

AI ĐÃ PHÁT MINH RA PHÉP TÍNH VI-TÍCH PHÂN NEWTON hay LEIBNIZ ?

Lê Quang Ánh, Ph.D.

Cuộc tranh cãi về chuyện ai trước ai sau trong sự phát minh ra phép tính vi-tích phân là cuộc tranh cãi đáng hổ thẹn nhất trong lịch sử Toán học.

Eric Temple Bell.

Rất ít ngành Toán học nào chỉ do một người phát minh ra. Hình học Giải tích không phải do một mình Descartes phát minh, mà là kết quả của rất nhiều công trình Toán học trước đó của Apollonius, Oresme, Viète, và nhiều nữa. Descartes là người đầu tiên hệ thống những kết quả ấy lại và phát triển thêm lên.

Cũng như vậy, từ lâu rồi, có lẽ từ cuối thế kỷ 17, nhiều người cho rằng Newton hoặc Leibniz hoặc cả hai là (những) người đầu tiên phát minh ra *phép tính vi-tích phân (calculus)*. Không phải vậy. Họ chỉ là những người kế thừa và phát triển thêm những gì đã có rải rác từ xa trước, đặc biệt là của Fermat và Barrow, như Descartes đã từng làm với Hình học giải tích vậy.

Nhưng nếu cứ cho như vậy là phát minh, thì ai là người đi trước để có được *phép tính vi-tích phân* như ta có ngày hôm nay?

Từ thế kỷ 18 trở về trước, những cuộc tranh luận hay tranh cãi giữa các nhà Khoa học là chuyện bình thường, nhưng sự tranh cãi giữa Newton và Leibniz về việc ai là người đầu tiên phát minh ra *phép tính vi-tích phân* thì lại không bình thường. Nó để lại dấu ấn sâu đậm cho người đương thời và nhiều thế hệ sau, vì tầm vóc của hai nhà Toán học, vì sự quan trọng của nội dung vấn đề, vì cường độ của sự tranh cãi, và vì thời gian của cuộc tranh cãi kéo quá dài.

Qua bài viết này chúng tôi sẽ trình bày một số nét chính những gì đã có trước Newton và Leibniz có liên quan đến phép tính vi-tích phân, những gì Newton đã làm, những gì Leibniz đã làm liên quan đến phép tính vi-tích phân, tại sao có sự tranh cãi giữa Newton và Leibniz, và diễn tiến của cuộc tranh cãi như thế nào.

Vì đây là bài viết có tính cách lịch sử nên chúng tôi chú ý nhiều đến diễn tiến sự kiện xảy ra và chúng tôi không đặt nặng nội dung Toán học của mỗi phương pháp.

1. Những gì đã có trước Newton và Leibniz

Như đã nói ở trên, lịch sử của phép tính vi-tích phân không phải bắt đầu từ những gì Newton và Leibniz đã làm. Nó là kết quả công trình của nhiều nhà Toán học thuộc nhiều thế hệ trước đó, thậm chí từ trước Tây Lịch (trước TL). Dưới đây là tóm lược sự phát triển phép tính vi-tích-phân từ trước thời kỳ Newton-Leibniz.

- 1600 (trước TL)

Qua các giấy bản cổ (Rhind Papyrus), người ta biết được rằng người Ai-Cập cổ đại đã biết thể tích hình chóp đáy chữ nhật bằng một phần ba thể tích hình lăng trụ có cùng đáy và cùng chiều cao, nghĩa là thể tích hình chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với chiều cao. Tuy nhiên người Ai-Cập cổ đại đã không giải thích công thức này. Người Babylon thời ấy, qua các bảng đất sét nung, đã có công thức tính được căn bậc hai của số hữu tỷ và viết giá trị thập phân của $\sqrt{2}$ đến bao nhiêu chữ số tùy ý, nhưng họ không biết rằng quá trình ấy là vô hạn.



Tấm đất sét mang tên YBC7289 (Yale Babylonian Collection) có hình một hình vuông cạnh bằng 1 và độ dài đường chéo của nó (tức là $\sqrt{2}$).

- 425 – 200 (trước TL)

Eudoxus (khoảng 390 – 337 trước TL), nhà Toán học Hy-Lạp, đã phát minh ra phương pháp “vét cạn” (method of exhaustion) để tìm diện tích hình phẳng và thể tích hình chóp. Archimedes (khoảng 287 – 212 trước TL) đã tìm ra được cách tính diện tích một phần parabol (parabola segment).

- 320 (sau TL)

Nhà Toán học Hy-Lạp Pappus (khoảng 290 – 350) đã tính được thể tích hình khối tròn xoay khi cho một hình phẳng quay quanh một đường thẳng không cắt hình ấy, nhưng ông không đưa ra cách chứng minh.

- 300 – 1300

Trong khoảng thời gian một ngàn năm này, sự phát triển Khoa học nói chung và Toán học nói riêng ở Châu Âu hầu như dừng lại trong đêm dài trung cổ.

- 1300 - 1400

Nicole Oresme (1320 – 1382), nhà Triết học và Toán học Pháp, là người đầu tiên tìm cách vẽ đồ thị hàm số (biểu diễn lượng thay đổi, thí dụ như nhiệt độ, theo thời gian).

- 1630

Bonaventura Cavalieri (1598 – 1647), nhà Toán học Ý, phát minh ra phương pháp *chia nhỏ* (method of indivisibles) để tính diện tích hình phẳng, tiền thân của phương pháp tính diện tích hình phẳng bằng tích phân sau này.

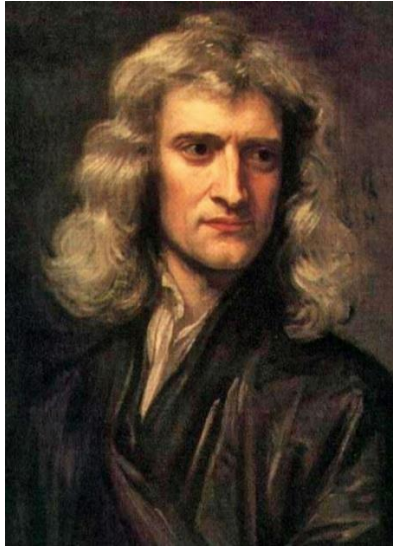
- 1620 – 1660

Pierre de Fermat (1607 – 1665), nhà Luật học và Toán học Pháp, năm 1630 cho công bố tác phẩm *Methodus ad disquirendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum*, đây được xem như là nền tảng giúp cho René Descartes xây dựng nên ngành Hình học Giải tích. Ngoài ra cũng trong tác phẩm này, Fermat có đề ra phương pháp tính cực đại và cực tiểu cũng như vấn đề tiếp tuyến của đường cong.

Isaac Barrow (1630 – 1677), thầy của Newton tại Đại học Cambridge, trong những năm 1650 -1660, qua những bài giảng *Geometrical Lectures*, đã tìm ra nhiều kết quả quan trọng trong việc phát triển phép tính vi-phân và các vấn đề tiếp tuyến với đường cong. Ông còn được ghi công đầu trong việc tìm ra công thức cơ bản của tích phân cho phép tính được diện tích hình dưới đường cong $y = f(x)$ (sau này thường được gọi là công thức Newton-Leibniz).

Như vậy cho tới khoảng thời gian này – giữa thế kỷ 17 – mọi thứ đã gần như sẵn sàng. Cần có một lý thuyết để hệ thống hóa các vấn đề ấy lại thành một mối và một phương pháp tính toán nào đó để giải chúng một cách thống nhất. Newton và Leibniz đã đáp ứng nhu cầu ấy, mỗi người theo cách riêng của mình.

