Lorem Ipsum Dolor

ベイズの基本

@currypurin

目次


簡単な事後分布
$\pi(\theta|D)$
複雑な事後分布
$\pi(\theta|D)$
MCMC
どちらがいいかな？
自然な共役分布

ベイズの定理

事後分布　　尤度　　事前分布

$$\pi(\theta|D) = \frac{f(D|\theta)\pi(\theta)}{P(D)}$$

※

Ｐ（D）は、Dを得る確率で定数。

事後分布は尤度と事前分布の積に比例

$$\pi(\theta|D) = kf(D|\theta)\pi(\theta)$$

（kは定数）

ベイズ統計の基本公式

$$\pi(\theta|D) \propto f(D|\theta)\pi(\theta)$$

定数kって計算できる？

$$k = \frac{1}{P(D)} = \frac{1}{\int_\theta f(D|\theta)\pi(\theta)d\theta}$$

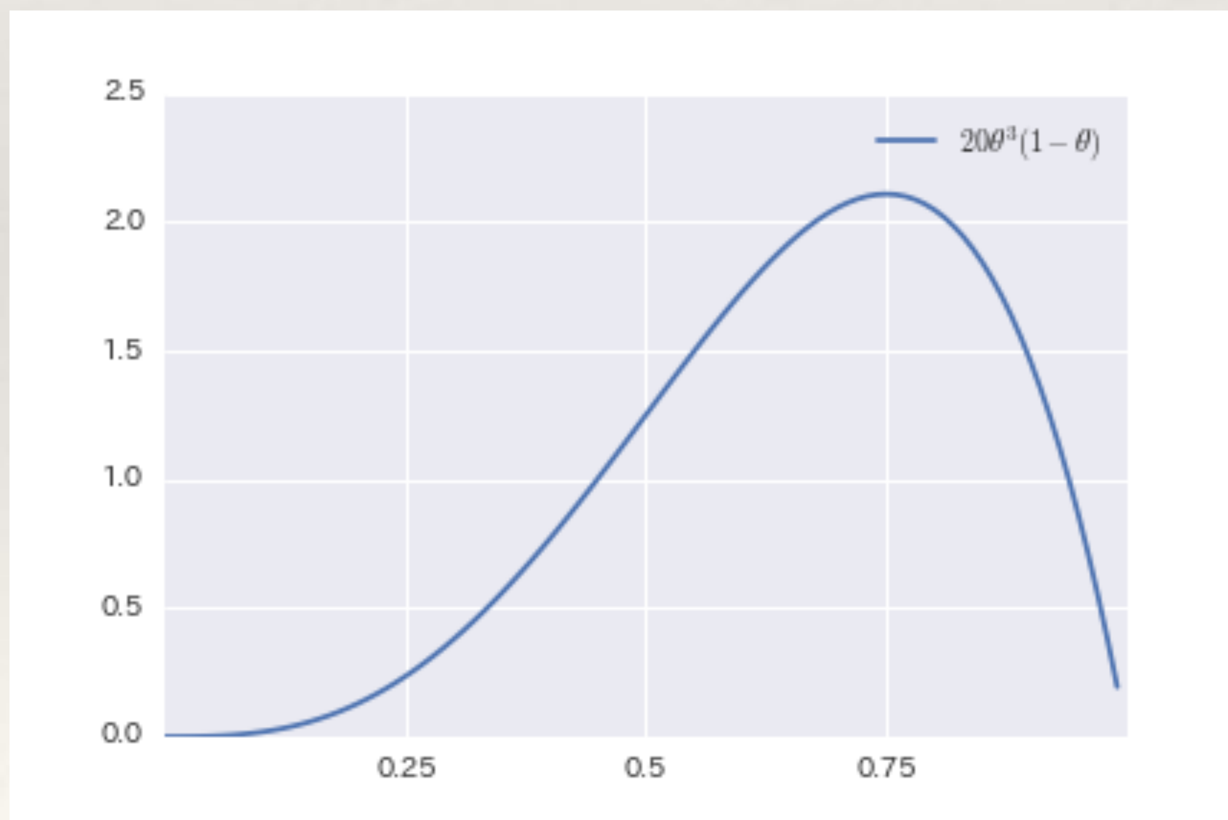
- kはDを得る確率の逆数
- この積分を求めるのは大変なので
- MCMC　又は　自然な共役分布を用いる

