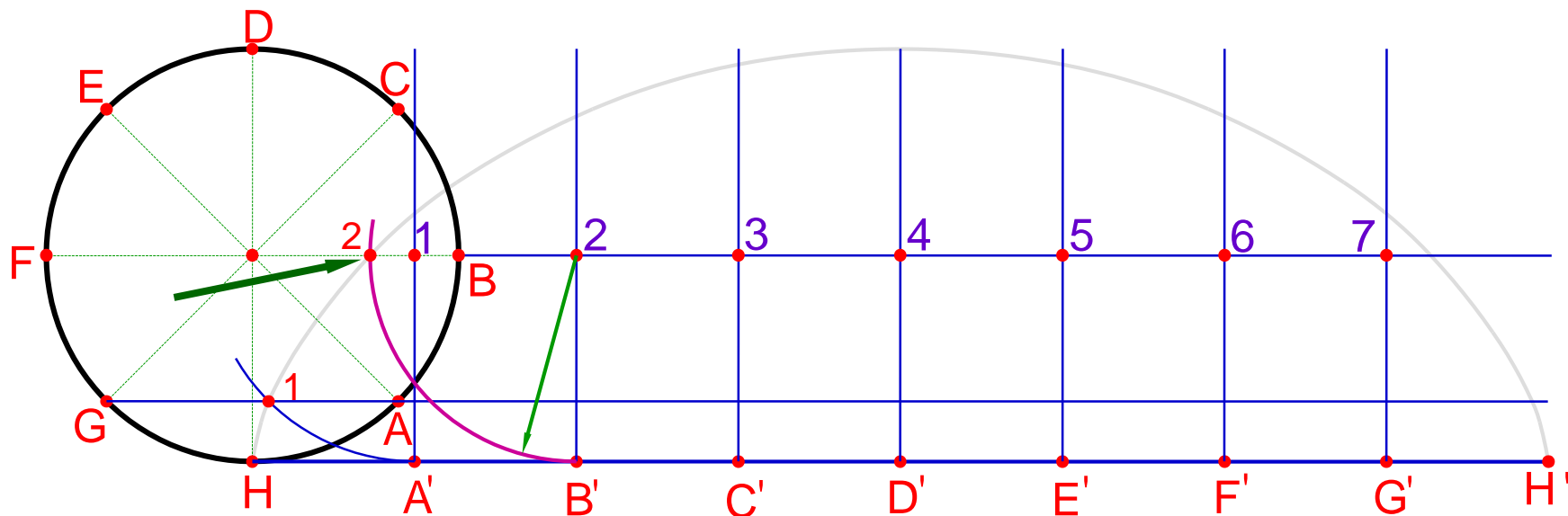
- 以1為圓心，滾動圓之半徑長畫圓，與過滾動圓對應之等分點G作水平線，兩者之交點即為曲線上的點1。



5.8.1 畫正擺線-6/9

- 以2為圓心，滾動圓之半徑長畫圓，與過滾動圓對應之等分點F作水平線，兩者之交點即為曲線上的點2

。

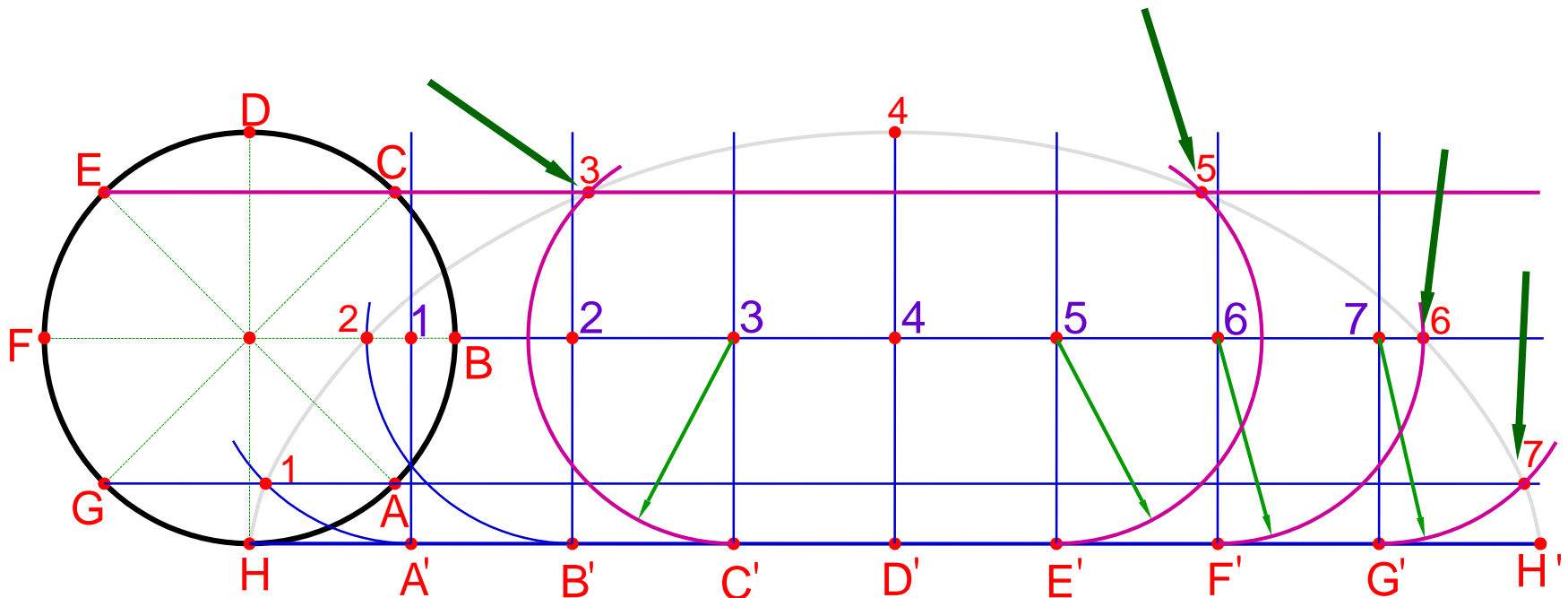


CAD圖

CAD-AVI

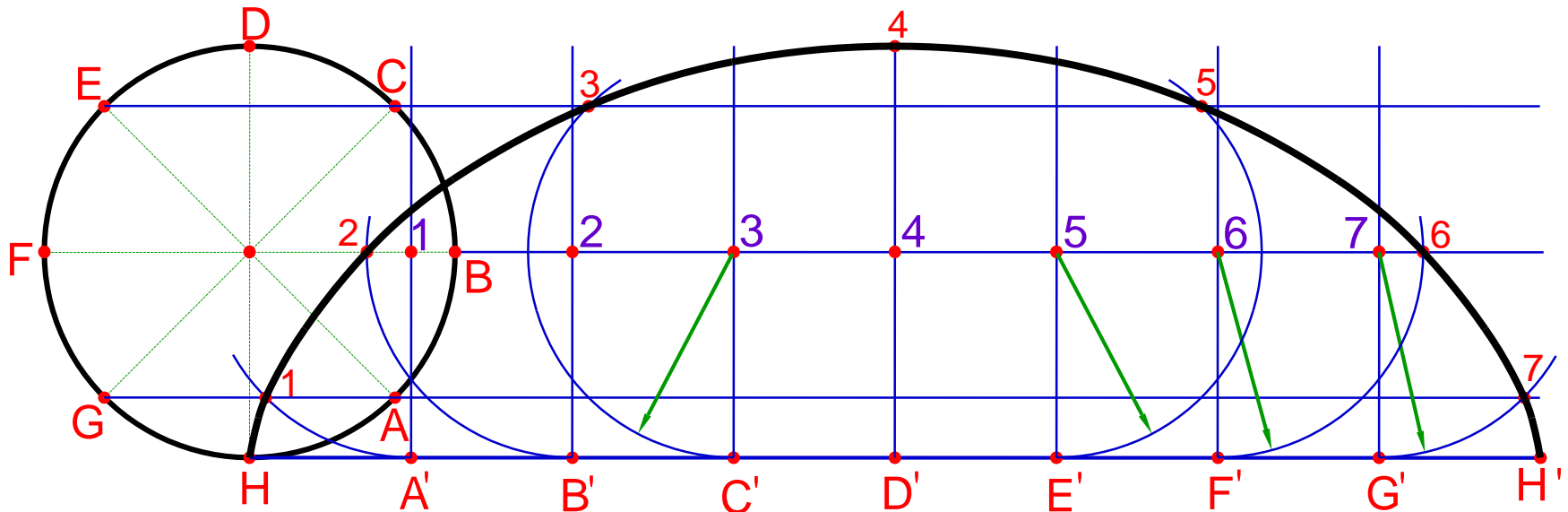
5.8.1 畫正擺線-7/9

- 同理求出其他各點。



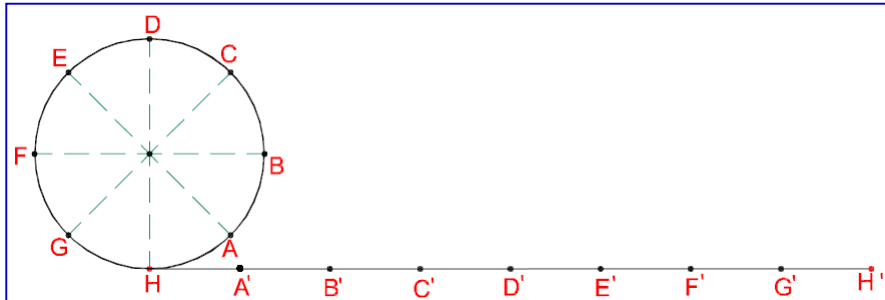
5.8.1 畫正擺線-8/9

- 以曲線板連接各點即為所求。

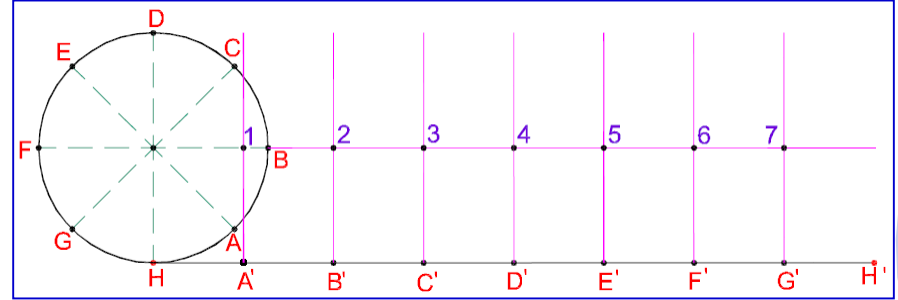


5.8.1 畫正擺線-9/9

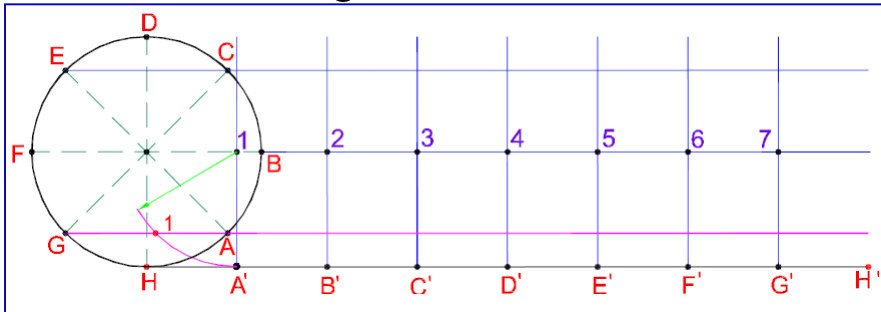
1



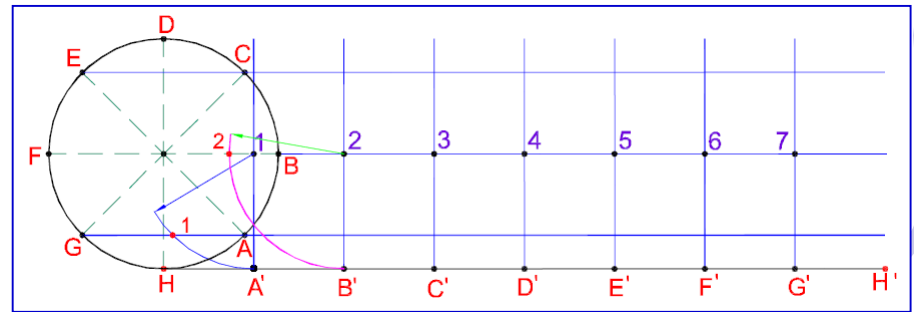
2



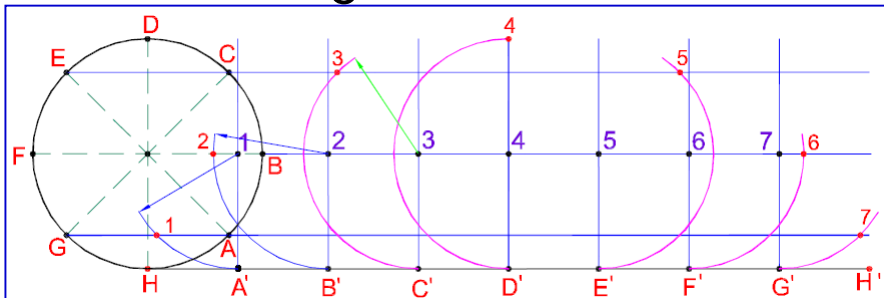
3



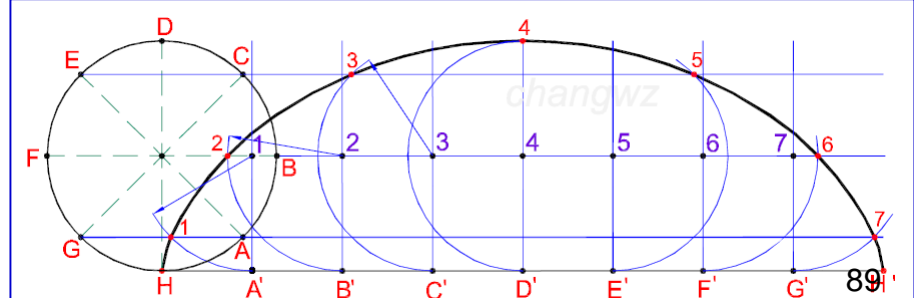
4



5

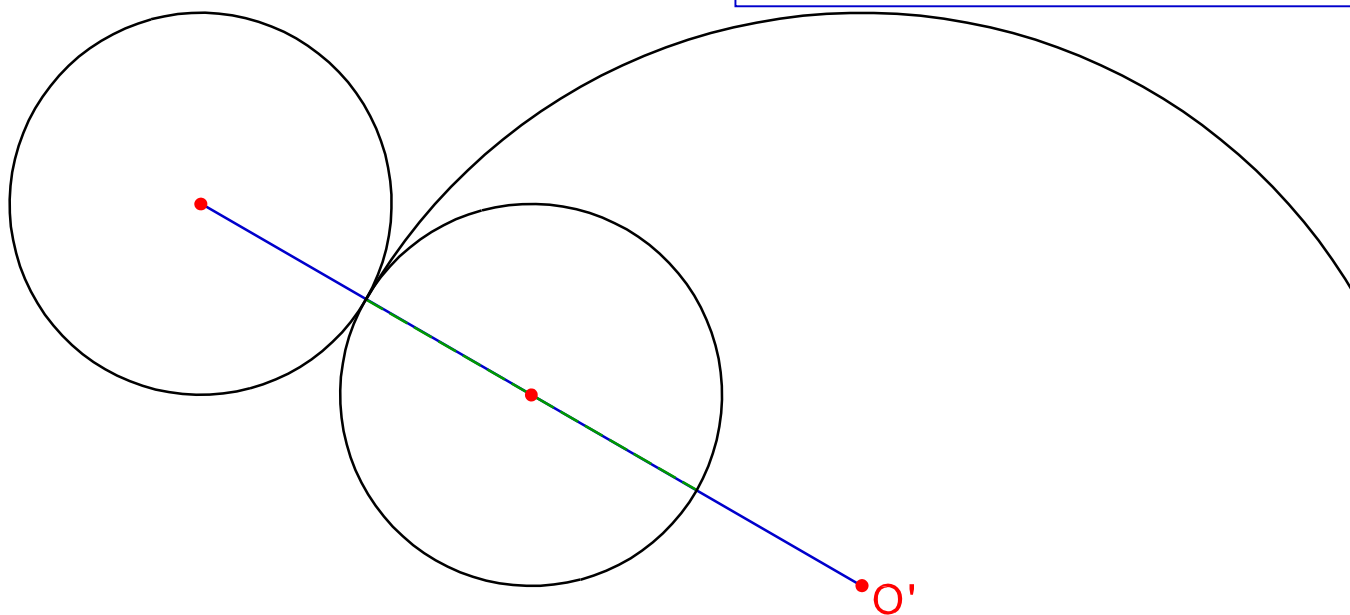
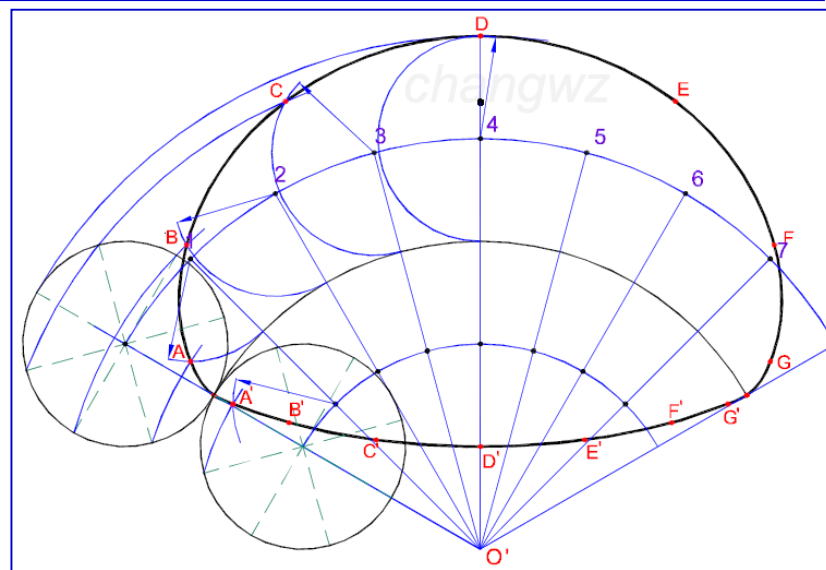