2. Isaac Newton và những gì ông đã làm liên quan đến phép tính vi-tích phân



Isaac Newton (1642 – 1727).

- Newton vào Đại học Cambridge năm 1661, tại đây ông chịu ảnh hưởng của những bài giảng *Geometrical Lectures* của Isaac Barrow.
- Năm 1669, ông viết *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* (Giải tích các phương trình với vô hạn các số hạng), nhưng mãi đến năm 1711 (42 năm sau) ông mới cho xuất bản. Trong tác phẩm này ông có phát biểu ba qui tắc:

Qui tắc 1: Nếu $y = ax^{\frac{m}{n}}$ thì diện tích dưới đường cong y là $\frac{na}{n+m} x^{1+\frac{m}{n}}$.

Qui tắc 2: Nếu y được cho dưới dạng tổng của một số hữu hạn số hạng thì diện tích dưới đường cong y là tổng các diện tích ứng với các số hạng ấy.

Qui tắc 3: Để tính diện tích dưới đường cong $f(x,y) = 0$, cần phải biểu diễn y thành tổng của một số hữu hạn số hạng dạng $y = ax^{\frac{m}{n}}$, rồi áp dụng qui tắc 1 và 2 nói trên, qui tắc này dựa trên công thức nhị thức của Newton dưới đây:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} x^3 + \dots + x^n.$$

- **Chuỗi số và phép tính lượng thay đổi (calculus of fluxions).**

Trong khoảng năm 1670 -1671, Newton viết tác phẩm *Tractatus de methodis serierum et fluxionum* (Về phương pháp chuỗi số và lượng thay đổi) nhưng mãi đến năm 1736 (chín năm sau khi Newton qua đời) tác phẩm mới được xuất bản dưới hình thức bản dịch sang tiếng Anh của John Colson (*The method of fluxions and infinite series*).

Trong tác phẩm này Newton đề cập tới hai vấn đề: chuỗi số vô tận và phép tính lượng thay đổi.

Nhờ quan sát cách viết số thực dưới dạng thập phân vô hạn, thí dụ như:

$$\frac{452}{13} = 34.7692... \text{ hoặc } 2 + 3\sqrt{5} = 8.7082...$$

mà Newton có thể biểu diễn những biểu thức đại số dưới dạng chuỗi vô hạn. Newton đã viết:

$$\frac{2+5x+4x^2}{1+2x} = 2 + x + 2x^2 - 4x^3 + 8x^4 - 16x^5 + \dots$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{16} - \frac{5x^8}{128} + \dots$$

Ngoài ra, áp dụng công thức nhị thức, Newton còn khai triển được các nhị thức với lũy thừa phân số, thí dụ như:

$$\begin{aligned} (c^2 + x^2)^{\frac{1}{2}} &= c + \frac{1}{2} \cdot c \cdot \frac{x^2}{c^2} + \frac{1 \cdot (-1)}{2 \cdot 4} \cdot c \left(\frac{x^2}{c^2}\right)^2 + \frac{1 \cdot (-1) \cdot (-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot c \left(\frac{x^2}{c^2}\right)^3 + \dots \\ &= c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} + \dots \end{aligned}$$

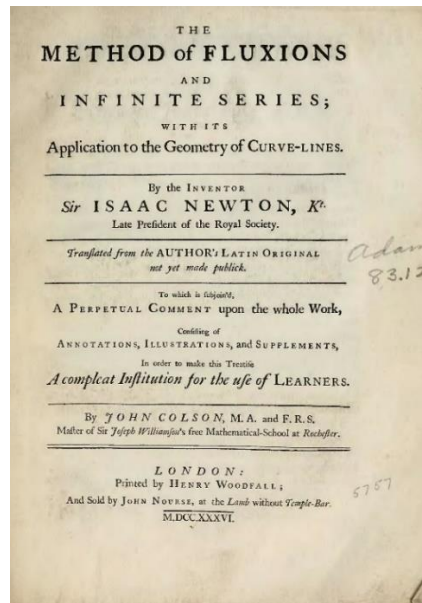
(cho $c = 1$, ta có được khai triển của $\sqrt{1+x^2}$).

Trong *Tractatus de methodis serierum et fluxionum*, Newton viết:

“Tôi không nghĩ rằng những vật thể toán học được tạo nên bởi những phần, dầu là rất nhỏ, mà là tạo nên bởi một sự chuyển động liên tục. Đường không phải do sự kết hợp bởi những phần của nó, mà là được tạo nên bởi một điểm chuyển động. Mặt thì do những đường chuyển động tạo thành.”

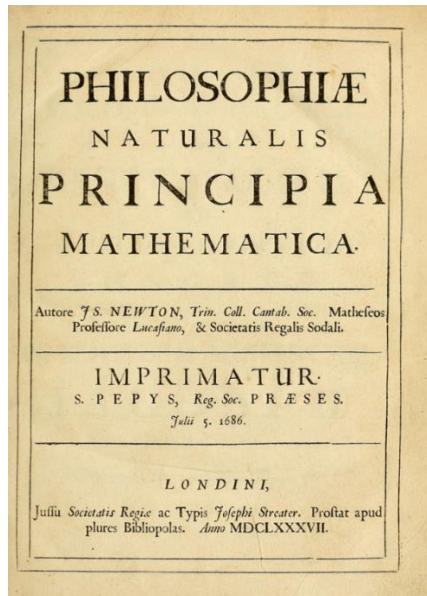
Những gì chuyển động (theo thời gian) thì ông gọi là *fluent*, vận tốc của nó ông gọi là *fluxion*. Ký hiệu \dot{x} được Newton dành cho vận tốc của x (*fluent*), còn ký hiệu $\dot{x}o$ biểu diễn cho sự gia tăng nhỏ của x . Cũng trong tác phẩm ấy, Newton thiết lập ra nhiều qui tắc tính toán trên *fluent* và *fluxions*.

- Năm 1680 (khoảng chừng), Newton hoàn thành chuyên đề *Geometriae curvilinearum* trong đó ông giới thiệu khái niệm giới hạn. Những lượng thay đổi mở rộng ra phía hình học. Để xác định các tiếp tuyến với đường cong, Newton dựa trên chuyển động. Xem một điểm có tọa độ (x, y) chạy trên đường cong. Tọa độ của điểm này sau một thay đổi rất nhỏ của thời gian sẽ là $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$. Nhờ khái niệm này và những phép tính về *fluxions*, Newton giải được bài toán tiếp tuyến.



Bản dịch cuốn *Tractatus de methodis serierum et fluxionum* (*The method of fluxions and infinite series*) ấn bản đầu tiên in năm 1736.

- Năm 1687, Newton cho xuất bản tác phẩm *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (Những nguyên lý Toán học của Triết học tự nhiên) – thường được gọi tắt là *Principia*.



Trong tác phẩm này, Newton đề cập tới những định luật cơ bản của cơ học cổ điển, những định luật về sự hấp dẫn vũ trụ, và những định luật Kepler đã được mở rộng.

Cuốn *Principia* được xem là một trong những cuốn sách quan trọng nhất trong lịch sử phát triển Khoa học của nhân loại.