本編で　　LTではこちら

コイン投げ

- 表の出る確率が θ である１枚のコインがある。このコインを投げたとき１回目→表、２回目→表、３回目→表、４回目→裏と出たとする。このとき「表のでる確率 θ」の確率分布を求めよ。

答え

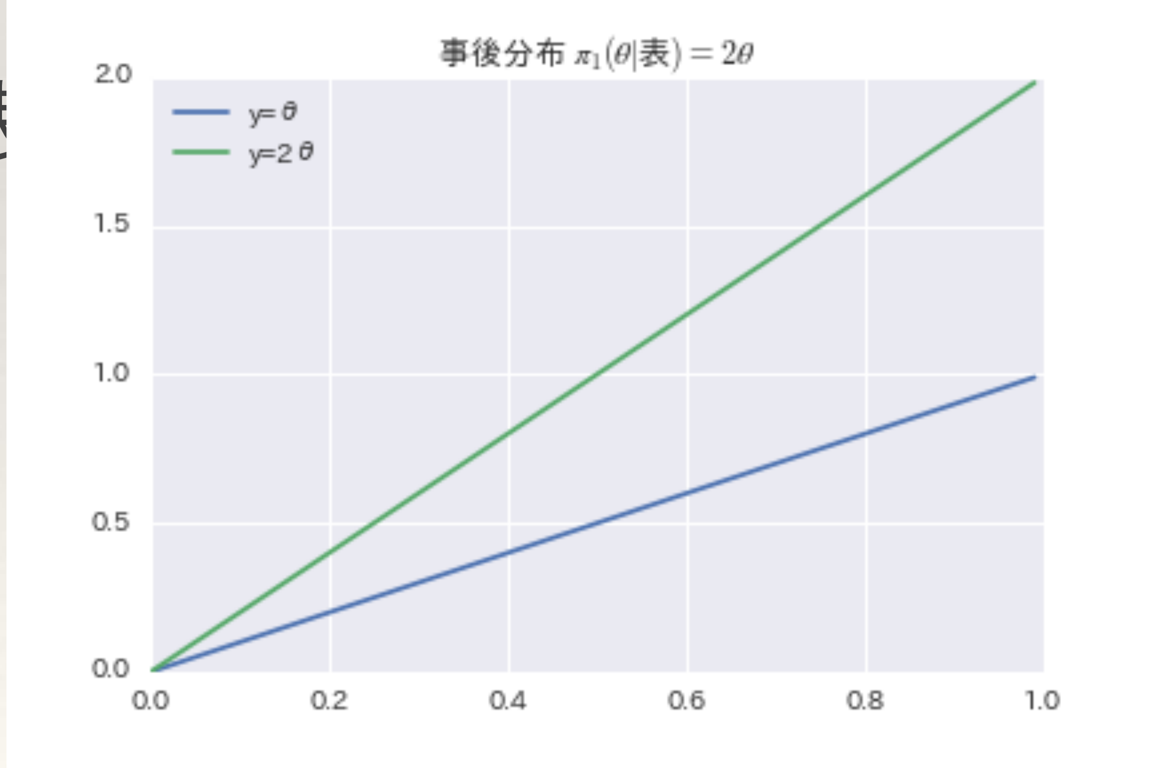


コイン投げ１回目(表)