6



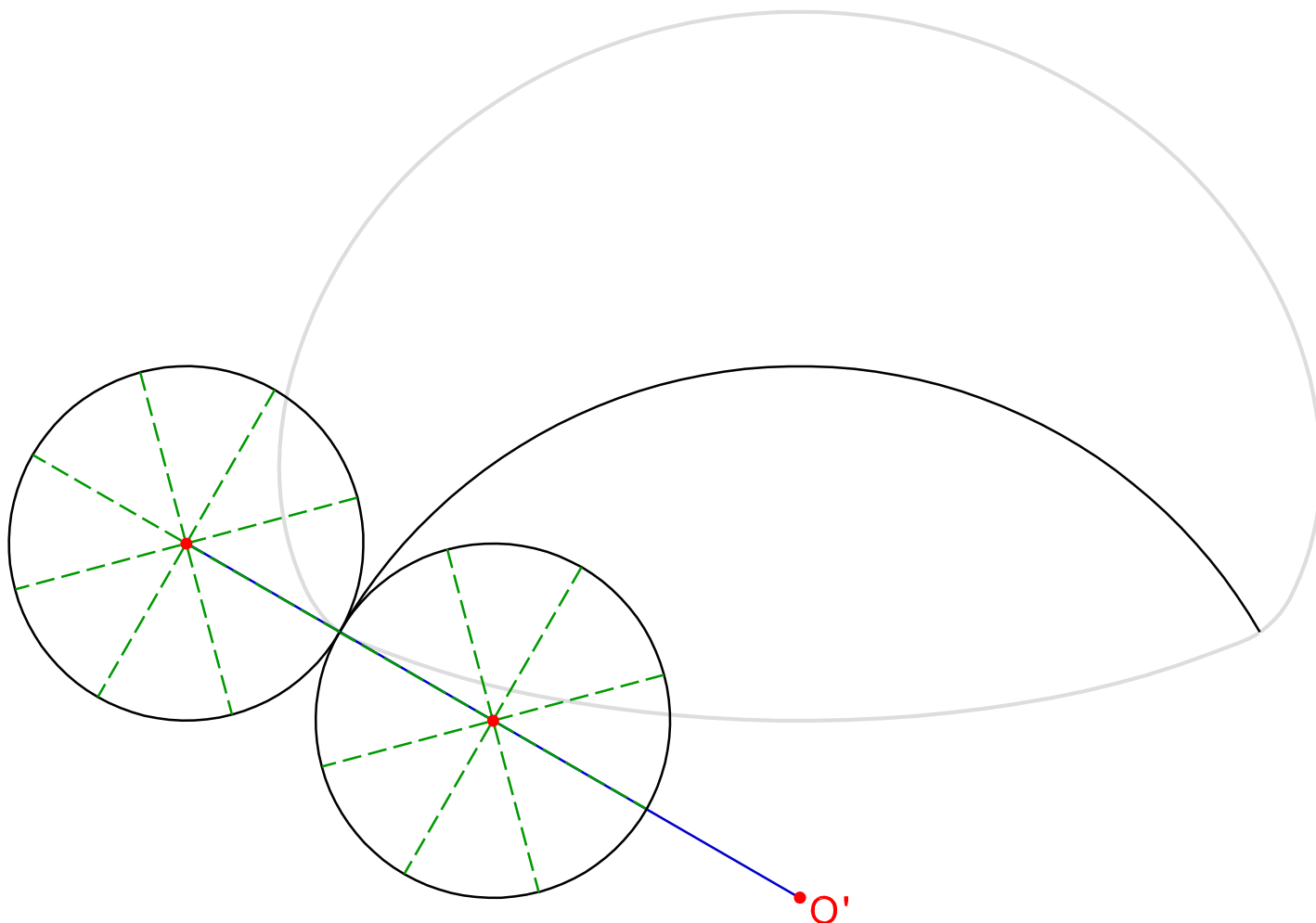
5.8.2 畫內外擺線-1/10

- 已知：一滾動圓及其基圓。
- 求作：內外擺線。



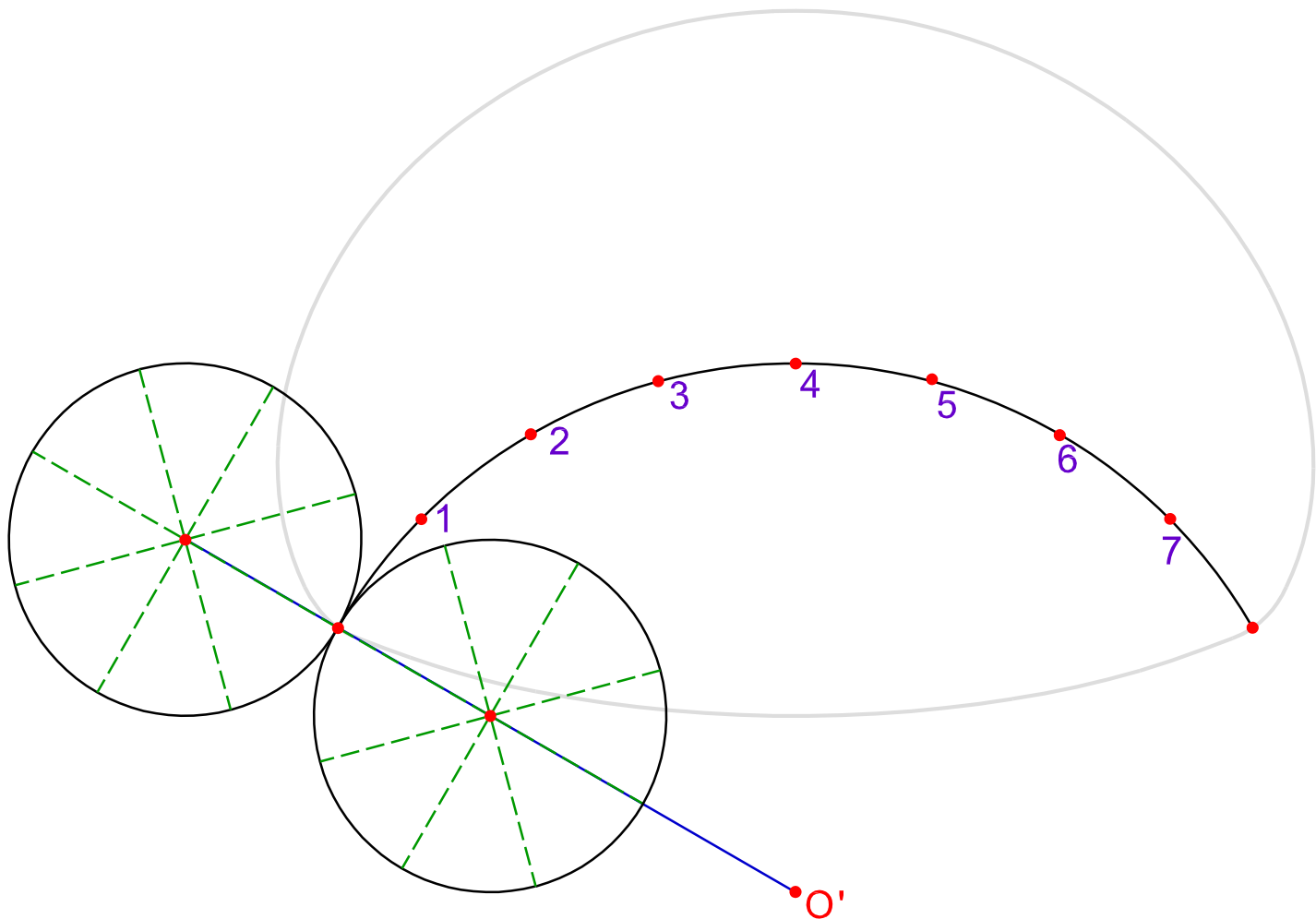
5.8.2 畫內外擺線-2/10

- 將滾動圓分成適當之等分。



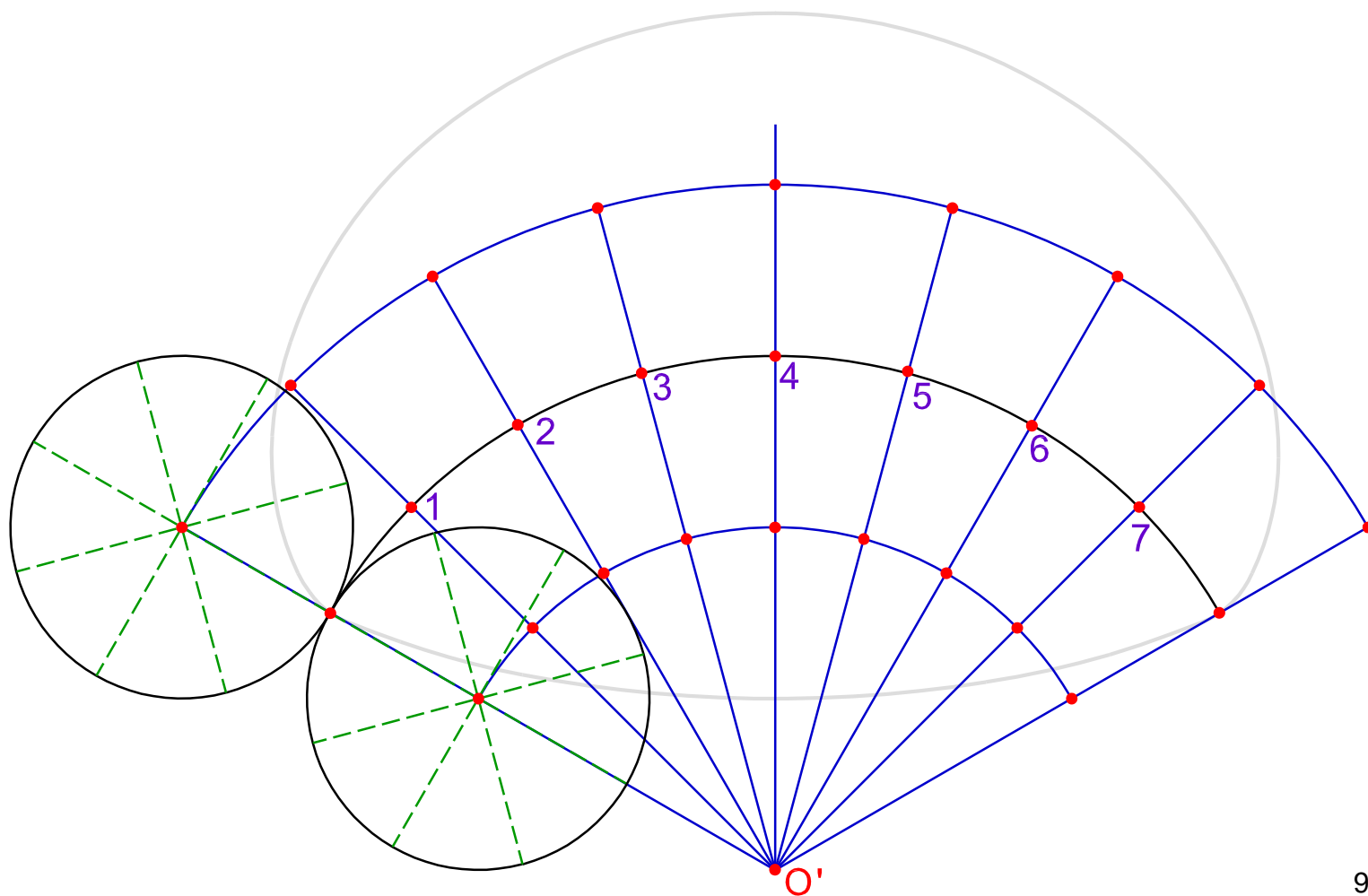
5.8.2 畫內外擺線-3/10

- 將各等分之弧長展開於基圓上。



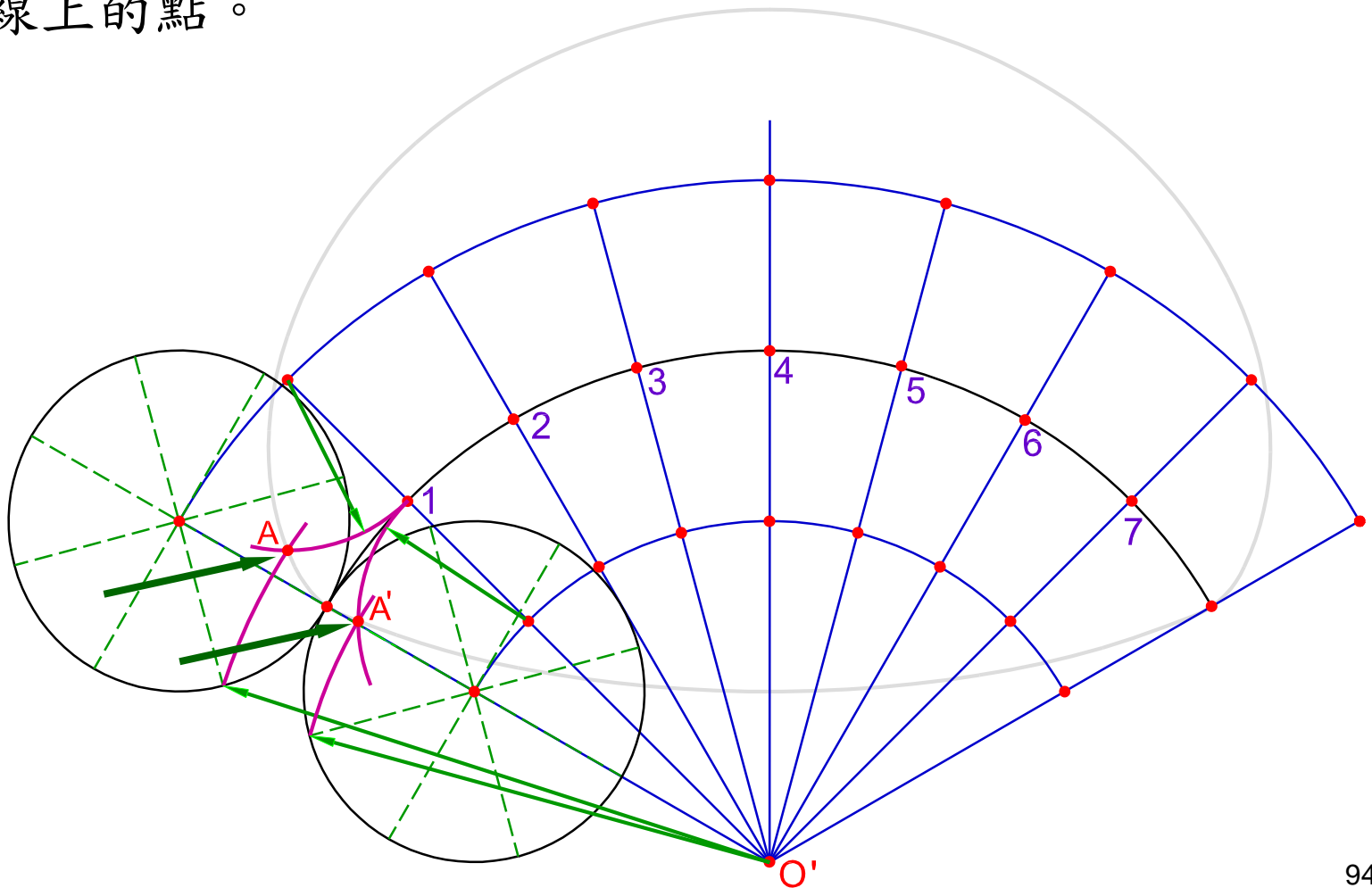
5.8.2 畫內外擺線-4/10

- 連接 O' 與基圓上各等分點，得交點1、2、3...，表示滾動圓之圓心的不同位置。



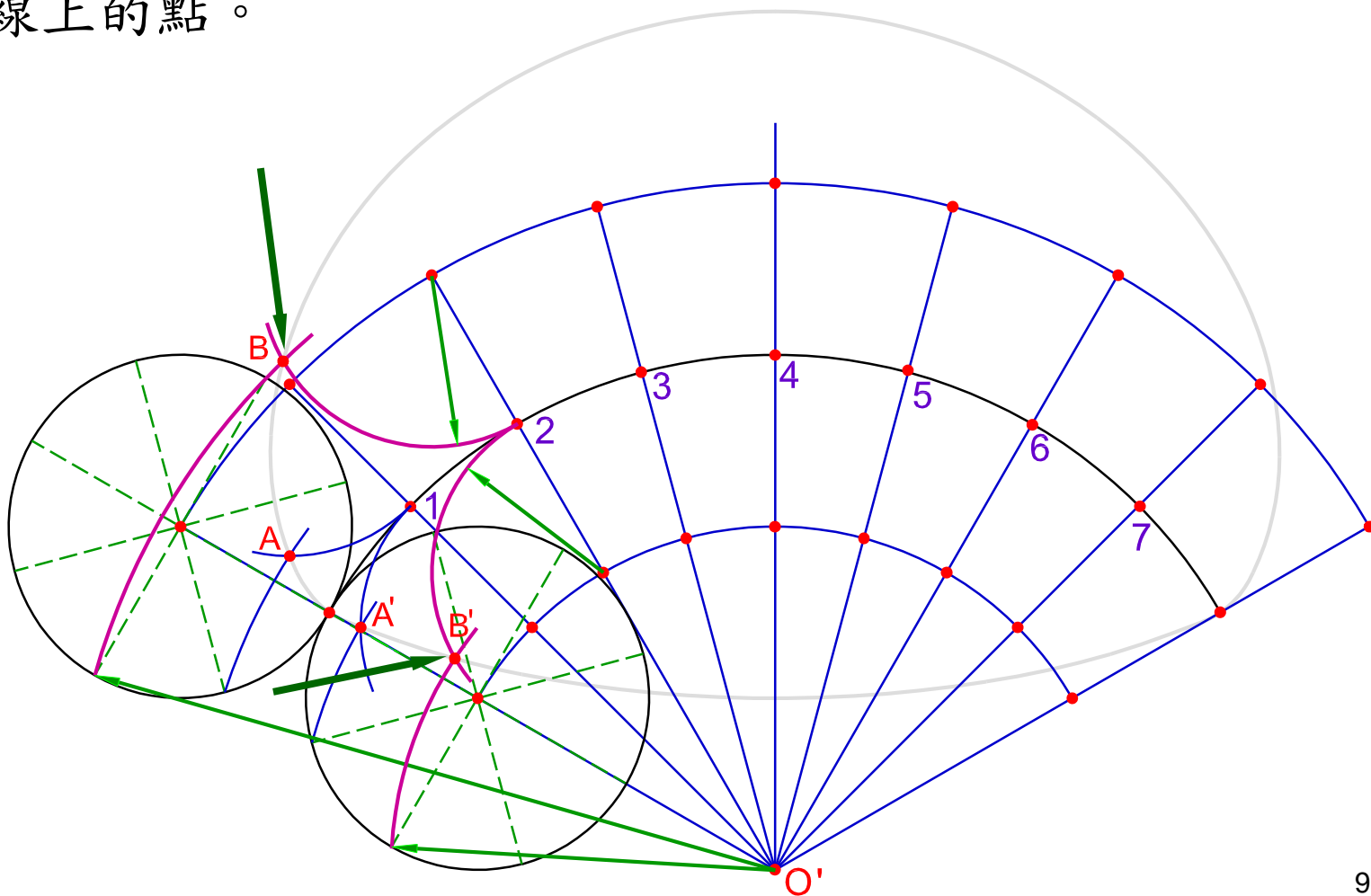
5.8.2 畫內外擺線-5/10

- 以1為圓心，滾動圓之半徑長畫圓弧，及以 O' 為圓心 O' 到滾動圓對應之等分點的距離畫圓，兩者相交於A點，即為曲線上的點。