- Năm 1691-1692, Newton soạn xong *De quadrature curvarum*, nhưng mãi đến năm 1704 sách mới được công bố. Trong tác phẩm này ông đề cập tới phần Hình học đã nói tới trong *Geometria curvilinea* và trong *Principia* bằng ngôn ngữ và kỹ thuật của Hình học Giải tích. Ngoài ra vấn đề tính diện tích hình phẳng cũng được ông giải bằng phương pháp tính toán lượng thay đổi (method of fluxional calculus).

3. Gottfried Leibniz và những gì ông đã làm liên quan đến phép tính vi-tích phân



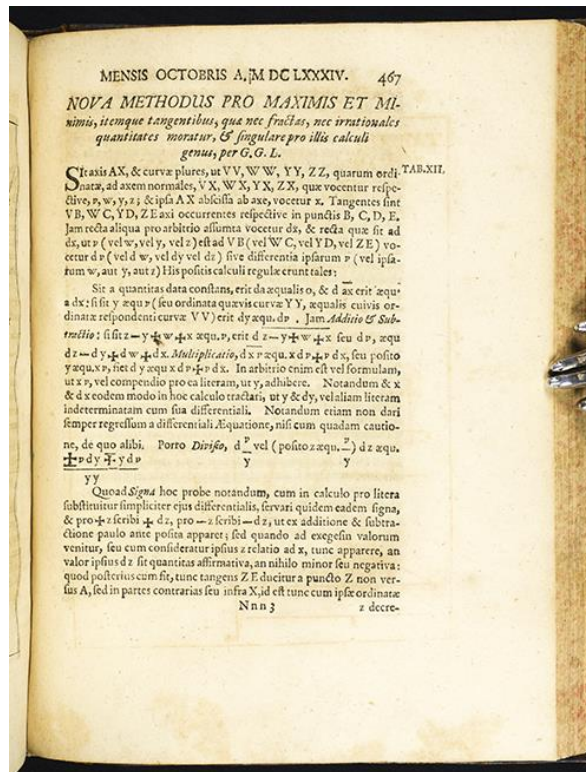
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716).

- Vào Đại học Leipzig năm 1661 (15 tuổi), Leibniz học Triết học, Luật học. Năm 1666 (20 tuổi) ông tốt nghiệp Tiến sĩ Triết học rồi năm sau lấy bằng Tiến sĩ Luật học. Sau đó ông đi vào ngành ngoại giao.
- Năm 1672, nhân chuyến công tác tại Paris, ông có dịp làm quen với nhà Toán học và Vật lý học Hà Lan Christiaan Huygens (1629 – 1695)¹. Huygens đã tạo hứng thú cho Leibniz đi vào ngành Toán học qua con đường tự học, tự nghiên cứu. Leibniz đọc Pascal, Descartes, Cavalieri, James Gregory² và nhiều tác giả đương thời khác.

¹ Huygens vừa là thành viên của Royal Society of London vừa là thành viên của Hàn Lâm Viện Khoa học Pháp.

² James Gregory (1638 – 1675), nhà Toán học, nhà Thiên văn học người Scotland. Ông là tác giả cuốn sách *Geometriae Pars Universalis* (xuất bản năm 1668) trong đó có chứng minh định lý cơ bản của phép tính tích-phân (qua ngã Hình học).

- Năm 1684, ông công bố bài báo *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (thường gọi tắt là *Nova methodus pro maximis et minimis*: Phương pháp mới tính cực đại cực tiểu) đăng trên tờ *Acta Eruditorum*³. Trong bài này Leibniz giới thiệu ký hiệu vi phân dy rất quen thuộc với chúng ta ngày nay, cùng là những qui tắc về cách tính vi phân cho hàm số tích, tỷ số của các hàm số (chữ d thay cho chữ vi phân tiếng La Tinh là *differentia*). Tuy nhiên ông không đưa ra chứng minh cho các qui tắc đó.

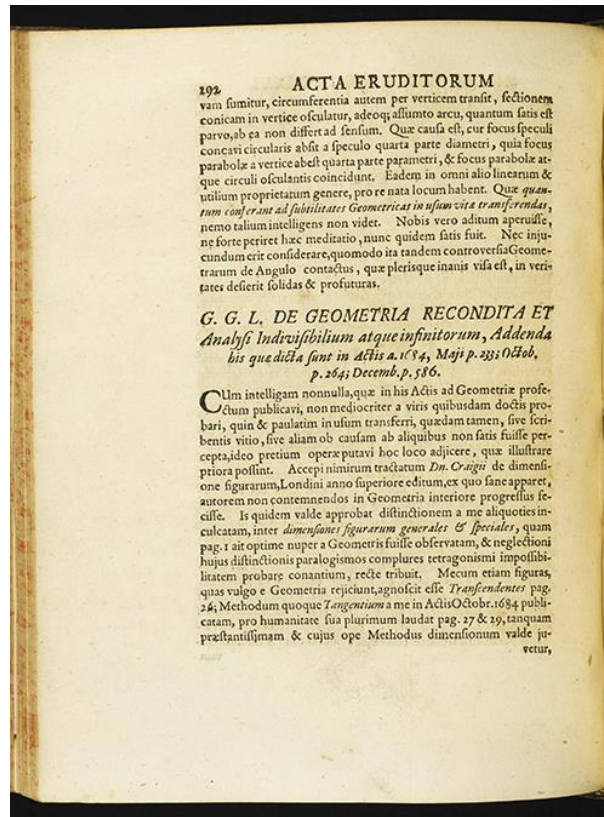


Trang đầu của bài báo *Nova methodus pro maximis et minimis*.

- Năm 1686, vẫn trên tờ *Acta Eruditorum*, ông cho công bố bài báo có nhan đề là *De geometria recondite et analysi indivisibilium*, trong đó Leibniz giới thiệu khái niệm về tích-phân và ký hiệu \int (chữ S kéo dài, thay cho chữ tổng số tiếng La Tinh là *summa*). Liên hệ giữa hai phép toán vi phân và tích phân cũng được Leibniz nêu ra trong bài báo này.

³ *Acta Eruditorum* (Tờ báo dành cho các nhà thông thái) được thành lập vào năm 1682, Leibniz là một trong những biên tập viên đầu tiên.

Ngoài ra, cũng trong bài báo này, công thức cơ bản của phép tính tích phân⁴ lần đầu tiên được Leibniz diễn giải rõ ràng.



Trang đầu của bài báo *De geometria recondite et analysi indivisibilium*.

Cho tới cuối thế kỷ thứ 17, phép tính vi-tích phân được trình bày dưới hai dạng khác nhau, một của Newton và một của Leibniz, cả hai có mục đích gần giống như nhau. Mỗi dạng có một hệ thống thuật ngữ và ký hiệu riêng. Bảng tóm lược dưới đây sẽ cho chúng ta thấy những nét chính của hai phiên bản của phép tính vi-tích phân nói trên⁵.

⁴ Ngày nay công thức được diễn tả như sau: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, trong đó $f(x)$ là hàm số liên tục trên khoảng $[a,b]$ và $F(x)$ là một nguyên hàm của nó trên $[a,b]$.

⁵ Nguồn: *Histoire des Mathématiques*. Université Louis Pasteur. 2004-2005.

