電流(current)與電阻(Resistance)

- 探討電荷運動的相關問題。

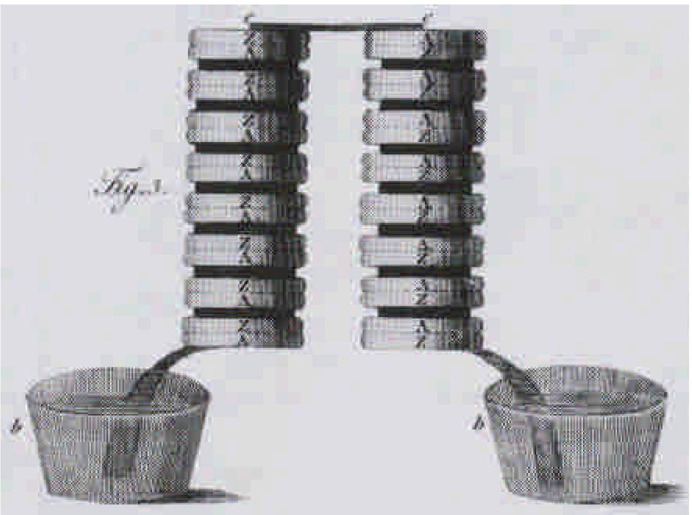
非連續電流 ⇨ 伏打電堆 (voltaic pile) ⇨ 連續電流 ⇨ 電流定義

定義
- 平均電流：$I_{av} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$
- 瞬間電流：$I = \dfrac{dQ}{dt}$

；單位：1A=1C/s ；方向：正電荷運動方向，即高電位往低電位。

注意：實際是負電荷的電子在運動

Fig.27.2



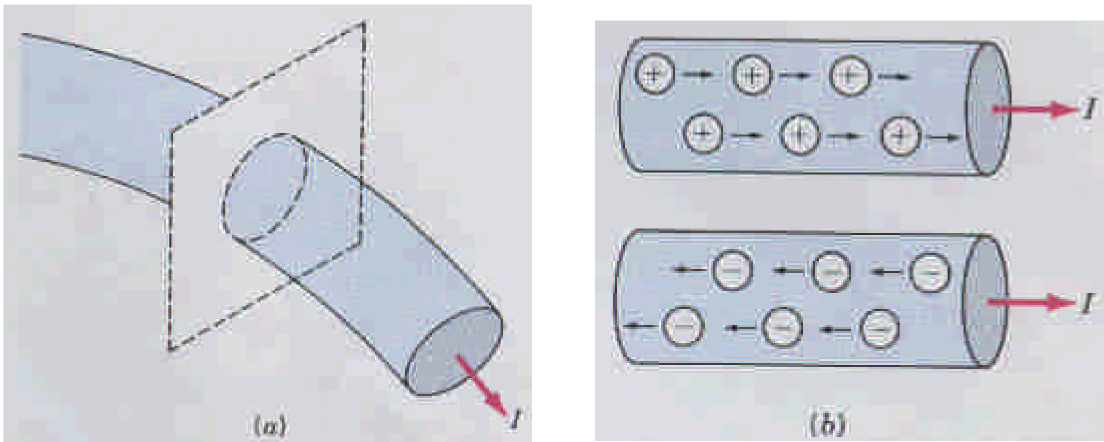


Fig.27.3

● 導線內的電場(當導線接電池兩端)

(1)電荷會在此兩端或導線表面流動，電荷密度大小會隨著與端點間的距離而遞減。

(2)靜態情況(static condition)下，導線表面電場會垂直於導線，但當導線兩端跨有電位差，在沿導線方向會有一平行分量，驅使電流在導線上流動。

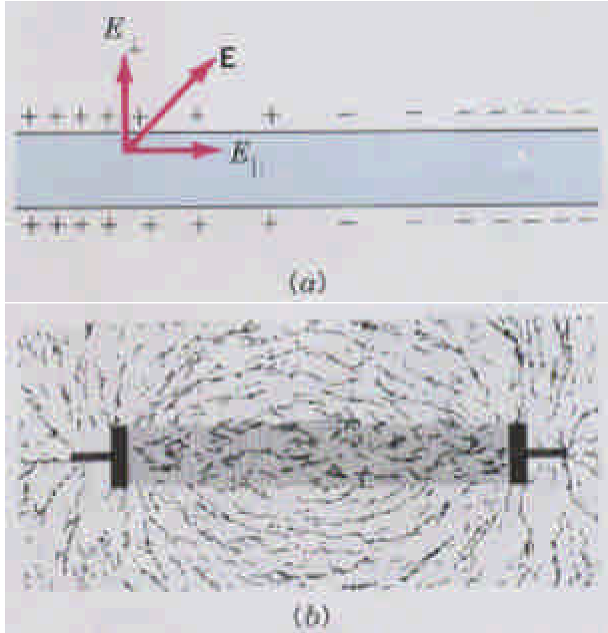


Fig.27.5

● 導線內部電流性質

載流導線內部的傳導電子運動軌跡相當不規則，雖其隨機性熱運動速率高達10^6 m/s，但因晶格正離子的碰撞，當電位差施於導線兩端，實際漂移速度只有10^{-4} m/s。