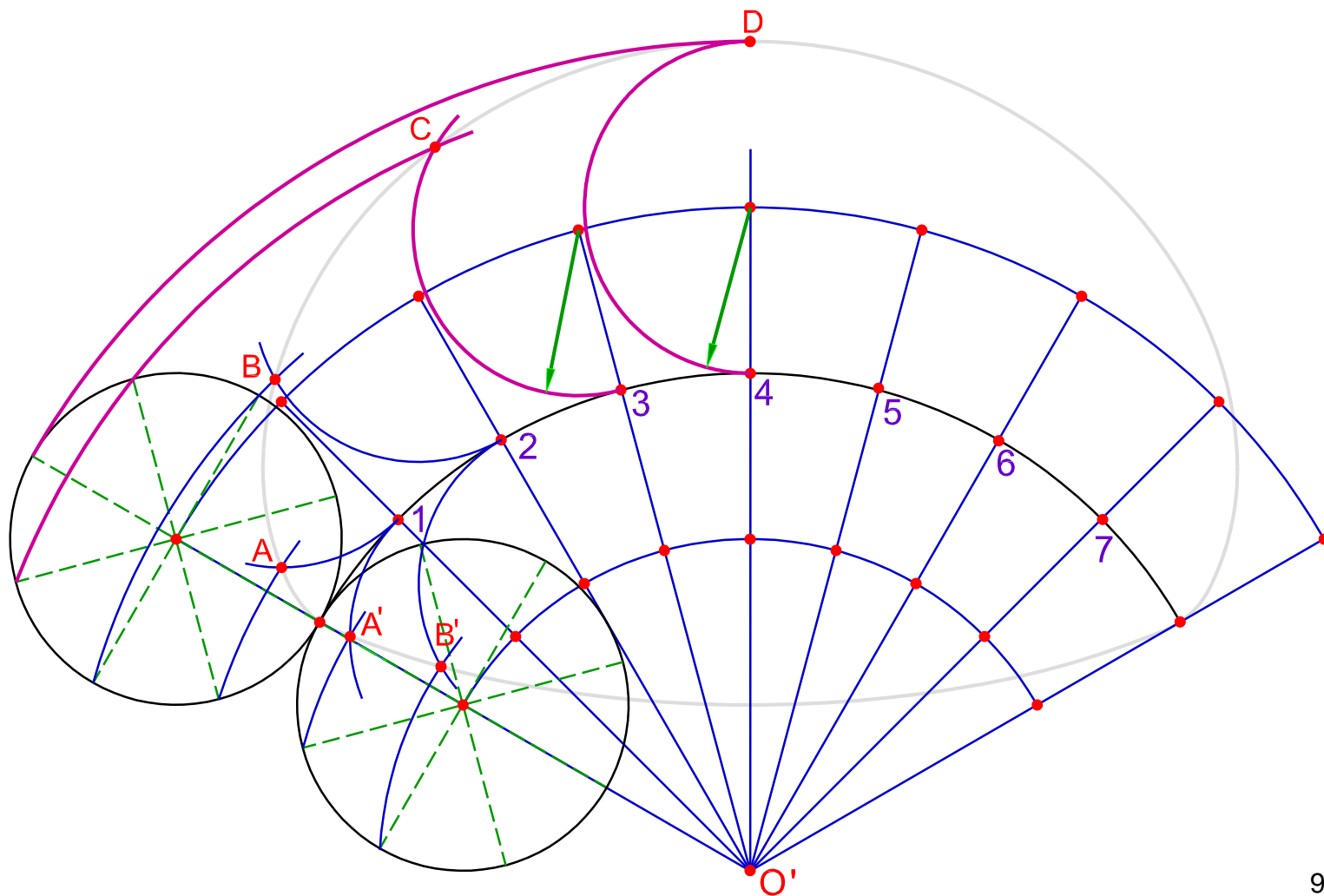
5.8.2 畫內外擺線-6/10

- 以2為圓心，滾動圓之半徑長畫圓弧，及以O'為圓心O'到滾動圓對應之等分點的距離畫圓，兩者相交於B點，即為曲線上的點。



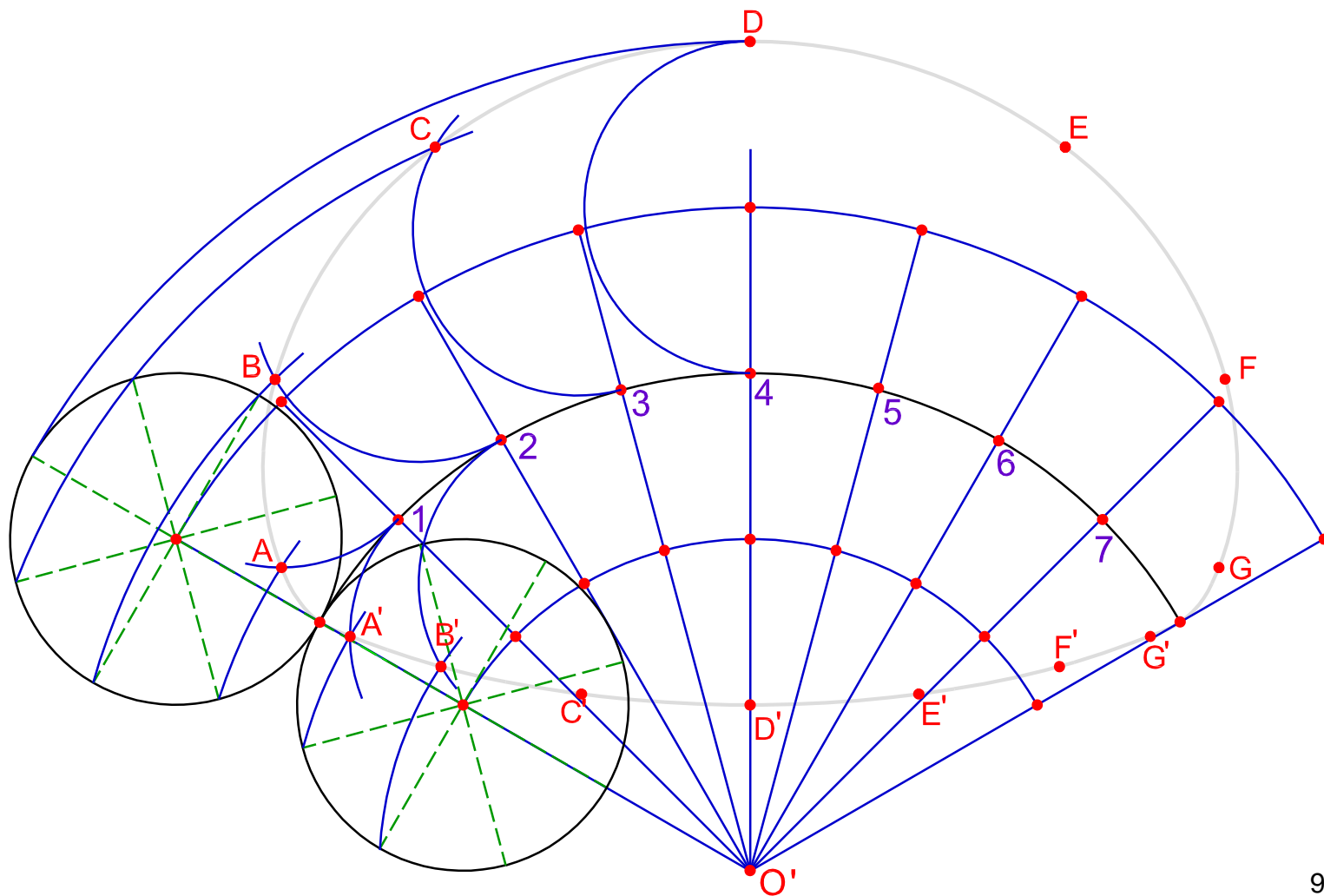
5.8.2 畫內外擺線-7/10

- 同理求出其他各點。



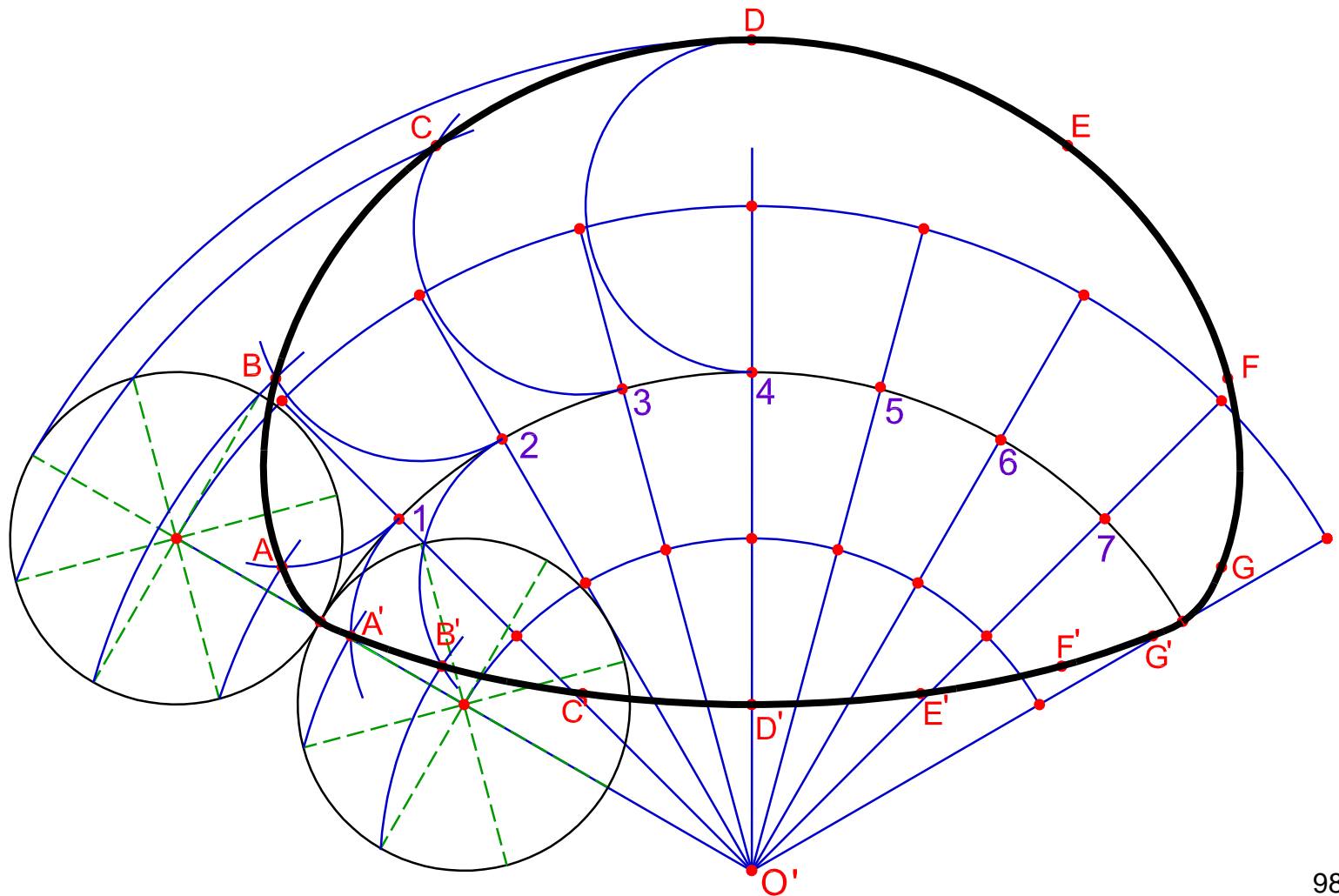
5.8.2 畫內外擺線-8/10

- 同理求出其他各點。

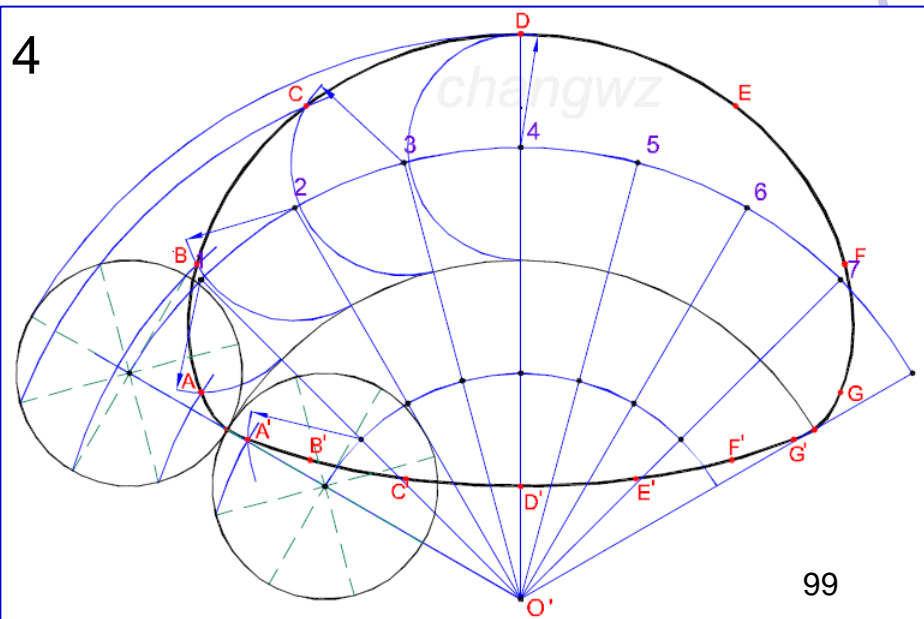
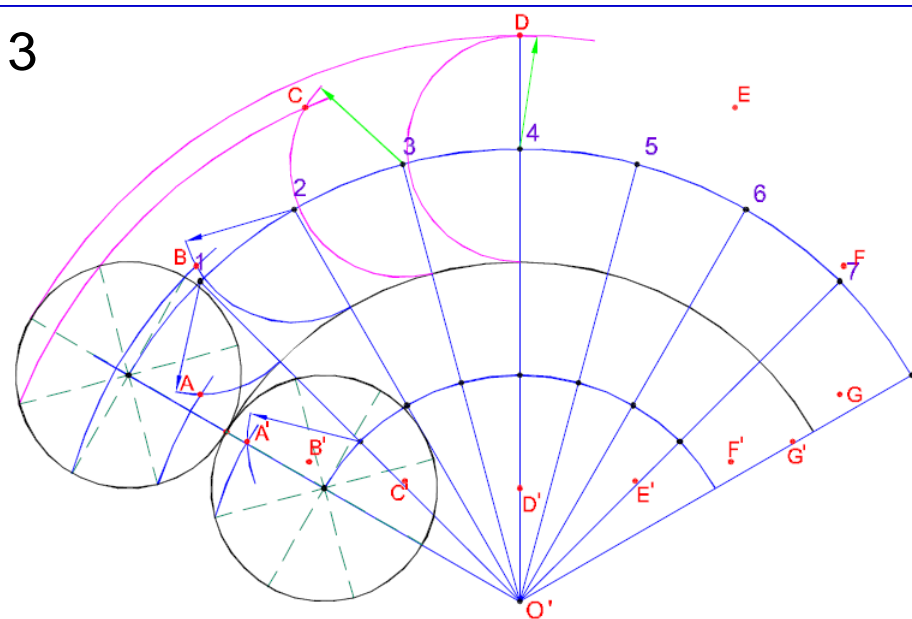
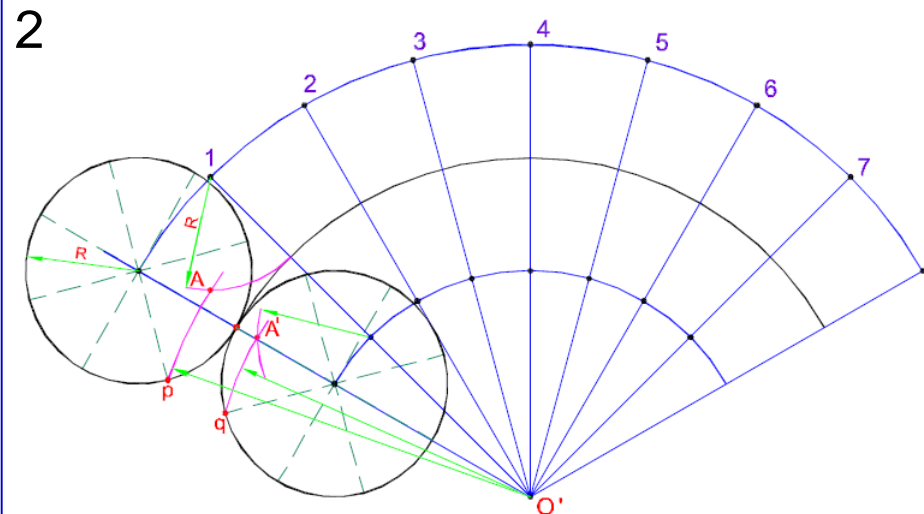
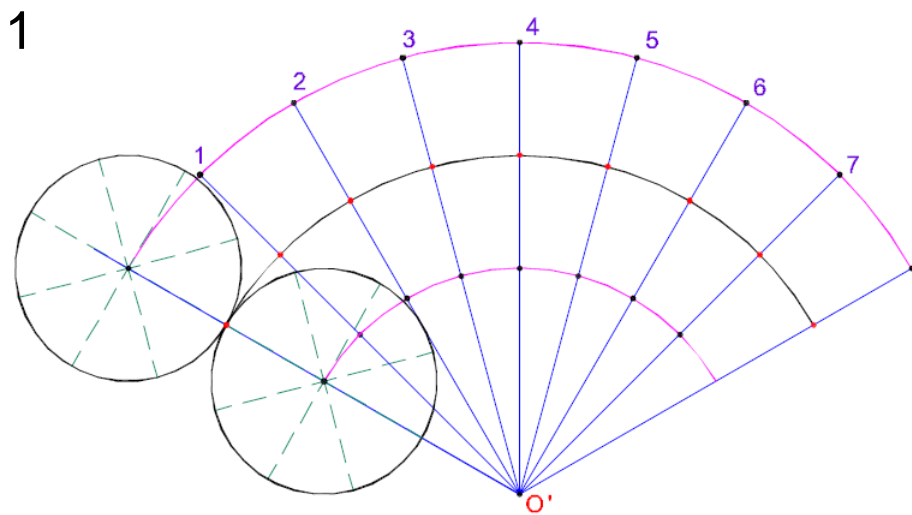


