

2017/5/4 Pythonで体験するベイズ推論輪読会LT

---

# ベイズ統計の入口

@currypurin

---

---

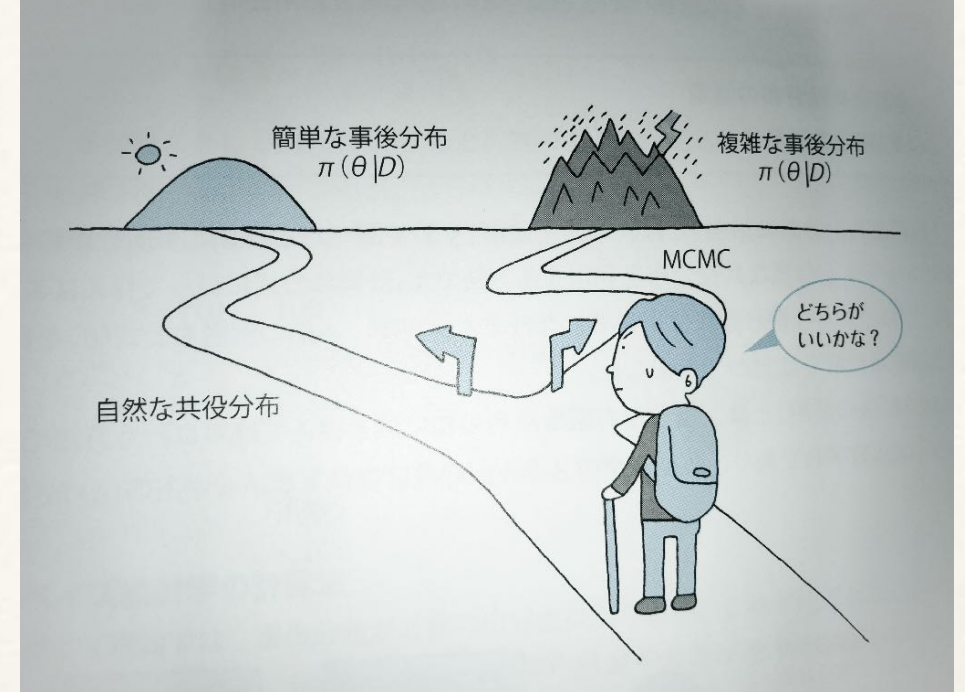
# 自己紹介

---

- ❖ @currypurin
- ❖ 輪読会をやっています
- ❖ ベイズ統計はじめました
- ❖ 今の状況は、次ページ



これらなわかるベイズ統計学P232より



- ❖ MCMCの道は厳しそうですが、PyMCが簡単にモデリングしてくれるようなので、このPythonで体験するベイズ推論で勉強します
- ❖ 今日は、左の道の「自然な共役分布」の話を少しだけ



# 目次

ベイズの定理の復習

コイン投げの問題をやってみる

まとめ

# 目次

ベイズの定理の復習

コイン投げの問題をやってみる

まとめ

# 分布に関するベイズの定理

事後分布

尤度

事前分布

$$\pi(\theta|D) = \frac{f(D|\theta)\pi(\theta)}{f(D)}$$

ベイズ統計では、 $\theta$  を確率変数として、  
その分布と考える

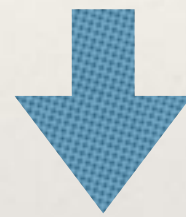
---

事後分布は尤度と事前分布の積に比例

---

$$\pi(\theta|D) = k f(D|\theta) \pi(\theta)$$

(kは定数)



ベイズ統計の基本公式

$$\pi(\theta|D) \propto f(D|\theta) \pi(\theta)$$



# 目次

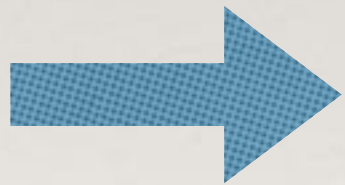
ベイズの定理の復習

コイン投げの問題をやってみる

まとめ

# コイン投げ

❖ 表の出る確率が  $\theta$  である 1 枚のコインがある。このコインを投げたとき 1 回目→表、2 回目→表、3 回目→表、4 回目→裏と出たとする。このとき「表のでのる確率  $\theta$ 」の確率分布を求めよ。



