

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики

# Отчёт о выполнении лабораторной работы

## 3.6.1

### Спектральный анализ электрических сигналов

Автор:  
Макаров Лев Евгеньевич  
Б04-306

# 1 Введение

## Цель работы:

1. изучить спектры сигналов различной формы и влияние параметров сигнала на вид соответствующих спектров
2. проверить справедливость соотношений неопределённостей
3. познакомиться с работой спектральных фильтров на примере RC-цепочки

## В работе используются:

- генератор сигналов произвольной формы
- цифровой USB-осциллограф, подключённый к персональному компьютеру

# 2 Теоретические сведения

## Разложение сложных сигналов на периодические колебания

Представление периодического сигнала в виде суммы гармонических сигналов называется разложением в ряд Фурье.

Пусть заданная функция  $f(t)$  периодически повторяется с частотой  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения. Ее разложение в ряд Фурье имеет вид

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\Omega_1 t) + b_n \sin(n\Omega_1 t)] \quad (1)$$

Здесь  $\frac{a_0}{2}$  - среднее значение функции  $f(t)$ ,

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \cos(n\Omega_1 t) dt, \quad (2)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{t_1}^{t_1+T} f(t) \sin(n\Omega_1 t) dt. \quad (3)$$

Рассмотрим периодические функции, которые исследуются в нашей работе.

1. **Периодическая последовательность прямоугольных импульсов** (рис. 1) с амплитудой  $V_0$ , длительностью  $\tau$ , частотой повторения  $\Omega_1 = \frac{2\pi}{T}$ , где  $T$  - период повторения импульсов. Найдем коэффициенты разложения ряда Фурье:

$$\frac{a_0}{2} = V_0 \frac{\tau}{T},$$
$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(n\Omega_1 t) dt = 2V_0 \frac{\tau}{T} \frac{\sin(n\Omega_1 \frac{\tau}{2})}{n\Omega_1 \frac{\tau}{2}} \sim \frac{\sin x}{x}. \quad (4)$$

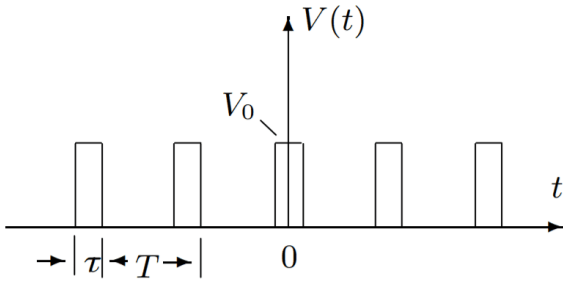


Рис. 1: Прямоугольные импульсы

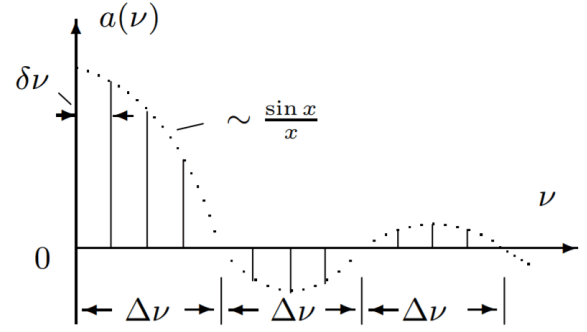


Рис. 2: Спектр последовательности прямоугольных импульсов

Поскольку наша функция четная, все коэффициенты синусоидальных гармоник  $b_n = 0$ . Спектр  $a_n$  последовательности прямоугольных импульсов представлен на рис. 2 (изображен случай, когда  $T$  кратно  $\tau$ ).

Назовем *шириной спектра*  $\Delta\omega$  расстояние от главного максимума ( $\omega = 0$ ) до первого нуля огибающей, возникающего при  $n = \frac{2\pi}{\tau\Omega_1}$ . При этом

$$\Delta\omega\tau \simeq 2\pi$$

или

$$\Delta\nu\Delta t \simeq 1 \quad (5)$$

Полученное соотношение взаимной связи интервалов  $\Delta\nu$  и  $\Delta t$  является частным случаем соотношения неопределенности в квантовой механике.

**2. Периодическая последовательность цугов** гармонического колебания  $V_0 \cos(\omega_0 t)$  с длительностью цуга  $\tau$  и периодом повторения  $T$  (рис. 3).

Функция  $f(t)$  снова является четной относительно  $t = 0$ . Коэффициент при  $n$ -й гармонике равен

$$a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} V_0 \cos(\omega_0 t) \cos(n\Omega_1 t) dt = V_0 \frac{\tau}{T} \left( \frac{\sin[(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 - n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} + \frac{\sin[(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}]}{(\omega_0 + n\Omega_1)\frac{\tau}{2}} \right) \quad (6)$$

Зависимость для случая, когда  $\frac{T}{\tau}$  равно целому числу, представлена на рис. 4. Сравнивая спектр последовательности прямоугольных импульсов и цугов мы видим, что они аналогичны, но их максимумы сдвинуты по частоте на величину  $\omega_0$ .

**3. Амплитудно-модулированные колебания.** Рассмотрим гармонические колебания высокой частоты  $\omega_0$ , амплитуда которых медленно меняется по гармоническому закону с частотой  $\Omega$  ( $\Omega \ll \omega_0$ ) (рис. 5):

$$f(t) = A_0[1 + m \cos \Omega t] \cos \omega_0 t \quad (7)$$

Коэффициент  $m$  называют **глубиной модуляции**. При  $m < 1$  амплитуда колебаний меняется от минимальной  $A_{min} = A_0(1 - m)$  до максимальной  $A_{max} = A_0(1 + m)$ . Глубина модуляции может быть представлена в виде

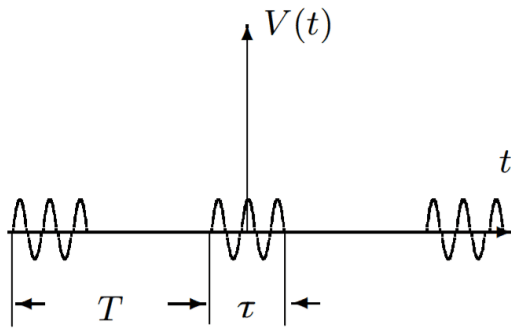


Рис. 3: Последовательность цугов

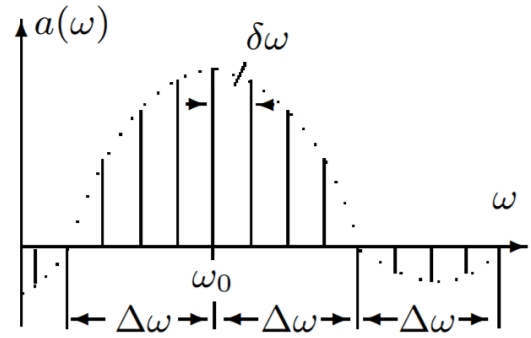


Рис. 4: Спектр последовательности цугов

$$m = \frac{A_{max} - A_{min}}{A_{max} + A_{min}} \quad (8)$$

Простым тригонометрическим преобразованием можно найти спектр амплитудно - модулированных колебаний:

$$f(t) = A_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{A_0 m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \quad (9)$$

