第五章　投資組合理論

馬可維茲的投資組合理論

- 投資人長久以來都具有「不要把所有雞蛋放在同一個籃子」這種分散風險的概念，但如何進行才可達到分散風險的目的，其背後運作的原理為何，直到馬可維茲提出投資組合理論後才加以解答
- 馬可維茲(Harry Markowitz)在 1952 年提出平均數／變異數投資組合理論，應用統計模式來證明分散投資對於投資組合降低風險的可行性，開啟了現代投資組合理論研究的大門。
  - 馬可維茲的投資組合理論協助投資人在不犧牲預期報酬的條件下，降低投資組合的風險；或者在既定預期報酬下，將組合風險降到最低點。
  - 1990 年諾貝爾經濟學獎：馬可維茲與夏普(William F. Sharpe)及米勒(Merton Miller)共同獲得。
  - 夏普的資本資產定價模式(Capital Asset Pricing Model, CAPM)便是基於投資組合理論延伸發展而導出。

個別證券預期酬率、標準差、證券間之共變異數、相關係數

- 個別證券預期報酬率(平均數)：

$$E(R_i) = \overline{R}_i = \sum_{j=1}^{N} P_j \times R_{i,j}$$

$R_{i,j}$：在第 j 情況下的證券 i 的報酬率

P_j：發生第 j 情況的機率

N：共有 N 種可能狀況($j = 1, \ldots, N$)

- 利用過去 T 期的歷史資料 $R_{i,1}, R_{i,2}, \ldots, R_{i,T}$ 估計預期報酬率

$$\overline{R}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R_{i,t}$$

- 個別證券的風險衡量指標(變異數; variance)

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{N} P_j \times (R_{i,j} - \overline{R}_i)^2$$

- 利用過去 T 期的歷史資料 $R_{i,1}, R_{i,2}, \ldots, R_{i,T}$ 估計變異數

$$\sigma_i^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{i,t} - \overline{R}_i)^2$$

- 標準差(standard deviation)：變異數開根號 σ_i

- 證券間之相關程度(共變異數、相關係數)
  - 共變異數(covariance)：證券 i 與證券 j 的共變異數 σ_{ij} 為

$$\text{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij} = \sum_{m=1}^{N} P_m (R_{i,m} - \overline{R}_i)(R_{j,m} - \overline{R}_j)$$

$R_{i,m}$：在第 m 情況下的證券 i 的報酬率

$R_{j,m}$：在第 m 情況下的證券 j 的報酬率

P_m：發生第 m 情況的機率

N：共有 N 種可能狀況($m = 1, \ldots, N$)

- 利用過去 T 期的歷史資料 $R_{i,1}, R_{i,2}, \ldots, R_{i,T}$ 、 $R_{j,1}, R_{j,2}, \ldots, R_{j,T}$ 估計共變異數

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(R_{i,t} - \overline{R}_i)(R_{j,t} - \overline{R}_j)$$

- 相關係數(correlation)：將共變異數除以兩個證券的標準差

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$$

  - 相關係數一定介於－1 與＋1 之間
  - 實務上很難找到相關係數是＋1 的股票(兩檔股票齊漲齊跌且幅度一樣)，相關係數是－1 的股票(一檔股票漲，令一檔股票一定跌，且漲跌幅度一樣)亦很少見。
  - 絕大都數的股票相關係數介在 0 與＋1 之間，性質越相近的股票(如同產業，做相同產品)相關係數越接近＋1。

- 期望值符號$E(\bullet)$的說明：期望值就是在取平均數的意思，而取平均值方法就是『把某情況可能發生的數值乘以該情況發生的機率再把所有可能情況加總起來』。
  - 預期報酬率：對一個不確定的報酬率取期望值

$$E(R_i)=\sum_{j=1}^{N}P_j\times R_{i,j}$$

  - 變異數：對可能報酬率與平均之的距離平方取平均數

$$\sigma_i^2=\sum_{j=1}^{N}P_j\times(R_{i,j}-\overline{R}_i)^2=E[(R_i-\overline{R}_i)^2]$$

  - 共變異數：對共同變動程度取平均值

$$\sigma_{ij}=\sum_{m=1}^{N}P_j\times(R_{i,m}-\overline{R}_i)(R_{j,m}-\overline{R}_j)=E[(R_i-\overline{R}_i)(R_j-\overline{R}_j)]$$

  - 若某資產k的報酬率$R_k=a_1R_1+a_2R_2$，其中R_1、R_2為該組合之組成資產的報酬率，a_1、a_2為固定常數，則

$$E(R_k)=E(a_1R_1+a_2R_2)=\sum_{m=1}^{N}P_m\times(a_1R_{1m}+a_2R_{2m})=\sum_{m=1}^{N}(a_1P_mR_{1m}+a_2P_mR_{2m})$$

$$=a_1\sum_{m=1}^{N}P_m\times R_{1m}+a_2\sum_{m=1}^{N}P_m\times R_{2m}=a_1E(R_1)+a_2E(R_2)$$

投資組合報酬率與標準差

- 投資組合報酬率：假設投資組合內包含 N 個資產$(i=1,\ldots,N)$，資產 i 的投資權重為 w_i $(w_1+w_2+\cdots+w_N=1)$，若資產 i 的報酬率以 R_i 表示，則由 N 個資產所組成之投資組合的報酬率為

$$R_p=\sum_{i=1}^{N} w_i \times R_i$$

- $\boxed{\text{說明}}$：若投資組合的期初總金額為 W，投資於資產 i 的金額為 W_i，則 $w_i=W_i/W$。若資產 i 的報酬率為 R_i，則投資組合的期末總金額為 $\sum_{i=1}^{N} W_i(1+R_i)$，該投資組合的報酬率為

$$R_p=\frac{\sum_{i=1}^{N} W_i(1+R_i)}{W}-1=\sum_{i=1}^{N} w_i(1+R_i)-\sum_{i=1}^{N} w_i$$

$$=\sum_{i=1}^{N} w_i R_i$$

- 投資組合預期報酬率：

$$E(R_p)=\sum_{i=1}^{N}w_i\times E(R_i)$$

- 說明：$R_p=\sum_{i=1}^{N}w_i\times R_i$ ，所以

$$E(R_P)=E\left[\sum_{i=1}^{N}w_iR_i\right]=\sum_{i=1}^{N}E\left[w_iR_i\right]=\sum_{i=1}^{N}w_iE(R_i)$$