5.8.2 畫內外擺線-9/10

- 以曲線板連接各點即為所求。

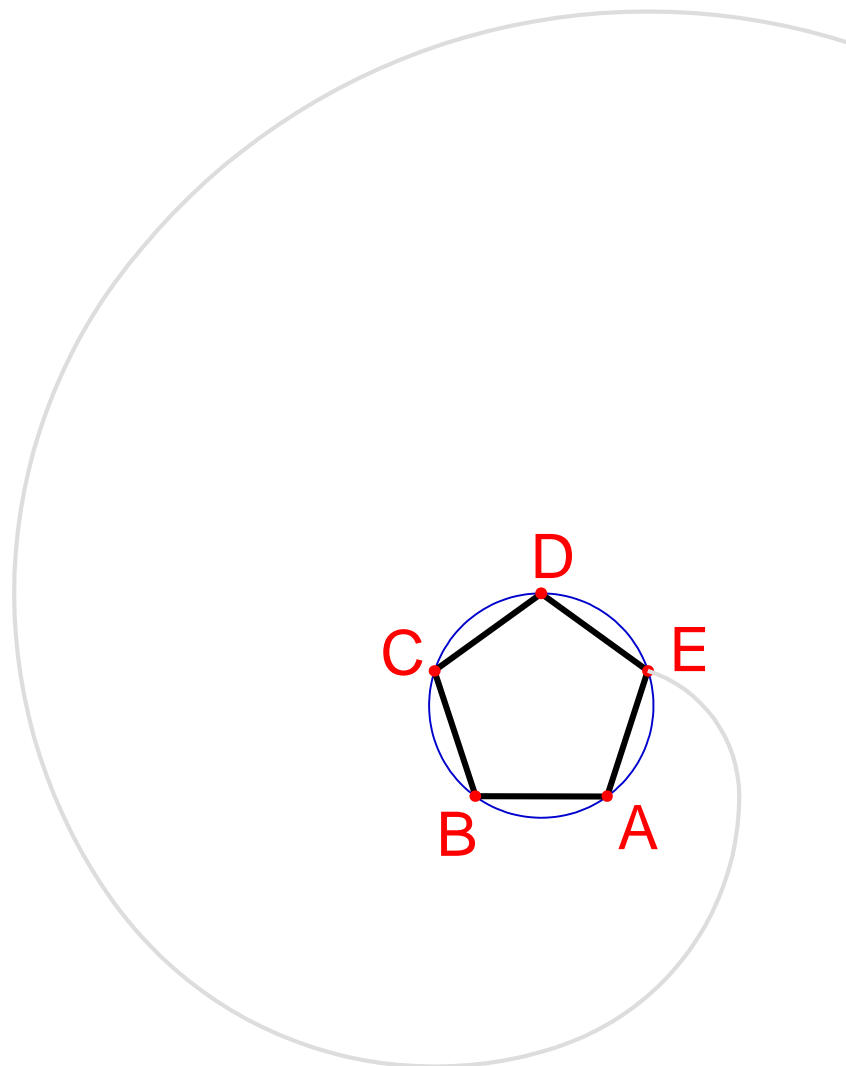


5.8.2 畫內外擺線-10/10



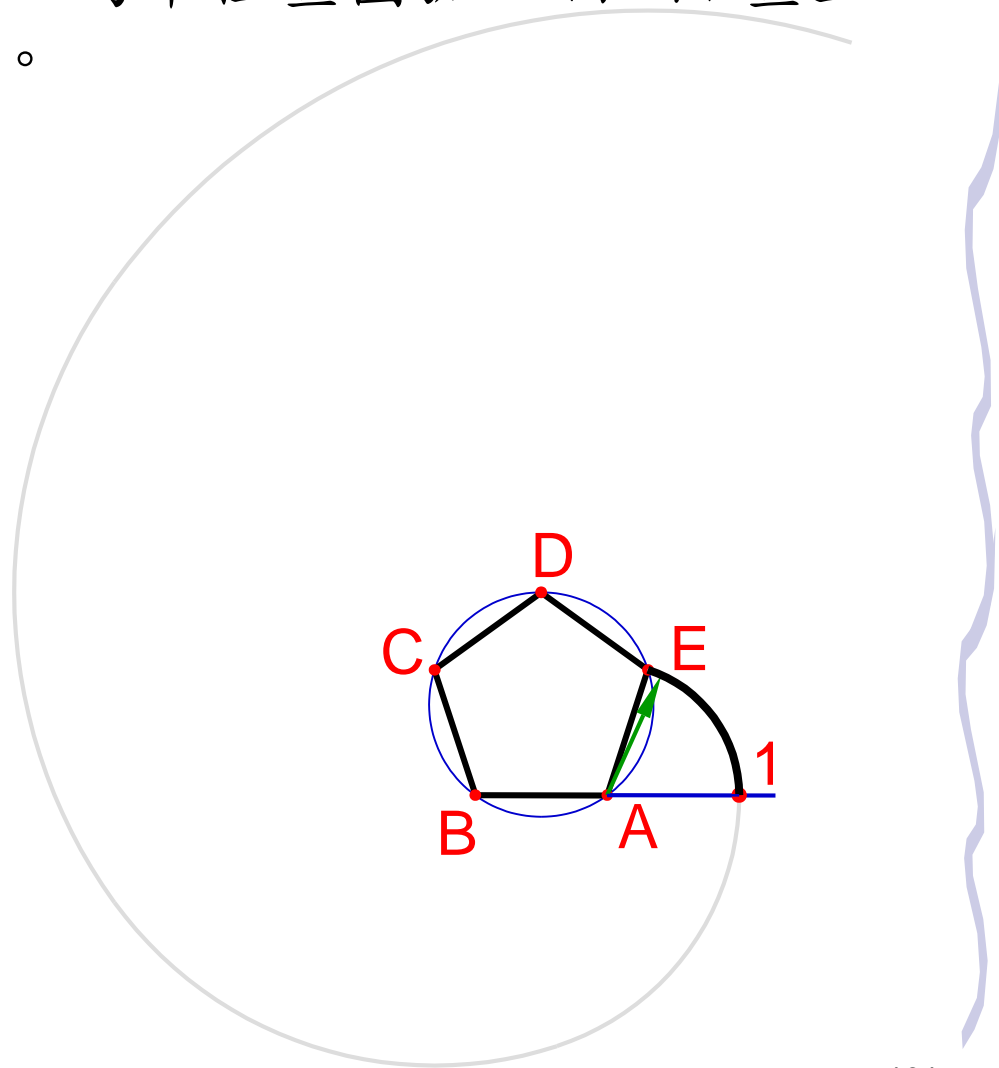
5.9.1 多邊形漸開線畫法-1/6

- 已知：多邊形。
- 求作：多邊形之漸開線



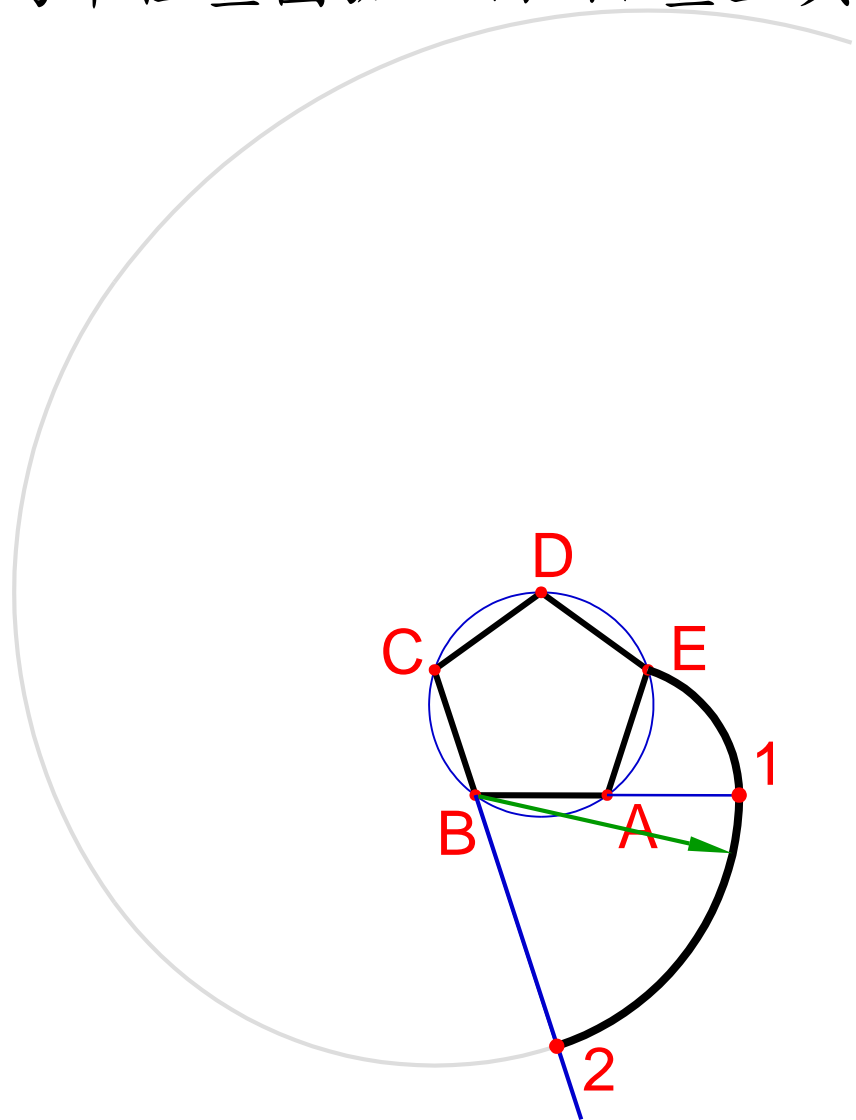
5.9.1 多邊形漸開線畫法-2/6

- 以頂點A為圓心，邊長AE為半徑畫圓弧，由E點畫至與AB之延長線相交於1。



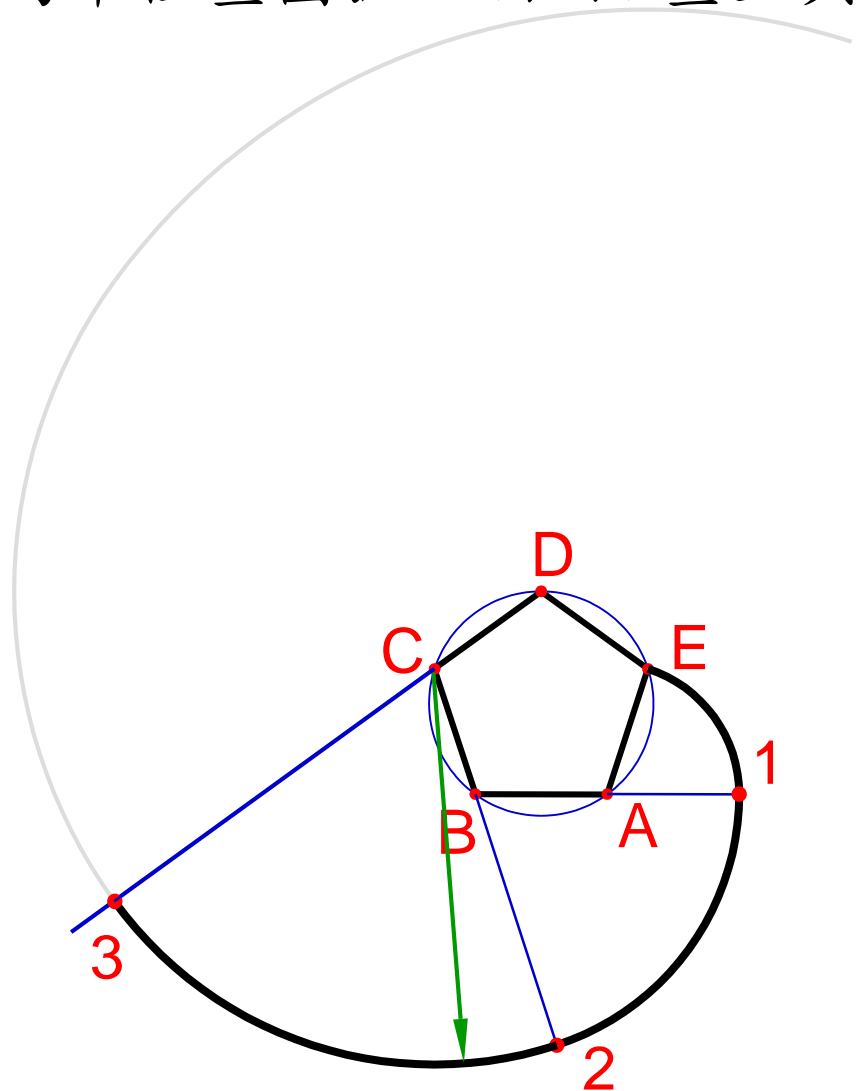
5.9.1 多邊形漸開線畫法-3/6

- 次以頂點B為圓心，B1為半徑畫圓弧，由1點畫至與BC之延長線相交於2。



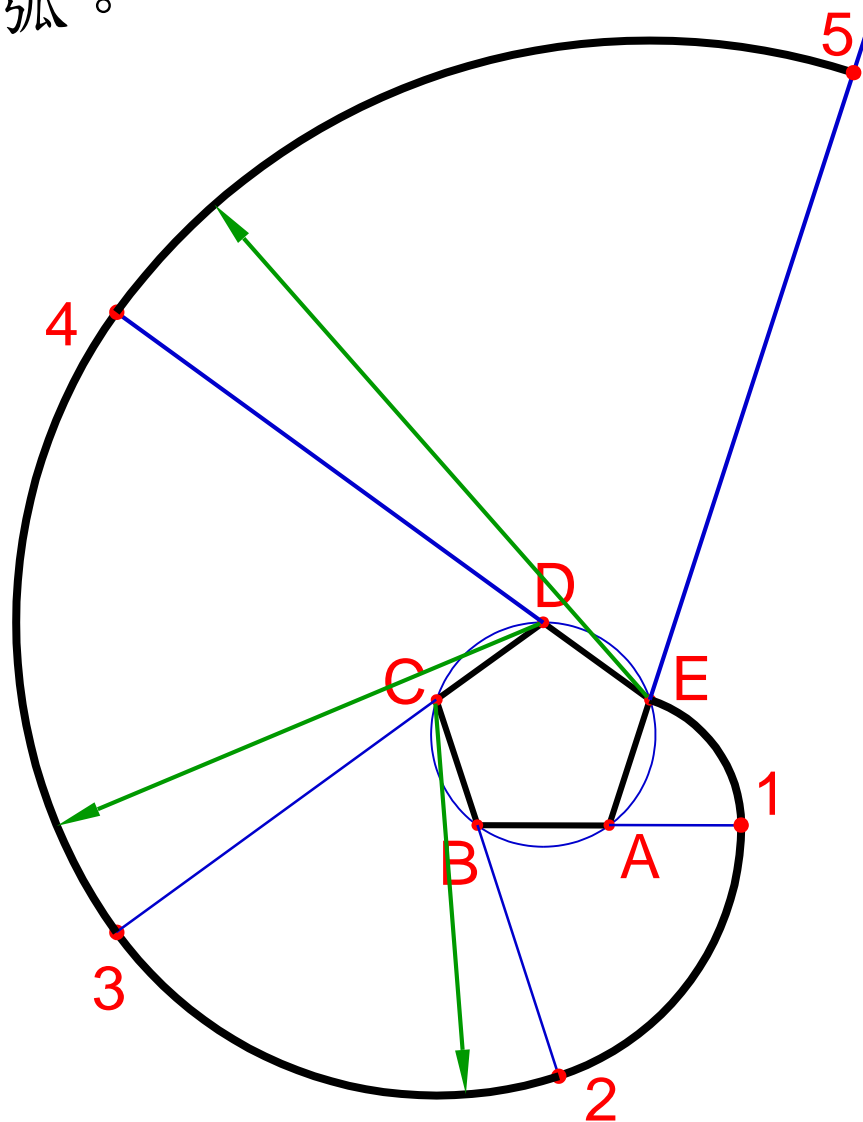
5.9.1 多邊形漸開線畫法-4/6

- 次以頂點C為圓心，B2為半徑畫圓弧，由2點畫至與BC之延長線相交於3。

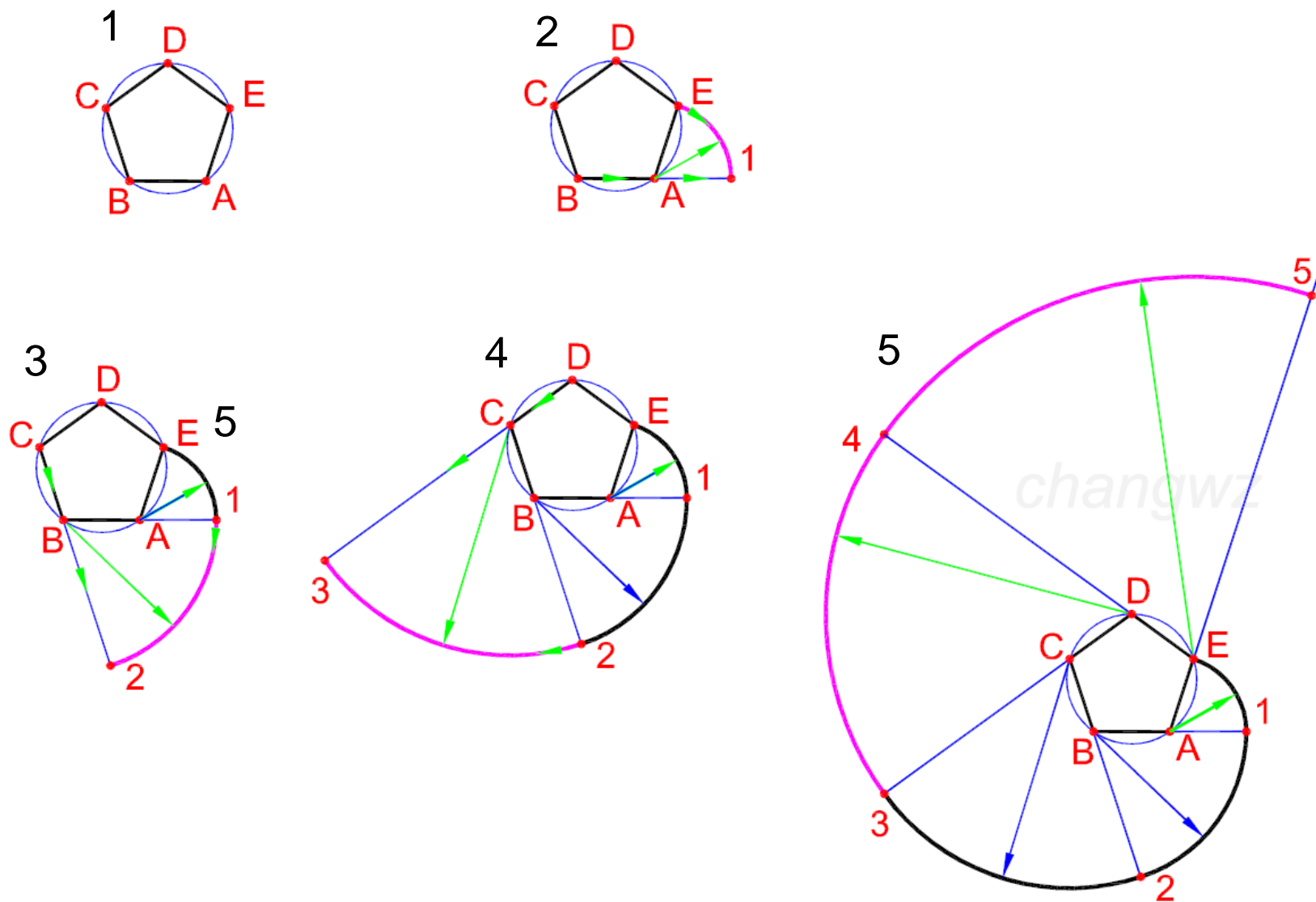


5.9.1 多邊形漸開線畫法-5/6

- 同理求出其他各點之圓弧。

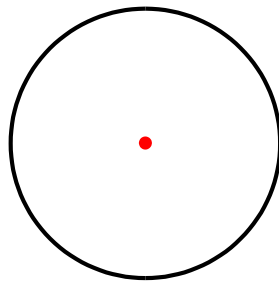
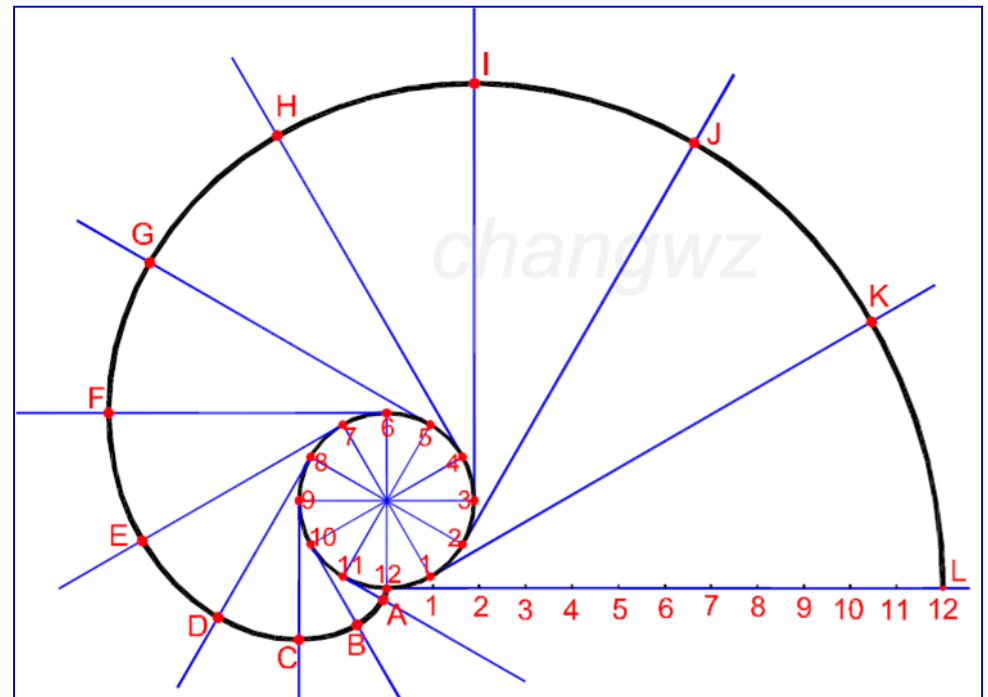