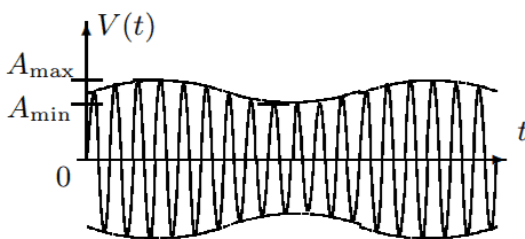


Рис. 5: Модулированные гармонические колебания

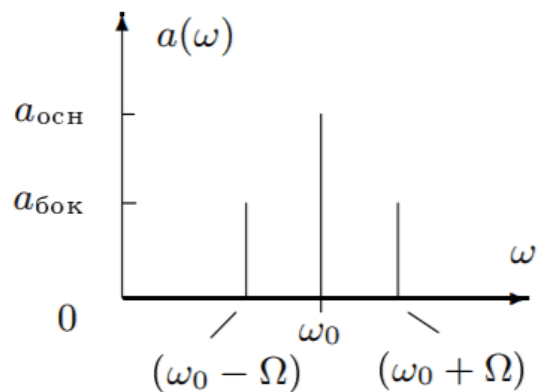


Рис. 6: Спектр модулированных гармонических колебаний

Спектр таких колебаний содержит три составляющих основную компоненту и две боковых (рис. 6). Первое слагаемое в правой части представляет собой исходное немодулированное колебание с основной (несущей) частотой  $\omega_0$  и амплитудой  $a = A_0$ . Второе и третье слагаемые соответствуют новым гармоническим колебаниям с частотами  $\omega_0 + \Omega$  и  $\omega_0 - \Omega$ . Амплитуды этих двух колебаний одинаковы и составляют  $\frac{m}{2}$  от амплитуды немодулированного колебания:  $a = \frac{A_0 m}{2}$ . Начальные фазы всех трех колебаний одинаковы.

### 3 Экспериментальная установка

В работе изучаются спектры периодических электрических сигналов различной формы (последовательности прямоугольных импульсов и цугов, а также амплитудно- и фазо-модулированных

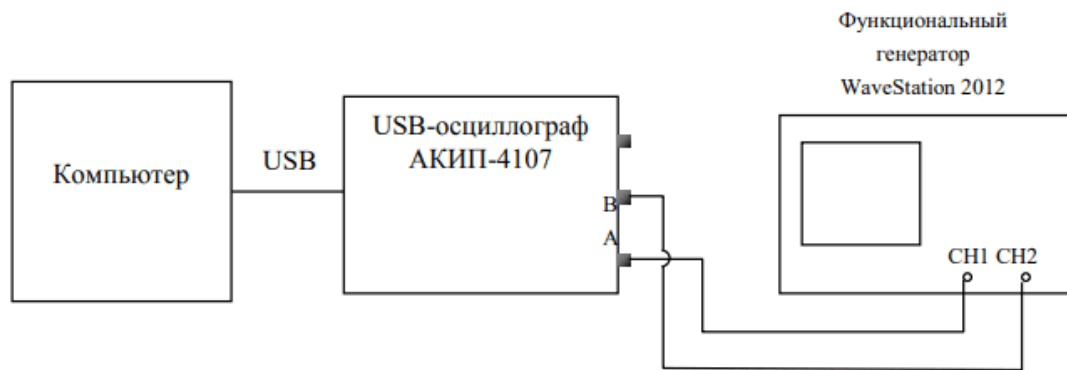


Рис. 7: Схема экспериментальной установки

гармонических колебаний). Спектры этих сигналов наблюдаются с помощью спектроанализатора, входящего в состав USB-осциллографа и сравниваются с рассчитанными теоретически. Схема установки изображена на рис. 7

Функциональный генератор WaveStation 2012 позволяет сформировать два различных электрических сигнала, которые выводятся на два независимых канала – "CH1" и "CH2". Сигнал с канала "CH1" подается на вход "А" а сигнал с канала "CH2" – на вход "В" USB-осциллографа. Затем эти сигналы подаются на вход компьютера через USB-соединение. При работе USB-осциллографа в режиме осциллографа, на экране компьютера можно наблюдать каждый из сигналов в отдельности, а также их произведение. В режиме спектроанализатора можно наблюдать спектры этих сигналов. При включении функционального генератора, на его экране отображается информация о параметрах электрического сигнала. На рис.8 показаны области на экране генератора, в которых отображены следующие данные:

А – форма или тип сигнала и номер выходного канала; Б – форма и параметры выходного сигнала; В – область установки параметров выходного сигнала; Г – форма или тип сигнала; Д – экранное меню для установки параметров сигнала.

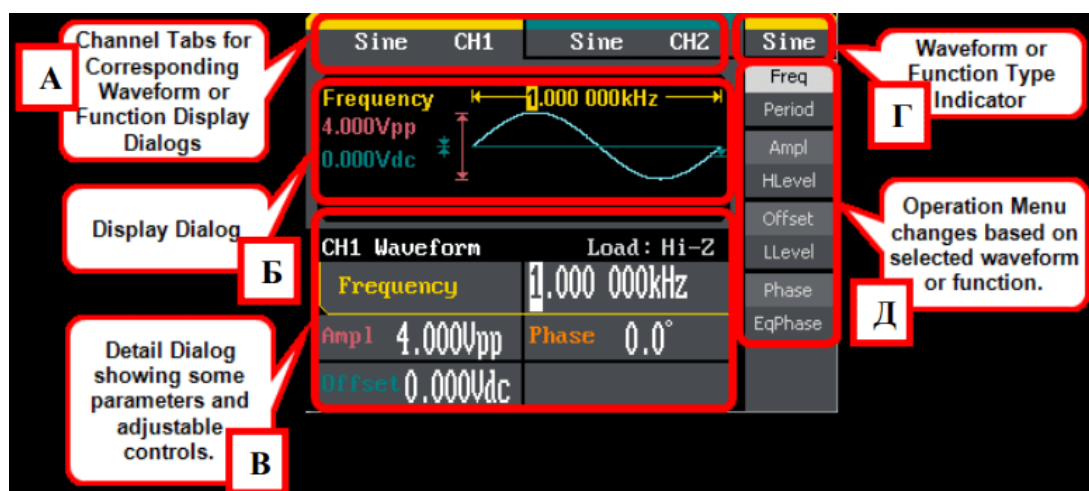


Рис. 8: Экран генератора

Передняя панель функционального генератора показана на рис.9. 1 – кнопка включения; 2 – USB-разъем; 3 – экран; 4 – кнопки экранного меню; 5 – кнопки выбора типа сигналов; 6 – цифровая панель; 7 - функциональные кнопки; 8 – разъемы с кнопками включения (выключения) выходных сигналов 1-го и 2-го каналов; 9 – кнопки перемещения; 10 – подстроечный регулятор.