$$\pi_1(\theta|\text{表}) = kf(\text{表}|\theta)\pi_0(\theta)$$

- 尤度　　：f(表| θ)= θ
- 事前分布：$\pi_0(\theta)=1$
- $\pi_2(\theta|$表
- k

$$\pi_1(\theta|\text{表}) = 2\theta$$

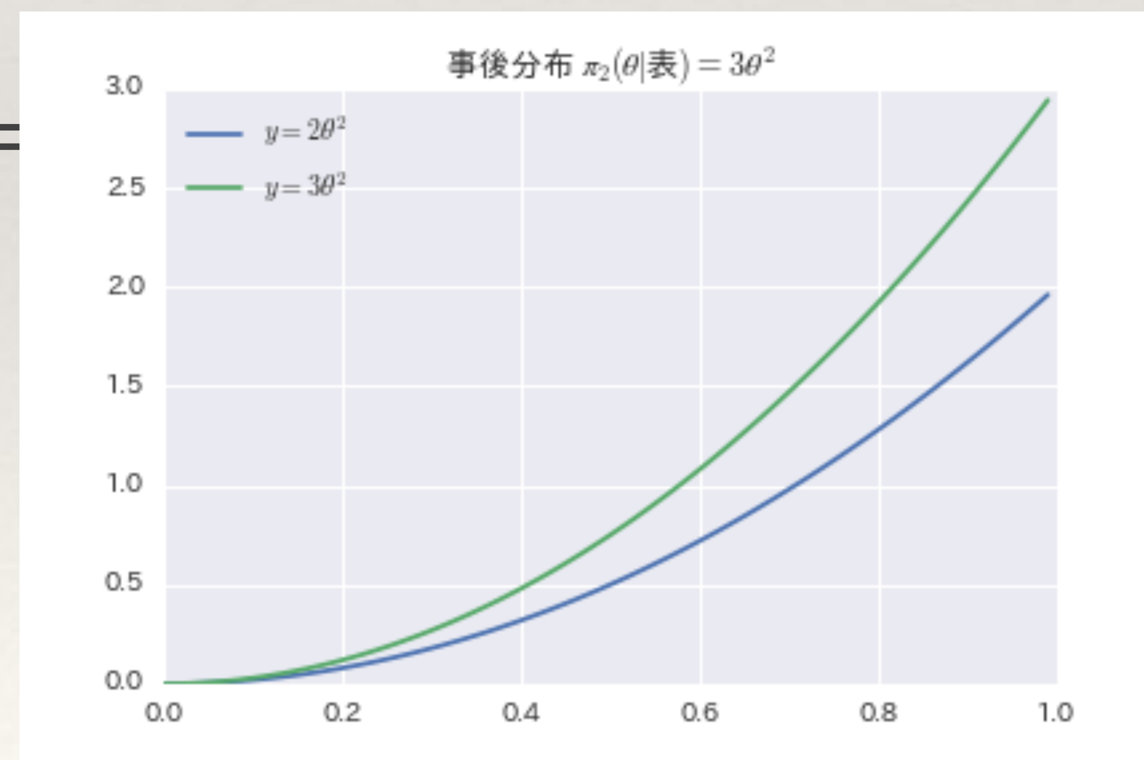


コイン投げ２回目(表→表)

$$\pi_2(\theta|\text{表}) = k f(\text{表}|\theta)\pi_1(\theta)$$

- 尤度　　　：$f(\text{表}|\theta) = \theta$
- 事前分布：$\pi_1(\theta) = 2\theta$
- $\pi_2(\theta|\text{表}) =$
- k