	Newton (từ 1666)	Leibniz (từ 1675)
Khái niệm lượng biến đổi	Lượng biến đổi theo thời gian (fluents)	Lượng thay đổi xem như được tạo ra bởi vô số giá trị vô cùng nhỏ cạnh nhau.
Vận tốc và vi-phân	Dựa trên động học, khái niệm cơ bản của Newton là vận tốc (fluxion).	Vi phân của biến số có được bằng cách tạo ra một dãy các hiệu số của những giá trị kế tiếp nhau của biến số.
Khái niệm tích - phân	Phương pháp của Newton là tìm diện tích z dưới đường cong vẽ nên bởi điểm (x,y) bằng cách giải phương trình $z = yx$, ấy là tìm lượng thay đổi z từ vận tốc yx . Newton không đưa ra các phép tính toán (operations) về tích-phân.	Với Leibniz, tích-phân là phép tính toán về tổng số. Các hệ thức $\int dy = y$ và $d \int z = z$ được chứng minh. Diện tích dưới đường cong được tính nhờ tích phân $\int y dx$.
Lượng vô cùng nhỏ	Newton ngần ngại khi dùng lượng vô cùng nhỏ. Vận tốc (fluxion) của Newton không phải là lượng vô cùng nhỏ, mà là một lượng hữu hạn.	Leibniz xử dụng lượng vô cùng nhỏ: Nếu y là một biến số nào đó thì dy là một lượng vô cùng nhỏ.
Ký hiệu	Newton xử dụng dấu chấm trên đầu, \dot{x} , để chỉ vận tốc, nhưng không có ký hiệu cho phép tính ngược lại.	Leibniz giới thiệu hai ký hiệu cơ bản d và \int . Đó là ký hiệu tượng trưng cho hai phép toán thuận ngược lẫn nhau trên các lượng thay đổi.
Vai trò của hình vẽ	Newton thường xuyên dùng hình vẽ, giải thích nhiều kết quả thông qua hình vẽ và trực giác.	Phép toán hình thức của Leibniz cho phép tính toán độc lập với Hình học (hình vẽ). Các tính toán vi-phân của Leibniz gần với Đại số hơn là Hình học.

4. Cuộc tranh cãi gay gắt nhất trong Lịch sử Toán học

Có lẽ cuộc tranh cãi ai là người phát minh ra phép tính vi-tích phân (Newton hay Leibniz) là cuộc tranh cãi gay gắt và tai tiếng nhất trong Lịch sử Khoa học nói chung và Toán học nói riêng. Ngày nay vấn đề như thế này không có gì phải tranh cãi: Ai là người công bố đầu tiên vấn đề nào (trên báo chí, truyền thông), thì người ấy là người đầu tiên phát minh ra vấn đề ấy. Nhưng ở thế kỷ 17, thư từ đi rất chậm, nhất là từ nước này sang nước khác, kỹ thuật in ấn còn thô sơ, đó là chưa kể đến việc một số tác giả không cho việc làm của mình quan trọng nên không tìm cách công bố ngay mà chỉ cho lưu hành nội bộ, vài năm sau mới cho công bố phát minh của mình.

4.1 Những bất lợi cho Leibniz

Ta nhắc lại rằng Newton bắt đầu quan tâm đến phép tính vi-tích phân từ năm 1666. Ông viết *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* năm 1669 và chỉ cho công bố vào năm 1711. Thời gian 1665 – 1666, Leibniz hãy còn là một nhà Luật học, một nhà Triết học, hành nghề ngoại giao, đang mon men vào lãnh vực Toán học qua sự hướng dẫn của Huygens. Ông biết rất ít về Newton, đúng ra là ông chỉ nghe nói về Newton nhưng lại rất ấn tượng về hai người thân cận với Newton làm việc trong Hội Hoàng gia London (Royal Society), đó là Henry Oldenburg và John Collin. Năm 1673 trong chuyến công tác ngoại giao hai tháng tại London, ông có gặp Oldenburg nhưng không gặp Newton. Ông chưa hề đọc một bài báo nào của Newton vì thời gian này chưa có một công trình nào của Newton được xuất bản.

Ở London, Leibniz mua cuốn *Geometrical Lectures* của Isaac Barrow. Điều này rất có ý nghĩa vì trong đó Barrow có đề cập tới vấn đề tiếp tuyến với đường cong, một chủ đề của phép tính vi-tích phân. Newton và những người ủng hộ ông dùng sự kiện này để cho rằng Leibniz vay mượn kiến thức của Barrow. Nhưng theo Rupert Hall, Leibniz chỉ mua đọc cuốn sách này vì tò mò và cho rằng Leibniz không bị ảnh hưởng chút nào bởi cuốn sách này⁶.

Khi trở về Paris, ông bắt đầu nghiên cứu Toán học, đặc biệt về chuỗi số và tổng của chúng, qua các tác phẩm của Pascal, Cavalieri, James Gregory, và nhiều tác giả khác. Trong thời gian này, ông thường liên lạc thư từ với Oldenburg, thỉnh thoảng với Collin, qua đó ông được biết ở Anh đã có người nghiên cứu về chủ đề chuỗi số

⁶ Rupert Hall. *Philosophers at War*. Page 55. Alfred Rupert Hall (1920-2009), nhà viết sử Khoa học người Anh, người được cho là sở hữu rất nhiều tài liệu về Newton, kể cả những thư từ riêng của Newton khi trao đổi với các nhà Khoa học cùng thời.

(Gregory, Newton,...) cho nên ông càng bị thúc đẩy nhiều hơn. Năm 1675, Leibniz khai triển được nhiều ý tưởng về phép toán vi-tích phân. Khi ấy chưa có một tác phẩm nào của Newton được xuất bản, cho nên Leibniz không thể nào biết được Newton đã làm được gì trong lãnh vực ấy. Năm 1676, Newton có viết một bức thư cho Oldenburg trong đó Newton có đề cập tới một định lý về nhị thức và áp dụng nó vào việc nghiên cứu chuỗi số vô hạn, độ dài đường cong và phép tính diện tích. Newton **không đề cập** tới *fluents* và *fluxions* trong bức thư này. Sau này, khi cuộc tranh cãi bùng nổ, Newton và phe ủng hộ cho rằng Leibniz đã “ăn cắp” ý tưởng của Newton qua những trao đổi thư từ với Oldenburg và Collin. Ngoài ra phe này còn cho rằng Leibniz đã học được Newton qua trao đổi với nhà Toán học Đức Ehrenfried von Tschirnhaus (1651 – 1701) khi ông này từ London về gặp Leibniz tại Paris⁷.

Năm 1676, Leibniz qua London lần thứ hai. Collin biết Leibniz quan tâm tới chuỗi số, cho nên Collin có chuẩn bị trước một bản tóm tắt (compendium) công trình của James Gregory và những phép tính về chuyển động của Newton gửi tặng Leibniz. Về sau, từ sự kiện này dấy lên một ngờ vực rằng Leibniz đã thu được nhiều ý tưởng qua nghiên cứu bản tóm tắt này. Hall xác nhận Leibniz có đọc bản tóm tắt này, nhưng không hề “mượn” một ý tưởng nào của Newton hoặc Gregory bởi vì thời điểm này Leibniz đã triển khai phép tính vi-tích-phân cho riêng mình rồi. Hơn nữa, kiến thức trong ấy không có gì mới đối với Leibniz⁸. Nếu như Leibniz phát triển phép tính vi-tích phân sau năm 1675 thì rõ ràng là sự nghi ngờ này có là có cơ sở.

4.2 Sự tranh cãi bắt đầu như thế nào?

Từ năm 1676 đến năm 1684, không có chuyện gì xảy ra, mọi việc im ắng.