Рис. 9: Передняя панель функционального генератора

## 4 Результаты измерений и обработка данных

1. Ознакомимся с устройством панелей приборов. Изучим расположение основных кнопок и ручек настройки.
2. Подключим выход генератора к каналу осциллографа и включим приборы в сеть.

### А. Исследование спектра периодической последовательности прямоугольных импульсов и проверка соотношений неопределённостей

3. Настроим генерацию прямоугольных импульсов. Частота повторения  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$  (период  $T = 1/\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ мс}$ ) и длительность импульса  $\tau = T/20 = 50 \text{ мкс}$ .
4. Получим устойчивую картину сигналов на экране осциллографа.
5. Получим на экране спектр сигнала.
6. Изменяя на генераторе параметры сигнала, наблюдаем как изменяется спектр при изменении параметров сигнала. Спектры представлены на рис. 10, 11, 12

Как видно при увеличении частоты спектр растягивается по горизонтали.

При увеличении периода повторения спектр растягивается по вертикали.

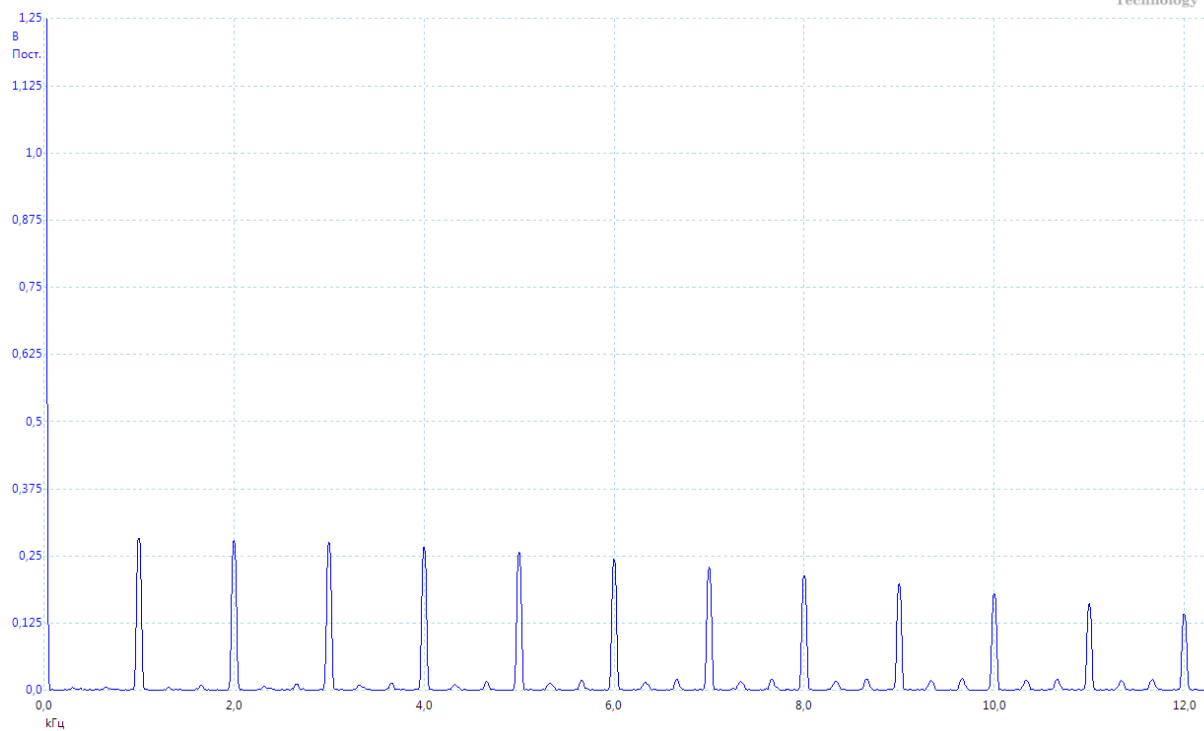


Рис. 10: Спектр сигнала при  $\nu_{\text{пост}} = 1$  кГц,  $\tau = 50$  мкс

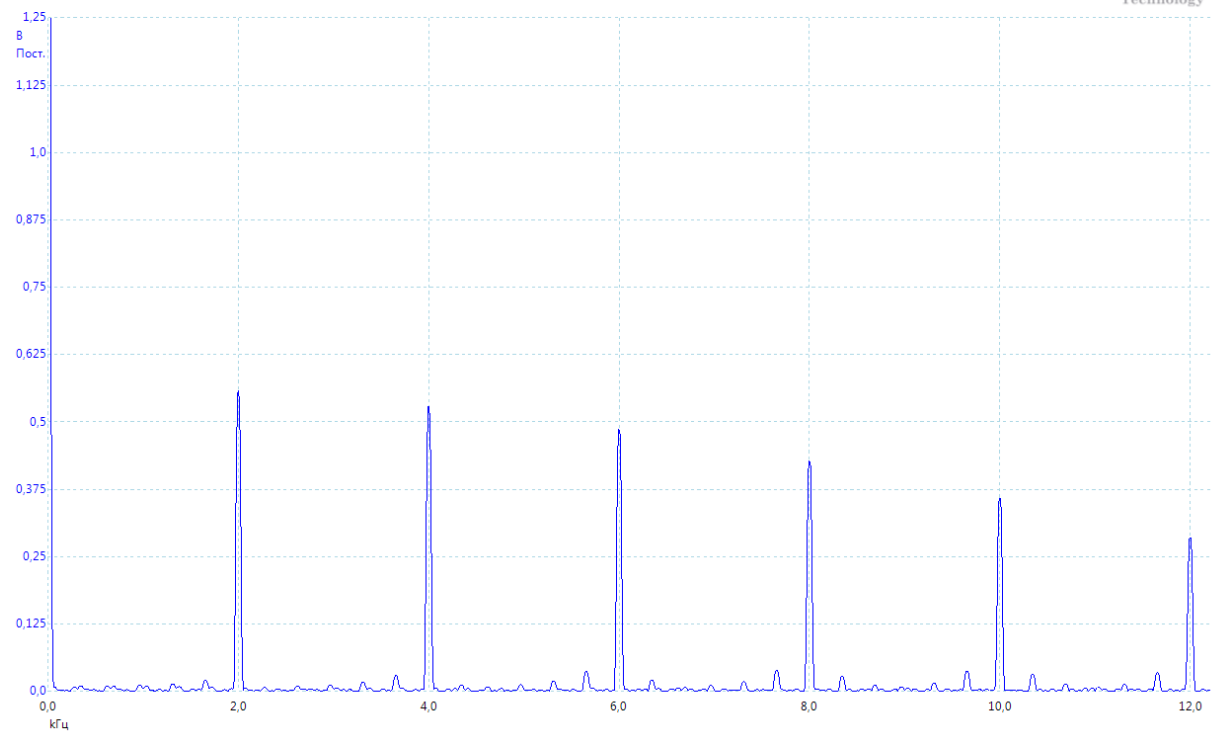


Рис. 11: Спектр сигнала при  $\nu_{\text{пост}} = 2$  кГц,  $\tau = 50$  мкс

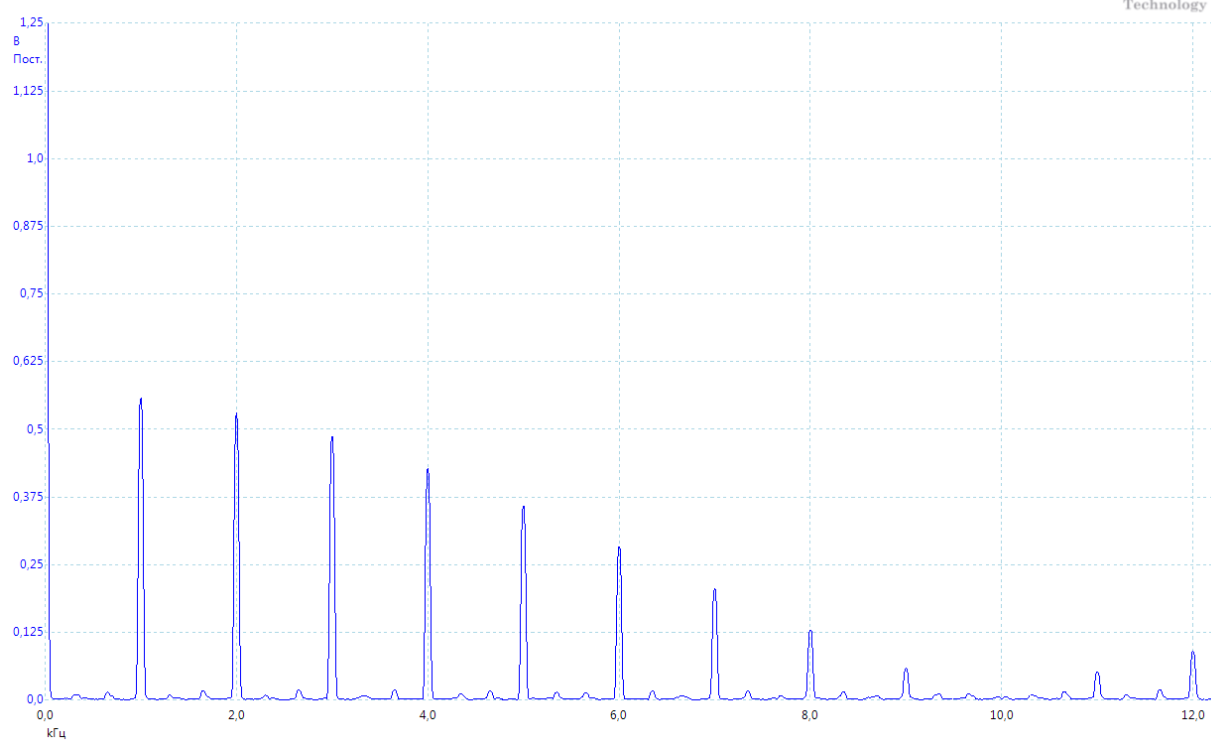


Рис. 12: Спектр сигнала при  $\nu_{\text{повт}} = 1 \text{ кГц}$ ,  $\tau = 100 \text{ мкс}$



7. При фиксированных параметрах  $\nu_{\text{повт}} = 1$  кГц,  $\tau = 50$  мкс измерим частоты и амплитуды нескольких спектральных компонент. Результаты измерений занесем в таблицу 1