- ・ 表が出やすそうなコイン
- ・ 分布に関するベイズの定理を用いて計算してみる

## コイン投げ 1 回目(表)

$$\pi_1(\theta | \text{表}) = k f(\text{表} | \theta) \pi_0(\theta)$$

❖ 尤度 :  $f(\text{表} | \theta) = \theta$

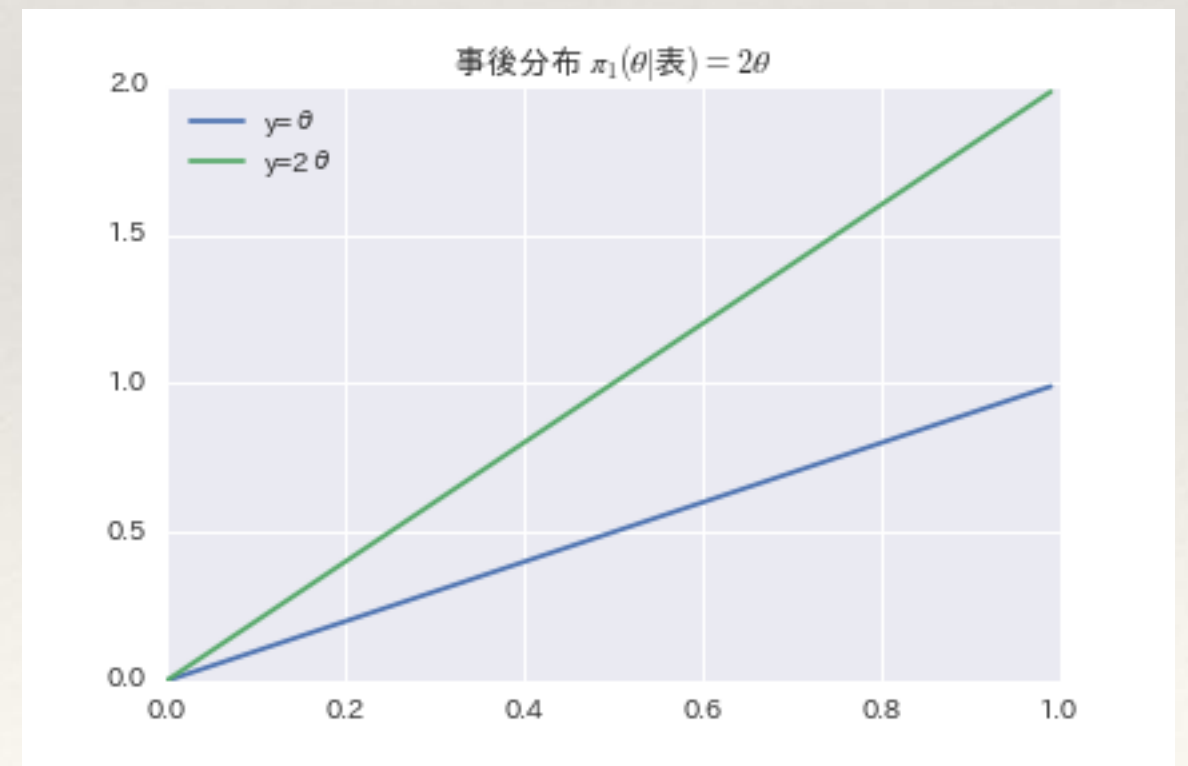
❖ 事前分布 :  $\pi_0(\theta) = 1$

❖  $\pi_1(\theta | \text{表}) = k \times \theta$

❖  $k$  :  $k=2$

※ $k$ は積分したら1という確率分布の条件から求める。

$$\pi_1(\theta | \text{表}) = 2\theta$$



コイン投げ 2 回目(表→表)