5.9.1 多邊形漸開線畫法-6/6



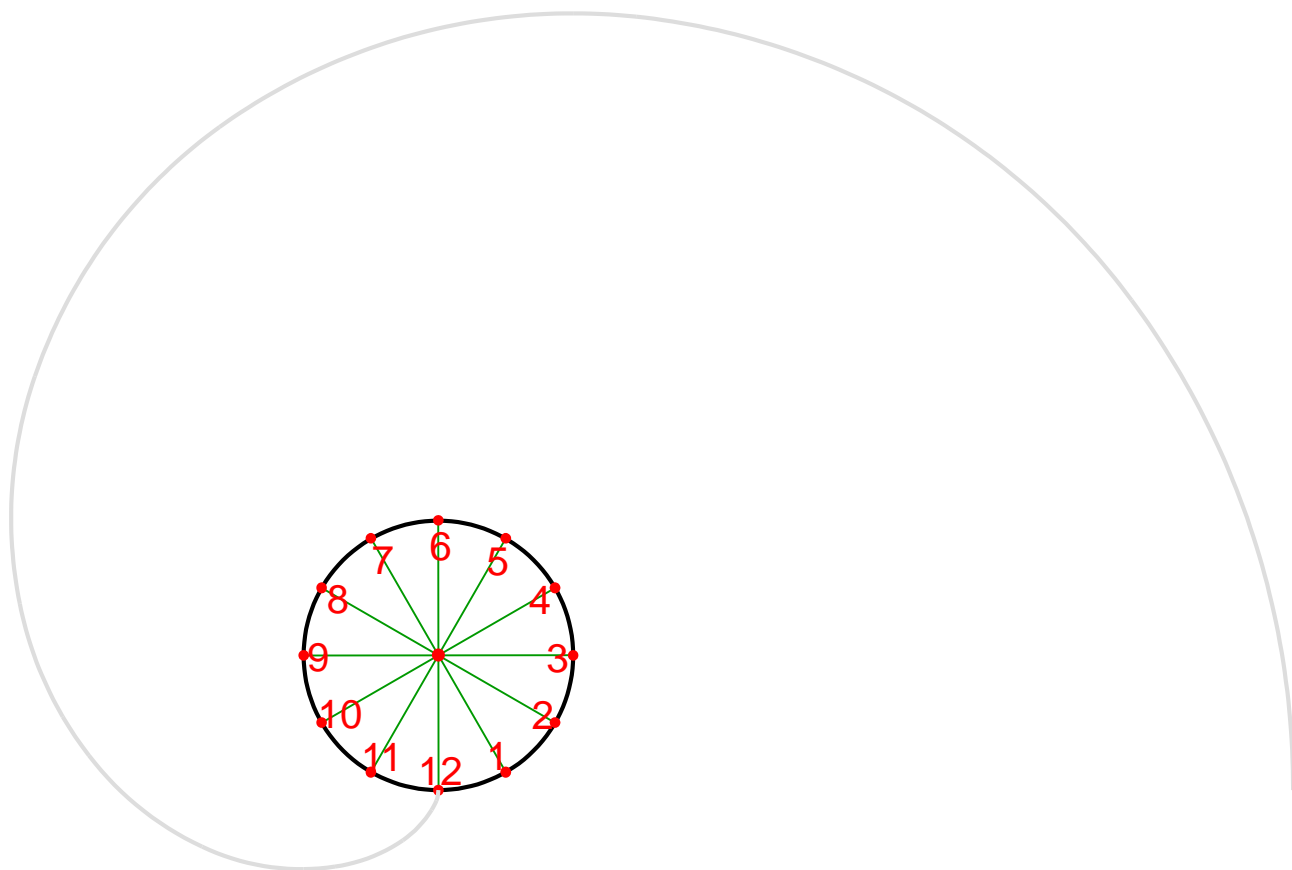
5.9.2圓之漸開線畫法-1/9

- 已知：圓形。
- 求作：圓形之漸開線。



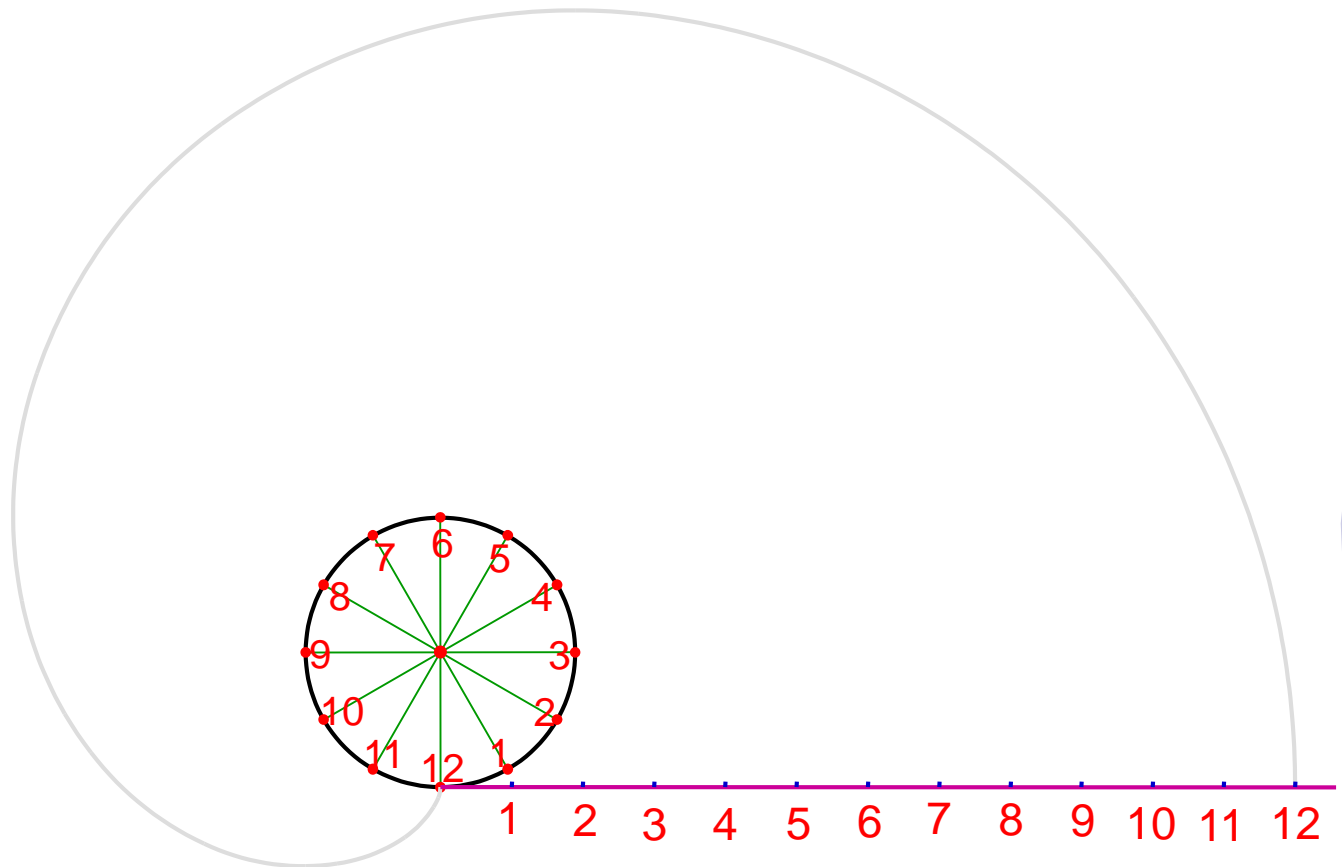
5.9.2圓之漸開線畫法-2/9

- 將圓作適當之等分。



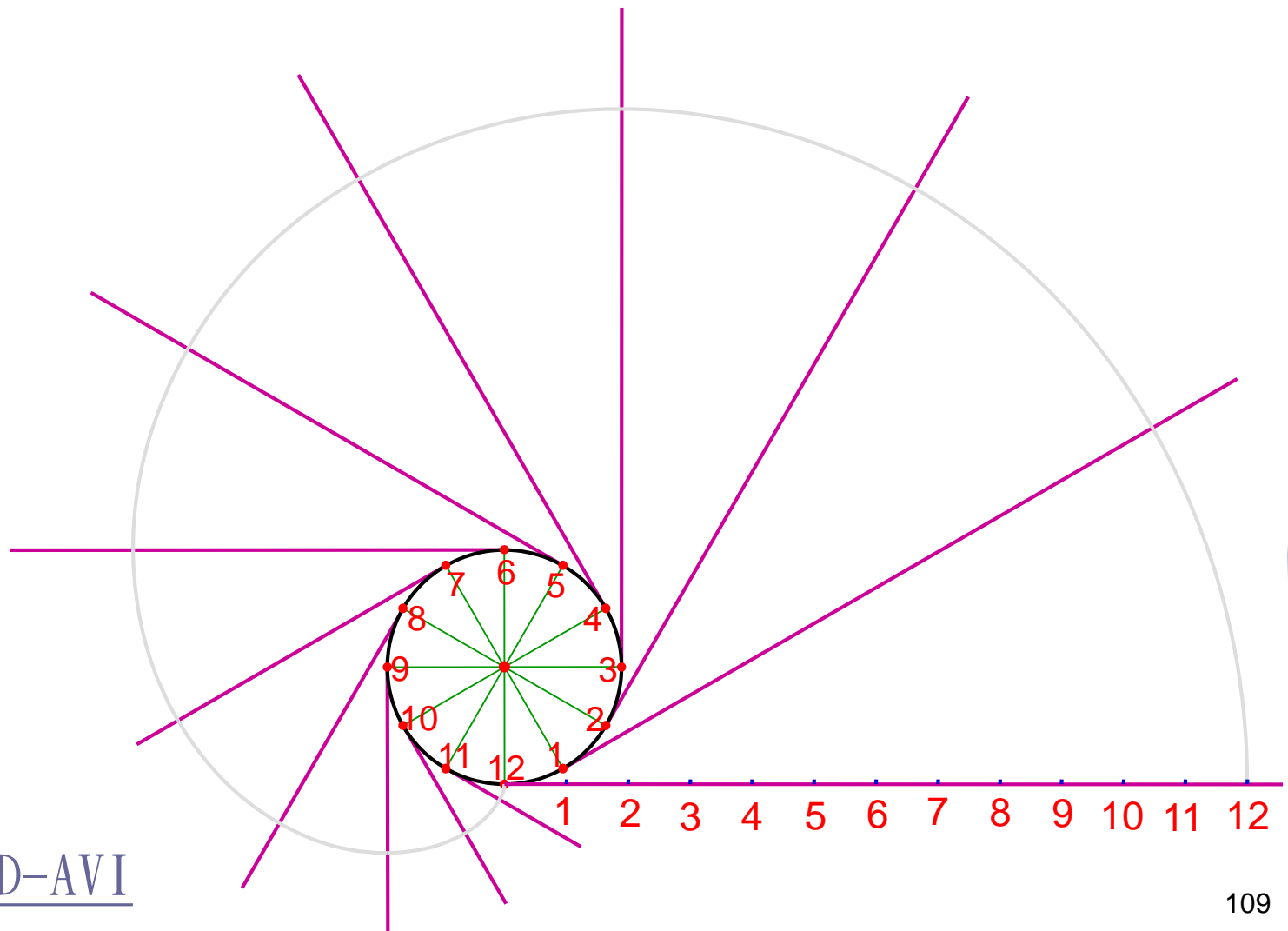
5.9.2圓之漸開線畫法-3/9

- 將圓周長展開於過點12之切線上。



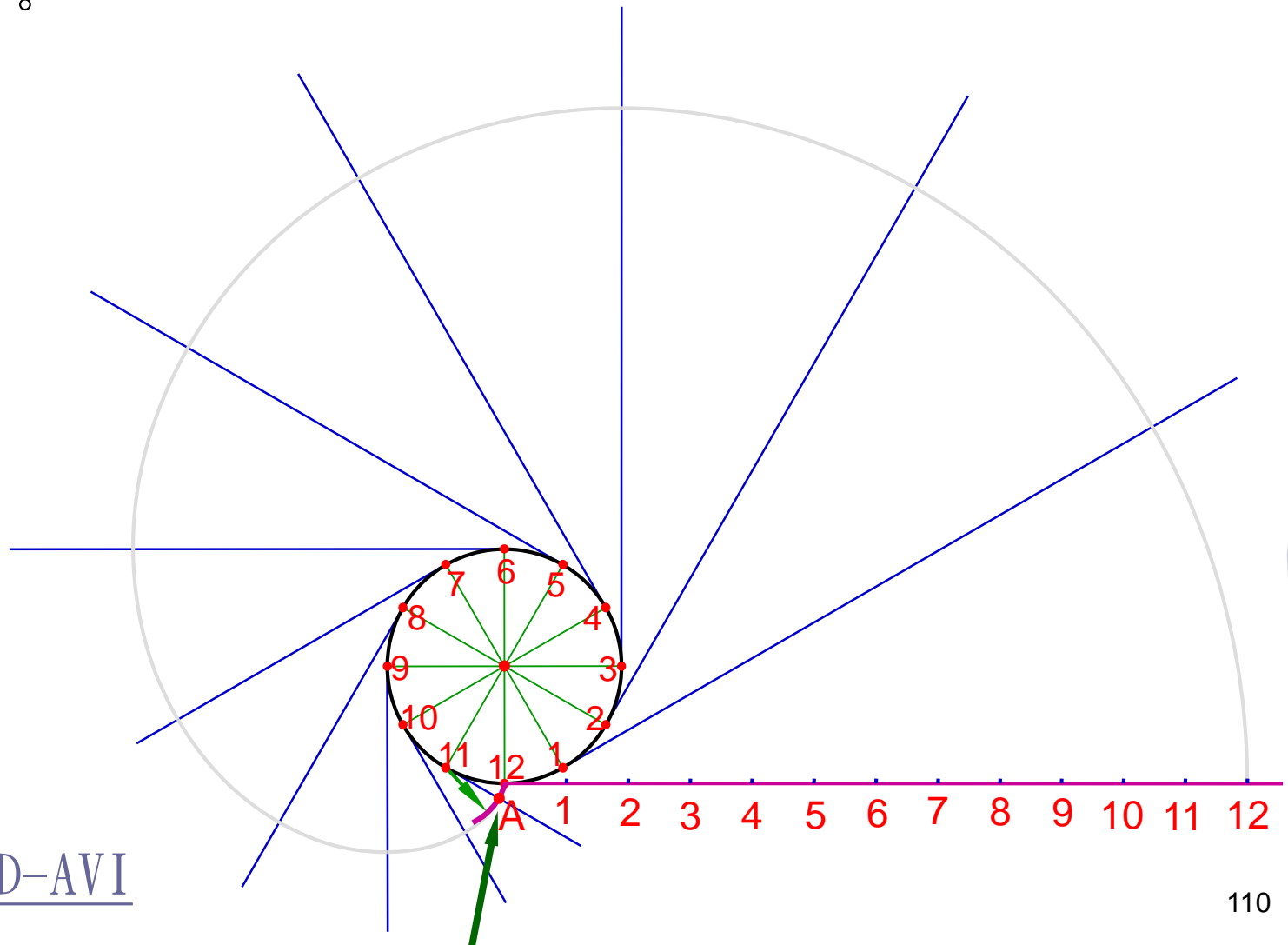
5.9.2圓之漸開線畫法-4/9

- 過各等分點作圓之切線。



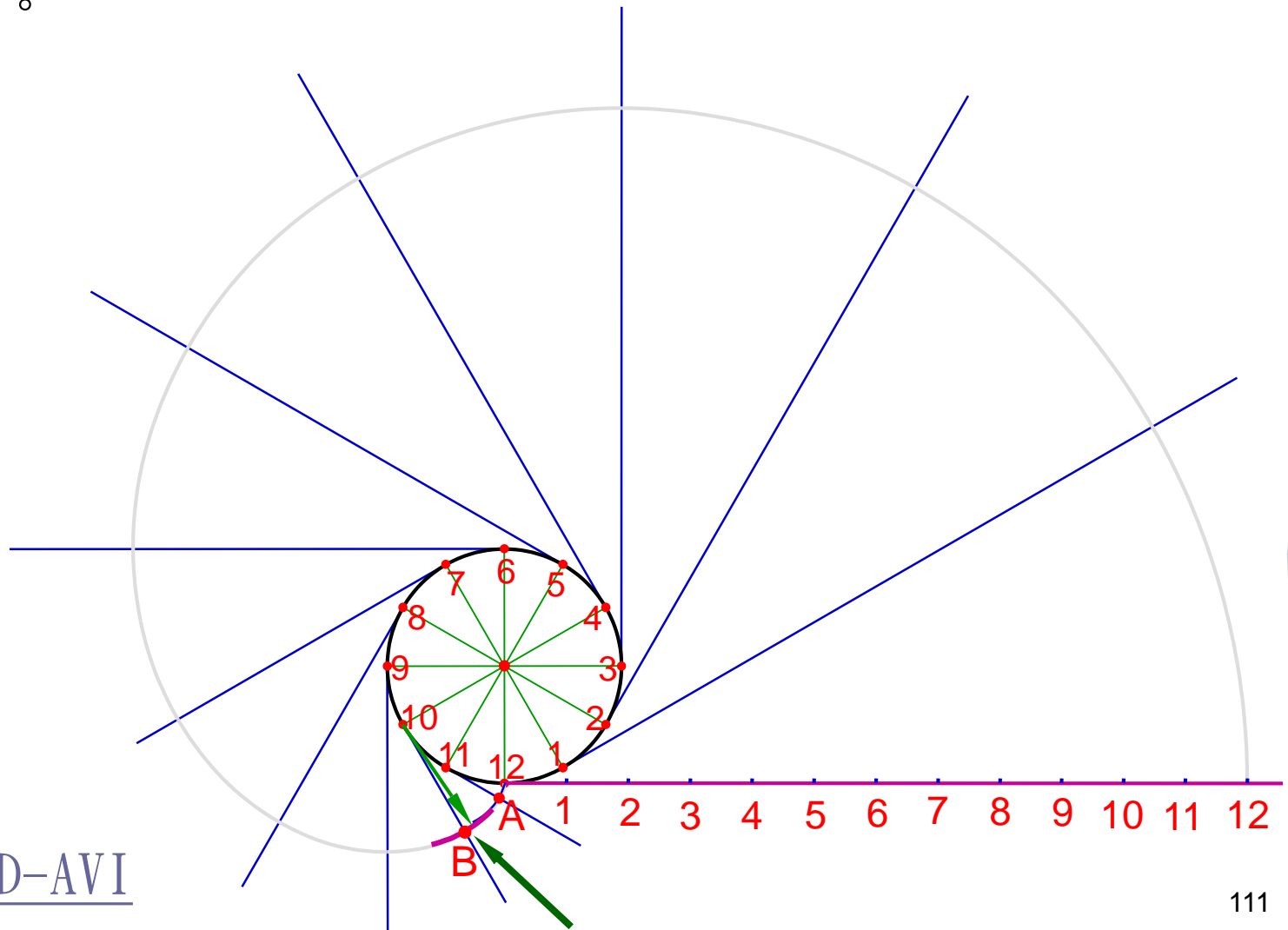
5.9.2圓之漸開線畫法-5/9

- 過等分點11之切線截取1等份之弧長得交點，即為曲線上的點A。



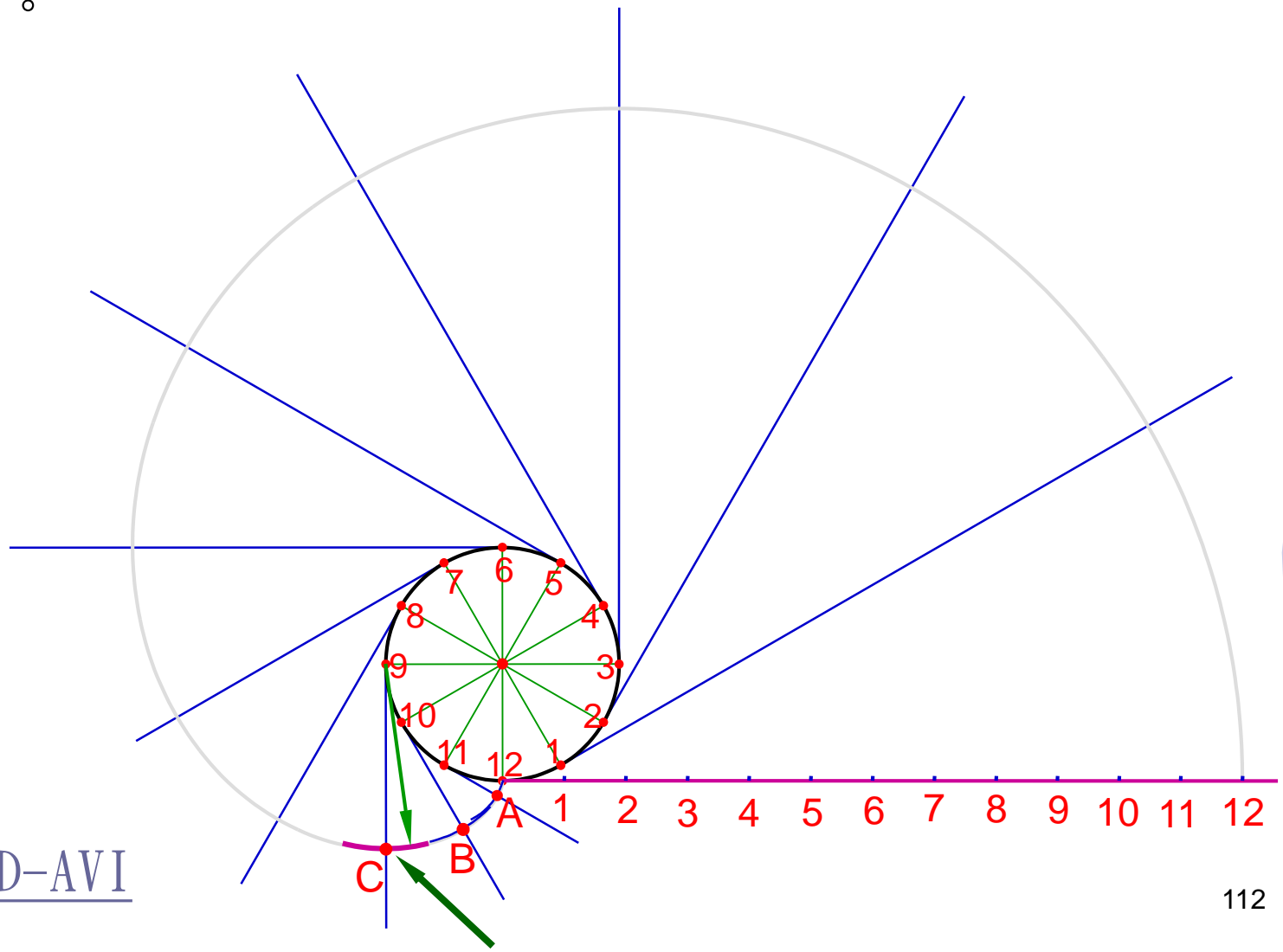
5.9.2圓之漸開線畫法-6/9

- 過等分點10之切線截取2等份之弧長得交點，即為曲線上的點B。



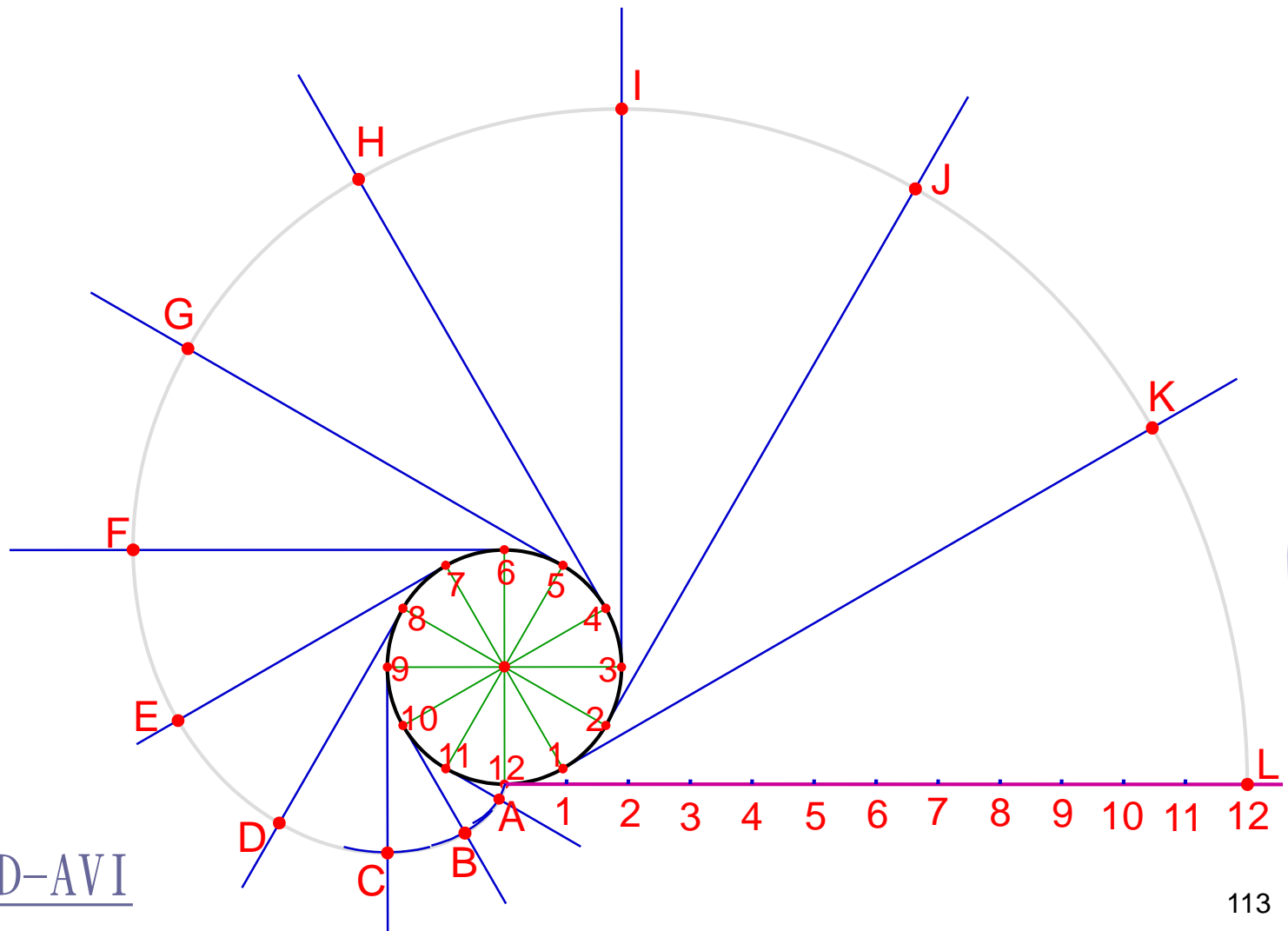
5.9.2圓之漸開線畫法-7/9

- 過等分點9之切線截取3等份之弧長得交點，即為曲線上的點C。



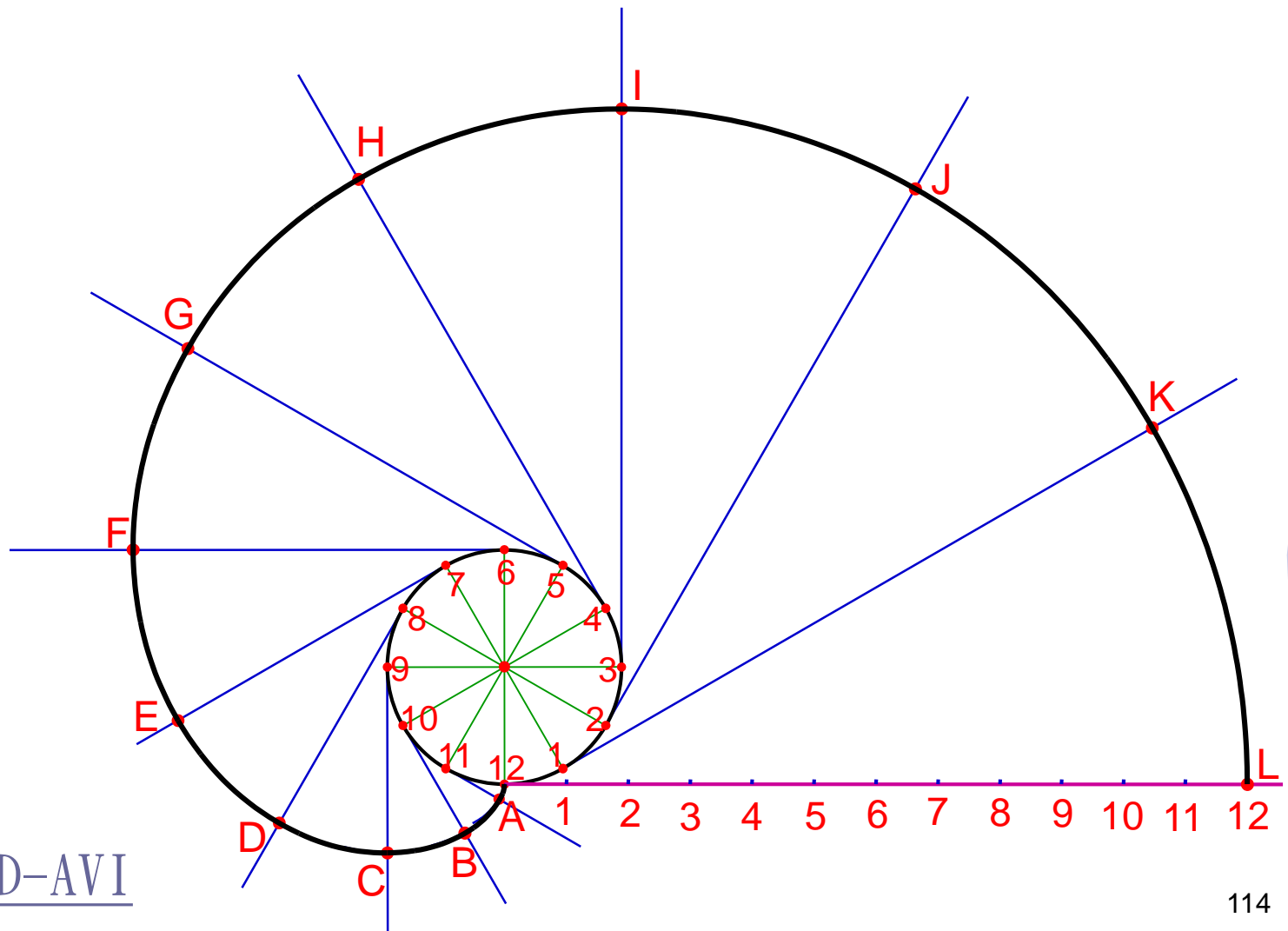
5.9.2圓之漸開線畫法-8/9

- 同理求出其他各點。



5.9.2圓之漸開線畫法-9/9

- 最後以曲線板連接各點即為所求。

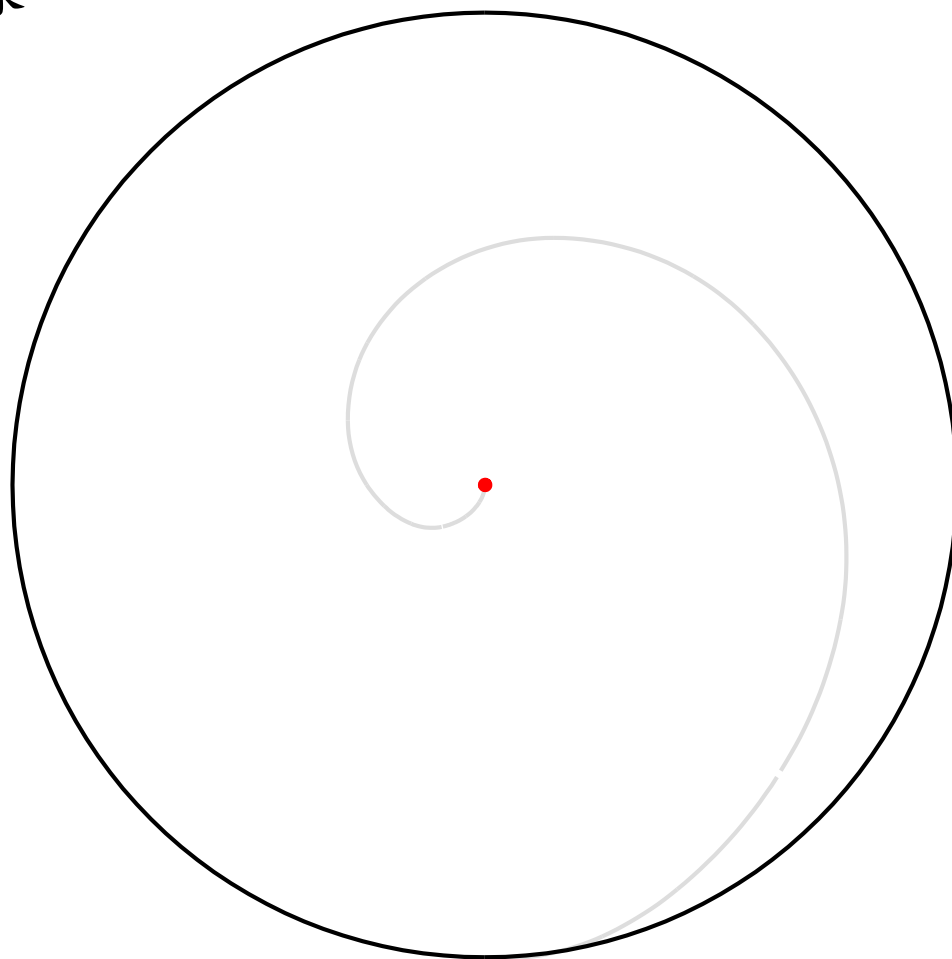
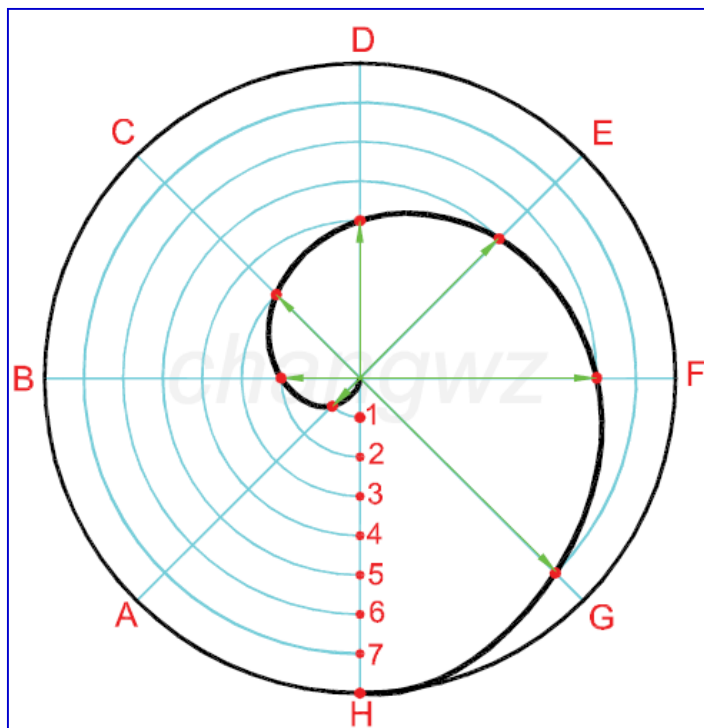


5.10螺旋線

- 當一動點沿一動直線作等速運動，同時該動直線繞一中心軸作等速旋轉，則此動點所衍生之軌跡即為螺旋線。
- 若動直線與中心軸垂直，則此動點所衍生之軌跡即為阿基米德螺旋線。
- 若動直線與中心軸平行，即點之移動軌跡為在一柱面旋轉前進，所衍生之軌跡即柱面螺旋線。
- 若動直線與中心軸呈一固定斜角，則產生錐面螺旋線，阿基米德螺旋線為平面曲線，其他則為空間曲線。