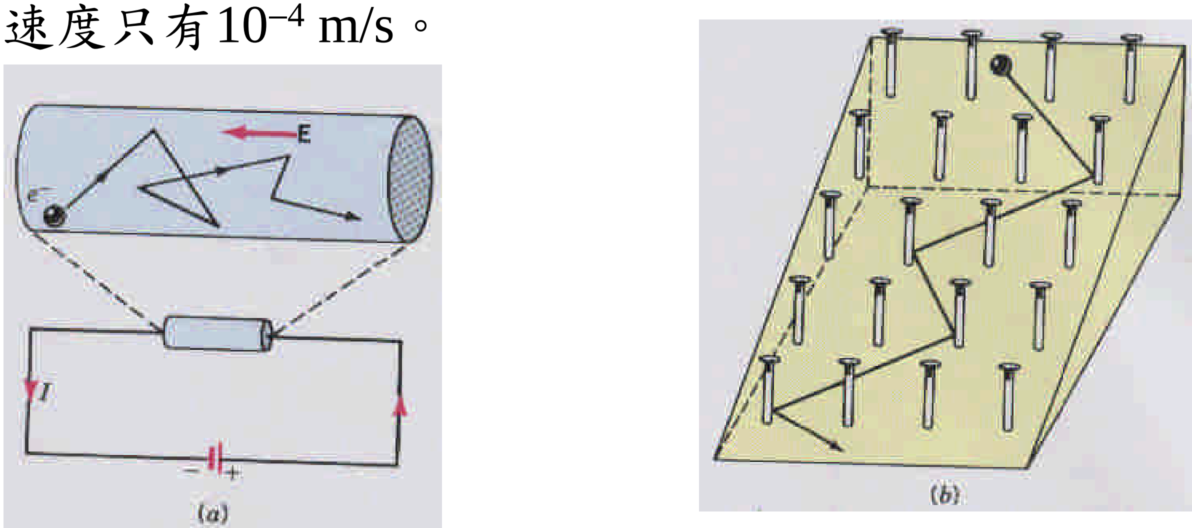


Fig.27.6

- 電流密度(current density) $\Rightarrow J = \dfrac{I}{A} = nqv_d$

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{n(Al)q}{l/v_d} = nAqv_d$$ (電流係以巨觀尺度測量的純量)

$$J = \frac{I}{A} = \frac{nAqv_d}{A} = nqv_d$$

$\Rightarrow \vec{J} = nq\vec{v}_d$ (電流密度係以微觀尺度測量的向量)

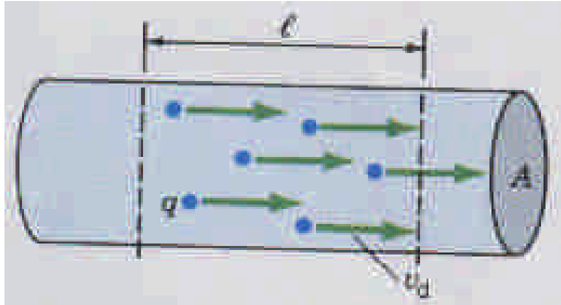


Fig.27.7

$$I = \vec{J}\cdot\vec{A}(uniform) = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}(nonuniform)$$

- 電阻(resistance) $\Rightarrow R = \dfrac{V}{I}$ ； 與 $\begin{cases}\text{幾何形狀}\\ \text{導電性質}\end{cases}$ 有關 ； 單位：$1\Omega = 1\ \text{V/A}$

$$\begin{cases}\vec{J} = nq\vec{v}_d\\ \vec{v}_d \propto \vec{E}\end{cases} \Rightarrow \vec{J} \propto \vec{E} \Rightarrow \vec{J} = \sigma\vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E}$$ ，其中 $\begin{cases}\sigma\text{為導電率(conductivity)}\\ \rho\text{為電阻率(resistivity)}\end{cases}$

$$J = I/A = (1/\rho)E \Rightarrow I = (A/\rho)E$$

$$\xrightarrow{E=V/\ell} I = (A/\rho\ell)V \xrightarrow{R=V/I} R = \frac{\rho\ell}{A}$$

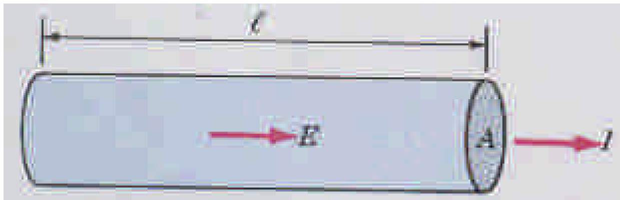
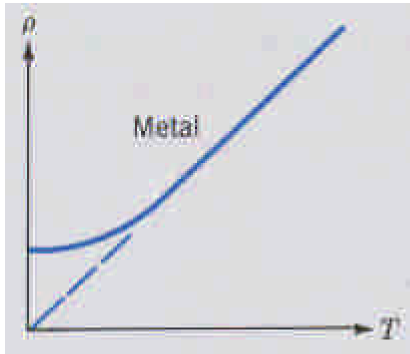
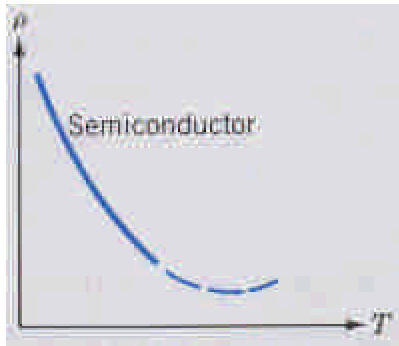


Fig.27.8

TABLE 27.1 RESISTIVITIES AT 20°C

Material	Resistivity ($\Omega \cdot m$)	Temperature Coefficient (C^{-1})
Mica	2×10^{15}	-50×10^{-3}
Glass	10^{12}–10^{13}	-70×10^{-3}
Hard rubber	10^{13}	
Silicon	2200	−0.7
Germanium	0.45	−0.05
Carbon (graphite)	3.5×10^{-5}	-0.5×10^{-3}
Nichrome	1.2×10^{-6}	0.4×10^{-3}
Manganin	44×10^{-8}	5×10^{-7}
Steel	40×10^{-8}	8×10^{-4}
Platinum	11×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Aluminum	2.8×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Copper	1.7×10^{-8}	3.9×10^{-3}
Silver	1.5×10^{-8}	3.8×10^{-3}





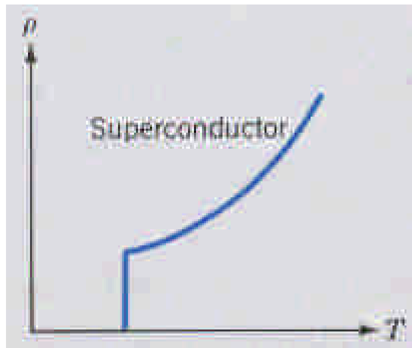


Fig.27.9

➢電阻率與溫度相關

- ♦純金屬的電阻率與溫度成正比
  - －溫度T的金屬電阻率可利用某參考溫度T_0之電阻率ρ_0表示。

$$\rho = \rho_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right]$$

其中α表電阻率之溫度係數， $\alpha > 0$

(Note： $R = \dfrac{\rho \ell}{A} \Rightarrow \mathrm{R}=\mathrm{R}_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)\right]$)

- ♦半導體的電阻率與溫度成反比

$$\rho = \rho_0\left[1+\alpha\left(T-T_0\right)+\beta\left(T-T_0\right)^2\right]$$