$$\pi_2(\theta | \text{表}) = k f(\text{表} | \theta) \pi_1(\theta)$$

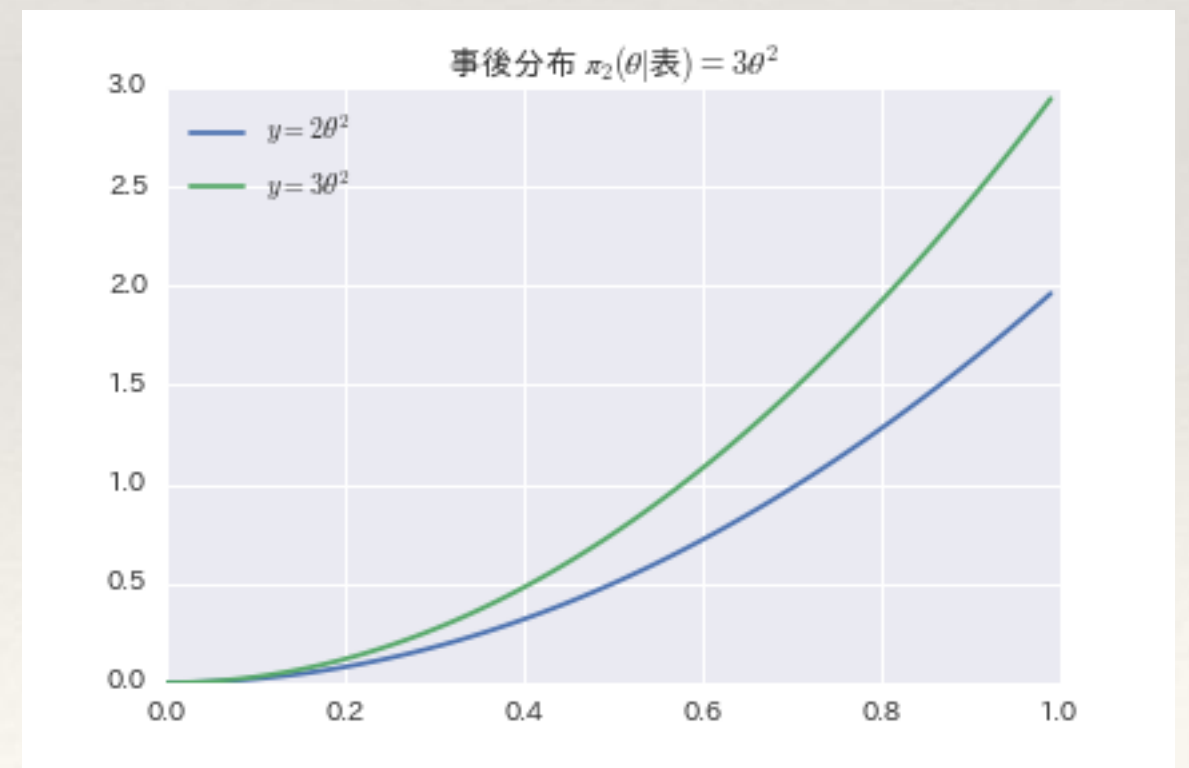
❖ 尤度 :  $f(\text{表} | \theta) = \theta$

❖ 事前分布 :  $\pi_1(\theta) = 2\theta$

❖  $\pi_2(\theta | \text{表}) = k \times 2\theta^2$

❖  $k$  :  $k = 3/2$

$$\pi_2(\theta | \text{表}) = 3\theta^2$$