- 投資組合的變異數：

$$\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}w_iw_j\sigma_{ij}$$

- 利用 $\rho_{ij}=\dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i\sigma_j}\Rightarrow\sigma_{ij}=\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ ，投資組合的變異數亦可寫為

$$\sigma_p^2=\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}w_iw_j\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$$

說明：依照變異數之定義

$$\sigma_P^2 = E(R_p - \bar{R}_p)^2 = E\left[\sum_{i=1}^{N} w_i R_i - \sum_{i=1}^{N} w_i \bar{R}_i\right]^2 = E\left[\sum_{i=1}^{N} w_i (R_i - \bar{R}_i)\right]^2$$

我們將加總項的平方展開如下

$$\begin{array}{c|cccc}
 & w_1(R_1-\bar{R}_1) & w_2(R_2-\bar{R}_2) & \cdots & w_N(R_N-\bar{R}_N) \\
\hline
w_1(R_1-\bar{R}_1) & w_1^2(R_1-\bar{R}_1)^2 & w_1w_2(R_1-\bar{R}_1)(R_2-\bar{R}_2) & \cdots & w_1w_N(R_1-\bar{R}_1)(R_N-\bar{R}_N) \\
w_2(R_2-\bar{R}_2) & w_2w_1(R_2-\bar{R}_2)(R_1-\bar{R}_1) & w_2^2(R_2-\bar{R}_2)^2 & \cdots & w_2w_N(R_2-\bar{R}_2)(R_N-\bar{R}_N) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
w_N(R_N-\bar{R}_N) & w_Nw_1(R_N-\bar{R}_N)(R_1-\bar{R}_1) & w_Nw_2(R_N-\bar{R}_N)(R_2-\bar{R}_2) & \cdots & w_N^2(R_N-\bar{R}_N)^2
\end{array}$$

將這個矩陣內的每一項取期望值可得

$$\begin{bmatrix}
w_1^2\sigma_1^2 & w_1w_2\sigma_{12} & \cdots & w_1w_N\sigma_{1N} \\
w_2w_1\sigma_{21} & w_2^2\sigma_2^2 & \cdots & w_2w_N\sigma_{2N} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
w_Nw_1\sigma_{N1} & w_Nw_2\sigma_{N2} & \cdots & w_N^2\sigma_N^2
\end{bmatrix}$$

矩陣中全部加總即為

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

若將對角線及非對角線項次分開可得

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1,k\neq j}^{N} w_j w_k \sigma_{jk}$$

- 投資組合變異數的成分
  (1) 個別證券變異數 σ_i^2：對投資組合變異數的貢獻須乘以權重平方(w_i^2)，共有 N 項。
  (2) 證券間之共變異數 σ_{jk}：對投資組合變異數的貢獻須乘以兩證券權重乘積($w_j w_k$)，共有 $N(N-1)$ 項。
- 在投資組合當中，證券間之共變異數對投資組合風險的影響力，遠超過個別證券的風險。

當股票投資組合是由兩檔股票組成時

- 兩檔股票組合的預期報酬率 $E(R_p)$ 以及變異數 σ_p^2 為

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2)$$

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2$$

- 如果兩檔股票報酬率的相關係數 $\rho_{12} = 1$，則

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2 = (w_1\sigma_1 + w_2\sigma_2)^2$$

- 如果兩檔股票報酬率的相關係數是 $\rho_{12} = -1$，則

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 - 2w_1w_2\sigma_1\sigma_2 = (w_1\sigma_1 - w_2\sigma_2)^2$$

- 當股票組合是由三檔股票組成

$$E(R_p) = w_1 E(R_1) + w_2 E(R_2) + w_3 E(R_3)$$

$$\sigma_p^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_1w_3\sigma_{13} + 2w_2w_3\sigma_{23}$$

$$= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 + 2w_1w_2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2w_1w_3\rho_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2w_2w_3\rho_{23}\sigma_2\sigma_3$$

兩項資產報酬率相關係數與投資組合預期報酬及變異數關係

- 兩資產所形成之投資組合的預期報酬率變異數

$$E(R_p) = w_A E(R_A) + w_B E(R_B)$$

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$

其中 $w_A + w_B = 1 \Rightarrow w_B = 1 - w_A$，且假設 $w_A \geq 0$、$w_B \geq 0$。

- 當兩項資產報酬率之間的相關係數是**+1**

$$E(R_p) = w_A E(R_A) + w_B E(R_B)$$

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 + 2w_A w_B \sigma_A\sigma_B = (w_A\sigma_A + w_B\sigma_B)^2$$

  - 若 $w_A \geq 0$、$w_B \geq 0$，則 $w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$，因此 $\sigma_p = w_A\sigma_A + w_B\sigma_B$。
  - 利用 $w_B = 1 - w_A$，

$$\sigma_p = w_A\sigma_A + (1 - w_A)\sigma_B = \sigma_B + (\sigma_A - \sigma_B)w_A$$