其中 $\alpha < 0$ (反比)，$\beta > 0$ (彎曲向上)

- 金屬電阻率的成因：

  1.電子與晶格中的正離子碰撞。(與溫度有關)
  2.雜質(impurities)。
  3.晶格瑕疵或缺陷(imperfection)。

- 金屬(Metal)電阻率與溫度成正比：

  －因溫度升高，晶格中離子的振盪振幅會增大，導致與電子的碰撞增多，因而電子流的阻礙增大，電阻率增大。

- 半導體(Semiconductor)電阻率與溫度成反比：

  －因溫度升高，會釋出更多的自由電子參與傳導過程，同時亦可藉由摻入雜質來控制電阻率。

- 超導體(Superconductor)電阻率會在某臨界溫度T_C下完全消失

  －古柏(Cooper)理論可解釋如何克服晶格瑕疵。

●歐姆定律 (Ohm's Law) $\Rightarrow \begin{cases} \text{巨觀型式：} V = IR \Rightarrow R = \dfrac{V}{I} \\ \text{微觀型式：} J = \dfrac{E}{\rho} \Rightarrow \rho = \dfrac{E}{J} \end{cases}$

巨觀 → 微觀的推導： $R = \dfrac{V}{I} \Rightarrow \dfrac{\rho\ell}{A} = \dfrac{E\ell}{JA} \Rightarrow \rho = \dfrac{E}{J}$

➢歐姆性裝置(ohmic device)：如碳或陶瓷電阻器。

一溫度一定時，V 與 I 關係成一直線，R=V/I=const.

➢非歐姆性裝置(nonohmic device)：如接面二極體， R=V/I≠const.

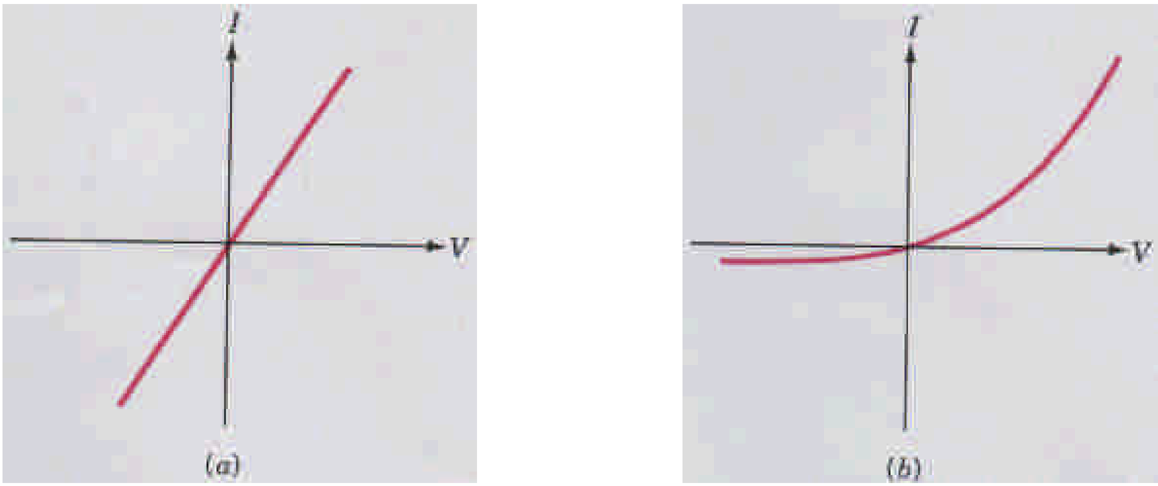
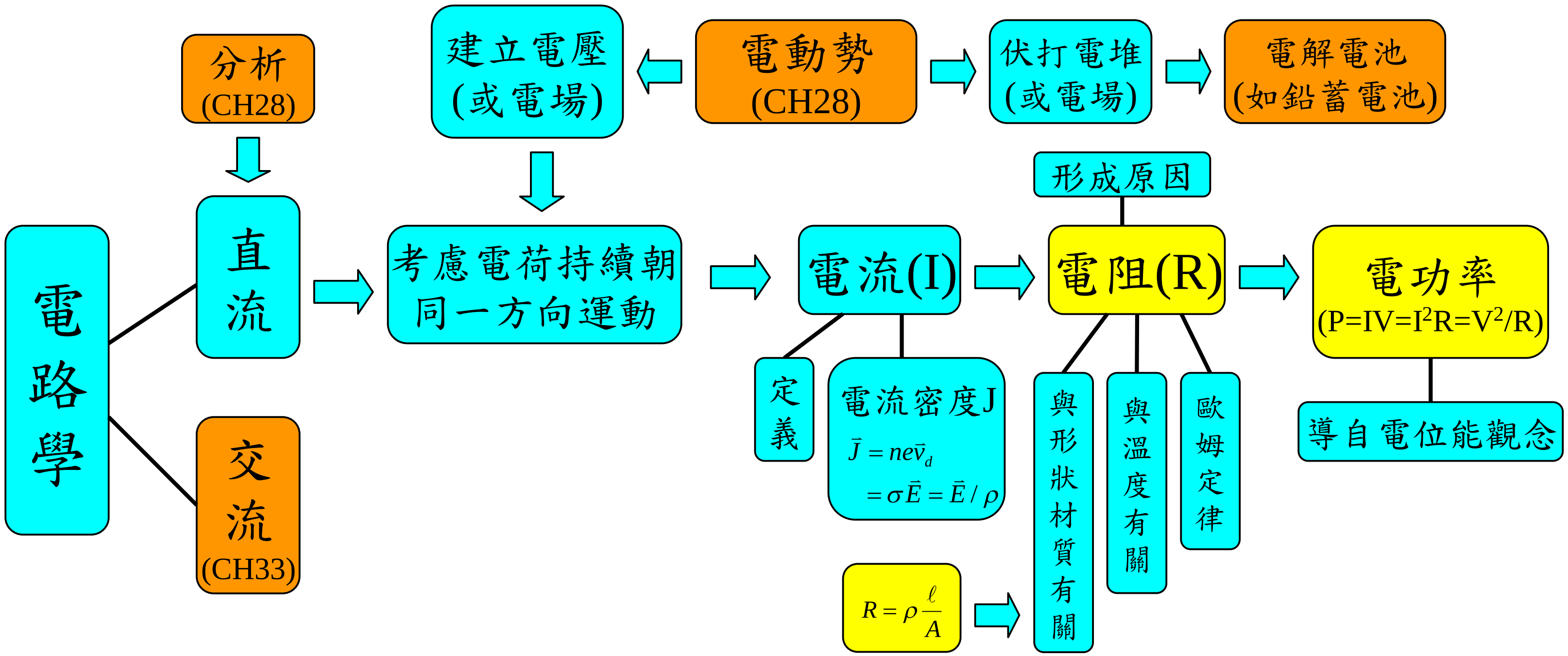