Таблица 1: Измерение амплитуды и частоты гармоник спектра

$n$	$a_n$ , кГц	$a_n/a_1$	$\nu_n$ , мВ
1	1,001	1,0	277,6
2	2,003	2,0	276,0
3	2,995	3,0	269,8
4	4,008	4,0	260,4
5	5,000	5,0	254,1
6	6,002	6,0	243,1
7	7,004	7,0	225,8
8	7,996	8,0	211,7

Как видно, частота гармоники совпадает с  $\nu_{\text{повт}}$ , а остальные гармоники кратны первой. Значит экспериментально теоретическая зависимость выполняется.

8. Измерим зависимость полной ширины спектра  $\Delta\nu$  от длительности импульса при фиксированном периоде повторения. Результаты измерений запишем в таблицу 2.

Таблица 2: Зависимость ширины спектра от длительности импульса

$\tau$ , мкс	20	38	56	74	92	110	128	146	164	182	200
$\Delta\nu$ , кГц	46,00	25,00	17,33	13,36	11,11	9,01	8,00	7,00	6,03	5,53	4,98
$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

9. Измерим зависимость расстояния между гармониками  $\delta\nu$  спектра от периода повторения  $T$  при  $\tau = 100$  мкс. Результаты измерений запишем в таблицу 3.

Таблица 3: Зависимость расстояния между гармониками от периода повторения

$n$	$T$ , мс	$\nu$ , кГц	$T/\tau$	$\delta\nu$ , кГц
1	0,2	5,000	2	5,007
2	0,800	0,125	8	1,252
3	1,400	0,071	14	0,715
4	2,000	0,050	20	0,501
5	2,600	0,038	26	0,385
6	3,200	0,031	32	0,313
7	3,800	0,026	38	0,264
8	4,400	0,023	44	0,226
9	5,000	0,020	50	0,203

10. Построим графики зависимостей  $\Delta\nu(1/\tau)$  и  $\delta\nu(1/T)$ . Зависимость должна получиться линейная. Графики изобразим на рис. 13 и 14 соответственно.