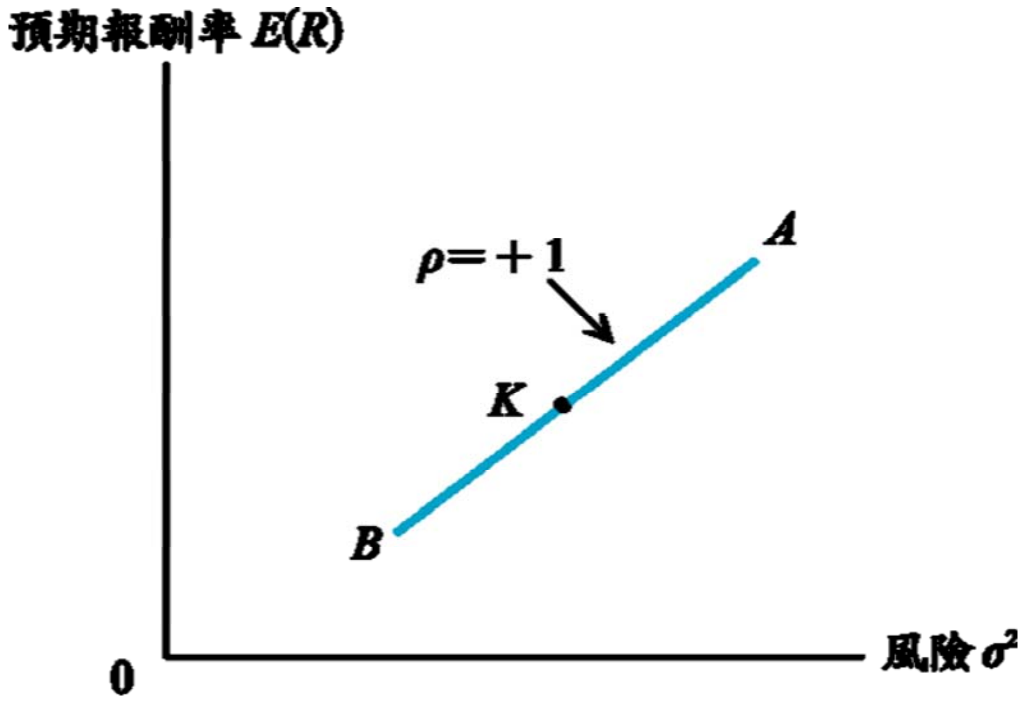
$$\Rightarrow \sigma_p - \sigma_B = (\sigma_A - \sigma_B)w_A \Rightarrow w_A = (\sigma_p - \sigma_B)/(\sigma_A - \sigma_B)$$

- 將 $w_A=(\sigma_p-\sigma_B)/(\sigma_A-\sigma_B)$ 代入預期報酬率方程式中

$$E(R_p)=\frac{\sigma_p-\sigma_B}{\sigma_A-\sigma_B}E(R_A)+(1-\frac{\sigma_p-\sigma_B}{\sigma_A-\sigma_B})E(R_B)$$

$$=\frac{\sigma_A E(R_B)-\sigma_B E(R_A)}{\sigma_A-\sigma_B}+\frac{E(R_A)-E(R_B)}{\sigma_A-\sigma_B}\sigma_p$$

- 在預期報酬率、風險(σ)平面上，$E(R_p)$ 與 σ_p 之關係為<u>一直線</u>



- 若 A 與 B 代表兩檔股票，在 AB 線段上 AB 之間的其他點，就是代表不同的 A 與 B 股票的組合；A 點代表 100%投資 A 股，B 點代表 100%投資 B 股票，中間的點代表權重 w_A 與 w_B 都是小於 100%，都是 AB 的線性組合。
- 兩資產報酬率相關係數為＋1 時，兩資產所形成之投資組合無風險分散效果：持有 100%的 B 股票風險最小，若增加 A 股票的權重，只會使得風險增加。

- 當兩項資產報酬率之間的相關係數是 $\boxed{-1}$

$$E(R_p) = w_A E(R_A) + w_B E(R_B)$$

$$\sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + w_B^2\sigma_B^2 - 2w_A w_B \sigma_A \sigma_B = (w_A\sigma_A - w_B\sigma_B)^2$$

- 若 $w_A\sigma_A - w_B\sigma_B \geq 0 \Rightarrow w_A\sigma_A - (1-w_A)\sigma_B \geq 0 \Rightarrow w_A \geq \sigma_B / (\sigma_A + \sigma_B)$

$$\sigma_p = w_A\sigma_A - w_B\sigma_B \Rightarrow \sigma_p = w_A\sigma_A - (1-w_A)\sigma_B$$

$$\Rightarrow w_A = (\sigma_p + \sigma_B) / (\sigma_A + \sigma_B)$$

代入預期報酬率方程式中可得

$$E(R_p)=\frac{\sigma_p+\sigma_B}{\sigma_A+\sigma_B}E(R_A)+(1-\frac{\sigma_p+\sigma_B}{\sigma_A+\sigma_B})E(R_B)$$

$$=\frac{\sigma_A E(R_B)+\sigma_B E(R_A)}{\sigma_A+\sigma_B}+\frac{E(R_A)-E(R_B)}{\sigma_A+\sigma_B}\sigma_p$$

- 若 $w_A\sigma_A-w_B\sigma_B<0\Rightarrow w_A<\sigma_B/(\sigma_A+\sigma_B)$ ，

$$\sigma_p=-(w_A\sigma_A-w_B\sigma_B)\Rightarrow\sigma_p=-w_A\sigma_A+(1-w_A)\sigma_B$$