Fig.27.11

- 功率(power)

$$P=\frac{dU}{dt}=\frac{d(qV)}{dt}=(\frac{dq}{dt})V=IV=I(IR)=I^2R=\frac{V^2}{R}$$

本章重要觀念發展脈絡彙整



習 題

- 教科書習題 (p.542~p.544)

  Exercise: 1,9,13,19,23,29,33

  Problem: 3,4,5

- 基本觀念問題：

  1.請說明金屬電阻率的形成原因。

  2.請解釋電阻率與溫度成正比或反比的原因。

  3.請寫出巨觀與微觀形式的歐姆定律。

- 延伸思考問題：

  1.何謂超導體(superconductor)？請說明低溫超導的古柏(Cooper)理論及目前超導研究的發展。

直流電路(Direct Current Circuit)

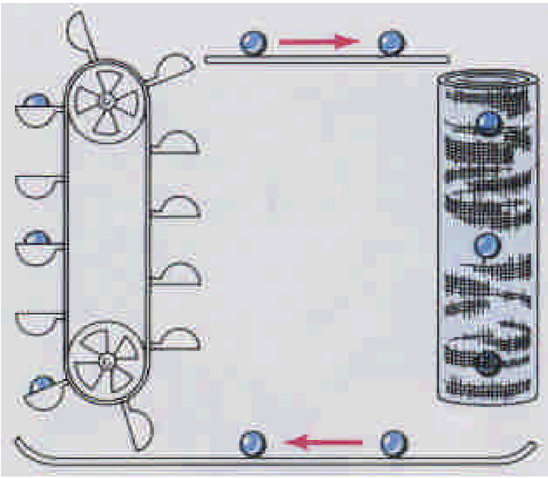
- 電動勢(Electromotive Force, emf)$\Rightarrow \xi = \dfrac{W_{ne}}{q}$

－驅使電荷環繞封閉迴路運動時，對每單位電荷所作的功。

➢ ‘*ne*’表非靜電動因(W_{ne}即非靜電力所作的功)。
(non-electrostatic agent)

➢ 電動勢與電位差之區別 $\Rightarrow$
- 電位差恆與保守靜電場有關。
- 電動勢恆與非靜電機構有關。
(非靜電機構可提供分離正負電荷的能量)

➢ 電動勢源可將某種形式的能量轉換為靜電電位能。



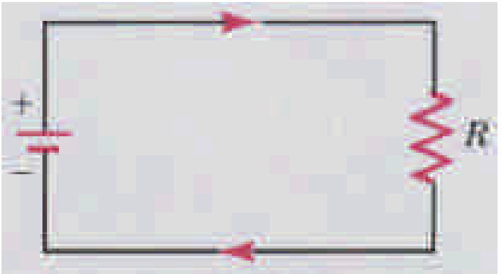


Fig.28.1

- 電動勢源的發展：伏打電堆 (voltaic pile) ⇨ 鉛蓄電池 (lead-acid cell)

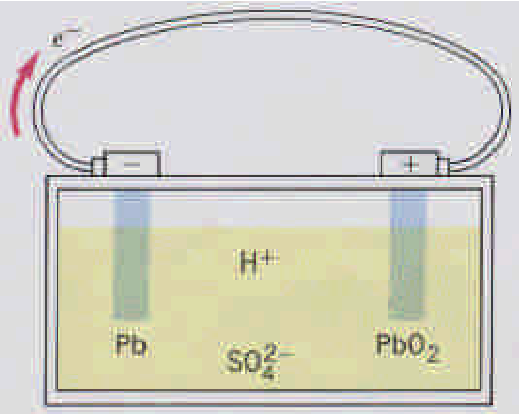


Fig.28.2

鉛蓄電池 ⇨
$$\begin{cases} Pb + SO_4^{2-} \rightarrow PbSO_4 + 2e^- \\ PbO_2 + 4H^+ + SO_4^{2-} + 2e^- \rightarrow PbSO_4 + 2H_2O \end{cases}$$

⇨
- ➢硫酸會損耗，硫酸鉛會積存在兩極板。
- ➢電子由Pb極板(負端)轉移至PbO_2極板(正端)在外部導線形成電流，兩板電位差為2.05V。

- 端電位差(Terminal potential difference)－電動勢源兩端的電位差

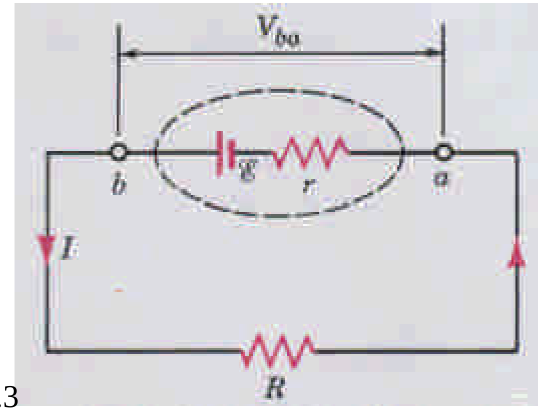


Fig.28.3

$$V_{ba} = V_b - V_a = \xi - Ir \xrightarrow{I=0} V_{ba} = \xi$$

$\Rightarrow \begin{cases} V_{ba}\text{表電荷傾向將靜電位能減至最小} \\ \xi\text{表傾向將電荷分離的某種能量減至最小。} \end{cases}$

• 克希荷夫法則(Kirchhoff's rules) ⇒

- 接點法則： $\sum I = 0$
- 迴路法則： $\sum V = 0 \quad (or \sum \Delta V = 0)$

接點法則⇒ (junction rules)