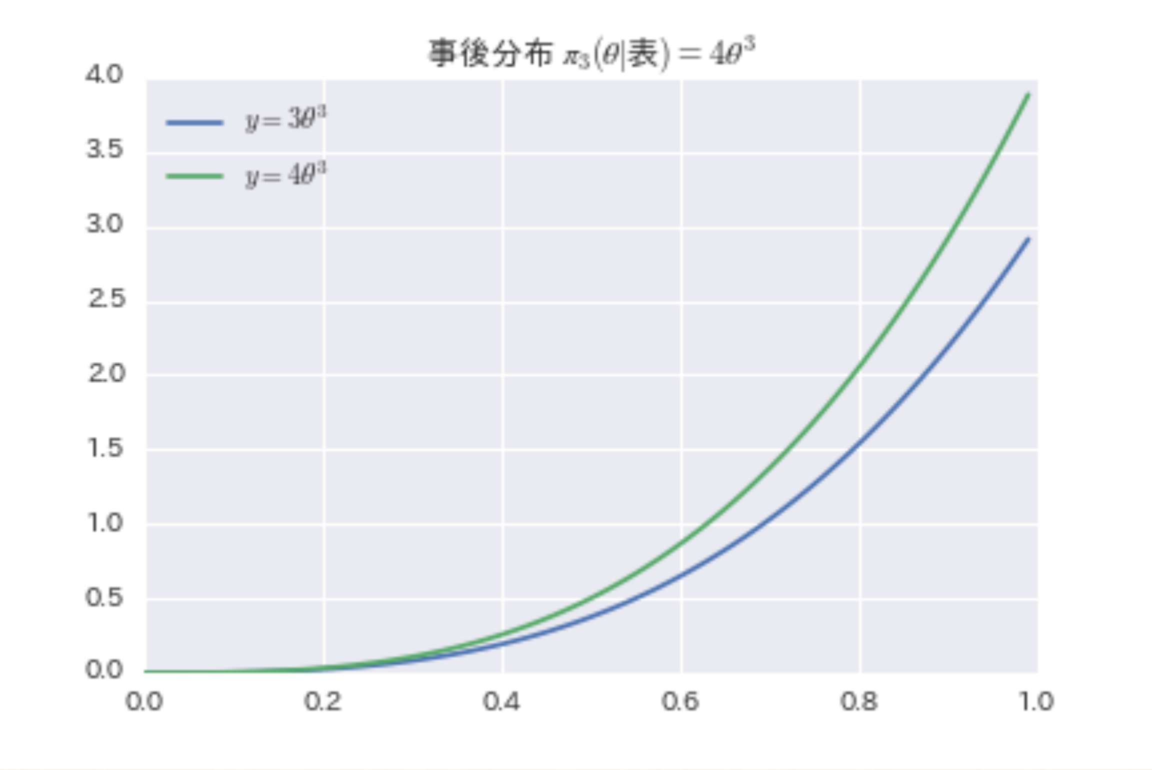
$$\pi_2(\theta|\text{表}) = 3\theta^2$$



コイン投げ３回目(表表→表)

$$\pi_3(\theta|\text{表}) = kf(\text{表}\,|\theta)\pi_2(\theta)$$

- 尤度　：f(表|θ)= θ
- 事前分布：π_2(θ)=3θ^2
- π_3(θ|表)=
- k :