Năm 1684, Leibniz bắt đầu công bố phép tính vi-tích phân của mình trên tờ báo *Acta Eruditorum* mặc dù ông đã viết hoàn tất từ năm 1675. Nếu mà khi viết xong, Leibniz công bố ngay công trình của mình thì chắc chắn không có chuyện xảy ra.

John Wallis (1616 – 1703), một giáo sĩ và cũng là một nhà Toán học người Anh, có nhiều đóng góp trong các lãnh vực Hình Giải tích, Lượng giác và Đại số. Ngoài ra, ông cũng là một trong những người đi đầu trong nghiên cứu chuỗi vô tận và phép tính vi-tích phân. Tác phẩm của ông gồm có: *Treatise on the Conic Sections* (Sách về các thiết diện côníc), *Arithmetica Infinitorum* (Sách về số học vô tận),...

Năm 1685 ông cho xuất bản cuốn *Algebra*, ở cuối sách có một phụ chú về lịch sử phát triển bộ môn với nhiều thông tin bổ ích. Năm 1695 ông cho xuất bản cuốn *Mathematical Works* (Sách tổng hợp các nghiên cứu Toán học), phần II của tác phẩm này chính là cuốn *Algebra* ông đã xuất bản 10 năm trước. Trong phần phụ

⁷ Rupert Hall. *Philosophers at War*. Page 66.

⁸ Rupert Hall. *Philosophers at War*. Page 73-74.

chú ông có viết thêm một bài tiểu luận về *phép tính lượng thay đổi* (calculus of fluxions) của Newton. Trong bài tiểu luận này Wallis đã hướng người đọc tới ý tưởng rằng ông có được nội dung này từ năm 1676 qua những thư từ của Newton, điều này cũng có nghĩa là trong thư viết cho Leibniz vào năm 1676, Newton đã thông báo cho Leibniz phép tính lượng thay đổi, trước khi nó được xuất bản. Và đây chính là lần đầu tiên người ta được hướng dẫn rằng Leibniz đã “đạo” công trình của Newton. Rupert Hall nói: *“Bất ngờ thay, Wallis lại là người đầu tiên hướng dẫn sai dư luận.”*⁹



John Wallis (1616 -1703), giáo sĩ và cũng là nhà Toán học người Anh.

Rupert Hall giải thích tại sao Wallis lại có ý định công kích Leibniz. Wallis là một người theo chủ thuyết quốc gia cực đoan. Suốt đời ông, ông luôn luôn cho rằng người Anh hơn hẳn những người ngoại quốc, đặc biệt là hơn hẳn những người trong lục địa (Châu Âu). Khi biết được có người trong lục địa (Leibniz) có những ý tưởng tương tự như Newton, lập tức ông thể hiện tính bài ngoại của mình ngay¹⁰. Dĩ nhiên Leibniz phản ứng, nhưng ông phản ứng một cách chừng mực bằng cách viết thư cho nhà Thiên văn học người Anh Thomas Burnet (1635 - 1715) giải thích, trình bày những gì mình đã làm từ năm 1675.

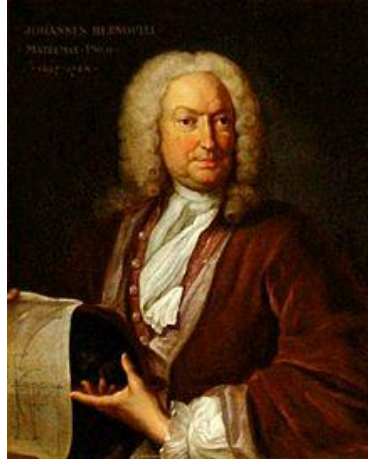
4.3 Bài toán đường đoản trình (brachistochrone)

Johann Bernoulli (1667 - 1748) là một nhà Toán học người Thụy Sĩ. Ông thuộc dòng họ Bernoulli nổi tiếng vì trong hai thế kỷ 17 và 18 dòng họ này đã sản sinh ra ít nhất tám nhà Toán học trong đó có ba nhà Toán học hàng đầu Châu Âu thời ấy: Jacob Bernoulli (1654 – 1705), Johann Bernoulli (1667 – 1748) và Daniel Bernoulli (1700 – 1782).

⁹ Rupert Hall. *Philosophers at War*. Page 95.

¹⁰ Rupert Hall. *Philosophers at War*. Page 95-96.

Tuy không phải là học trò trực tiếp của Leibniz (sinh sau Leibniz gần 20 năm) nhưng có thể nói ông nghiên cứu và am hiểu sâu sắc phép tính vi-tích phân của Leibniz hơn ai hết vào thời ấy. Ông là người rất tự tin và do đó tính khí hơi kiêu ngạo.



Johann Bernoulli (1667–1748), nhà Toán học xuất sắc thuộc dòng họ Bernoulli, Thụy Sĩ.

Trong số báo *Acta Eruditorum* tháng 6 năm 1696, Johann đăng thông báo sau đây:

Tôi, Johann Bernoulli, gửi những lời này tới những nhà Toán học xuất sắc nhất thế giới. Không có gì thu hút những con người thông minh bằng bài toán thử thách mà lời giải của họ sẽ làm cho họ nổi tiếng và lưu danh lại cho đời sau. Tôi hy vọng sẽ thu hút được sự chú ý của giới khoa học trong đó có những nhà Toán học giỏi nhất của thời đại chúng ta như là Pascal và Fermat của thế hệ trước. Bài toán của tôi sẽ cho họ thể hiện phương pháp và tài năng của họ. Nếu họ gửi lời giải tới tôi, tôi sẽ công bố và đánh giá sự xứng đáng của họ.

Và đây là bài toán của Johann Bernoulli:

Cho hai điểm A và B nằm trong một phẳng thẳng đứng P (A cao hơn B). Hãy xác định đường nối hai điểm A và B và nằm trong mặt phẳng P sao cho một điểm chỉ chịu trọng lực chạy từ A đến B trong thời gian ngắn nhất.

Đề toán đã tới tay Newton và Wallis. Một số nhà viết Sử Toán tin rằng bài toán này có mục đích chứng minh rằng phương pháp *tính lượng thay đổi* (Newton) không mạnh bằng phương pháp *tính vi-tích phân* (Leibniz)¹¹. Newton cho hay rằng thời gian này ông quá bận rộn trong nhiệm vụ mới được nhà Vua trao (Giám đốc nhà máy đúc tiền hoàng gia: The Royal Mint), nên ông không có thời gian quan

¹¹ G.V. Coyne; S.J., M. Heller; J. Zyciński. *Newton's controversy with Leibniz over the invention of the calculus*. Page 111.

tâm tới bài toán¹². Rupert Hall không tin điều này vì trong thông báo những lời giải đúng có một lời giải tên tác giả ghi là *vô danh* mà Johann Bernoulli tin chắc rằng đó là bài giải của Newton và sau này Newton công nhận¹³. Các lời giải khác đều thuộc trường phái Leibniz, đó là lời giải của De L'Hôpital, Leibniz, Jacob Bernoulli và Johann Bernoulli. Tuy cách giải có khác nhau nhưng tất cả các lời giải đúng đều dựa trên phép tính vi-tích phân của Leibniz. Không có một lời giải nào khác đến từ trường phái Newton của nước Anh¹⁴.



Nicolas Fabio de Duillier (1664 – 1753), nhà Toán học Thụy Sĩ, một trong những người khơi mào cho cuộc tranh cãi Newton- Leibniz.