- 進入或離開某個接點的電流代數和為零。(電荷守恆的另一種陳述)
- 電流方向一般遵循高電位至低電位。

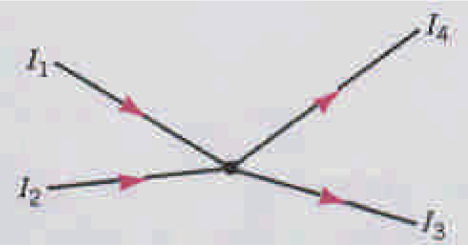


Fig.28.5

迴路法則⇒ (loop rules)

- 環繞一封閉迴路之電位變化量代數和為零。(能量守恆概念)
- 迴路順電流方向⇒電阻器ΔV 為負值，emf源ΔV 為正值。
- 迴路逆電流方向⇒電阻器ΔV 為正值，emf源ΔV 為負值。

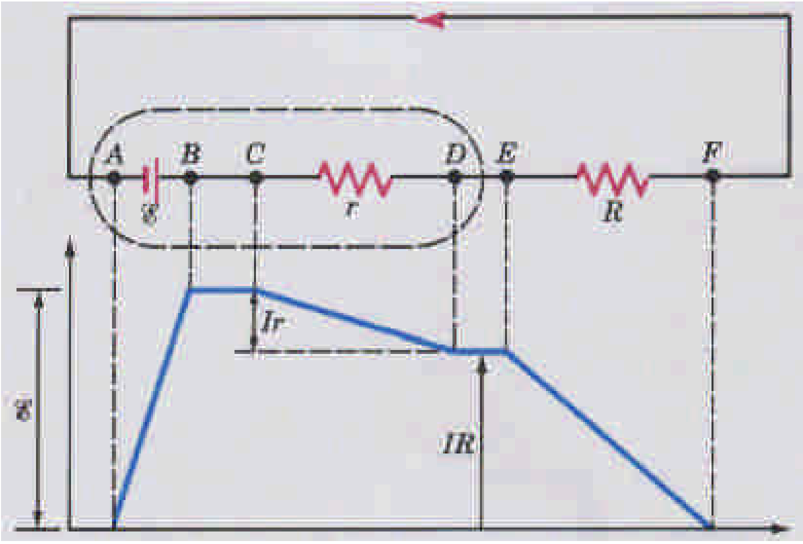


Fig.28.6

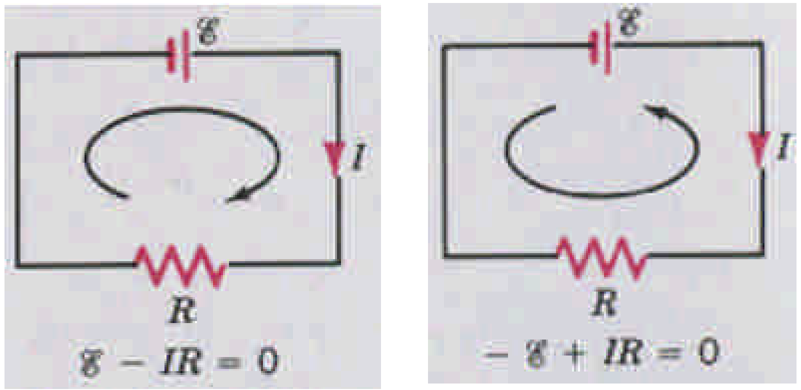
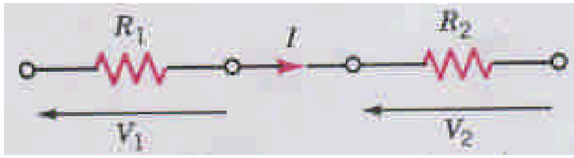


Fig.28.7

●電阻串聯(in series)⇒電流相同 $\Rightarrow V = V_1 + V_2 = I\left(R_1 + R_2\right) = IR_{eq}$

$$\Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 \quad \Rightarrow R_{eq} = R_1 + R_2 + R_3 + \cdots + R_N$$

Fig.28.8



●電阻並聯(in Parallel) ⇒電位差(或電壓)相同 $\Rightarrow I = I_1 + I_2 \Rightarrow I = \dfrac{V}{R_1} + \dfrac{V}{R_2} = \dfrac{V}{R_{eq}}$

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_N}$$

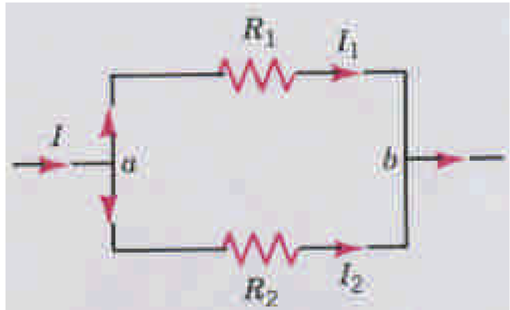


Fig.28.9

Example 28.4： $(a) I_1 = ?, I_2 = ?, I_3 = ?$ $(b) V_A - V_B = ?$

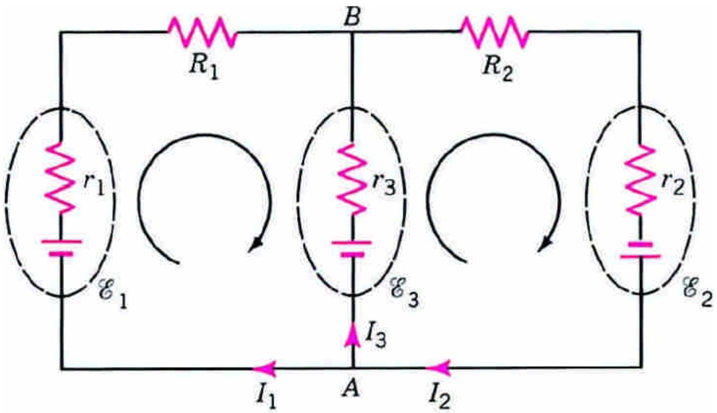


Fig.28.13

$$junction\ rule: I_1 - I_2 + I_3 = 0 \qquad (1)$$

$$Left\ loop: \xi_1 - I_1 r_1 - I_1 R_1 + I_3 r_3 - \xi_3 = 0$$

$$\Rightarrow 15 - 2I_1 - 4I_1 + I_3 - 4 = 0 \ \Rightarrow 11 - 6I_1 + I_3 = 0 \quad (2)$$

$$Right\ loop: \xi_3 - I_3 r_3 - I_2 R_2 + \xi_2 - I_2 r_2 = 0$$

$$\Rightarrow 4 - I_3 - 3I_2 + 6 - 2I_2 = 0 \ \Rightarrow 10 - 5I_2 - 6I_3 = 0 \quad (3)$$