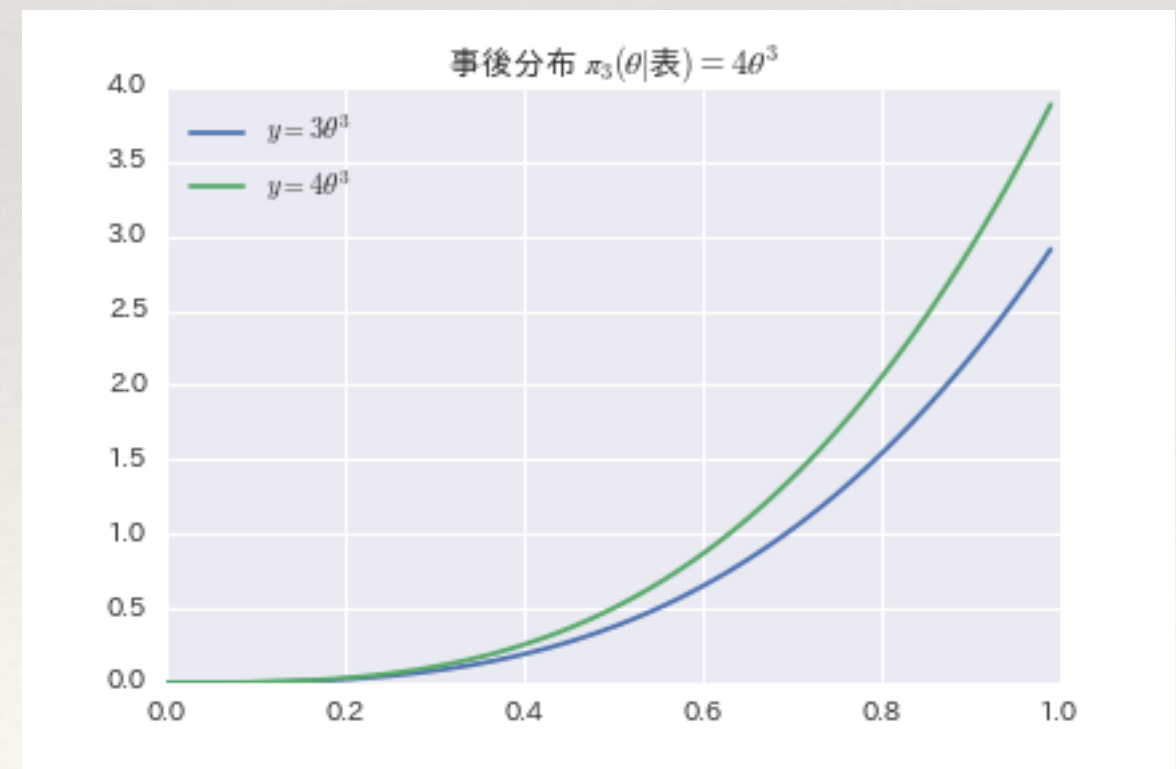


コイン投げ 3 回目(表表→表)

$$\pi_3(\theta | \text{表}) = k f(\text{表} | \theta) \pi_2(\theta)$$

- ❖ 尤度 :  $f(\text{表} | \theta) = \theta$
- ❖ 事前分布 :  $\pi_2(\theta) = 3\theta^2$
- ❖  $\pi_3(\theta | \text{表}) = k \times 3\theta^3$
- ❖  $k$  :  $k = 4/3$