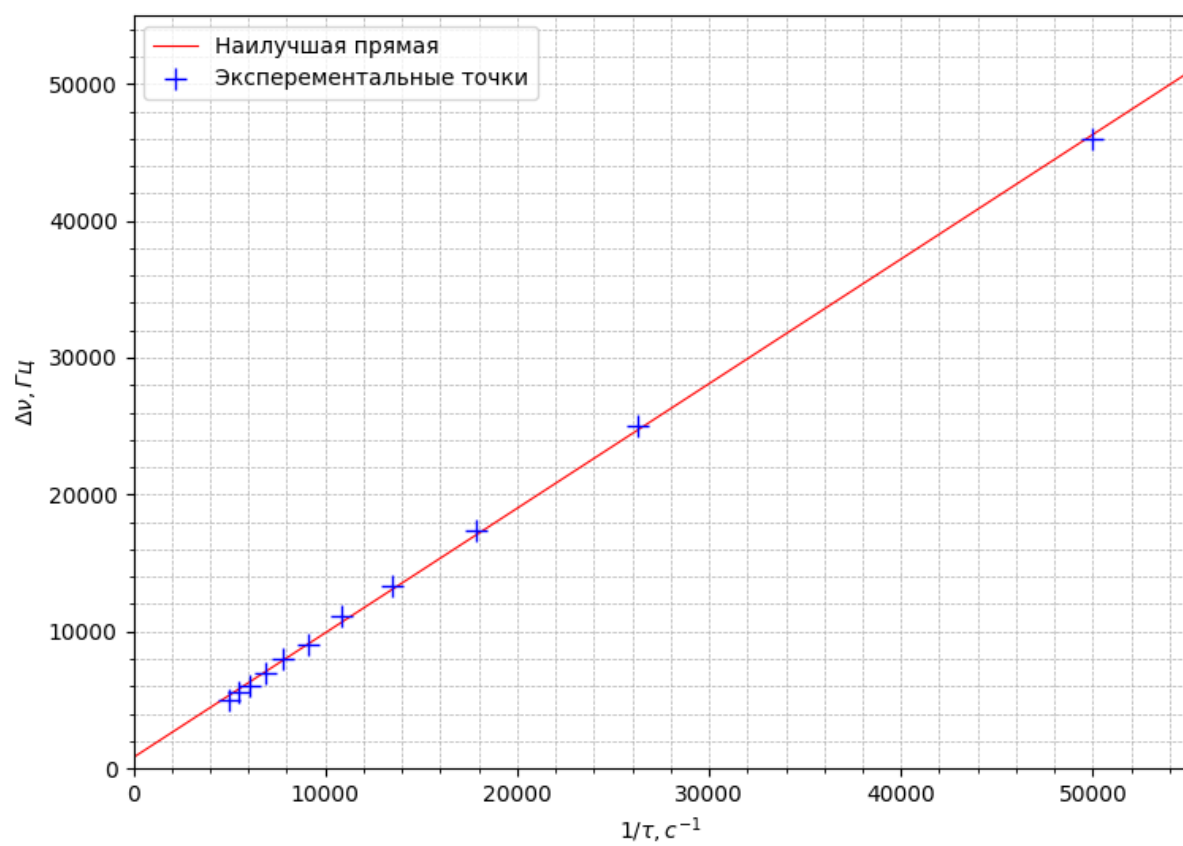


Рис. 13: Зависимость  $\Delta\nu(1/\tau)$

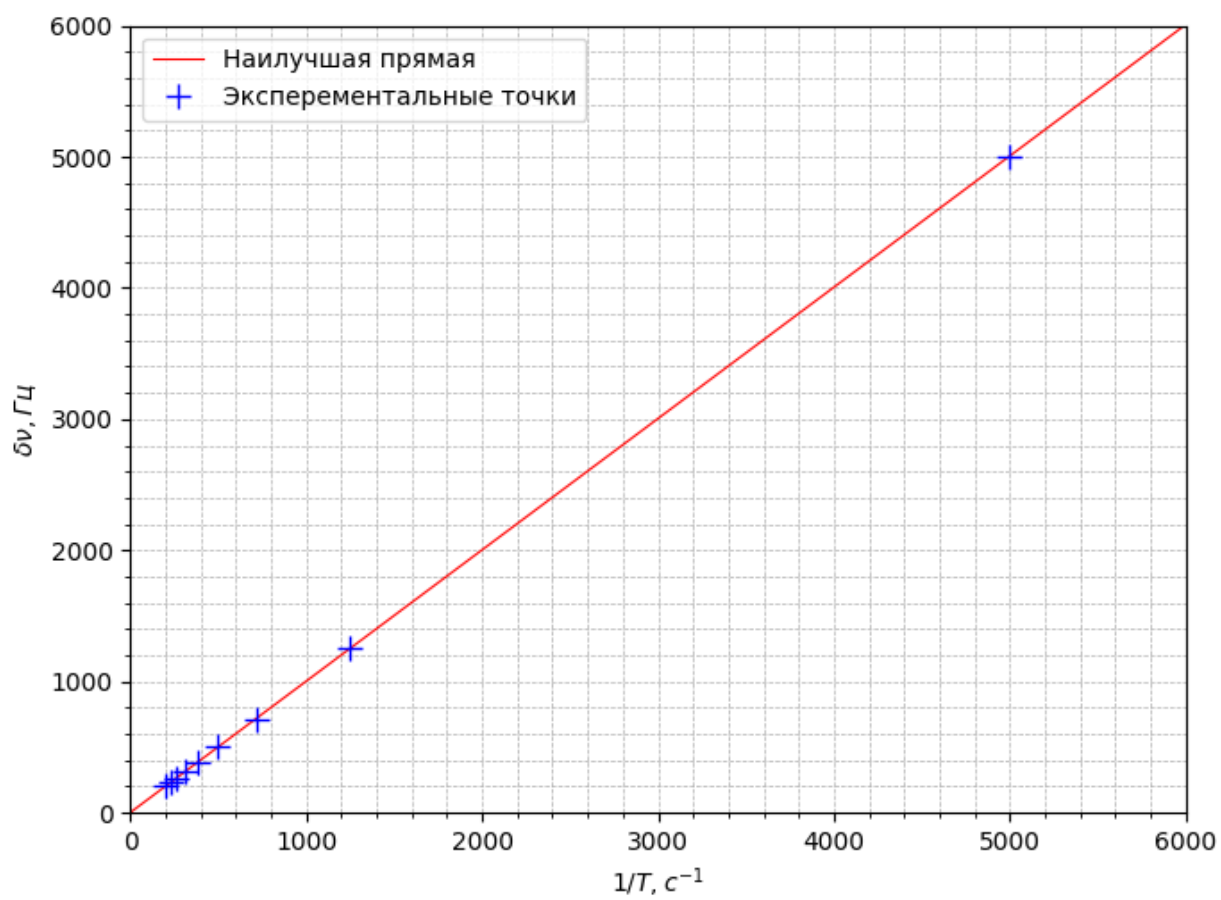


Рис. 14: Зависимость  $\delta\nu(1/T)$

## Б. Наблюдение спектра периодической последовательности цугов

11. Установим генератор в режим подачи синусоидальных сигналов с частотой  $\nu_0 = 50$  кГц, период повторения  $T = 1$  мс, число периодов синусоиды  $N = 5$ . Получим устойчивую картину сигнала.
12. Получим спектр сигнала на экране.
13. Изменяя параметры  $\nu_0$ ,  $T$ ,  $N$  наблюдаем как изменяется вид спектра. Спектры изображены на рис. 15, 16, 17.