From (1),(2),(3) $\Rightarrow I_1 = 1.85A,\ I_2 = 1.97A,\ I_3 = 0.12A$ Ans(a)

$$V_A - V_B = I_3 r_3 - \xi_3 = (0.12)(1) - 4 = -3.78V \qquad \text{Ans}(b)$$

(初始B, 終點A ⇒ 終－初)

Example 28.6：

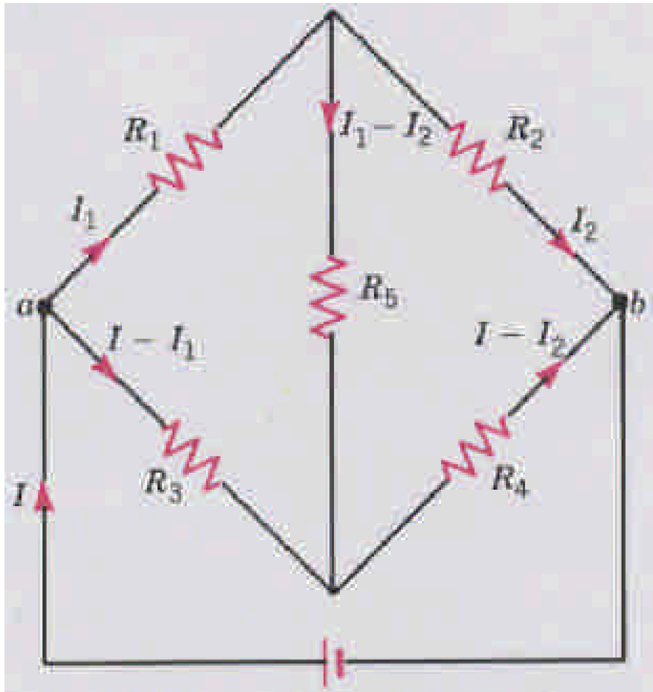


Fig.28.15

$$I_3 = I - I_1;\quad I_4 = I - I_2;\quad I_5 = I_1 - I_2$$

$$-I_1R_1 - (I_1 - I_2)R_5 + (I - I_1)R_3 = 0 \quad (1)$$

$$+(I_1 - I_2)R_5 - I_2R_2 + (I - I_2)R_4 = 0 \quad (2)$$

If $I_1 = \alpha_1 I$ and $I_2 = \alpha_2 I$

(代入(1),(2)可消去I，僅剩兩未知數)

$$V_b - V_a = -I_1R_1 - I_2R_2 = -(\alpha_1R_1 + \alpha_2R_2)I$$

- RC circuits：

穩流 (steady currents)	$\xrightarrow{+電容(capacitor)}$	變化的電流 (variable currents)

(在充電或放電期間電流會隨時間變化)

➢放電(Discharge)：

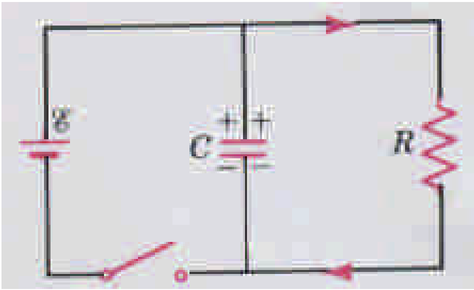


Fig.28.16

The switch is opened at t=0 (短路)

$$\frac{Q}{C} - IR = 0 \text{ (from loop rule)} \Rightarrow \frac{Q}{C} = IR \Rightarrow I = \frac{Q}{RC} \quad （電流減小）$$

$$\xrightarrow{I=-\frac{dQ}{dt}} \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC} \Rightarrow \int \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}\int dt \Rightarrow \ln Q = -\frac{t}{RC} + k$$

$$\xrightarrow{Q=Q_0 \ at \ t=0} k = \ln Q_0 \Rightarrow Q = Q_0 e^{-t/RC}$$

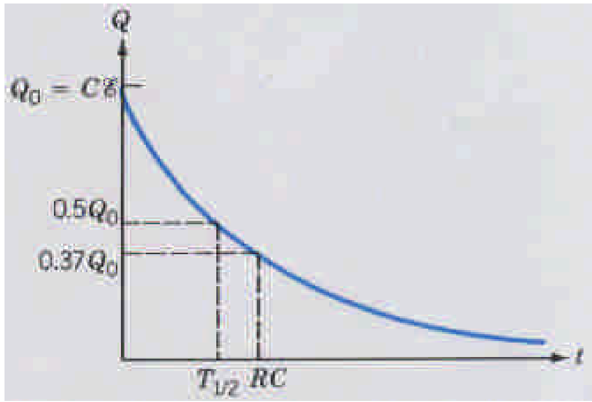


Fig.28.17

$$\tau = RC \Rightarrow \begin{cases} Q = Q_0 e^{-1} = 0.37 Q_0 \ (t = \tau) \\ 1/2\ Q_0 = Q_0 e^{-T_{1/2}/RC} (t = 0.693\tau) \end{cases}$$

時間常數
(Time constant)

$$電流 \Rightarrow I = -dQ/dt \Rightarrow I = I_0 e^{-t/RC}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I_0 = \xi / R \ (最大) \ \text{at } t = 0 \\ I_0 = 0 \ \text{ at } t \to \infty \end{cases}$$

➢充電(charging)：

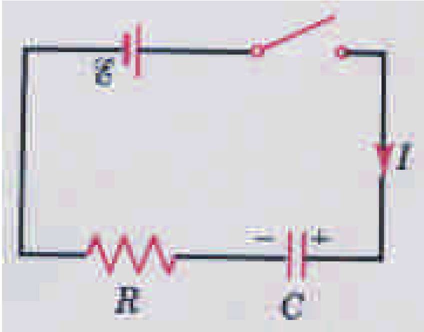


Fig.28.18

The switch is closed at t=0 (短路) $I=+\dfrac{dQ}{dt}$ (電流增加)

$$\xi - IR - \frac{Q}{C} = 0 \text{ (from loop rule)} \Rightarrow \xi - \frac{dQ}{dt}R - \frac{Q}{C} = 0$$

$$\Rightarrow C\xi - Q = \frac{dQ}{dt}RC \Rightarrow \int \frac{dQ}{C\xi - Q} = \frac{1}{RC}\int dt$$

$$\Rightarrow -ln(C\xi - Q) = \frac{t}{RC} + k$$

$$\xrightarrow{Q=0\ at\ t=0} k = -\ln(C\xi)$$

$$\Rightarrow ln\left(\frac{C\xi - Q}{C\xi}\right) = -\frac{t}{RC} \xrightarrow{\because Q_0 = C\xi} Q = Q_0(1 - e^{-t/RC})$$