Đến đây bị kịch được đẩy cao thêm một nấc nữa bởi Nicolas Fatio de Duillier (1664 - 1753). Ông này là một nhà Toán học Thụy Sĩ, từng là học trò của Leibniz và Huygens. Vì bị Leibniz coi thường, ông tức giận bỏ qua trường phái Newton. Kể từ năm 1696, Fatio de Duillier trở nên người thân cận tích cực của Newton. Trong danh sách người giải được bài toán *đường đoãn trình* do phía Leibniz công bố, không có tên ông. Đây là điều sỉ nhục mà Fatio de Duillier không thể bỏ qua được.

Trong khi đó, trong một thư gửi cho Leibniz, Johann Bernoulli nói rằng trong lời giải của người vô danh (tức của Newton), người viết đã dùng phương pháp của Leibniz nên mới giải được bài toán, Bernoulli nghi ngờ rằng Newton đã dùng chính phương pháp vi-tích phân mà Leibniz đã thông báo cho Newton trong một bức thư riêng gửi đi vào năm 1677. Đây là lần đầu tiên có một sự tố cáo “đạo” ý tưởng theo chiều ngược lại¹⁵.

¹² Sách trên.

¹³ Rupert Hall. *Philosophers at War*. Page 106. Ghi chú thêm: Bernoulli ghi bên lề lời giải *vô danh* câu tiếng La Tinh: *Ex ungue Leonem*” (Nhận biết con sư tử qua móng vuốt của nó), có nghĩa là Bernoulli nhận biết ngay lời giải này của *con sư tử già London* (Newton).

¹⁴ Xem thêm bài viết về *Gia đình Bernoulli* của cùng tác giả bài viết này.

¹⁵ G.V. Coyne; S.J., M. Heller; J. Zyciński. Sách đã dẫn. Page 111.

Cho tới cuối năm 1696, sự tố cáo qua lại vẫn còn trong phạm vi hẹp, chính xác là vẫn còn trong phạm vi riêng tư (qua thư từ). Sau đó chính Fatio de Duillier đã đưa sự tranh cãi ra công khai. Trong một bài viết có tiêu đề là *Investigation* (Điều tra) phổ biến vào năm 1699, Fatio de Duillier công khai xác nhận rằng Newton là người đầu tiên phát minh ra phép tính vi-tích phân, và “*nhưng Leibniz lại quá sốt sắng nói với mọi người rằng chính mình mới là người đầu tiên phát minh ra phép tính ấy*”¹⁶. Người ta không biết Newton có đứng đằng sau ý tưởng tấn công này không. Về phía Leibniz, ông cho rằng Newton không hề biết bài báo này và hy vọng đến lúc nào đó, khi biết, Newton sẽ đánh tan ý tưởng của Fabio de Duillier. Nhưng Newton vẫn im lặng. Trong tờ *Acta Eruditorum* của mình, Leibniz kết tội Fabio de Duillier hành xử nông cạn do ghen tị của người trẻ tuổi. Fabio de Duillier phản biện lại nhưng tờ báo *Acta Eruditorum* không cho đăng ý kiến này. Sau đó vấn đề rơi vào im lặng được một thời gian.

Năm 1700, sự tranh cãi bùng ra trở lại. Tuy nhiên, chúng ta phải ghi nhận rằng, cho tới thời điểm ấy, Newton và Leibniz chưa bao giờ trực tiếp đối đầu trong sự việc này. Bên phe Newton, Wallis là người khởi xướng và Fabio de Duillier là người đẩy cuộc tranh cãi lên cao. Newton vẫn còn đứng bên lề. Người ta không rõ thái độ của Newton cho tới thời điểm ấy. Một mặt ông công nhận tính cách độc lập của Leibniz và nói điều này trong những thư từ gửi cho Leibniz, mặt khác ông vẫn giữ yên lặng trước sự tấn công Leibniz của các thành viên thuộc phe nhóm ông. Rupert Hall có nhận định về thái độ này của Newton: “*Không thể nói Newton không biết gì về bài viết Investigation hồ đồ của Fabio.*”¹⁷ Nhưng cũng Rupert Hall: “*Những gì Wallis viết trong phụ chú phía sau cuốn Algebra cứ như là những gợi ý của Newton.*”¹⁸ Về phía Leibniz, Johann Bernoulli cương quyết cho rằng chính Leibniz là người phát minh ra phép tính vi-tích phân, và Leibniz cũng đồng ý như vậy. Nhưng Bernoulli còn đi xa hơn nữa khi cho rằng có thể Newton đã “đạo” ý tưởng của Leibniz (qua lời giải bài toán đường đoãn trình). Về điểm này, Rupert Hall cho rằng Leibniz đã không hài lòng về sự kết án của Bernoulli cho nên khuyên Bernoulli nên khép vấn đề ở đó.¹⁹

Nhưng chúng ta sẽ thấy, sự việc thay đổi mau chóng trong thời gian tới.

4.4 Leibniz thay đổi ý kiến về Newton

Năm 1703, George Cheyne (1671 - 1743), một nhà Toán học theo trường phái Newton, xuất bản cuốn *The Inverse Method of Fluxions*. Đây là cuốn sách nói về phép tính ngược của phép tính lượng thay đổi của Newton, nói rõ hơn, đây chính

¹⁶ G.V. Coyne; S.J., M. Heller; J. Zyciński. Sách đã dẫn. Page 112 và Rupert hall. Sách đã dẫn. Page 106-107.

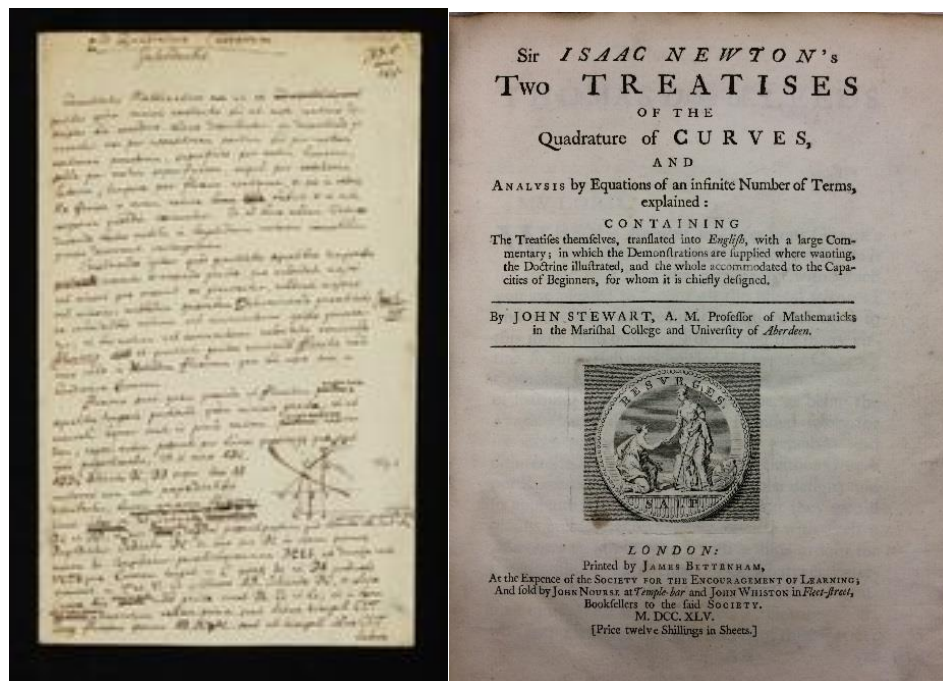
¹⁷ Rupert Hall. Sách đã dẫn. Page 118.