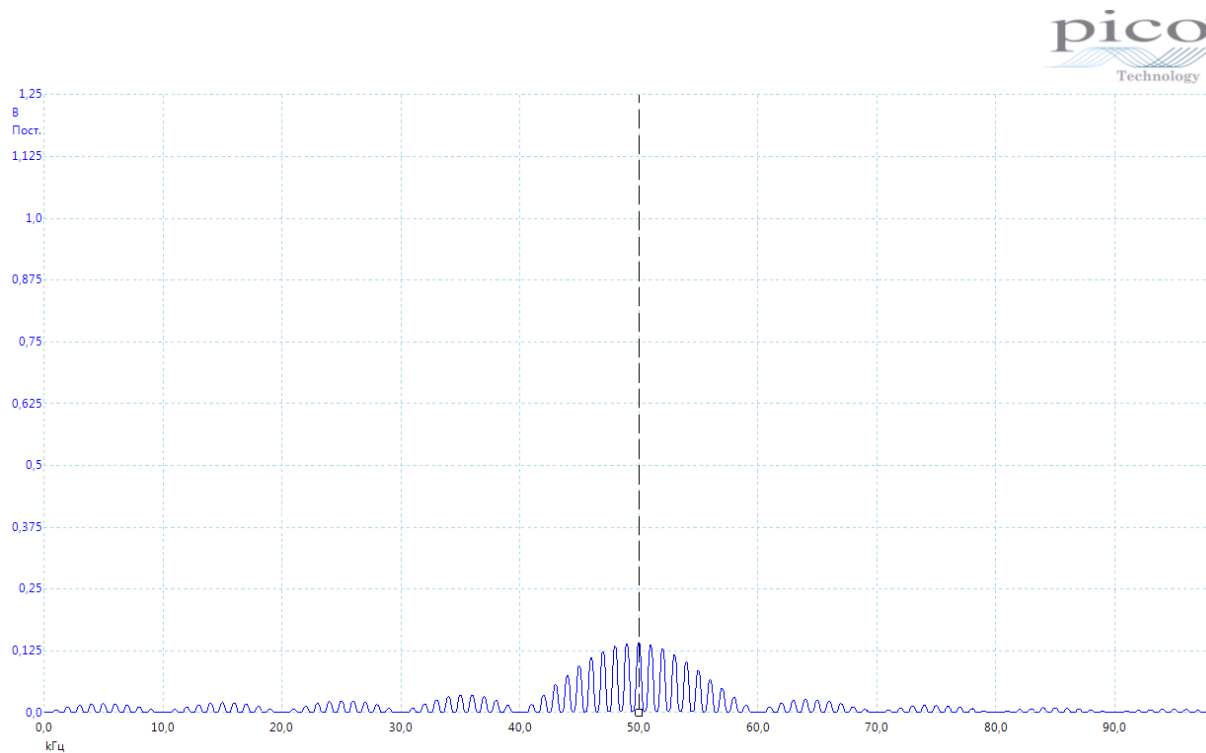


Рис. 15: Спектр сигнала при  $\nu_{\text{ном}} = 50$  кГц,  $T = 1$  мс,  $N = 5$

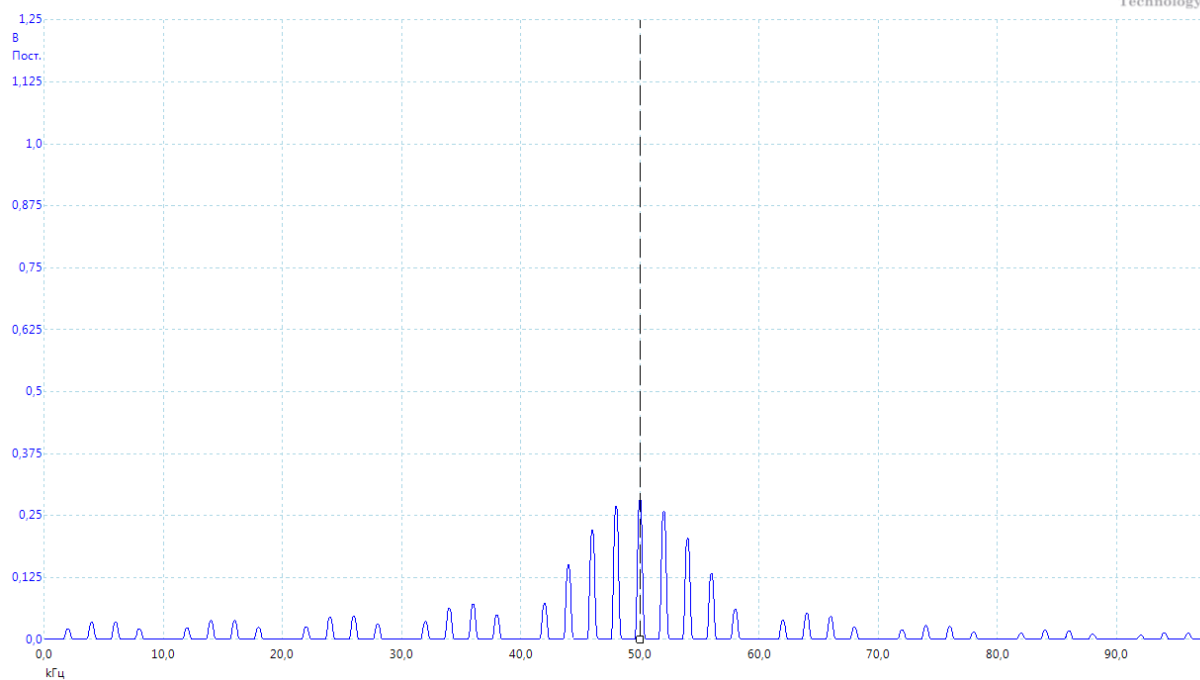


Рис. 16: Спектр сигнала при  $\nu_{\text{порт}} = 50$  кГц,  $T = 0,5$  мс,  $N = 5$