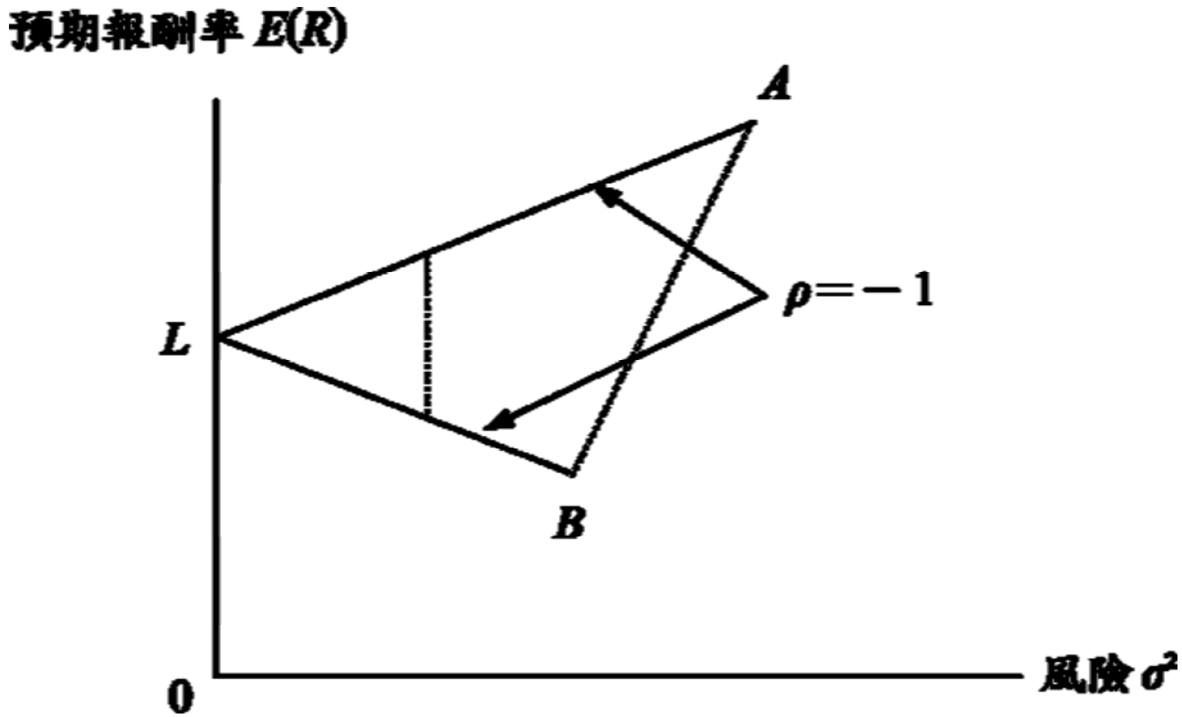
$$\Rightarrow w_A=(\sigma_B-\sigma_p)/(\sigma_A+\sigma_B)$$

代入預期報酬率方程式中可得

$$E(R_p)=\frac{\sigma_B-\sigma_p}{\sigma_A+\sigma_B}E(R_A)+(1-\frac{\sigma_B-\sigma_p}{\sigma_A+\sigma_B})E(R_B)$$

$$=\frac{\sigma_A E(R_B)+\sigma_B E(R_A)}{\sigma_A+\sigma_B}-\frac{E(R_A)-E(R_B)}{\sigma_A+\sigma_B}\sigma_p$$

- 在預期報酬率、風險平面上，$E(R_p)$ 與 σ_p 之關係為<u>兩段直線</u>



- 兩資產報酬率相關係數－1 時，兩資產所形成之投資組合<u>風險分散效果最好</u>，投資組合風險可為 0：

$$\sigma_p^2 = (w_A\sigma_A - w_B\sigma_B)^2 = 0 \Rightarrow w_A\sigma_A - w_B\sigma_B = 0$$

$$\Rightarrow w_A\sigma_A - (1 - w_A)\sigma_B = 0 \Rightarrow w_A = \sigma_B / (\sigma_A + \sigma_B)$$

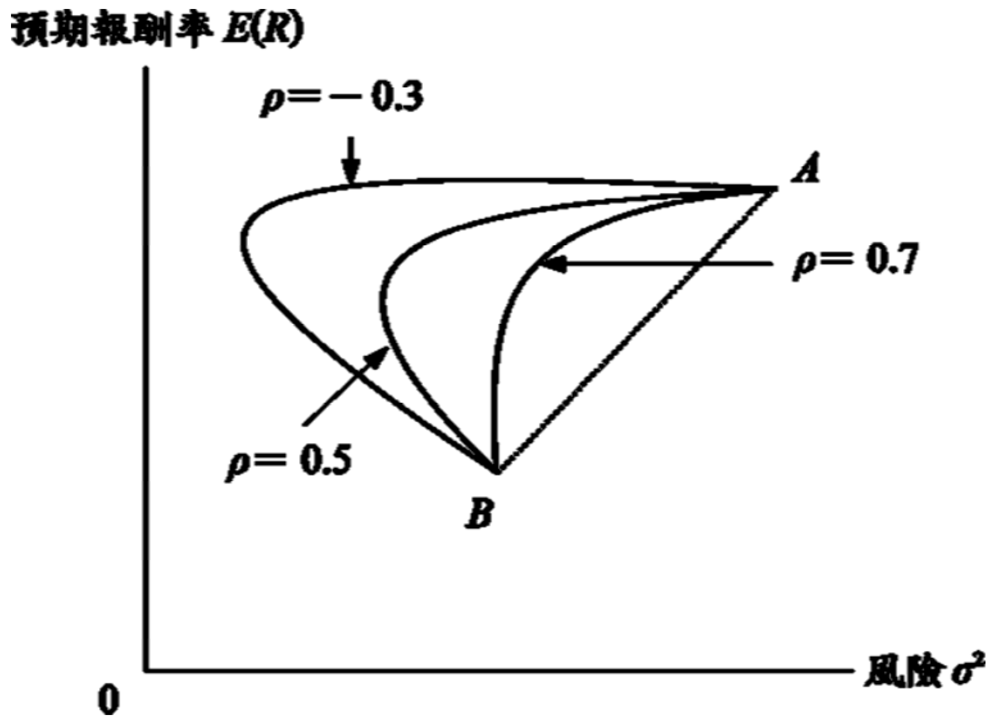
當 $w_A = \sigma_B / (\sigma_A + \sigma_B)$ 、 $w_B = \sigma_A / (\sigma_A + \sigma_B)$ 投資組合風險為 0