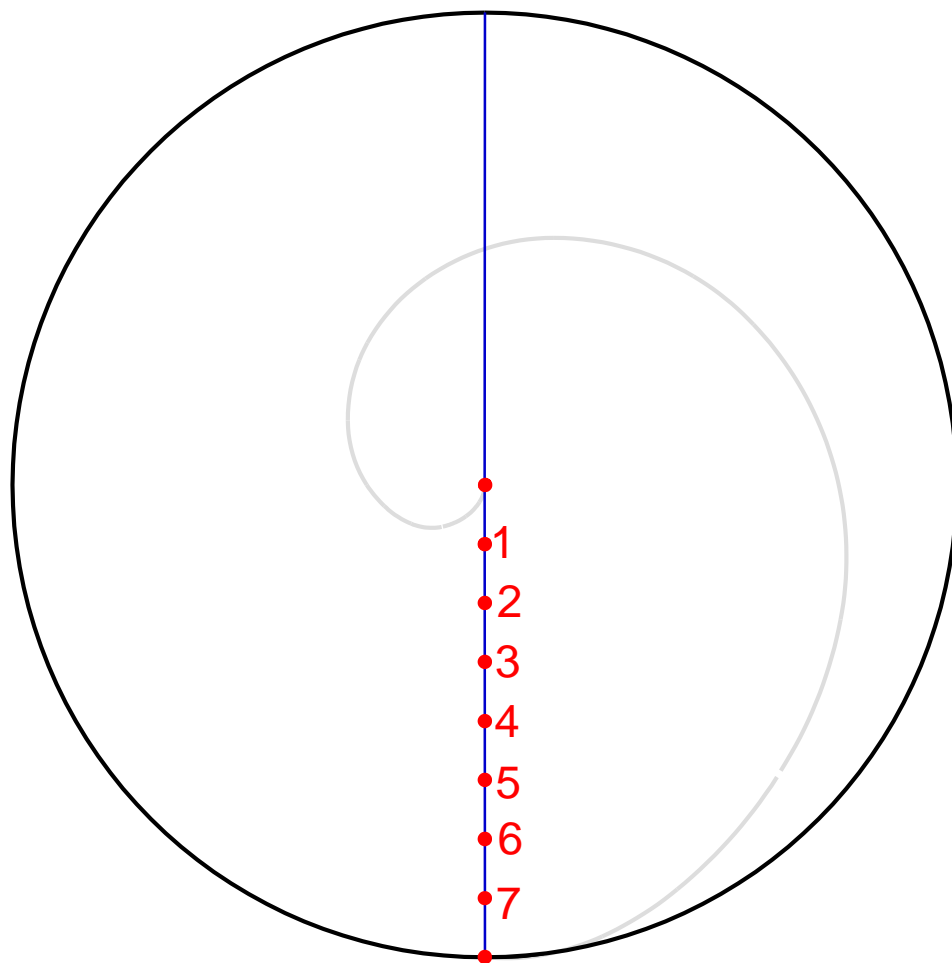
5.10.1 阿基米德螺旋線作法-1/9

- 已知：圓形。
- 求作：阿基米德螺旋線。



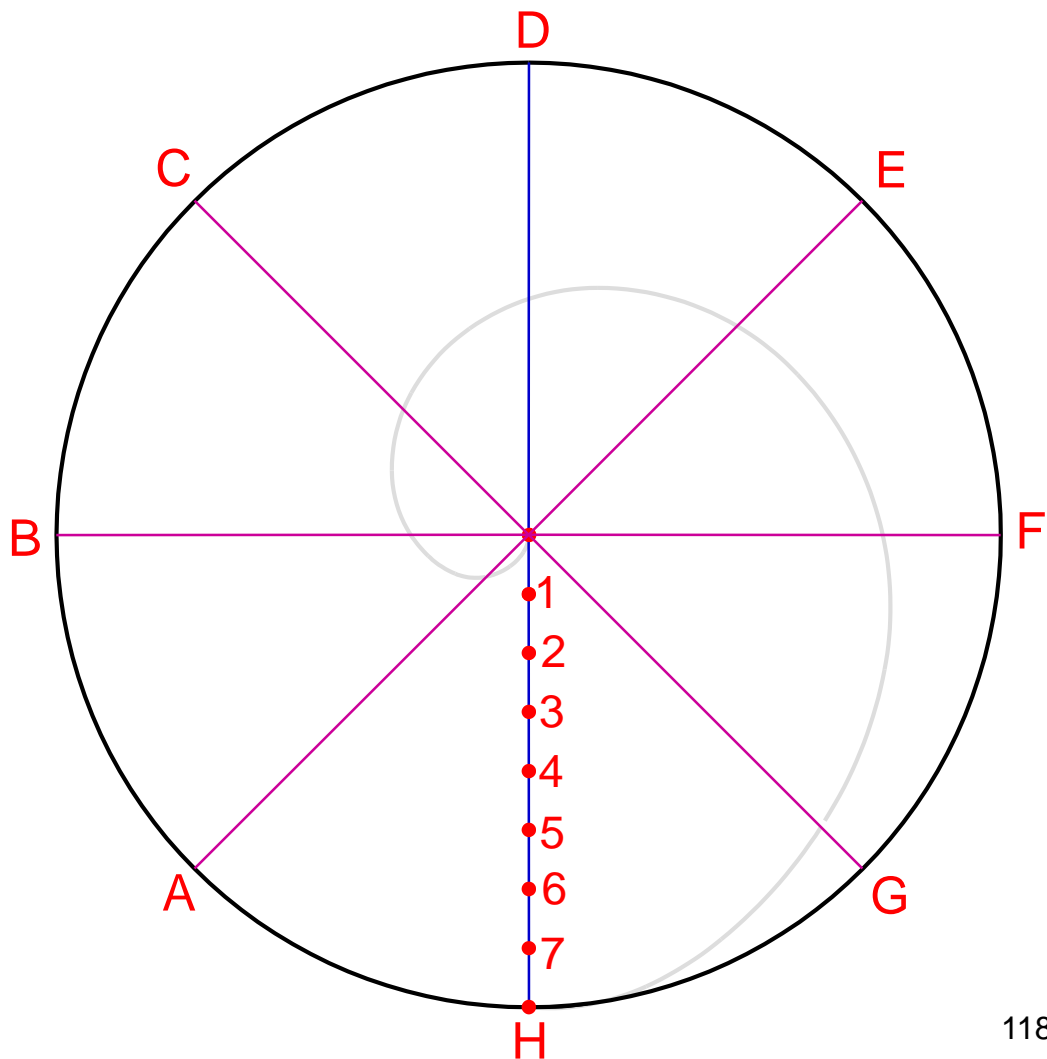
5.10.1 阿基米德螺旋線作法-2/9

- 將半徑作適當之等分。



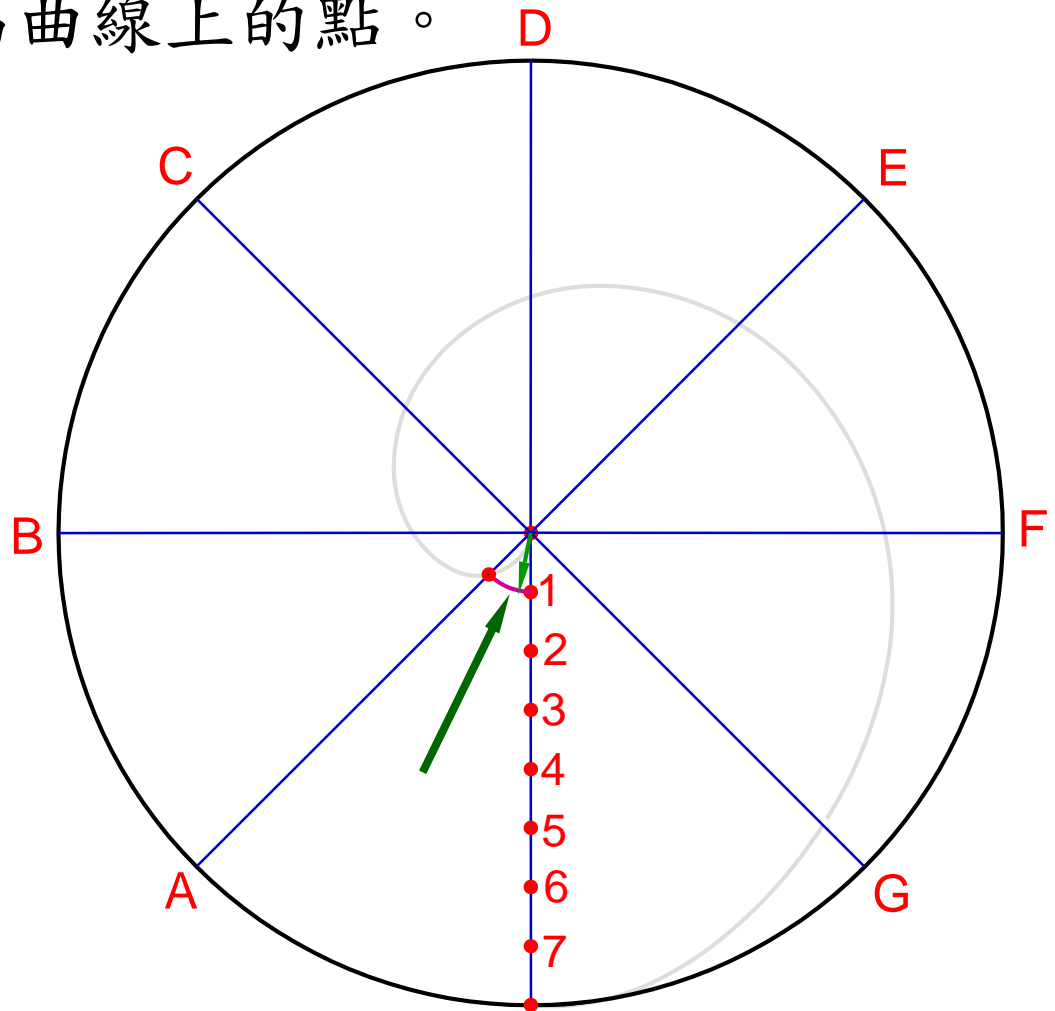
5.10.1 阿基米德螺旋線作法-3/9

- 將圓作相同之等分。



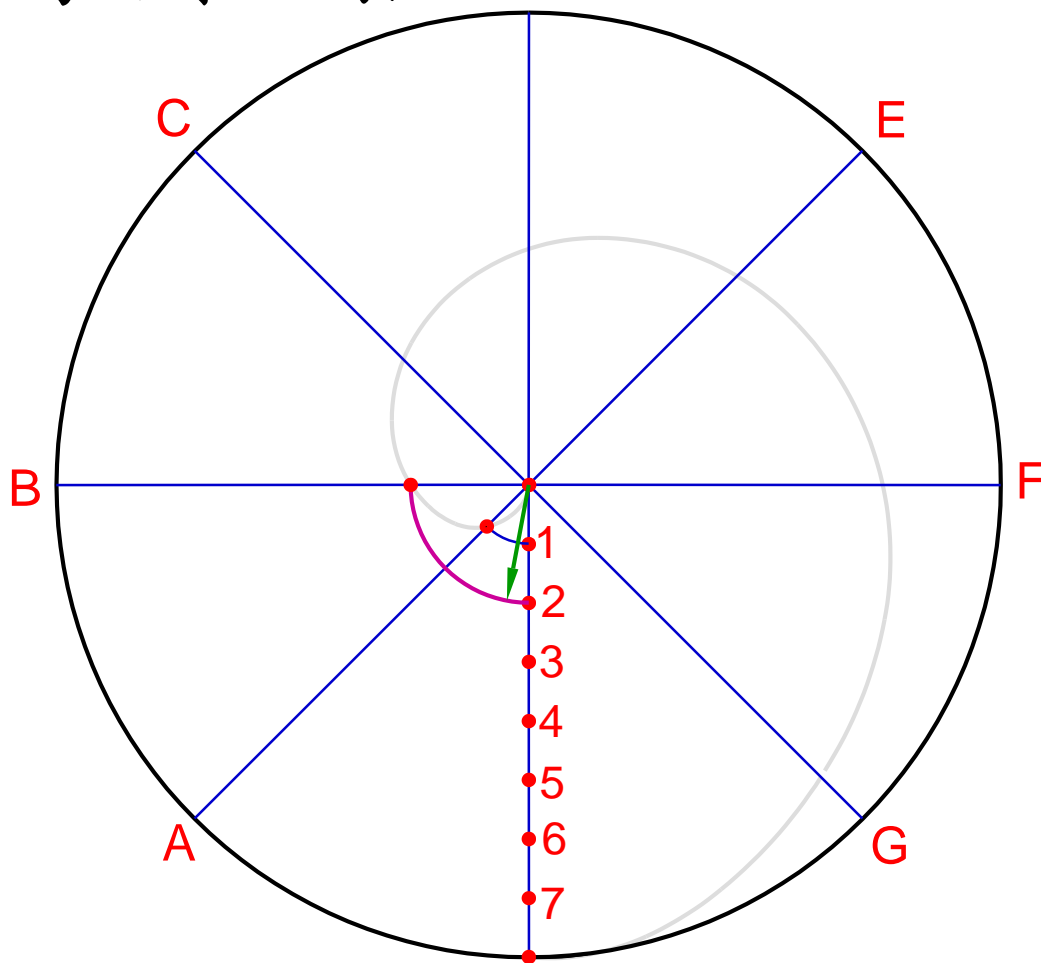
5.10.1 阿基米德螺旋線作法-4/9

- 以圓心與等分點1之距離為半徑畫弧與等分線A相交，所得交點即為曲線上的點。



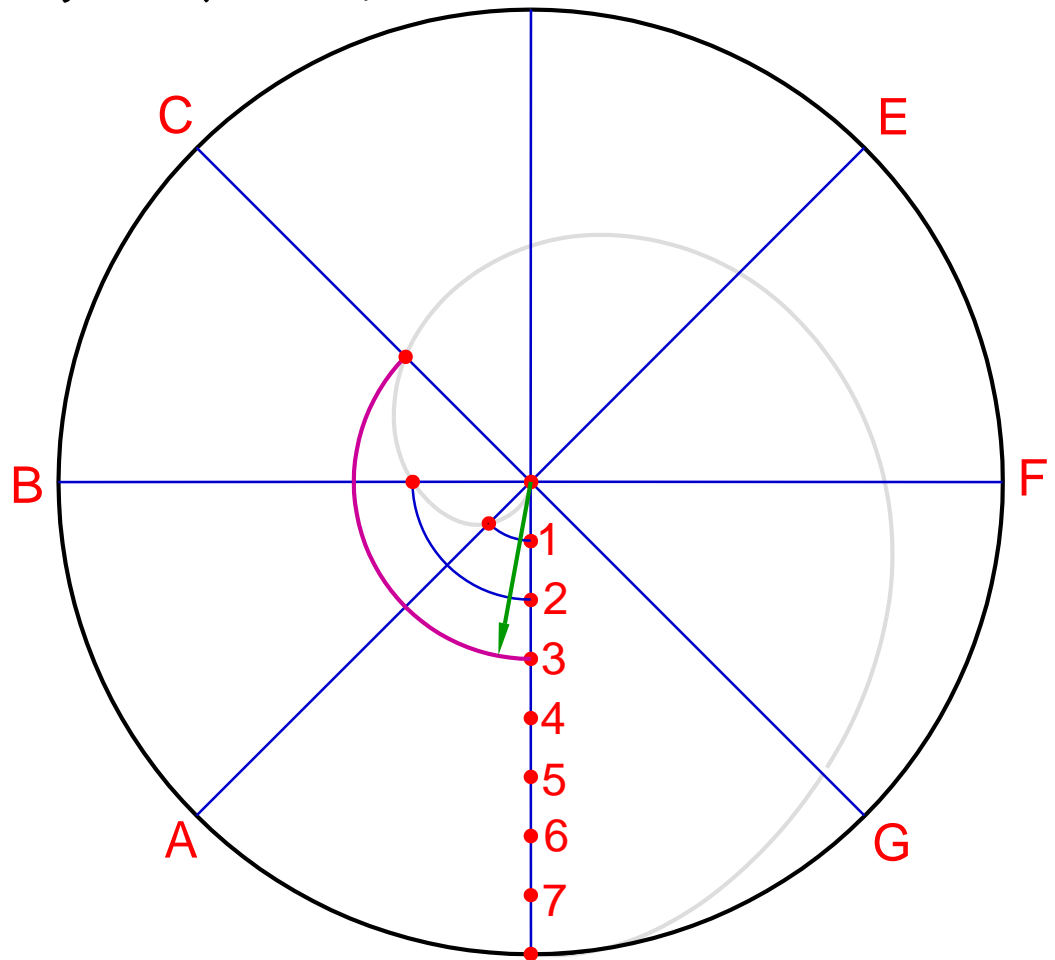
5.10.1 阿基米德螺旋線作法-5/9

- 次以圓心與等分點2之距離為半徑畫弧與等分線B相交，所得交點即為曲線上的點。D



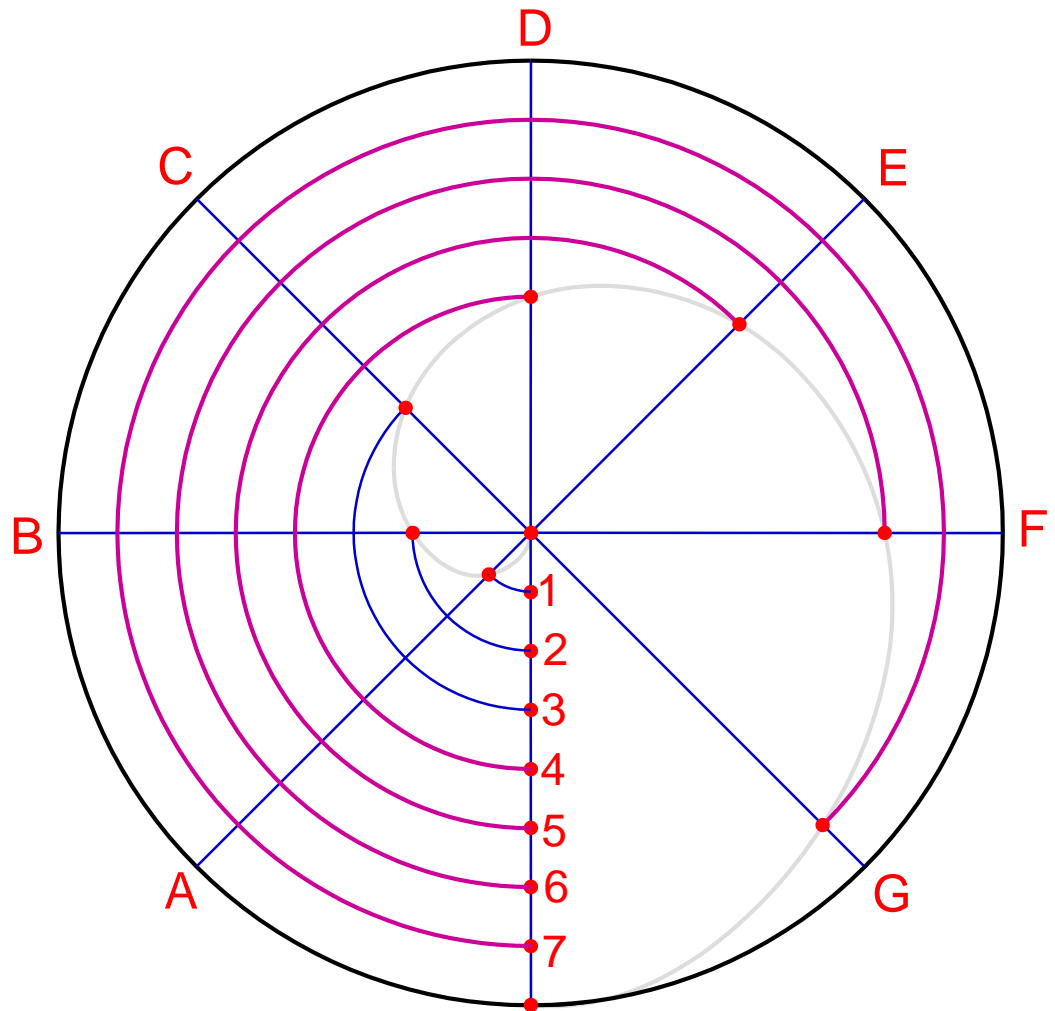
5.10.1 阿基米德螺旋線作法-6/9

- 次以圓心與等分點3之距離為半徑畫弧與等分線C相交，所得交點即為曲線上的點。D



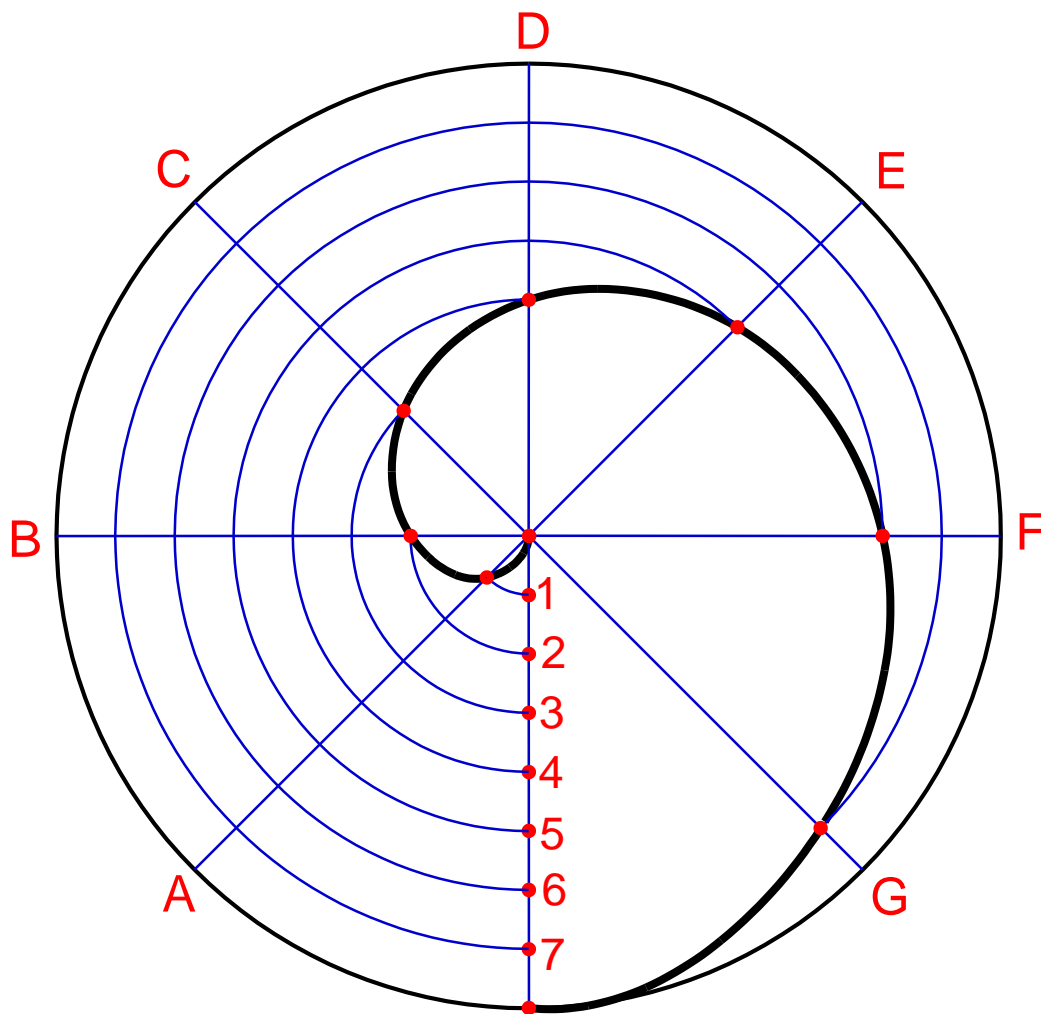
5.10.1 阿基米德螺旋線作法-7/9

- 同理求出其他各點。

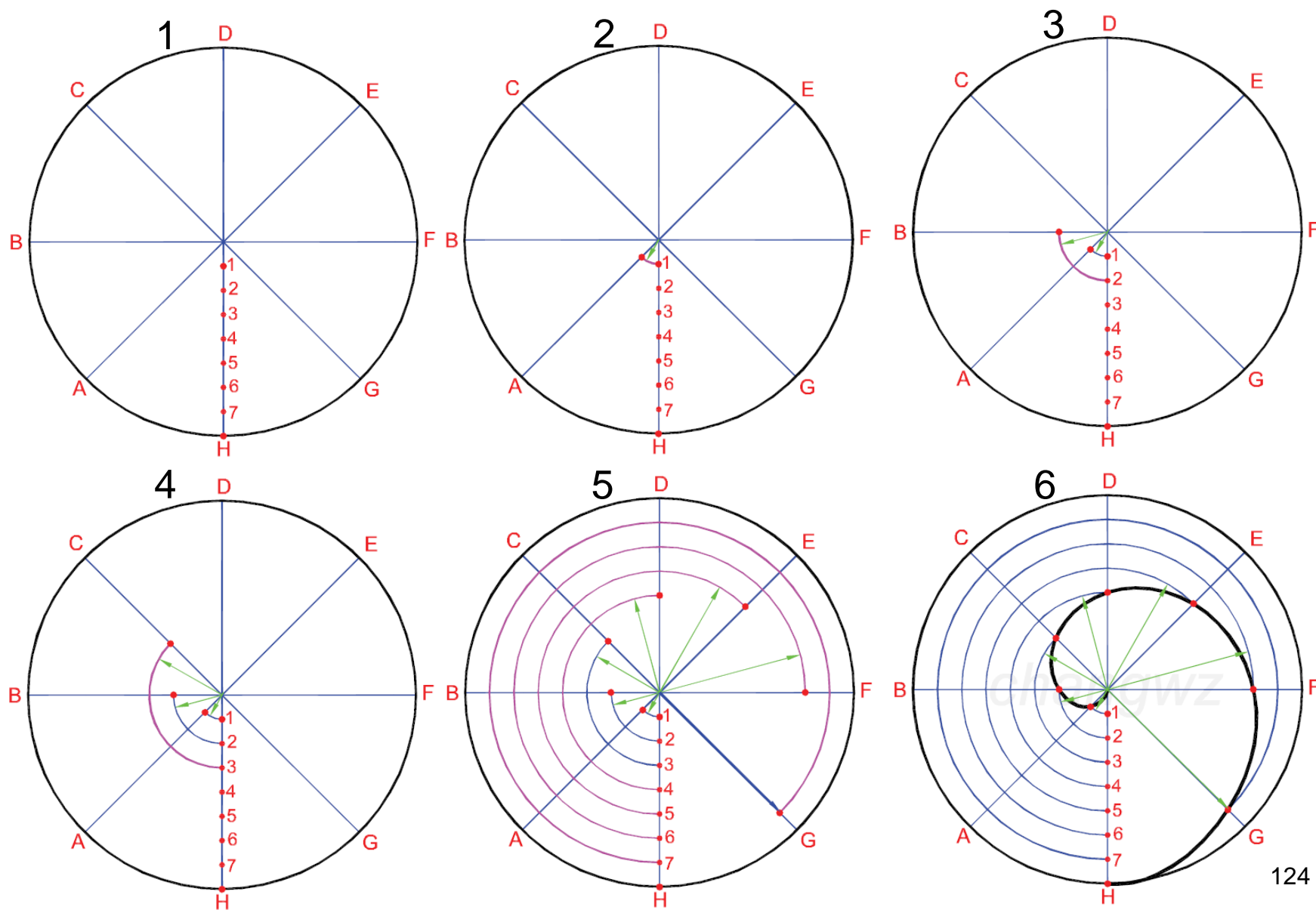


5.10.1 阿基米德螺旋線作法-8/9

- 最後以曲線板連接各點即為所求阿基米德螺旋線。

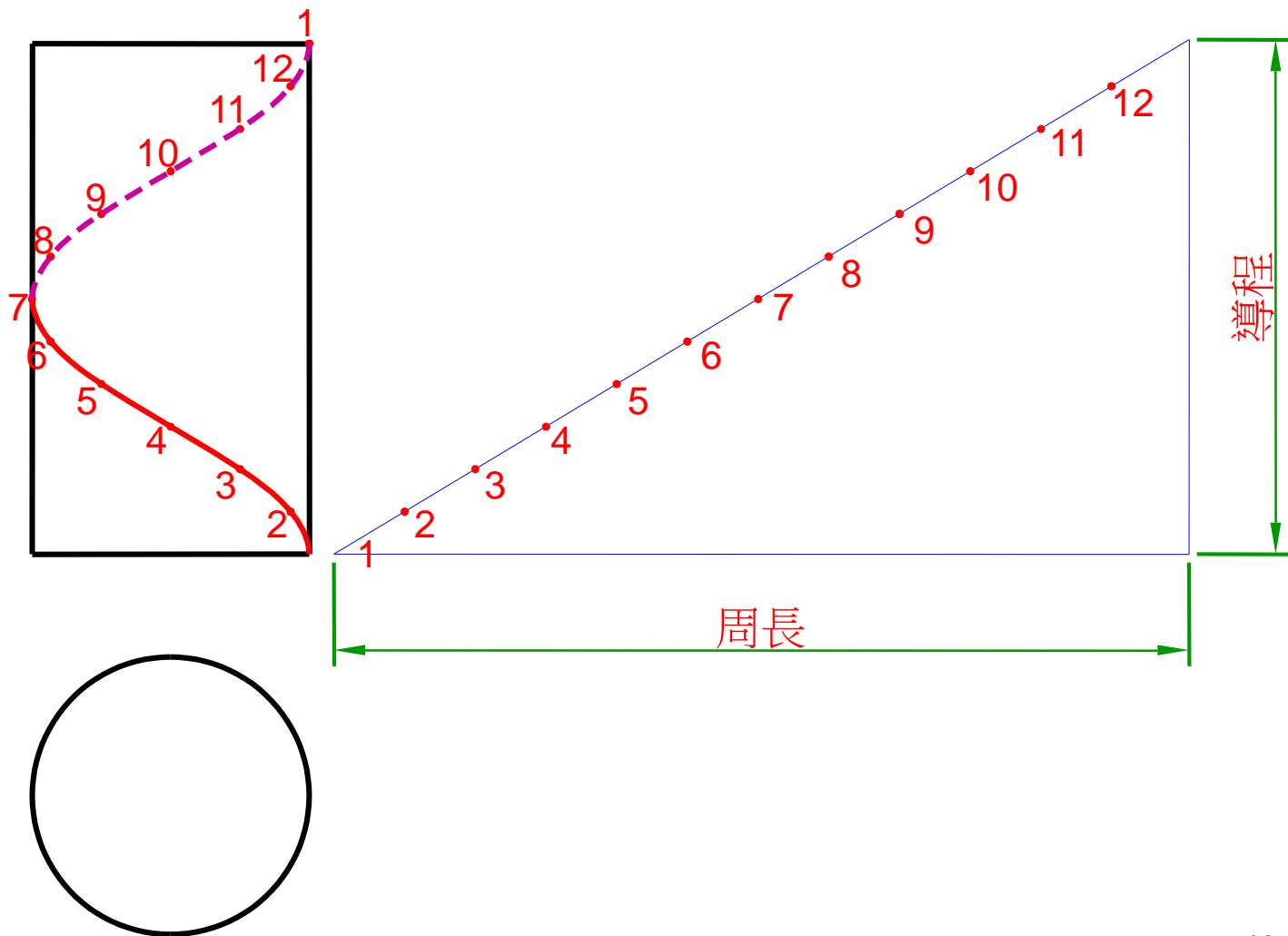


5.10.1 阿基米德螺旋線作法-9/9



柱面螺旋線畫法-1/7