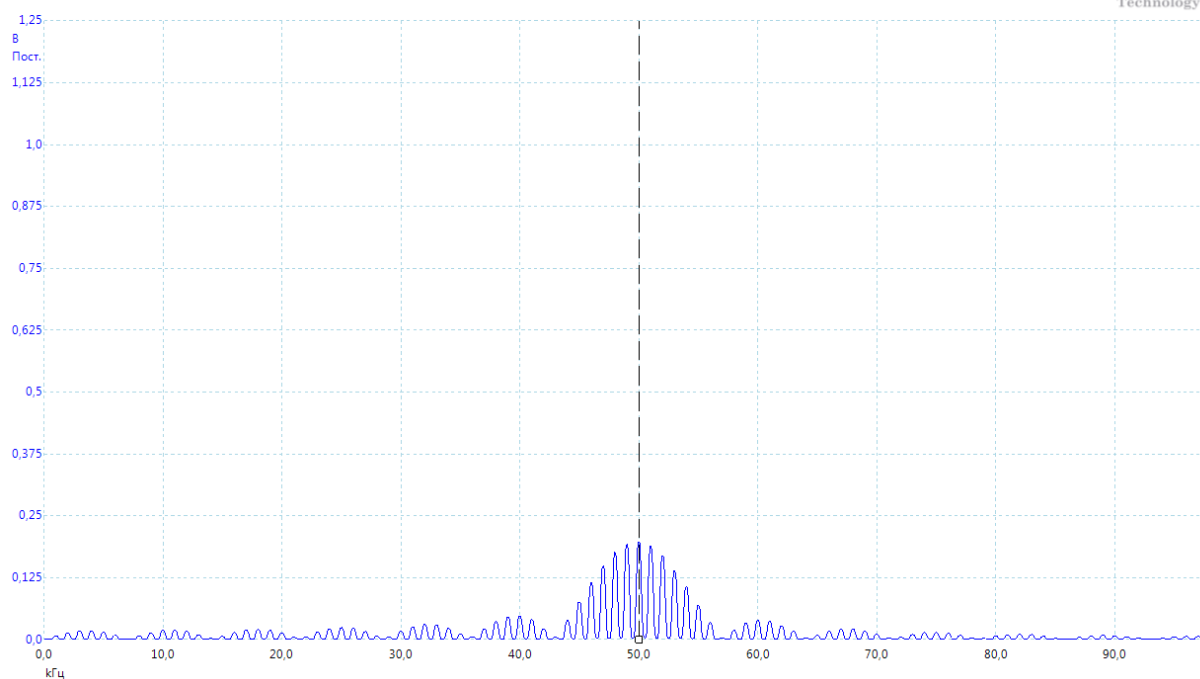


Рис. 17: Спектр сигнала при  $\nu_{\text{порт}} = 50$  кГц,  $T = 1$  мс,  $N = 8$

14. При этих параметрах сигнала измерим положение центра спектра, его ширину и расстояние между гармониками. Результаты измерений запишем в таблицу 4.

Таблица 4: Измеренные характеристики спектра для разных параметров

спектр	$a_c$ , мВ	$\Delta\nu$ , кГц	$\delta\nu$ , кГц	$\delta\nu \cdot T$
рис. 15	139,6	9,961	1,008	1,008
рис. 16	277,6	9,961	2,004	1,002
рис. 17	224,3	5,912	1,004	1,004

Убедимся в справедливости теоремы смещения и соотношений неопределенностей.

$$\Delta\omega \cdot \Delta t \sim 2\pi \implies 2\pi\delta\nu \cdot T \sim 2\pi$$

$$\delta\nu \cdot T \sim 1$$

Посчитаем и занесем в таблицу 4. Как видно соотношение неопределенности выполняется.

#### 4.1 В. Наблюдение спектра периодической последовательности гауссианов

Данный раздел работы не выполнялся.

#### 4.2 Г. Исследование спектра амплитудно-модулированного сигнала

19. Установим на генераторе режим модулированного по амплитуде синусоидального сигнала с параметрами  $\nu_0 = 50$  кГц, частота модуляции  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц, глубина модуляции 50% ( $m = 0,5$ ). Получим на экране осциллографа устойчивую картину сигнала.
20. Измерим максимальную и минимальную амплитуды сигнала:  $A_{\text{max}} = 1,232$  В,  $A_{\text{min}} = 0,4256$  В.

$$\frac{A_{\text{max}} - A_{\text{min}}}{A_{\text{max}} + A_{\text{min}}} = 0,49 \approx m \quad (10)$$

Как видно равенство выполняется.

21. получим на экране спектр сигнала. Посмотрим как меняется спектр при изменении частоты модуляции. Спектры приведены на рис. 18 и 19