- 當兩項資產報酬率之間的$\boxed{\text{相關係數是介於+1 與–1 之間}}$

$$E(R_p) = w_A E(R_A) + (1 - w_A) E(R_B)$$

$$\sigma_p^2 = w_A^2 \sigma_A^2 + (1 - w_A)^2 \sigma_B^2 + 2 w_A (1 - w_A) \rho_{AB} \sigma_A \sigma_B$$

- 這兩條方程式隱含預期報酬率與變異數間的關係是非線性的，相關係數越小，描述該關係的線段越往 Y 軸靠近，但不會碰觸到 Y 軸。



- 全域風險最小變異數(global minimum variance; GMV)組合：

$$\min_{w_A} \quad \sigma_p^2 = w_A^2\sigma_A^2 + (1-w_A)^2\sigma_B^2 + 2w_A(1-w_A)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$

$$\frac{\partial\sigma_P}{\partial w_A} = 2w_A\sigma_A^2 - 2(1-w_A)\sigma_B^2 + 2(1-2w_A)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B = 0$$

$$\Rightarrow w_A(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B) = \sigma_B^2 - \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B$$

$$\Rightarrow w_A = \frac{\sigma_B^2 - \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}$$

- 例子：假設 $E(R_A)=12\%$ 、 $E(R_B)=10\%$ 、 $\sigma_A = 5\%$ 、 $\sigma_B = 4\%$ 、 $\rho_{AB} = 0.5$ ，則 GMV 投資組合的權重為何？

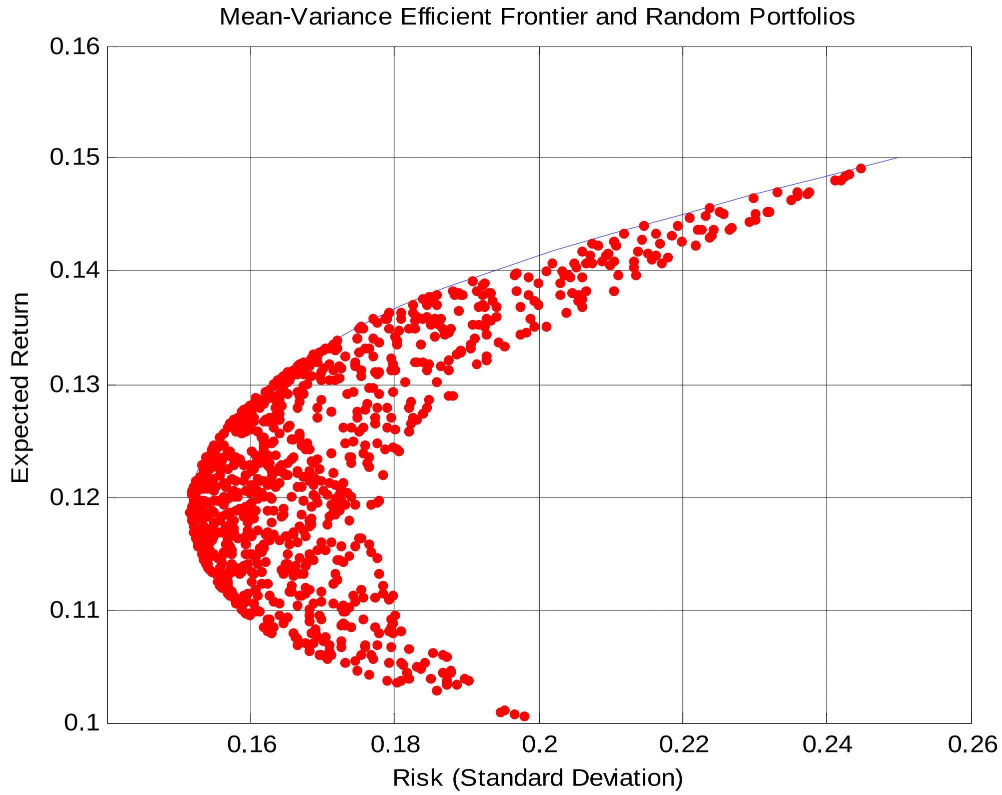
$$w_A = \frac{\sigma_B^2 - \rho_{AB}\sigma_A\sigma_B}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2 - 2\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B} = \frac{(5\%)^2 - 0.5(5\%)(4\%)}{(5\%)^2 + (4\%)^2 - 2\times 0.5(5\%)(4\%)} = \frac{5}{7}$$