- 已知：圓柱體之半徑與柱面螺旋線之導程。求作：柱面螺旋線。

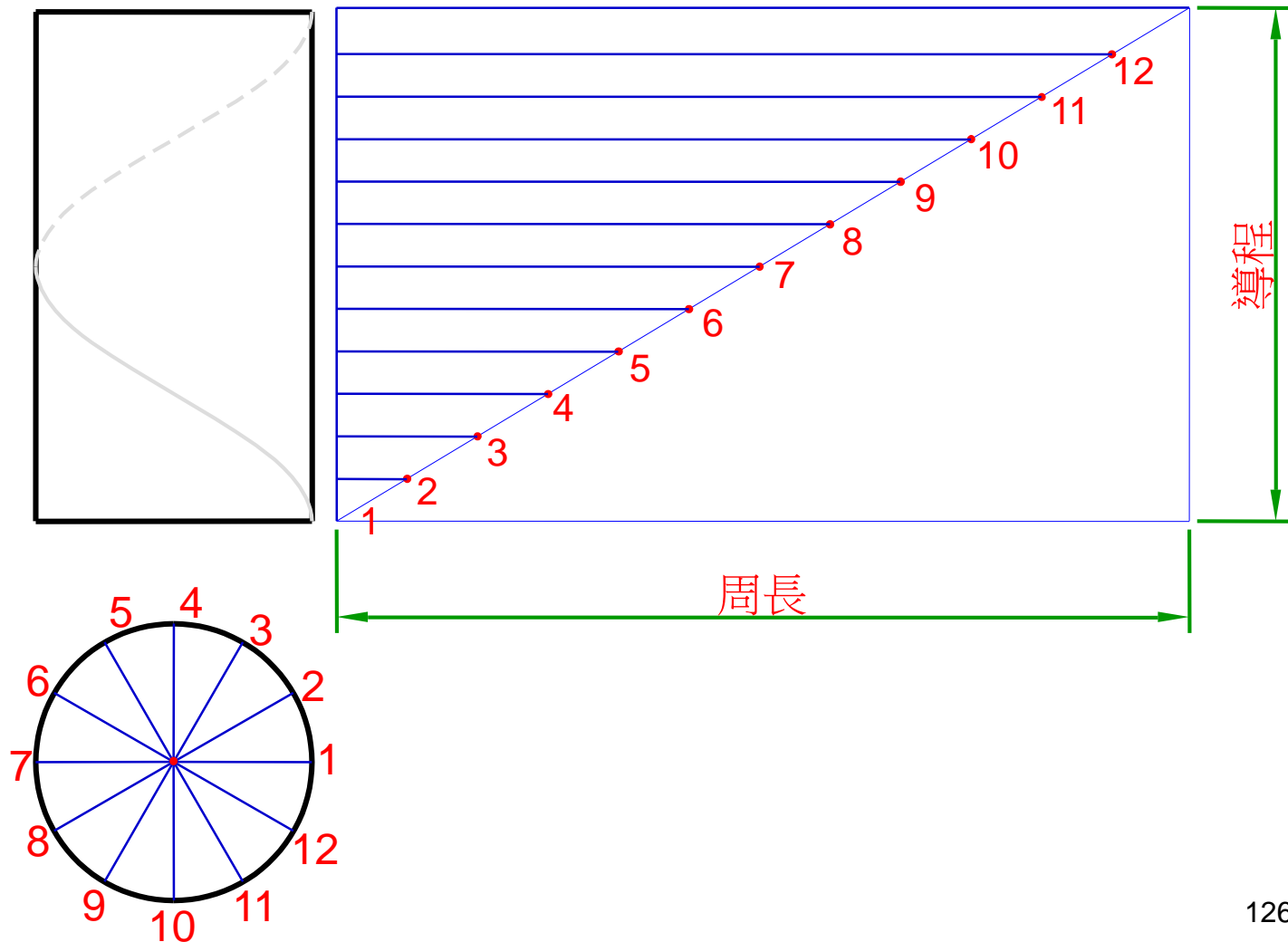


CAD圖

CAD-AVI

柱面螺旋線畫法-2/7

- 將圓及導程作相同之等分，並標註各等分點。

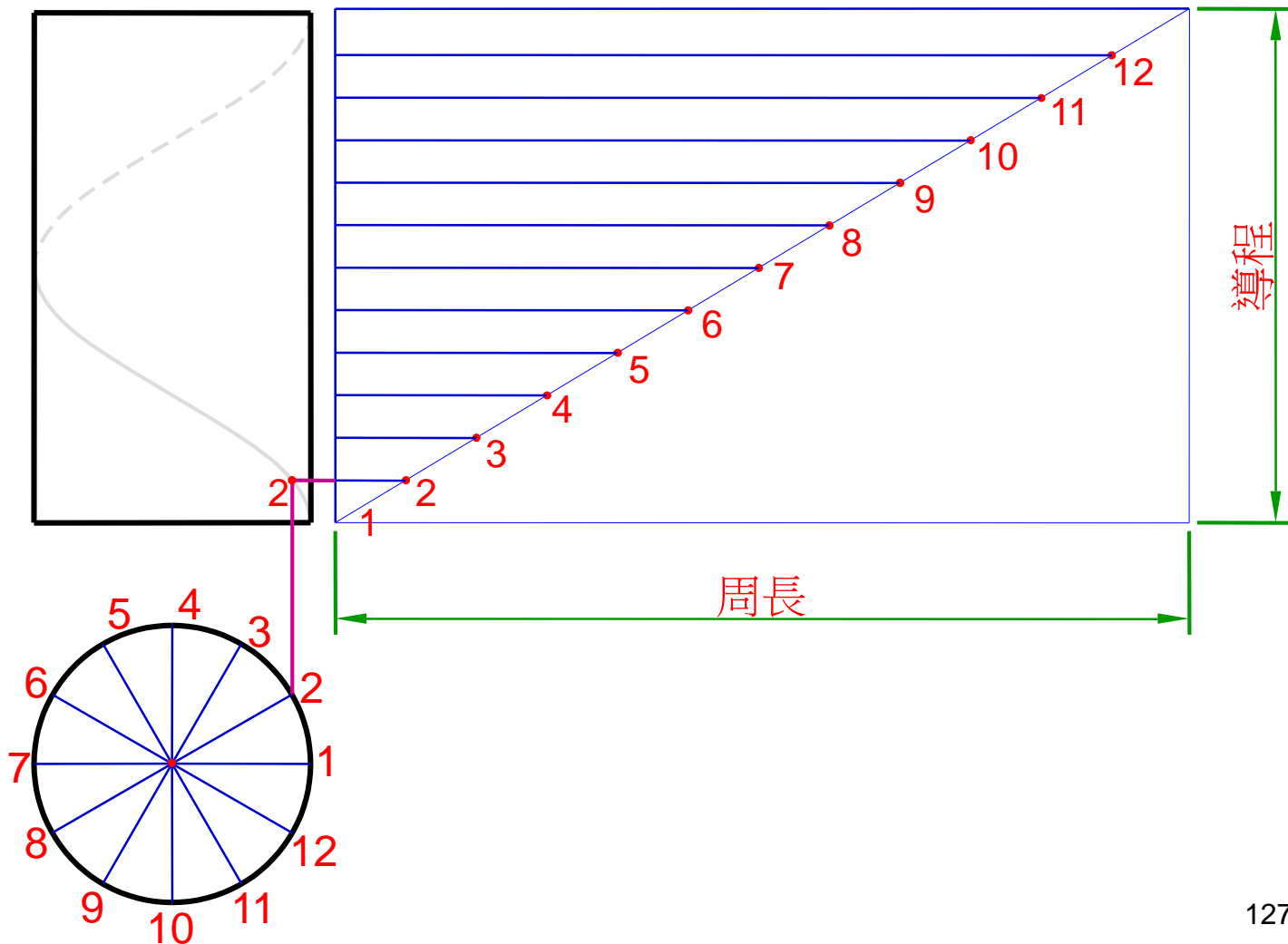


CAD圖

CAD-AVI

柱面螺旋線畫法-3/7

- 直線繞中心軸轉 $1/12$ 圈時，動點即前進 $1/12$ 導程，因此過圓之等分點2作垂線，與過導程之等分點2作水平線之交點，即為曲線上的點。

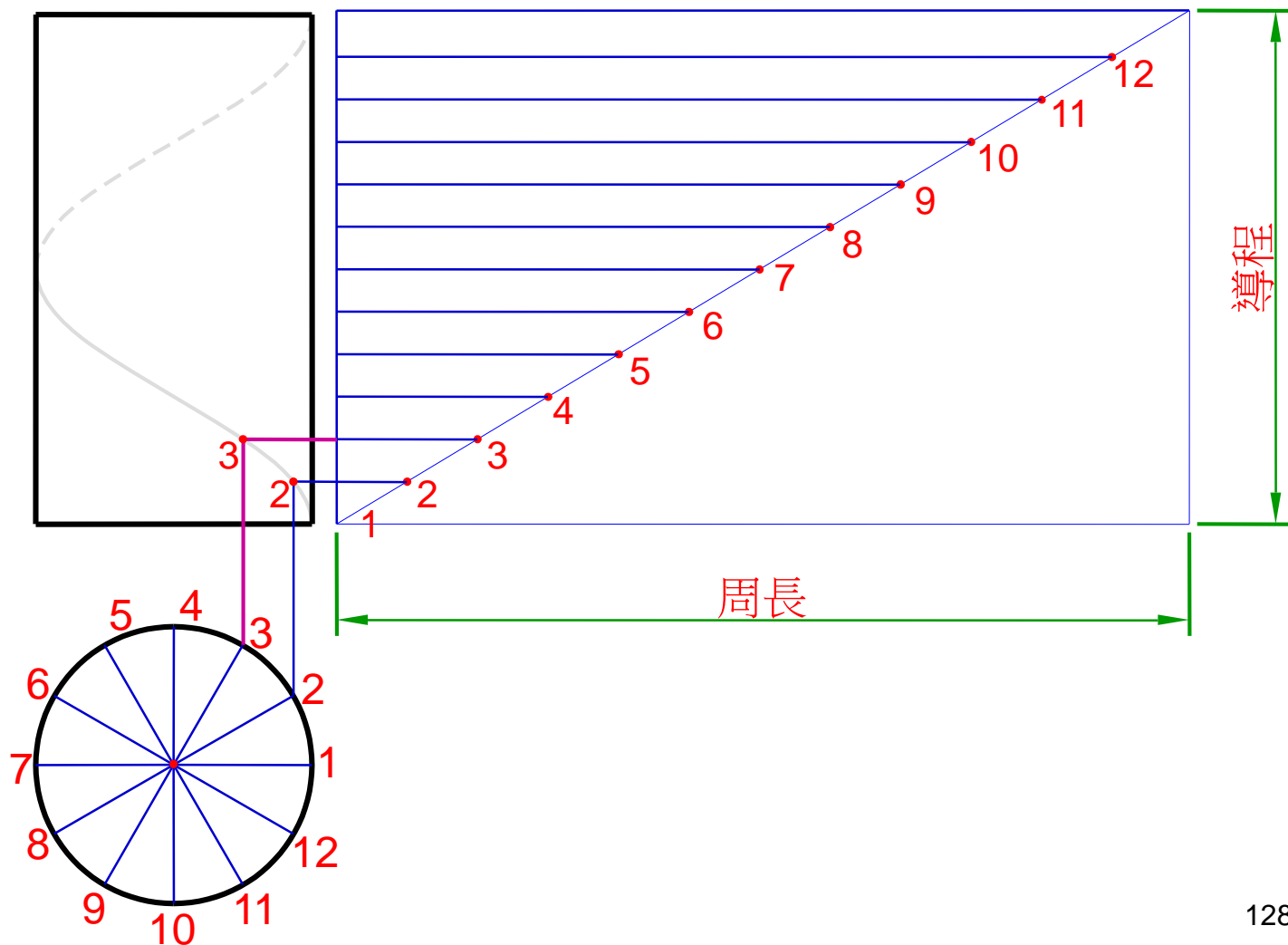


CAD圖

CAD-AVI

柱面螺旋線畫法-4/7

- 過圓之等分點3作垂線，與過導程之等分點3作水平線之交點，即為曲線上的點。

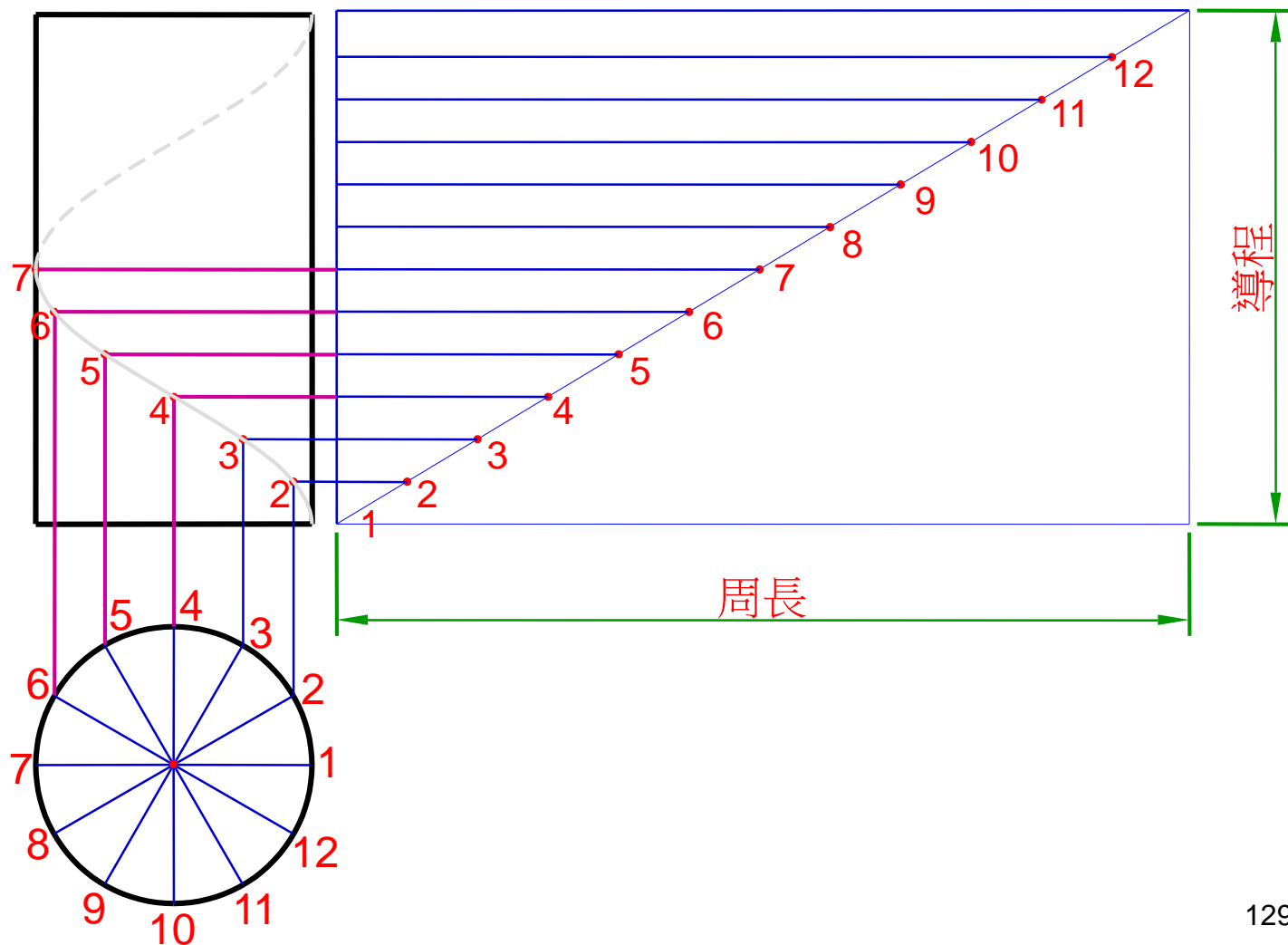


CAD圖

CAD-AVI

柱面螺旋線畫法-5/7

- 同理求出其他各點。

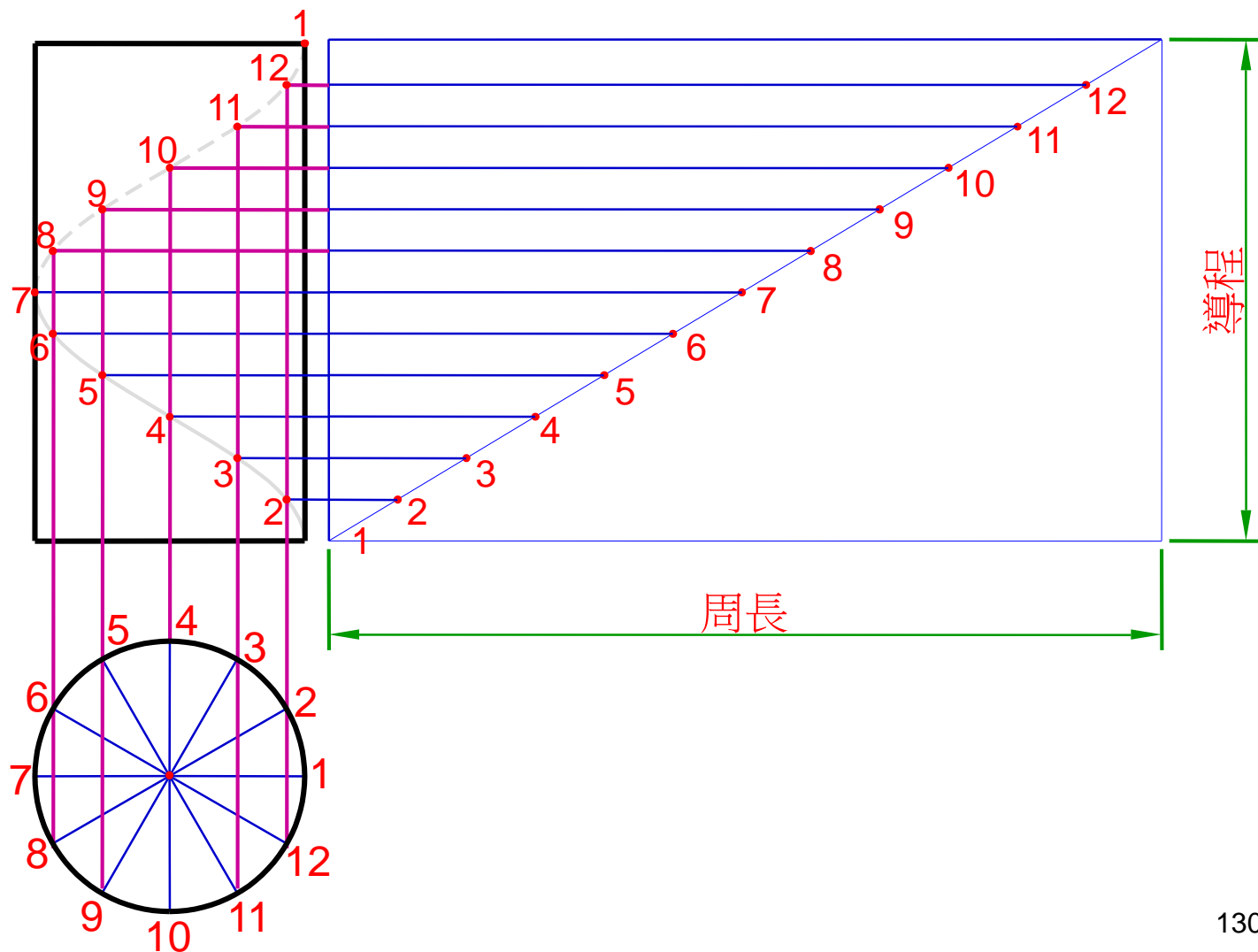


CAD圖

CAD-AVI

柱面螺旋線畫法-6/7

- 同理求出其他各點。

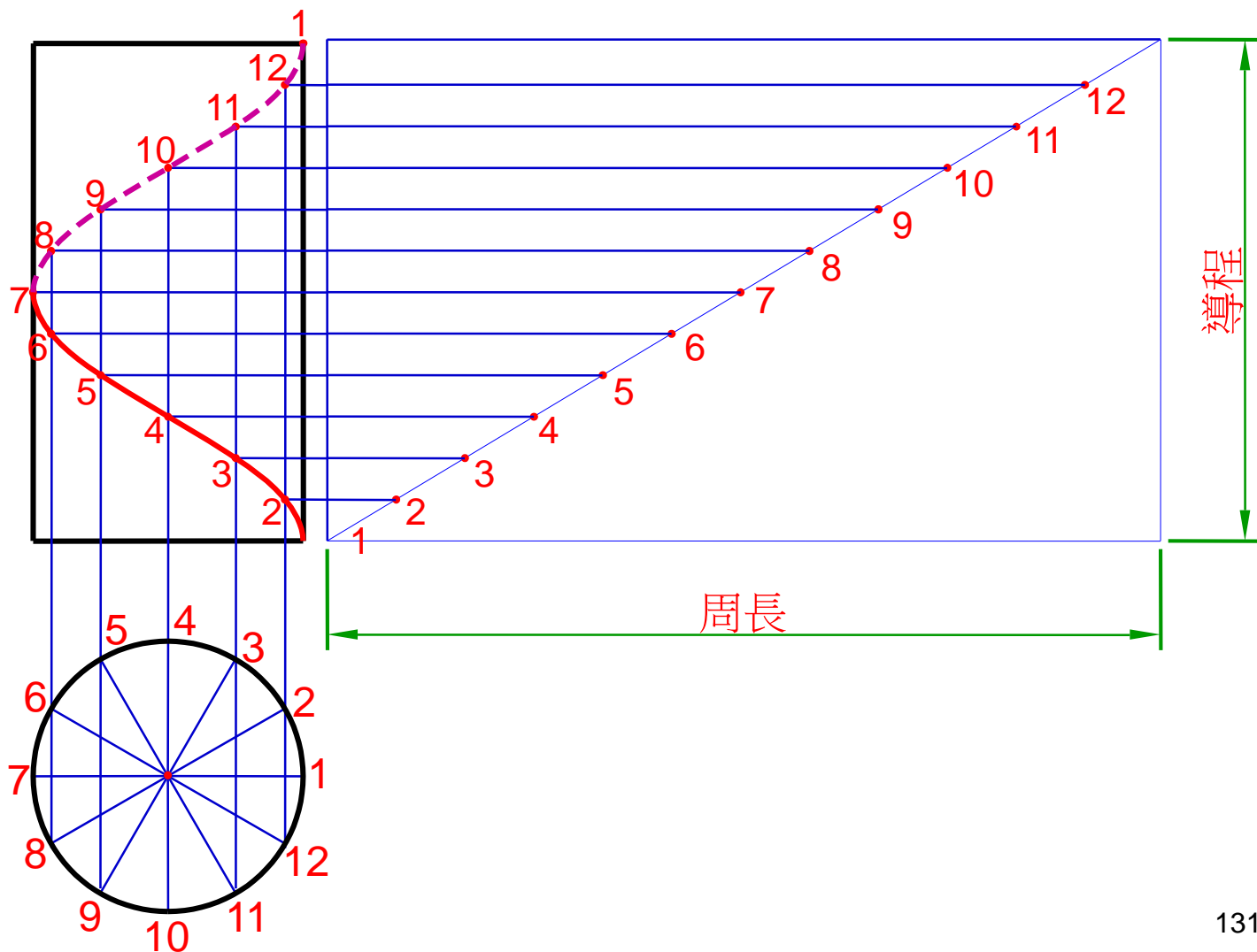


CAD圖

CAD-AVI

柱面螺旋線畫法-7/7

- 曲線板連接各點，即為所求柱面螺旋線。

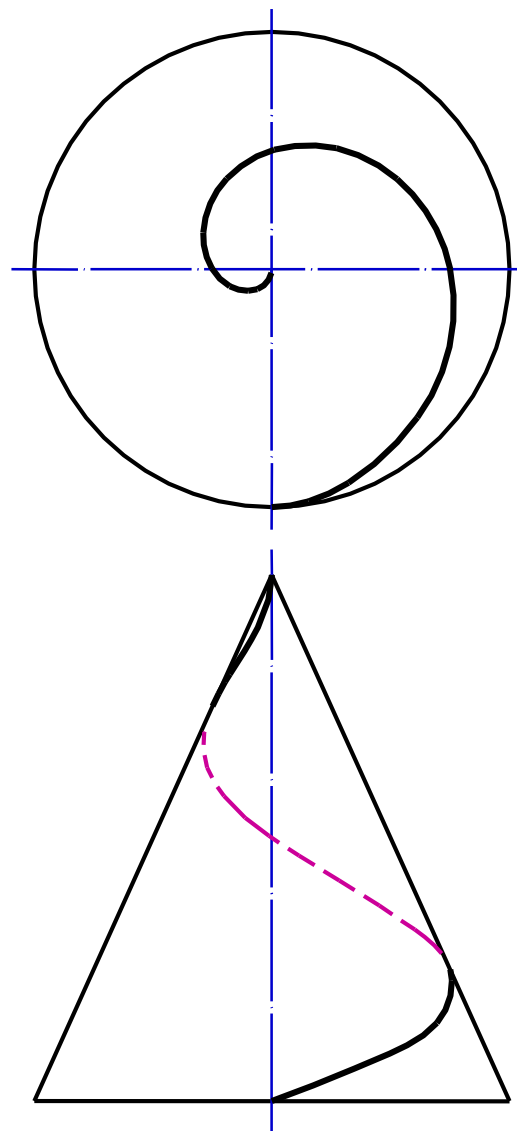


CAD圖

CAD-AVI

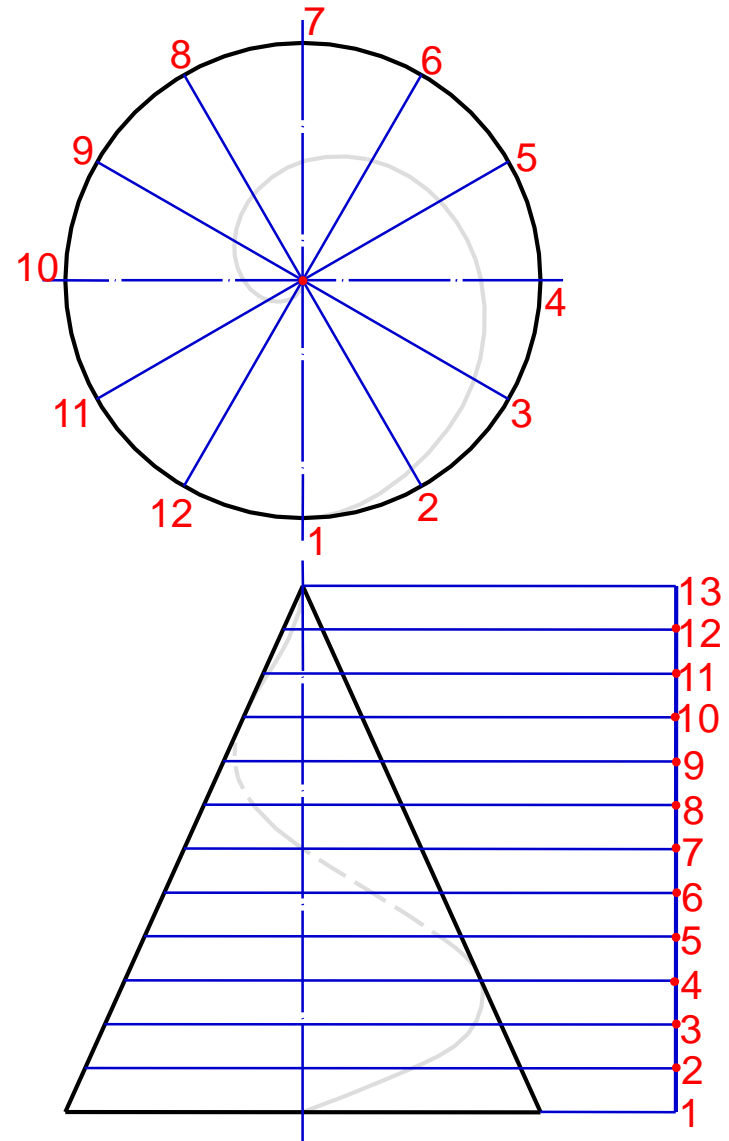
5.10.3 錐面螺旋線畫法-1/9

- 已知：圓錐之大小與導程。
- 求作：錐面螺旋線。