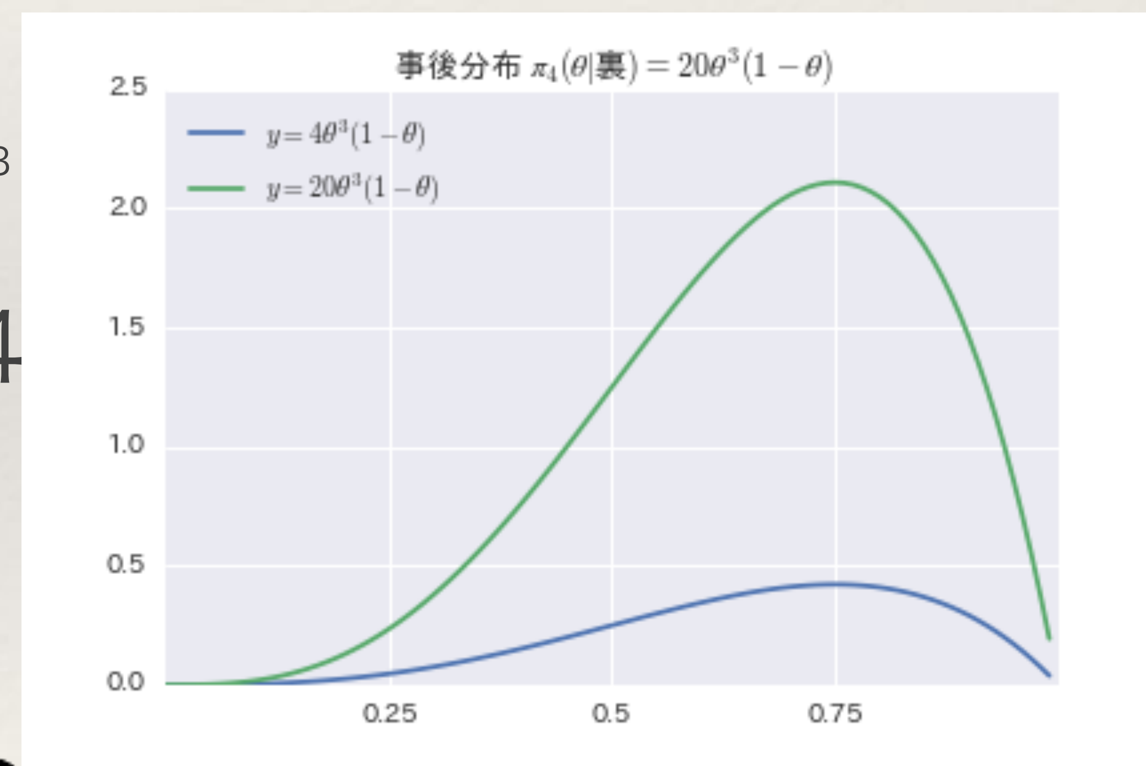


$$\pi_3(\theta|\text{表}) = 4\theta^3$$

コイン投げ４回目(表表表→裏)

$$\pi_4(\theta|\text{裏}) = kf(\text{裏}|\theta)\pi_3(\theta)$$

- 尤度　　：f(裏|θ)= 1-θ
- 事前分布：π_3
- π_4(θ|表)=k×4
- k



$$\pi_4(\theta|\text{裏}) = 20\theta^3(1-\theta)$$

コイン投げ(表表表裏)

$$\pi(\theta|\text{ 表表表裏}) = kf(\text{表表表裏 }|\theta)\pi_0(\theta)$$

- 尤度　　：f(表表表裏|θ)= θ^3 ×(1-θ)
- 事前分布：$\pi_0(\theta)$=1
- π(θ|表)=k×θ^3×(1-θ)
- k　　　：k=20

$$\pi(\theta|\text{ 表表表裏}) = 20\theta^3(1-\theta)$$

➡ kはどのように求めるか？

kの求め方

- １　積分を用いる
- ２　自然な共役分布を用いる

（参考）Pythonでの積分

- 代数計算ライブラリsympy を使用して計算が可能

```
In [47]: import sympy as sym
         z = sym.symbols("z") # zをsympyの変数にする
         f1 = z #　関数z1を定義
         f2 = 4/(1+z**2) #　関数f2を定義

In [45]: sym.integrate(f1,(z,0,1)) #　f1を0,1の範囲で積分

Out[45]: 1/2

In [48]: sym.integrate(f2,(z,0,1)) #　f4を0,1の範囲で積分

Out[48]: pi
```

$$\pi(\theta| \text{表表表裏}) = k\theta^3(1-\theta)$$
$$(0 \leq \theta \leq 1)$$

Pythonコード

```
θ = sym.symbols('θ')
f = (θ**3)*(1-θ)
sym.integrate(f,(θ,0,1)) #fを0,1の範囲で積分
```

```
1/20
```

➡ k=20

$$\pi(\theta|\text{表表表裏}) = k\theta^3(1-\theta)$$
$$(0 \le \theta \le 1)$$

Pythonコード

```
θ = sym.symbols('θ')
f = (θ**3)*(1-θ)
sym.integrate(f,(θ,0,1)) #fを0,1の範囲で積分
```

```
1/20
```

k=20

自然な共役分布を用いた計算