$$E(R_p) = \tfrac{5}{7}\cdot 12\% + (1-\tfrac{5}{7})\cdot 10\% = 11.43\%$$

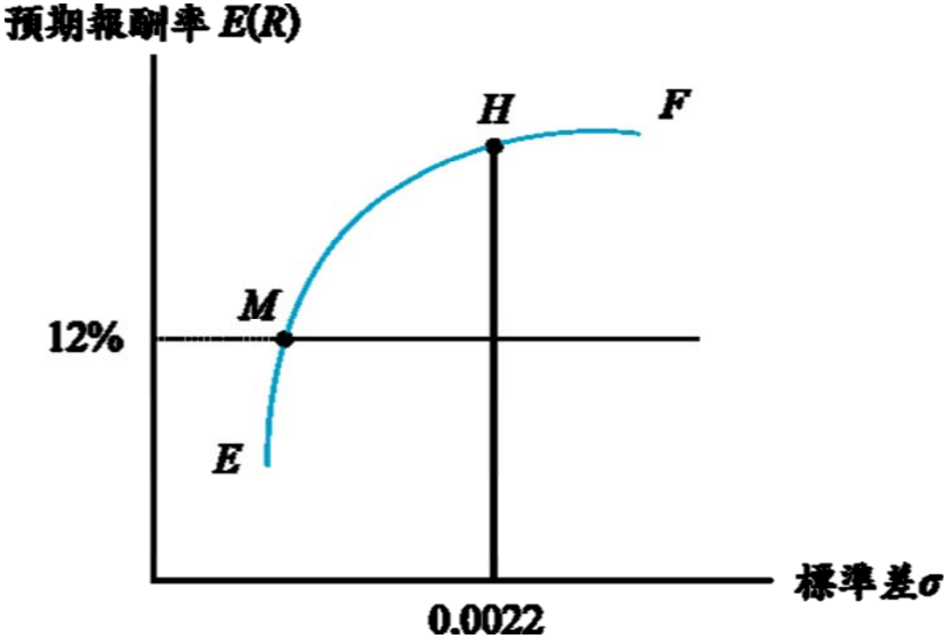
$$\sigma_p = \sqrt{(\tfrac{5}{7})^2(5\%)^2 + (1-\tfrac{5}{7})^2\cdot(4\%)^2 + 2(\tfrac{5}{7})(1-\tfrac{5}{7})\cdot 0.5\cdot(5\%)(4\%)} = 4.26\%$$

預期報酬率／變異數效率組合分析

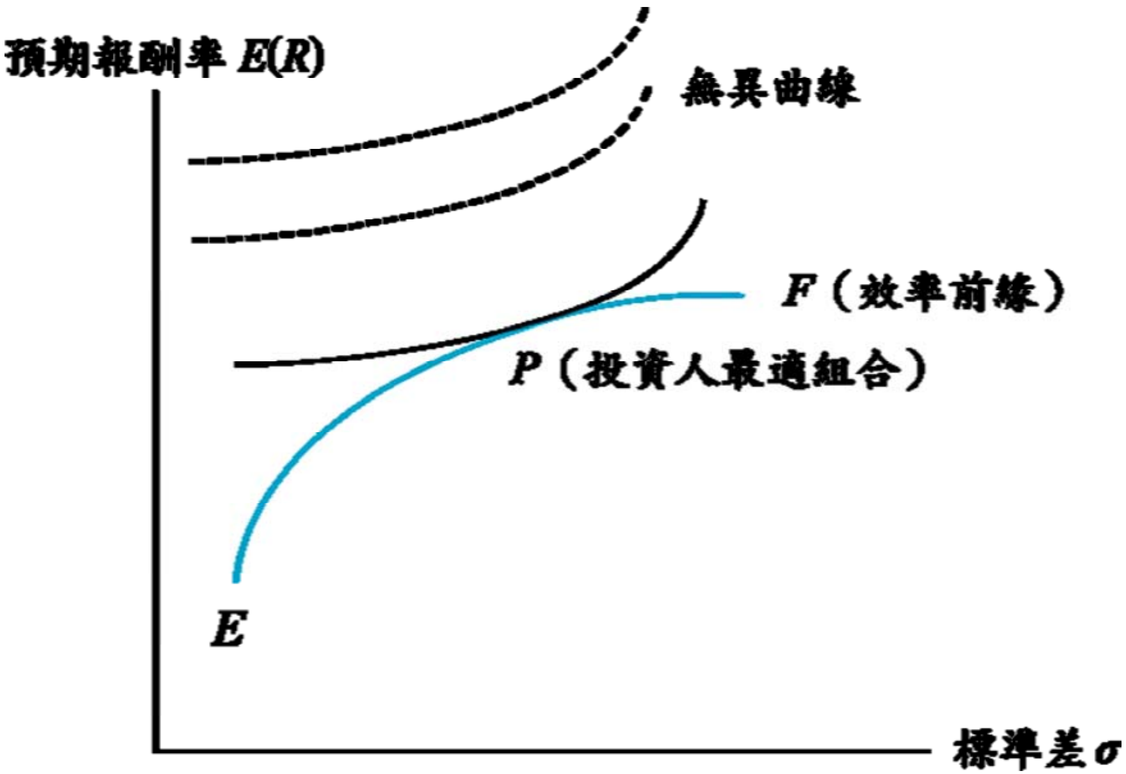
- 若增加投資組合中的資產數目，則可行的投資組合在預期報酬率/標準差平面上會散布成一彎月形。
  - 但是在馬可維茲的投資組合理論架構下，並非所有的可行投資組合都值得投資，投資人僅會選擇其中一部分進行投資。



- 馬可維茲的投資組合理論(平均數/變異數分析)
  - 假設證券報酬率的分布符合統計學上的常態分配，亦即證券報酬率的分布特性用平均數與變異數即足以表達。該假設隱含投資人指關心證券的預期報酬率與變異數。
  - 若投資人厭惡風險，預期報酬率越高、變異數越小的投資組合越受到投資人青睞。
    - 在給定的投資組合預期報酬率下，挑選變異數最小的組合
    - 在給定的投資組合變異數下，挑選預期報酬率最大的組合



- 在此條件下，投資人只會選擇位於最左緣的投資組合，且該投資組合之預期報酬率須大於 GMV 組合(圖中 E 點)之預期報酬率。這個線段所代表的組合稱為<u>效率前緣</u>(efficient frontier)。
- 投資人如何選取效率前緣上的組合進行投資：投資人可以依據自己的無異曲線，或自己風險偏好，找到最適合自己(效預最高)的組合。