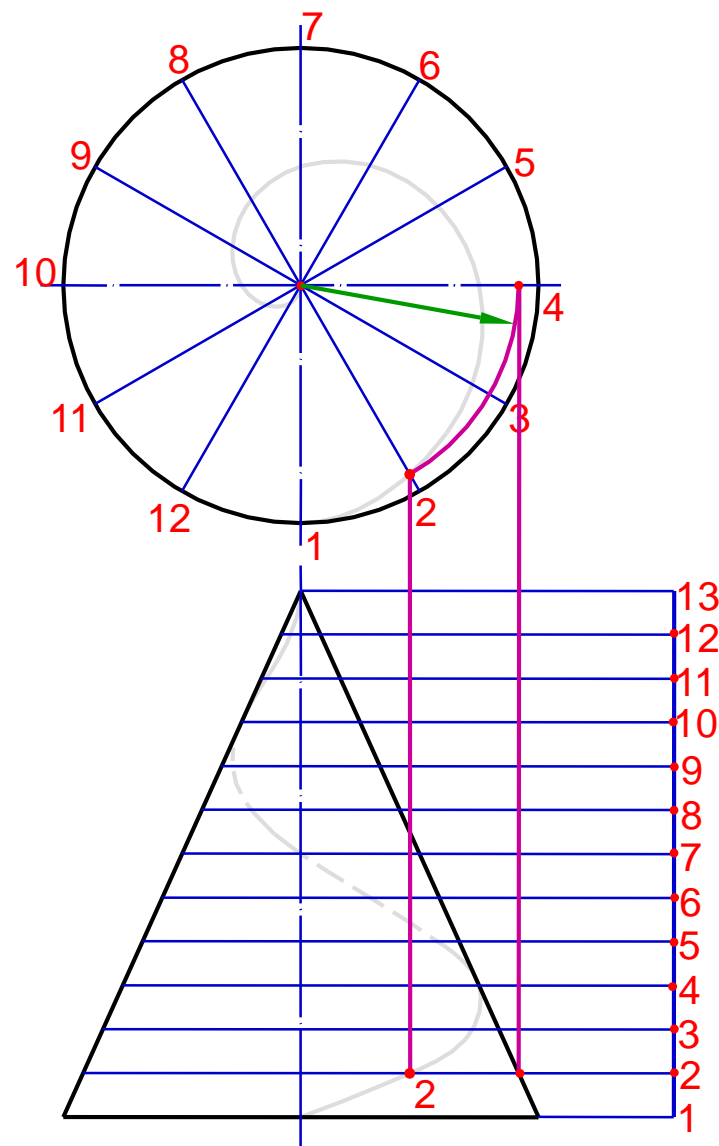
5.10.3 錐面螺旋線畫法-2/9

- 將圓及導程作相同之等分。



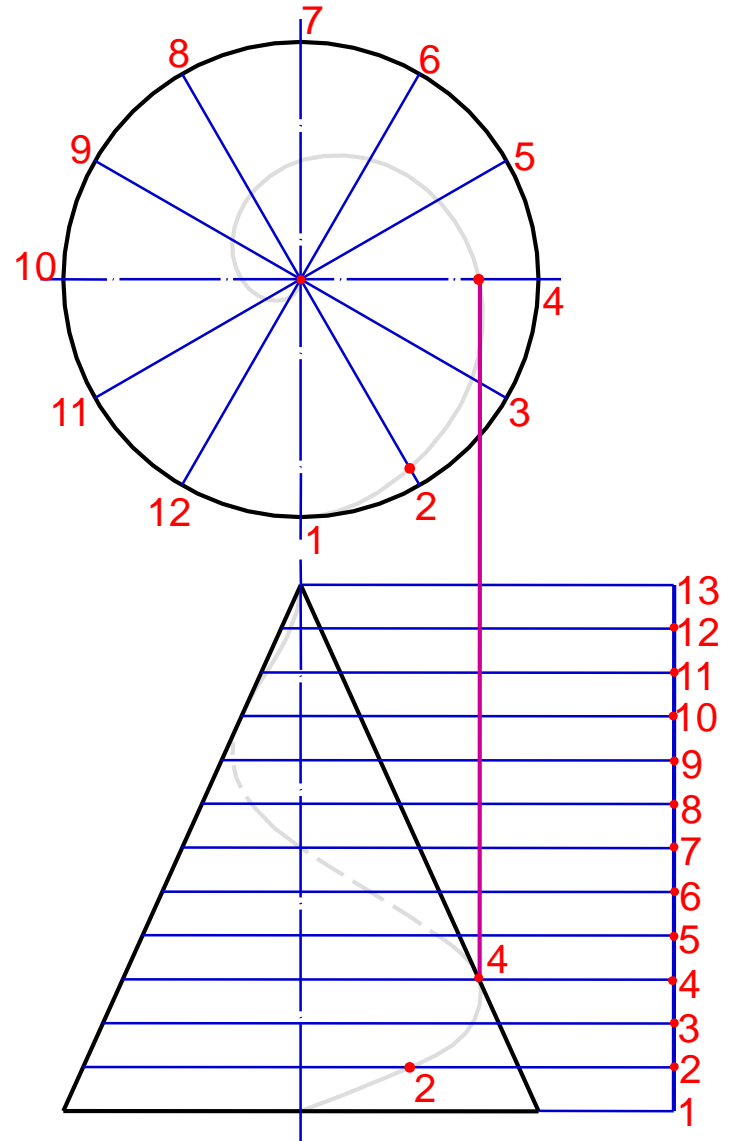
5.10.3 錐面螺旋線畫法-3/9

- 當動直線繞中心軸轉 $1/12$ 圈時，動點即前進 $1/12$ 導程，過導程之等分點2作水平線與圓錐相交，交點與中心軸之距離投影至俯視圖，以該距離為半徑，圓錐頂點為圓心畫弧與第2等分線相交，將該交點投影至前視圖與水平線相交，即為曲線上的點。



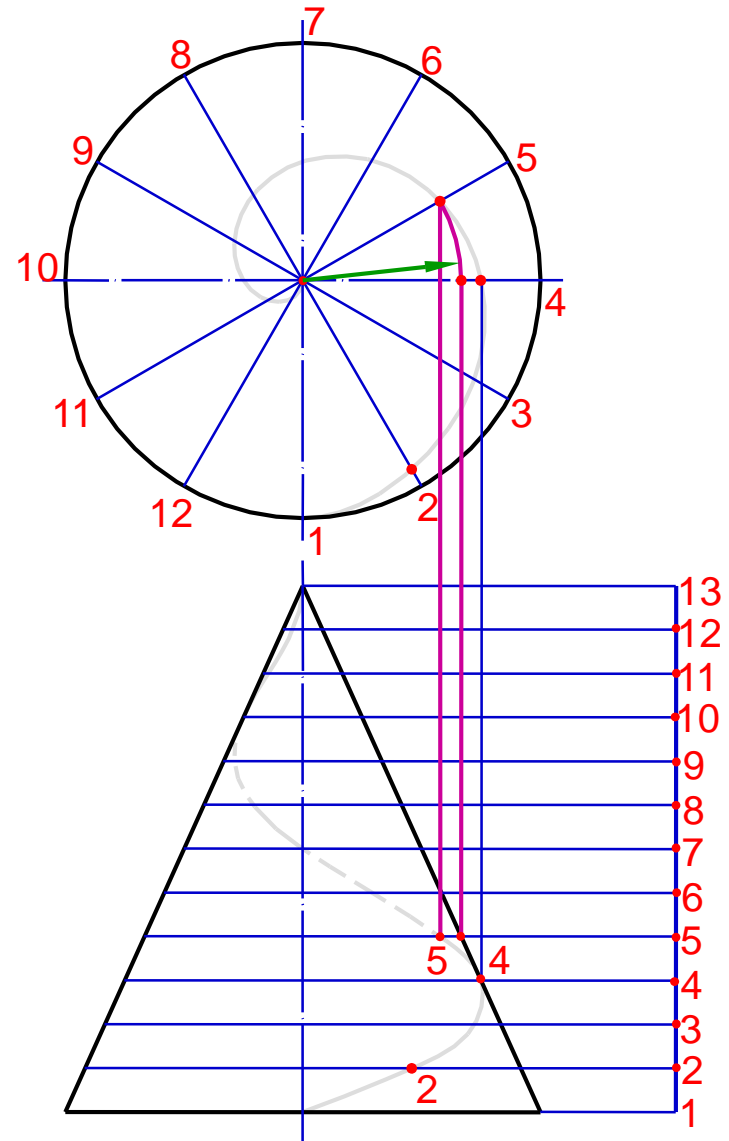
5.10.3 錐面螺旋線畫法-4/9

- 求出等分點4對應之交點。



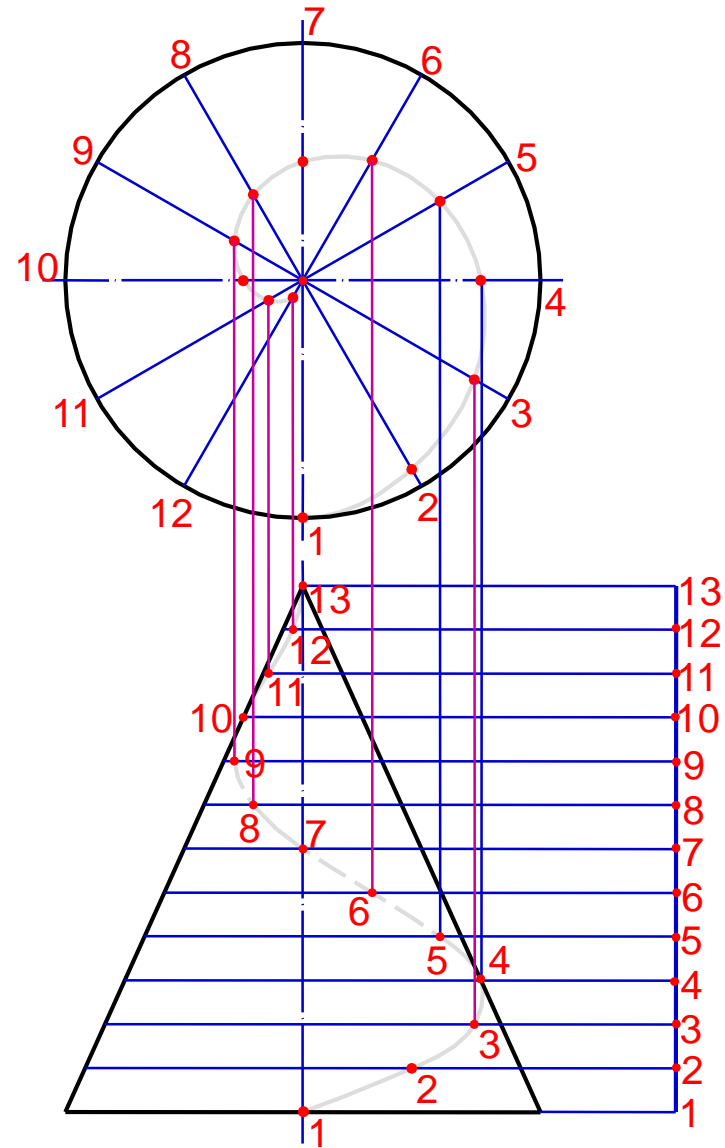
5.10.3 錐面螺旋線畫法-5/9

- 同理求出等分點5對應之交點。



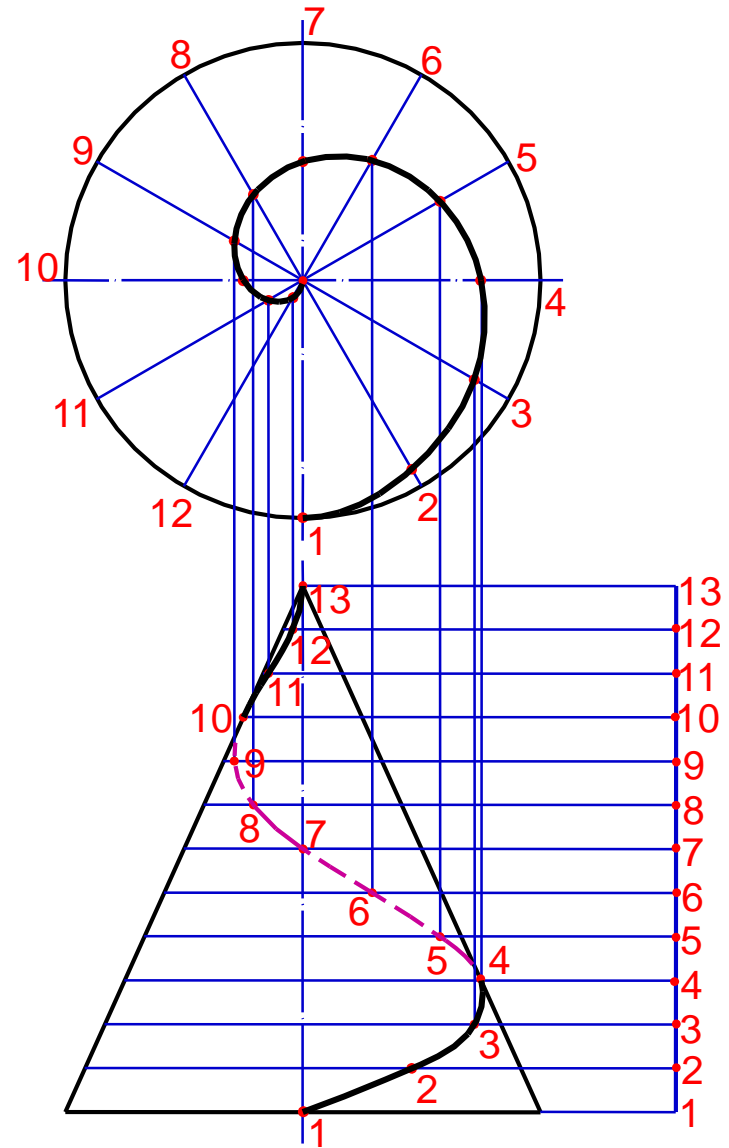
5.10.3 錐面螺旋線畫法-6/9

- 同理求出其他各等分點對應之交點。

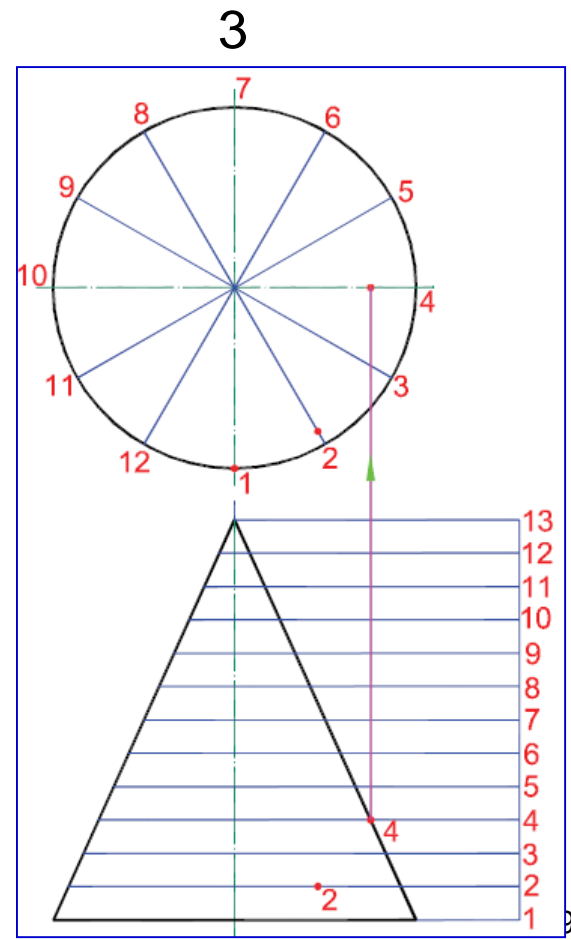
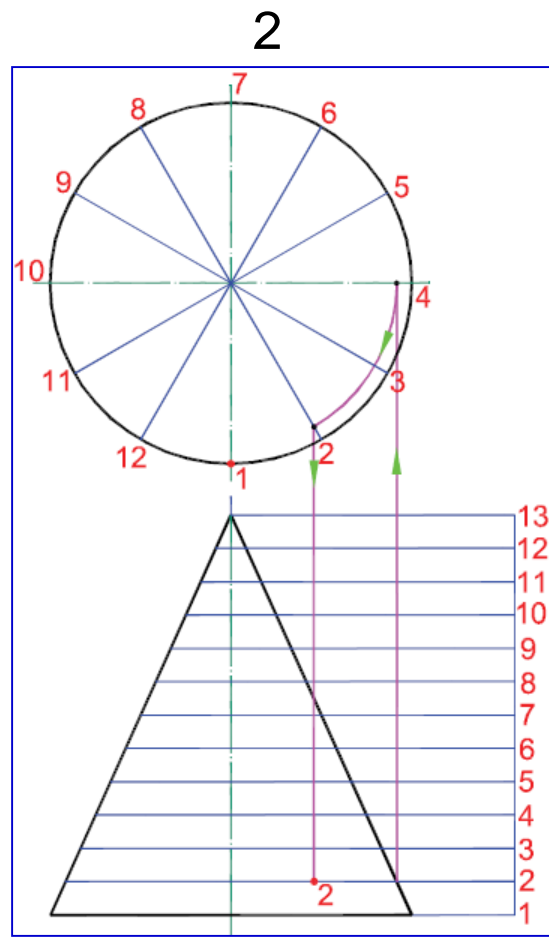
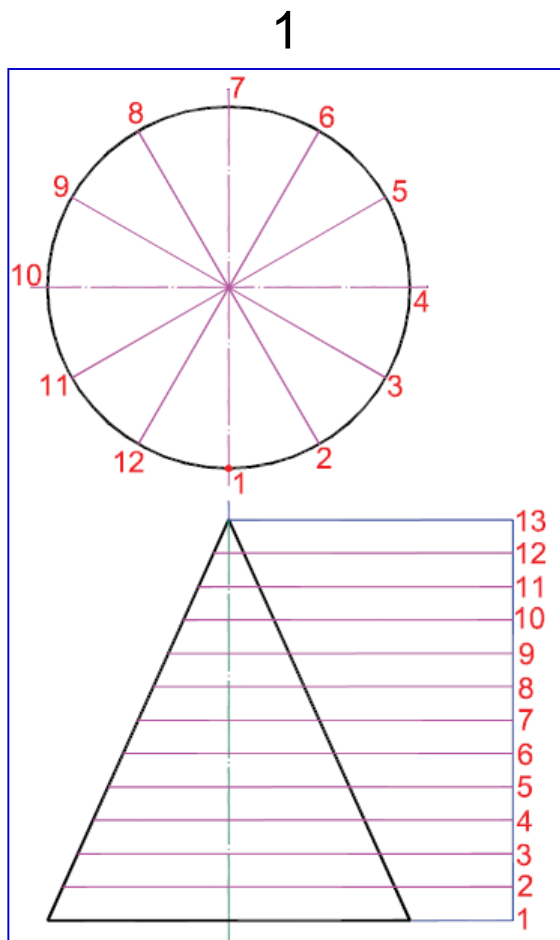


5.10.3 錐面螺旋線畫法-7/9

- 最後以曲線板連接各點即為所求錐面螺旋線。

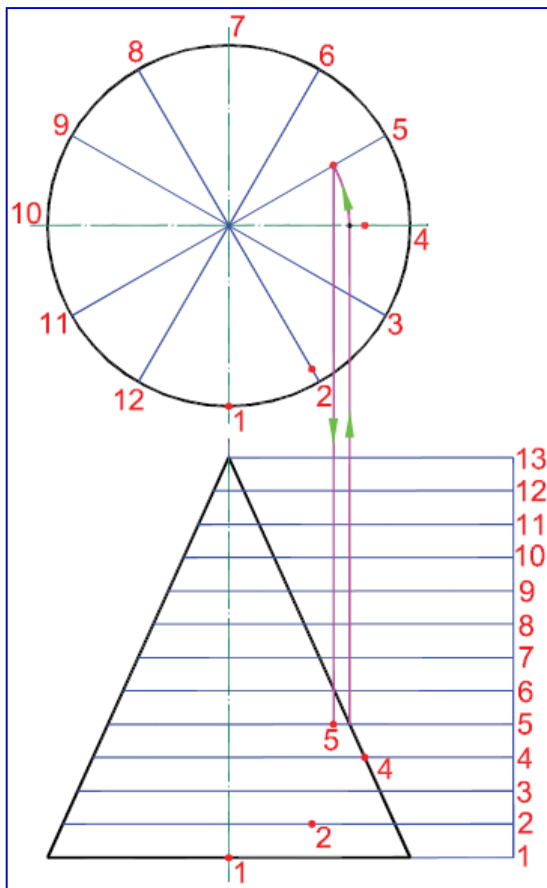


5.10.3 錐面螺旋線畫法-8/9

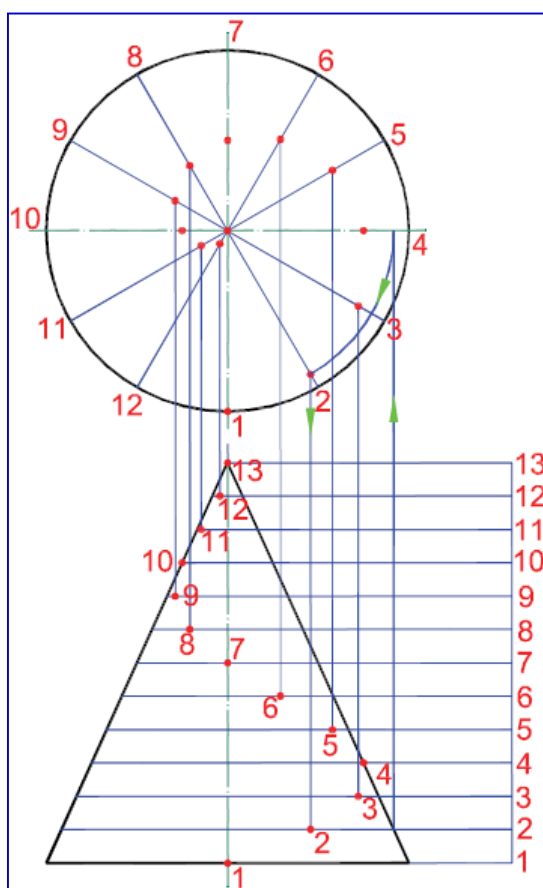


5.10.3 錐面螺旋線畫法-9/9

4



5



6