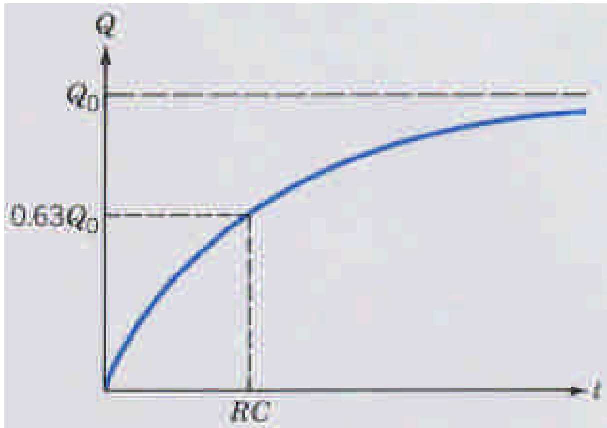


Fig.28.19

$$At\ t = \tau(= RC) \Rightarrow Q = Q_0(1 - e^{-1}) = 0.63Q_0$$

$$Current \Rightarrow I = +dQ/dt \quad \Rightarrow I = I_0 e^{-t/RC}$$

(與放電形式相同)

$$Discussion \Rightarrow \begin{cases} discharge\ circuit: V_C = V_R = \xi \\ charging\ circuit: V_C + V_R = \xi \end{cases}$$

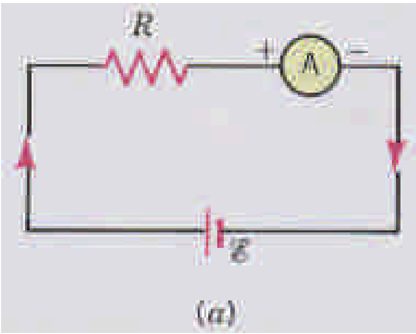
- 直流儀表(Direct current instruments)

量測電流⇒安培計(Ammeter)、檢流計(Galvanometer)

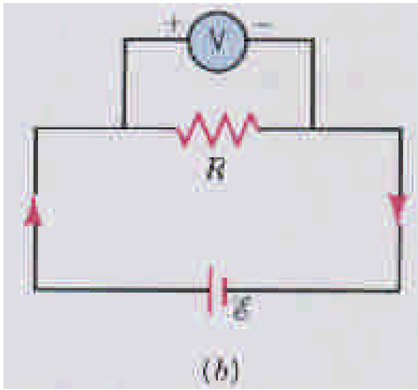
量測電位差⇒伏特計(Voltmeter)

量測電阻⇒歐姆計(ohmmeter)、惠斯登電橋(Wheatstone bridge)

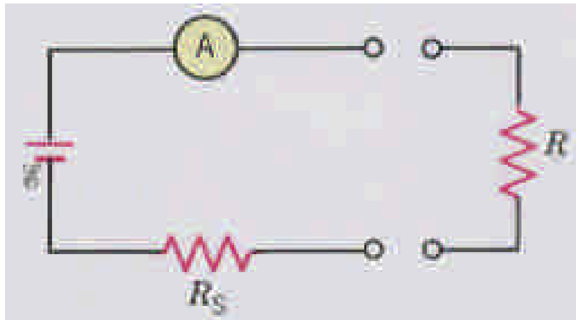
量測 emf ⇒電位計(potentiometer)



（安培計）



（伏特計）



(歐姆計)

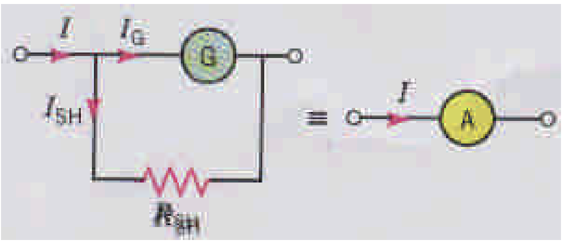


Fig.28.21

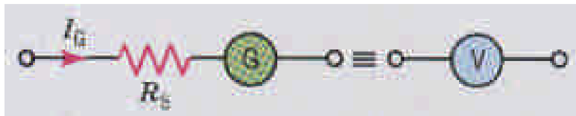


Fig.28.22

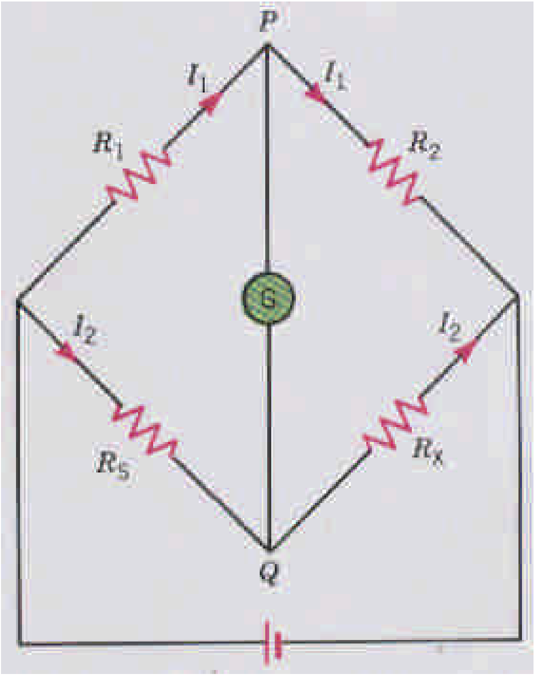


Fig.28.24

(惠斯登電橋)

當檢流計G無電流通過，代表P,Q電位相等

$$I_1 R_1 = I_2 R_s \quad (1) \quad ; \qquad I_1 R_2 = I_2 R_x \quad (2)$$

$$(2)/(1) \Rightarrow R_x = \frac{R_2}{R_1} R_s$$

For uniform wire , $R \propto \ell \Rightarrow R_x = (\ell_2 / \ell_1) R_s$

(電位計)