系統風險與非系統風險[兩者之加總：總風險]

系統風險(systematic risk)	非系統風險(unsystematic risk)
市場風險；β_i	公司或產業特有風險；ε_i
不可避免(unavoidable)之風險	可避免(avoidable)之風險
不可分散(undiversifiable)之風險	可分散(diversifiable)之風險

- 在資本資產訂價模型的架構中，將資產 i 報酬率拆解為

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i$$

式中 R_m：市場報酬率[具有不確應性，隨機變數]

β_i：市場報酬率對資產 i 報酬率的影響程度

$\beta_i R_m$：市場變動時對資產 i 報酬率的影響

$\alpha_i + \varepsilon_i$：資產 i 獨特的個別公司因素所造成的報酬率

α_i：固定常數

ε_i：平均數為零的隨機變數

- 系統風險：因整個經濟系統的變動所造成的風險，絕對部分的風險性資產都面臨的風險。[例如世界大戰如果發生，幾乎所有風險性資產價格都會下跌]
- 非系統風險：個別產業或公司所單獨面臨的風險，而其他公司或產業較不會受此因素影響。[例如面板價格下跌，僅影響到面板製造商，其他產業則不受影響]
- 投資組合分散風險的意義：將可分散風險去除，僅承擔系統風險
  - 考慮天真分散風險法[將資金平分在 N 個資產]，$w_i = 1/N$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1, k\neq j}^{N} w_j w_k \sigma_{jk}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (1/N)^2 \sigma_i^2 + \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1, k\neq j}^{N} (1/N)(1/N) \sigma_{jk}$$

$$= \frac{1}{N}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2\right] + \frac{(N-1)}{N}\left[\frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1, k\neq j}^{N} \sigma_{jk}\right]$$

- 定義投資組合內

  所有資產的平均變異數為：$\bar{\sigma}_i^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sigma_i^2 < \infty$

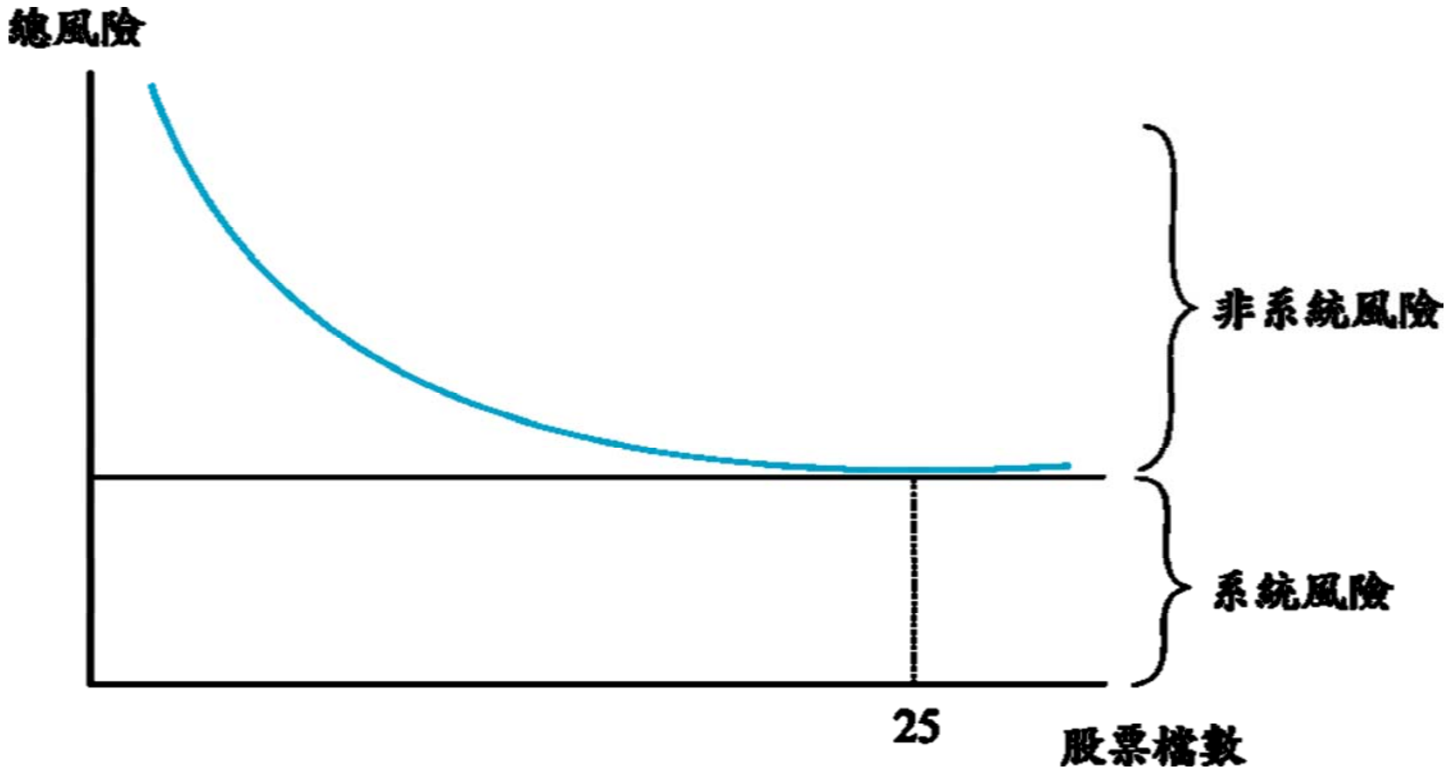
  所有資產間之平均共變異數：$\bar{\sigma}_{jk} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1,k\neq j}^{N}\sigma_{jk} < \infty$