¹⁸ Rupert Hall. Sách đã dẫn. Page 129.

¹⁹ Rupert Hall. Sách đã dẫn. Page 130.

là phép tính tích phân đặt nền tảng trên phép tính vi phân theo cách của Newton. Ở cuối sách, Cheyne viết rằng những gì ông đã công bố trong 24 năm qua chẳng qua là sự lặp lại – hay nói cách khác chỉ là hệ quả - của những thành tựu của Newton mà Newton đã chuyển cho bạn hữu và công chúng. Cheyne cho rằng phép tính lượng thay đổi (tức là phép tính vi-tích phân) là sản phẩm của nước Anh, và không hề của bất cứ ai khác.

Dĩ nhiên những nhận định này làm chấn động Johann Bernoulli và Leibniz. Leibniz phản ứng bằng cách cho rằng Cheyne là người học đòi, biết không bao nhiêu về bộ môn mới mẻ này. Leibniz còn nói thêm rằng có thể Cheyne không biết gì nhiều hơn là những gì Newton đã dạy cho ông ấy, và không biết những gì Leibniz đã công bố về phép tính vi-tích phân, trước cả những tài liệu công bố bởi Newton. Đến đây, chúng ta thấy ý kiến của Leibniz về Newton đã thay đổi. Trước đây, trong thư trao đổi với Newton vào năm 1677, Leibniz công nhận rằng Newton là bậc thầy trong lãnh vực tính vi-tích phân, sản phẩm của ông khá tương tự với những gì Leibniz đã sáng tạo, nhưng ông là nhà sáng tạo độc lập với Leibniz²⁰.



Bên trái là chữ viết của Newton (tiếng La Tinh) và bên phải là bản in (tiếng Anh, dịch bởi John Stewart).

Năm 1704, Newton cho xuất bản hai tập sách nói về *The Quadrature of Curves* và *Equations of infinite Number of Terms*. Leibniz nhận ra rằng phép tính lượng thay đổi (fluxional calculus) của Newton qua hai tác phẩm này khác nhiều so với những gì Newton đã viết trong *Principia* và những bài viết khác trước đó. Nó gần như là

²⁰ Rupert Hall. Sách đã dẫn. Page 131-132.

phép tính vi-tích phân của Leibniz, chỉ khác nhau ở ký hiệu mà thôi. Điều này buộc người ta phải hiểu rằng Newton đã điều chỉnh và bổ sung phương pháp tính lượng thay đổi của mình sau những biểu hiện chưa đầy đủ của nó, và nhất là sau những thành công vang dội của phép tính vi-phân của Leibniz²¹. Leibniz hiểu ra tại sao những người thuộc trường phái Newton qui kết mạnh mẽ rằng Leibniz là người đi sau, hay chính xác hơn, Leibniz “đạo” ý tưởng của Newton.

Sau khi hai tác phẩm trên của Newton ra đời, Leibniz không còn nghĩ rằng chỉ có những học trò của Newton hoặc những người theo trường phái Newton phủ định sự phát minh độc lập của Leibniz mà những ý tưởng ấy phát xuất ngay chính từ Newton. Trước năm 1704, Leibniz không nghĩ như vậy bao giờ.

Năm 1705, trong một số báo *Acta Eruditorum*, dưới tên *vô danh*, có một bài viết điểm hai cuốn sách nói trên của Newton. Qua bài này tác giả nói xa nói gần rằng Newton đã chỉnh sửa phép tính lượng thay đổi của mình trở thành quá gần với phép tính vi-tích phân của Leibniz. Nói một cách khác, Newton đã “đạo” ý tưởng của Leibniz. Hầu như người đọc biết ngay tác giả bài điểm sách là ai, và sau này một vài sử gia không hoàn toàn đồng ý với kết luận trên²², nhưng cũng có người chia sẻ với Leibniz về sự ngờ vực ấy²³.

Hình như Newton không quan tâm tới ý kiến của người khác về hai tác phẩm của mình, hay Newton không hề biết có bài điểm sách của người *vô danh* trên tờ *Acta Eruditorum* nói trên.

4.5 Phe Newton tấn công và phản ứng của Leibniz

“Hòa bình” sau “chiến tranh” kéo dài được bốn năm.

Năm 1708, John Keill (1671 – 1721), một nhà Toán học Scotland, một học trò của Newton, một người hâm mộ Fatio de Duillier, châm ngòi cho một cuộc chiến mới bằng bài báo mang tên *On the Laws of Centripetal Force* đăng trên tờ báo *Philosophical Transactions of the Royal Society* (một tờ báo của Viện Hoàng gia London)²⁴. Trong bài báo này, Keill khẳng định rằng Newton là người đầu tiên phát minh ra phép tính vi-tích phân dựa trên bằng chứng là những bức thư của Newton do Wallis công bố. Hơn thế nữa, Keill còn cho rằng nội dung những công bố của Leibniz cơ bản là giống như của Newton, chỉ “*thay đổi ký hiệu*”²⁵, nói cách khác, Leibniz “sao chép” phương pháp phép tính vi-tích phân của Newton.

²¹ Carl B. Boyer. *The History of the Calculus and its Conceptional Development*. Page 208.

²² G.V. Coyne; S.J., M. Heller; J. Zyciński. Sách đã dẫn. Page 112.

²³ Rupert Hall. Sách đã dẫn. Page 140.

²⁴ Bài được gửi tới tòa báo năm 1708, nhưng mãi đến 1710 mới xuất hiện.

²⁵ David Brewster. *The Life of Isaac Newton*. Page 187. Rupert Hall. Sách đã dẫn. Page 145.

Ta thử xem ý kiến của hai nhà Khoa học và cũng là hai nhà viết sử Toán quan trọng người Anh, Rupert Hall và David Brewster²⁶, về khẳng định của Keill.

Trước hết Hall cho rằng khi viết bài này Keill không hề tham khảo ý kiến của Newton²⁷. Hall coi những ý kiến của Keill là lời kết án Leibniz một cách công khai, thô thiển, và không khách quan. Còn Brewster thì viết: “*Nếu như coi những ý kiến của Keill (là Leibniz “đạo” ý tưởng của Newton) hồ đồ, có ác ý, thì xin hãy đọc lại bài viết về Newton của người vô danh (tức Leibniz) trên tờ Acta Eruditorum.*”²⁸

Trước sự tấn công công khai của Keill, qua bài báo được đăng trên một cơ quan chính thức của Viện Hoàng gia London (tức Hàn Lâm Viện Anh) do Newton đang làm chủ tịch²⁹, Leibniz rất bất bình. Trước đây, đối với những ý kiến tương tự như vậy phát xuất từ những người thuộc phe Newton, Leibniz không phản ứng quyết liệt và công khai. Nay bài báo của Keill được đăng trên một cơ quan báo chí chính thức của Viện Hoàng gia Anh, Leibniz buộc phải nghĩ rằng Keill đã được gợi ý từ Newton hoặc viết theo ý muốn của Newton. Leibniz viết thư cho Hans Sloane (1660 – 1753), tổng thư ký Viện Hoàng gia London, yêu cầu Keill phải công khai xin lỗi về những cáo buộc sai trái. Sloane chuyển thư của Leibniz cho Newton, và đến khi ấy Newton mới được đọc bài báo của người *vô danh* trên tờ *Acta Eruditorum*. Đến đây thì Newton công khai ủng hộ Keill, tạo cơ hội cho Keill đọc bản báo cáo trước Viện Hoàng gia London, viện dẫn bài báo của Leibniz trên tờ *Acta Eruditorum*.