當檢流計G無電流通過，代表電位相等

$$\begin{cases} \xi_s - IR_s = 0 \\ \xi_x - IR_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \xi_x = \frac{R_x}{R_s} \xi_s$$

$$\xrightarrow[\text{For uniform wire}]{\text{If } R \propto \ell} \xi_x = \frac{\ell_x}{\ell_s} \xi_s$$

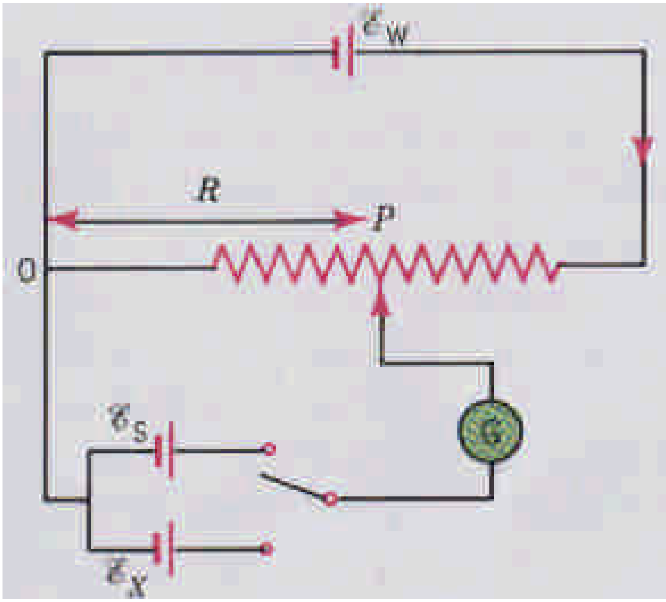
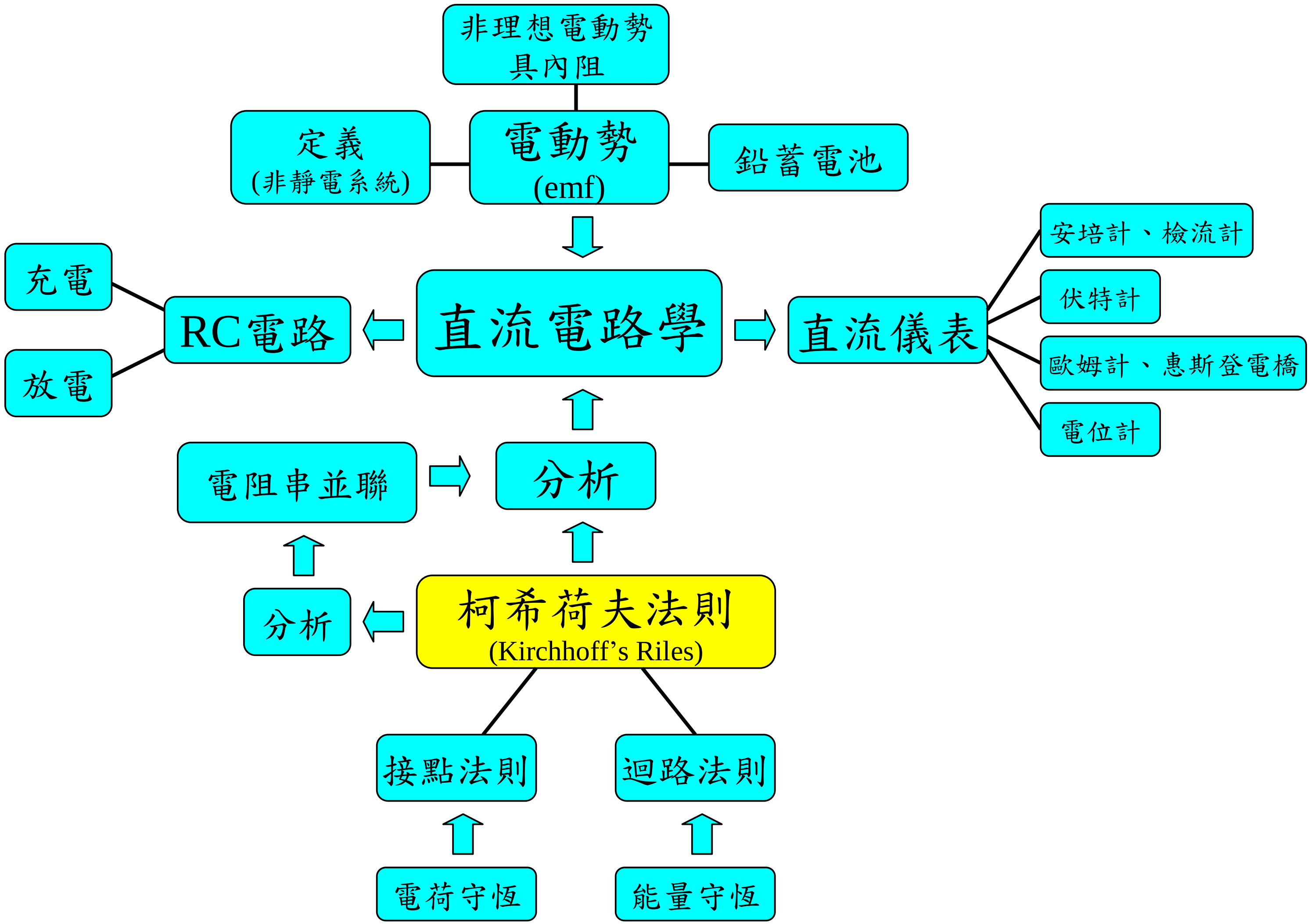


Fig.28.25

本章重要觀念發展脈絡彙整



習 題

- 教科書習題 (p.569~p.577)

Exercise: 3,7,9,19,21,25,27,33,43

Problem: 7, 9,12,13,16

Problem 12 Ans: (a) $I_1=\xi/R_1$, $I_2=\xi/R_2$; (b) $I_1=\xi/R_1$, $I_2=0$; (c) $U=C\xi^2/2$;
(d) $(R_1+R_2)C$

Problem 16 Ans: $\alpha_1=\dfrac{8}{17},\alpha_2=\dfrac{39}{68},R_{eq}=2.66\Omega$

- 基本觀念問題：

1.請說明柯希荷夫法則(Kirchhoff’s Riles)。