$$\pi_3(\theta | \text{表}) = 4\theta^3$$



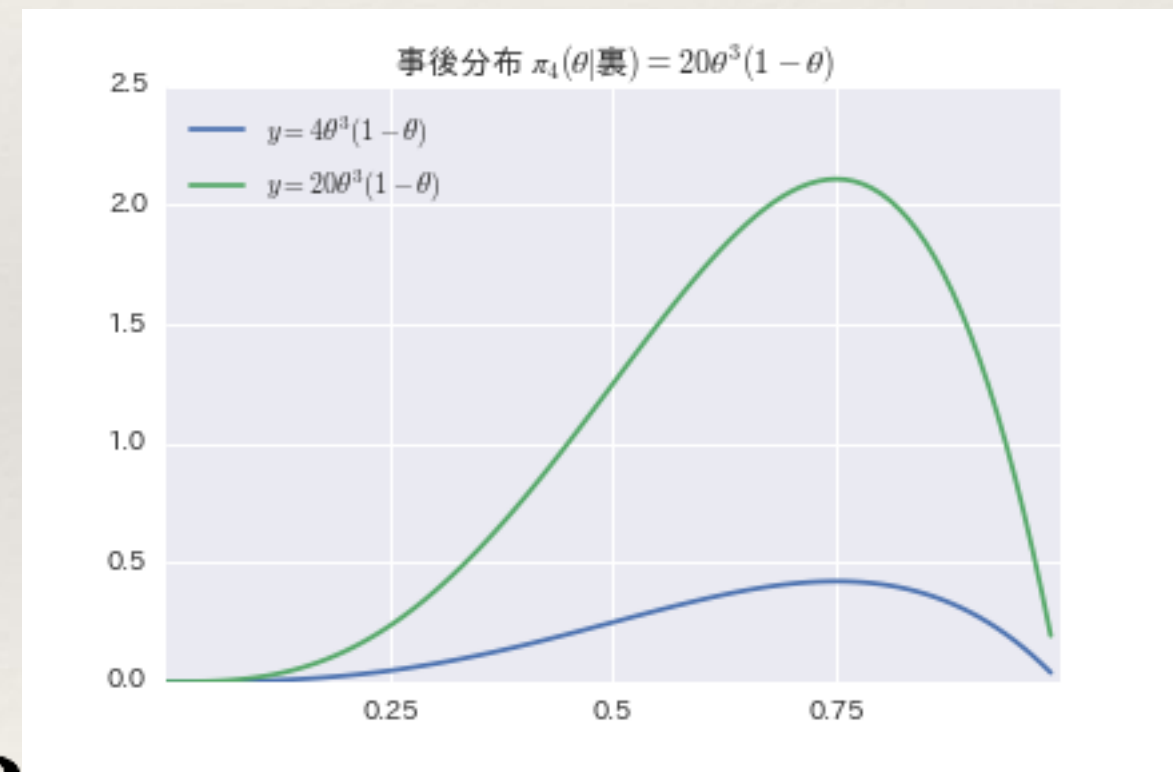


コイン投げ 4 回目 (表表表→裏)

$$\pi_4(\theta | \text{裏}) = k f(\text{裏} | \theta) \pi_3(\theta)$$

- ❖ 尤度 :  $f(\text{裏} | \theta) = 1 - \theta$
- ❖ 事前分布 :  $\pi_3(\theta) = 4\theta^3$
- ❖  $\pi_4(\theta | \text{表}) = k \times 4\theta^3 \times (1 - \theta)$
- ❖  $k$  :  $k = 5$

$$\pi_4(\theta | \text{裏}) = 20\theta^3(1 - \theta)$$



## コイン投げ(表表表裏)

$$\pi(\theta | \text{表表表裏}) = k f(\text{表表表裏} | \theta) \pi_0(\theta)$$

❖ 尤度 :  $f(\text{表表表裏} | \theta) = \theta^3 \times (1 - \theta)$

❖ 事前分布 :  $\pi_0(\theta) = 1$

❖  $\pi(\theta | \text{表表表裏}) = k \times \theta^3 \times (1 - \theta)$

❖  $k$  :  $k = 20$

$$\pi(\theta | \text{表表表裏}) = 20\theta^3(1 - \theta)$$

➡  $k$ はどのように求めるか？

---

## kの求め方

---

- ❖ 1 積分を用いる
- ❖ 2 自然な共役分布を用いる

## (参考) Pythonでの積分

- ❖ 代数計算ライブラリsympy を使用して計算が可能

### Pythonコード

```
In [47]: import sympy as sym
          z = sym.symbols("z") # zをsympyの変数にする
          f1 = z # 関数z1を定義
          f2 = 4/(1+z**2) # 関数f2を定義
```

```
In [45]: sym.integrate(f1,(z,0,1)) # f1を0,1の範囲で積分
```

```
Out[45]: 1/2
```

```
In [48]: sym.integrate(f2,(z,0,1)) # f4を0,1の範囲で積分
```

```
Out[48]: pi
```

$$\int_0^1 \theta^3 (1 - \theta) d\theta \text{ を計算}$$

## Pythonコード

```
θ = sym.symbols('θ')  
f = (θ**3)*(1-θ)  
sym.integrate(f,(θ,0,1)) #fを0,1の範囲で積分
```

1/20

➡ よって、積分すると1という条件からk=20



# 自然な共役分布を用いた計算 1

ベータ分布

$$Be(p, q) \equiv \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1} \\ (0 \leq x \leq 1)$$

ベータ関数

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

p, qが整数の時



$$B(p, q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$$

# 自然な共役分布を用いた計算2

事後分布： $k\theta^3(1-\theta)$

$$Be(p, q) = \frac{1}{B(p, q)} \theta^{p-1} (1-\theta)^{q-1}$$

- ❖ ベータ分布において、 $p=4, q=2$ とすると事後分布と比例する
- ❖  $B(4, 2)=20$
- ❖  $\therefore k=20$

# 目次

ベイズの定理の復習

コイン投げの問題をやってみる

まとめ

---

# 尤度と事前分布・事後分布の相性

---

- ❖ 二項分布（例：コイン投げ）に従う確率の分布は、ベータ分布を用いると簡単に扱うことができる。

# 尤度と事前分布・事後分布の相性

尤度関数

事前分布、事後分布

二項分布

ベータ分布

正規分布

正規分布

正規分布

逆ガンマ分布

ポアソン分布

ガンマ分布