Hơn thế nữa, năm 1711, Viện Hoàng gia London cho thành lập một hội đồng để chính thức xem xét vấn đề. Thành phần của hội đồng gồm: Edmond Halley (1656 – 1742); William Jones (1675 – 1749); Abraham de Moivre (1667 – 1754); John Machin (1680 – 1751) (tất cả đều là bạn hoặc học trò của Newton); và Brook Taylor (1685 – 1731) (bạn của Keill)³⁰.

Kết luận của hội đồng xác nhận Newton là người đi trước trong phát minh ra phép tính vi-tích phân. Đây chỉ là vở kịch lối bịch mà đạo diễn là ông chủ tịch Viện Hoàng gia London. Ngay chính Hall cũng công nhận như vậy³¹.

Để phản ứng lại, ngày 29 tháng 7 năm 1713, Leibniz cho phổ biến trên tờ *Charta Volans* (hình dưới) một bài viết phủ nhận kết luận của Newton (qua hội đồng do Viện Hoàng gia London thành lập). Leibniz cáo buộc Newton và các học trò “*đã lấy*

²⁶ David Brewster (1781 – 1868), nhà Khoa học người Anh, người phát minh ra kính vạn hoa (kaleidoscope) và kính nhìn nổi hình (stereoscope). Ngoài ra ông còn là tác giả của cuốn tiểu sử Newton, xuất bản năm 1831: *The Life of Isaac Newton*.

²⁷ Rupert Hall. Sách đã dẫn. Page 144.

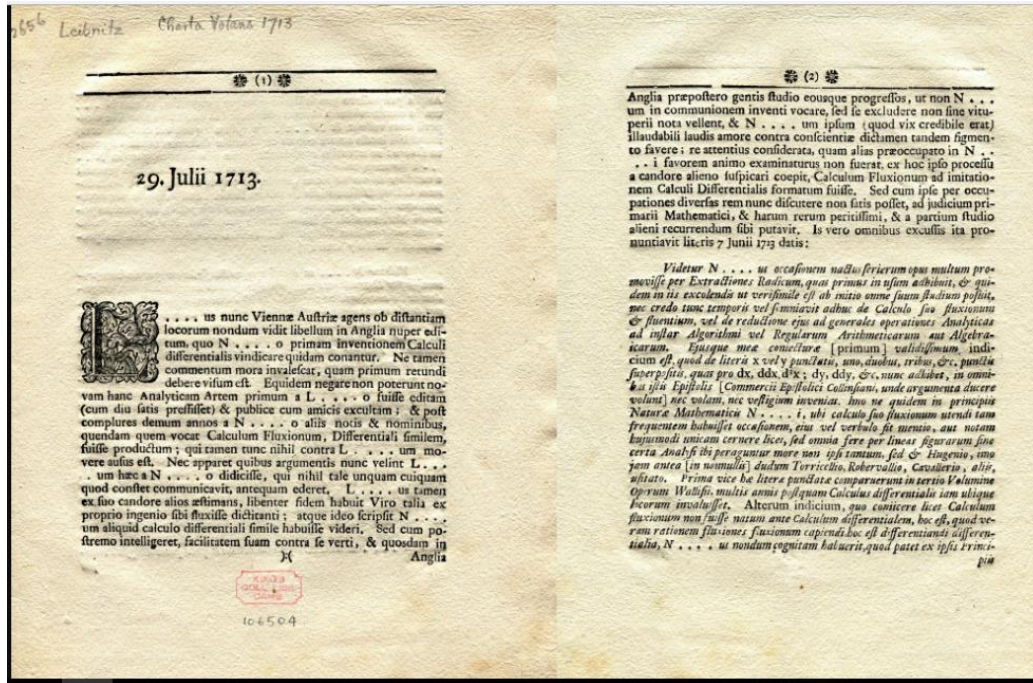
²⁸ David Brewster. Sách đã dẫn. Page 187.

²⁹ Isaac Newton làm chủ tịch Viện Hoàng Gia Anh từ 1703 đến 1727.

³⁰ Danh sách HĐ lấy từ <http://www.jstor.org>.

³¹ Rupert Hall. Sách đã dẫn. Page 179.

cấp phép tính vi-tích phân của Leibniz nhưng khi áp dụng và mở rộng đã mắc nhiều sai lầm nghiêm trọng.”³² Hall phê phán thái độ quá đáng của Leibniz trong bài viết này, khác với thái độ tương đối hòa nhã trong bài báo ký tên người vô danh vài năm trước.



Đây là hai trang đầu của bài phản ứng của Leibniz trên tờ Charta Volans (nguồn: Special Collections of King's College, Cambridge.)

Đến đây chúng ta thấy câu chuyện hoàn toàn bế tắc. Bên nào cũng cho mình là người phát minh ra phép tính vi-tích phân và cáo buộc bên kia là người “đạo” ý tưởng. Cho đến khi Leibniz qua đời năm 1716, câu chuyện vẫn chưa kết thúc, nó được chuyển qua tay thế hệ học trò của hai phía cho đến hơn nửa thế kỷ sau.

Ngày hôm nay chúng ta thừa nhận rằng cả hai, Newton và Leibniz, đều là những người cùng phát minh ra phép tính vi-tích phân. Newton xuất phát từ phép tính lượng thay đổi và vận tốc, từ đó đưa ra được phương pháp giải được các bài toán về tiếp tuyến, diện tích, độ dài đường cong...vân vân.

³² G.V. Coyne; S.J., M. Heller; J. Zyciński. Sách đã dẫn. Page 113.

Trong khi đó, tuy đến sau Newton khoảng 10 năm, nhưng Leibniz có lối đi riêng, phương pháp riêng. Leibniz khởi đi từ các hiệu số (differences), đưa đến khái niệm vi phân và tích phân, thông qua những ký hiệu tiện lợi cho các phép tính đại số, như dx , dy , và f . Từ đó hình thành phép tính vi-tích phân riêng của mình, tiện lợi và hữu hiệu.

Không cần biết ai là người phát minh ra phép tính vi-tích phân trước, các nhà Toán học Châu Âu đương thời và sau này đều tìm thấy ở đó mảnh đất màu mỡ cho sự phát triển và mở rộng nền Toán học đẹp đẽ và hữu ích trong nhiều chục năm sau.

Tài liệu tham khảo

1. Aczel, Amir D. *A Strange Wilderness: The Lives of The Great Mathematicians*. Sterling. New York. 2011.
2. Bell, Eric Temple. *Men of mathematics: The Lives and Achivements of the Great Mathematicians from Zeno to Poincaré*. New York: Simon and Schuster, 1986.
3. Boyer, Carl B., and Uta C. Merzbach. *A History of Mathematics*. 2nd ed. Hoboken, NJ: Wiley, 1991.
4. Brewster, David. *The Life of Isaac Newton*.
<https://archive.org/details/lifeofsirisaacne00brewrich>.
5. Coyne, George V.; Heller, Micheal; Zyciński, Jozef. *Newton's controversy with Leibniz over the invention of the calculus*. Vatican City. 1988.
6. Hall, A, Rupert. *Philosophers at War: The quarrel between Newton and Leibniz*. Cambridge University Press. 1980.
7. *Cours d'Histoire des mathématiques*. Université Louis Pasteur. Strasbourg. 2004 – 2005.
8. Nhiều tài liệu và hình ảnh lấy tên Internet.