  則 $\sigma_P^2 = \frac{1}{N}\bar{\sigma}_i^2 + \frac{N-1}{N}\bar{\sigma}_{jk}$

  當 $N \to \infty$ 時，$\frac{1}{N}\bar{\sigma}_i^2 \to 0$、$\frac{(N-1)}{N} \to 1$，因此 $\sigma_P^2 \to \bar{\sigma}_{jk}$。

- 當投資組合內的資產數目夠多時，個別資產的變異數已不重要(趨近於零)，投資組合的風險完全是由證券間的共變異數所組成；亦即個別證券的獨特風險是有辦法分散的，但證券間之相關性所造成的風險是無法分散的[證券間之所以會有相關性應該是因為所有證券都會受到總體經濟影響所造成(其相關性之產生不是因為資產間之報酬率會相互影響，而是因為受到同一總體經濟因素影響所造成)，故稱其為**系統風險**]。

- 早期針對國內外的研究均認為，投資組合中隨機選取 25 種不同股票時，即可把非系統風險降到接近 0。[參見下圖]
  - 『隨機選取』的目的在於使得股票可以分散在各產業，不會過於集中在某一產業。[這當然不是隱含欲降低非系統風險非得隨機選股不可，而是『要有效消除非系統風險，則持有之股票間的相關程度不能太高』]



系統風險之分散與降低

- 一般人往往會誤會以為「系統風險是不可分散的，所以投資組合無法降低系統風險」。
- 但是，如果投資組合中只有無風險資產(定存)，總體經濟變動時怎麼會影響到你的投資組合價值呢(忽略通膨)？當然不會。
- 因此，只有當投資人的投資組合是有風險性時，或一直要維持風險性時，才有系統風險這個問題；如果投資人將投資組合資金全部投資無風險資產，那麼這個投資組合自然無風險可言。
- 當然，無系統風險的投資組合，它的預期報酬率一定是最低的。
- 同樣的道理，投資組合的系統風險是可以降低的。投資組合的系統風險是可以機動調整的，只要在原有的投資組合內加入比原有投資組合β值低的股票(資產)，甚或無風險資產(如定存)，都可以使新投資組合的系統風險(β值)降低。

衡量組合內單一證券之相對風險

- 投資組合的總風險可以表達為[$\mathrm{cov}(R_i, R_p)$ 為 R_i 與 R_p 的共變異數]

$$\boldsymbol{\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i \,\mathrm{cov}(R_i, R_p)}$$

- 說明：

$$\sigma_p^2 = E\{[R_p - E(R_p)]^2\} = E\{[R_p - E(R_p)][R_p - E(R_p)]\} = \mathrm{cov}(R_p, R_p)$$

$$= \mathrm{cov}\left(\sum_{i=1}^{N} w_i R_i, R_p\right) = E\{[\sum_{i=1}^{N} w_i R_i - E(\sum_{i=1}^{N} w_i R_i)][R_p - E(R_p)]\}$$

$$= E\{\sum_{i=1}^{N} w_i [R_i - E(R_i)][R_p - E(R_p)]\}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} w_i E\{[R_i - E(R_i)][R_p - E(R_p)]\} = \sum_{i=1}^{N} w_i \,\mathrm{cov}(R_i, R_p)$$

- 含義：將投資組合總風險 σ_p^2 視為個別證券總風險的加權平均

$$\boldsymbol{\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i \cdot (\text{證券}\,i\,\text{之總風險})}$$

- 證券 i 之總風險以其與投資組合的共變異數 $\mathrm{cov}(R_i, R_p)$ 來衡量

- 個別證券 i 的相對風險(其總風險占投資組合總風險比率)

$$\frac{\mathrm{cov}(R_i, R_p)}{\sigma_p^2} = \frac{\rho_{ip}\sigma_i\sigma_p}{\sigma_p^2} = \frac{\rho_{ip}\sigma_i}{\sigma_p} = \beta_i^p$$

  - β_i^p：衡量投資組合 P 報酬率變動時，個別證券 i 報酬率變動的敏感度[以投資組合 P，而不是市場組合所衡量的 β]
  - Remark：投資學一般所指的系統風險(β 係數)定義為

$$\beta_i = \frac{\mathrm{cov}(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$$

R_M ：市場組合的報酬率　　σ_M^2 ：市場組合的總風險

市場組合：CAPM 中定義為『市場上所有風險性資產，以其市值比重為投資權重所形成的投資組合』

β 係數：衡量市場投資組合報酬率變動時，個別證券 i 報酬率變動的敏感度。

- 由於

$$\text{cov}(R_i, R_p) = \text{cov}\left(R_i, \sum_{i=1}^{N} w_i R_i\right) = \text{cov}\left(R_i, w_i R_i + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} w_j R_j\right)$$

$$= \text{cov}(R_i, w_i R_i) + \text{cov}\left(R_i, \sum_{j=1, j\neq i}^{N} w_j R_j\right) = w_i \sigma_i^2 + \sum_{j=1, j\neq i}^{N} w_j \sigma_{ij}$$

  - 個別證券 i 的相對風險亦可表達為

$$\frac{\text{cov}(R_i, R_p)}{\sigma_p^2} = \frac{w_i \sigma_i^2}{\sigma_p^2} + \frac{\sum_{j=1, j\neq i}^{N} w_j \sigma_{ij}}{\sigma_p^2}$$

  - 若投資人充分分散風險($w_i \approx 0$)，個別證券的風險(σ_i^2)已降至幾乎為 0，僅剩證券間的共同風險(σ_{ij})。
- 就投資組合而言，β_i^p 可以代表個別證券 i 的系統風險對整個投資組合系統風險的貢獻程度
  - 若 β_i^p 大於(小於)1，增加 i 的投資可以提高(降低)投資組合的總風險，投資組合的預期報酬率也隨之增加(減少)。