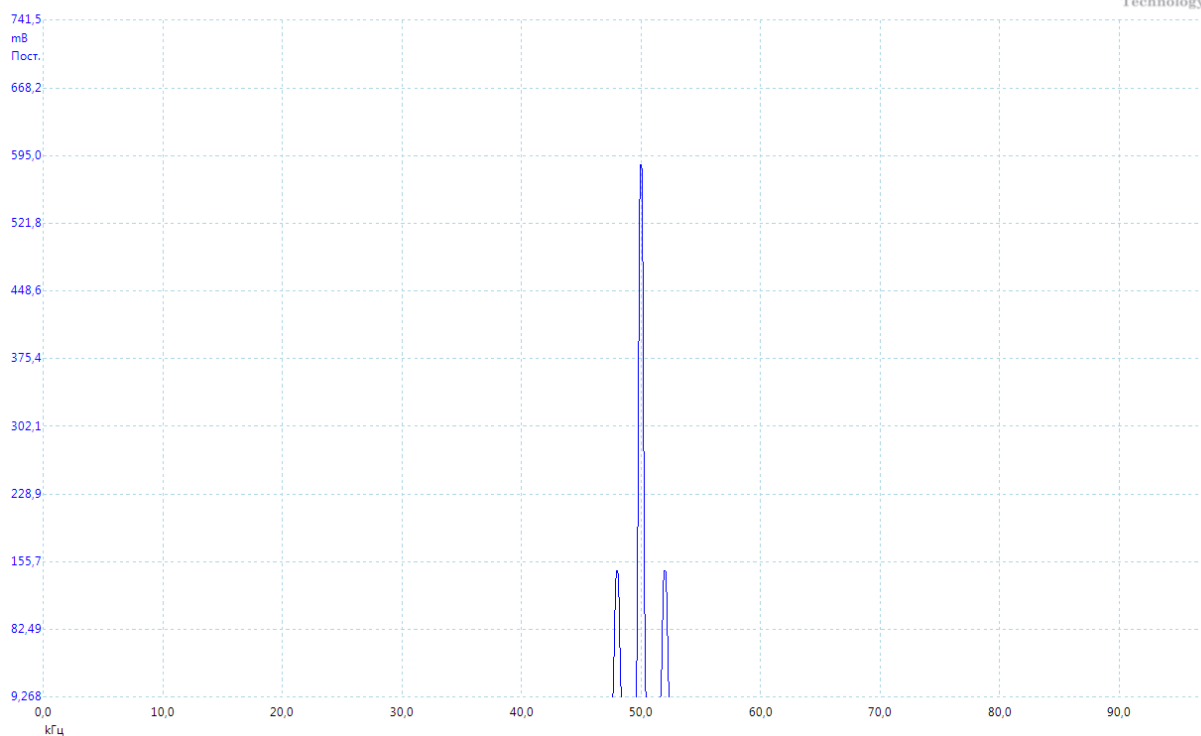


Рис. 18: Спектр сигнала при  $\nu_0 = 50$  кГц,  $\nu_{mod} = 2$  кГц

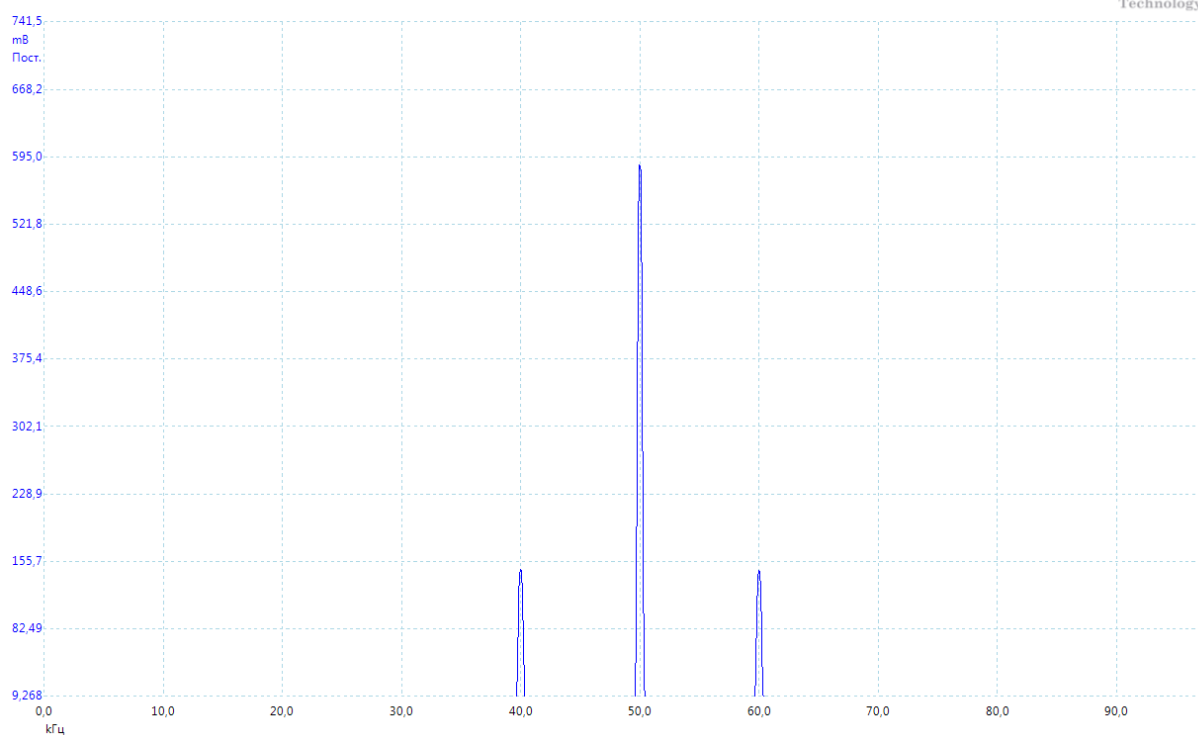


Рис. 19: Спектр сигнала при  $\nu_0 = 50$  кГц,  $\nu_{mod} = 10$  кГц

22. Изменяя глубину модуляции будем замерять амплитуды боковой и центральной гармоник. Результаты измерений запишем в таблицу 5.

Таблица 5: Измерение зависимости  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$

$m$	$m, \%$	$a_{\text{бок}}, \text{ мВ}$	$a_{\text{осн}}, \text{ мВ}$	$a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$
0,10	10	25,6	592,7	0,043
0,20	20	57,1	585,4	0,098
0,30	30	87,9	585,4	0,150
0,40	40	115,3	585,4	0,197
0,50	50	144,3	585,4	0,246
0,60	60	176,8	585,4	0,302
0,70	70	202,4	585,4	0,346
0,80	80	233,2	585,4	0,398
0,90	90	264,0	585,4	0,451
1,00	100	293,0	585,4	0,501

23. Построим график зависимости  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$ . График изобразим на рисунке 20.

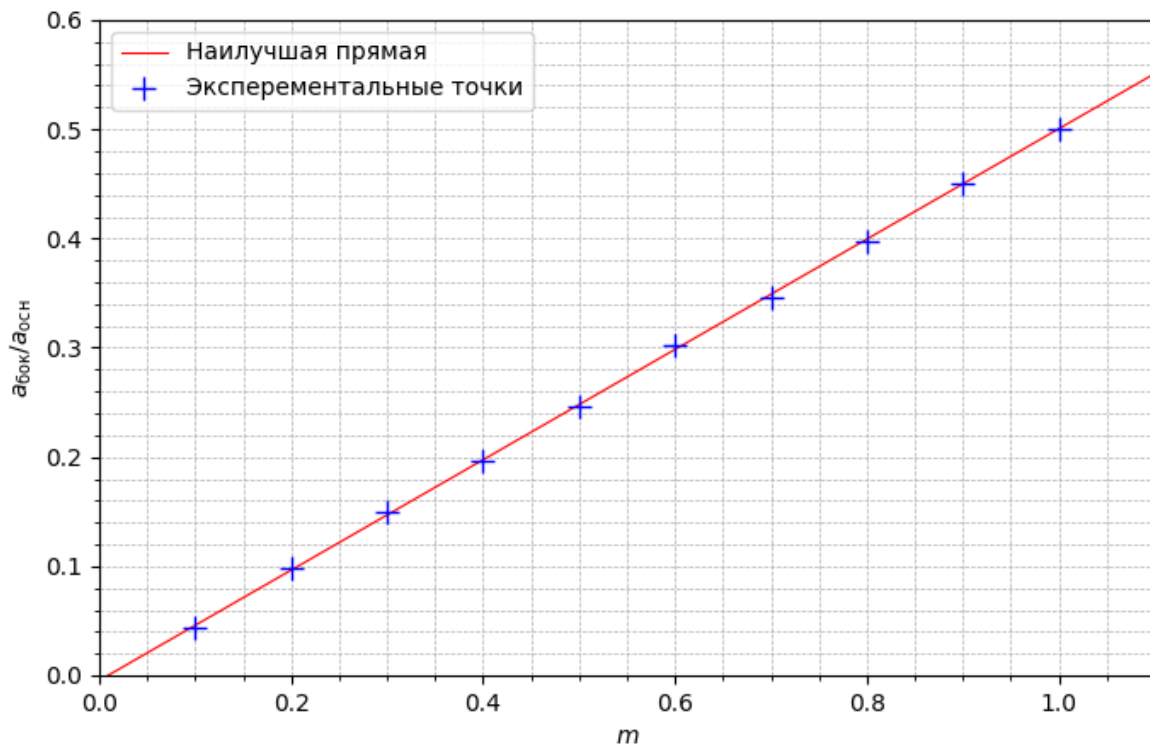


Рис. 20: График зависимости  $a_{\text{бок}}/a_{\text{осн}}$  от  $m$

Как видно результат хорошо совпадает с теоретическим.

#### 4.3 Д. Наблюдение спектра сигнала, модулированного по фазе

24. Установим на генераторе режим модулированного по фазе сигнала с несущей  $\nu_0 = 50$  кГц, частотой модуляции  $\nu_{\text{мод}} = 2$  кГц и максимальным отклонением фазы  $\phi_m = 30^\circ$ . Получим на экране устойчивую картину сигнала.

25. Получим спектр сигнала, меняя параметры пронаблюдаем как он изменяется. Спектры представлены на рис. 21



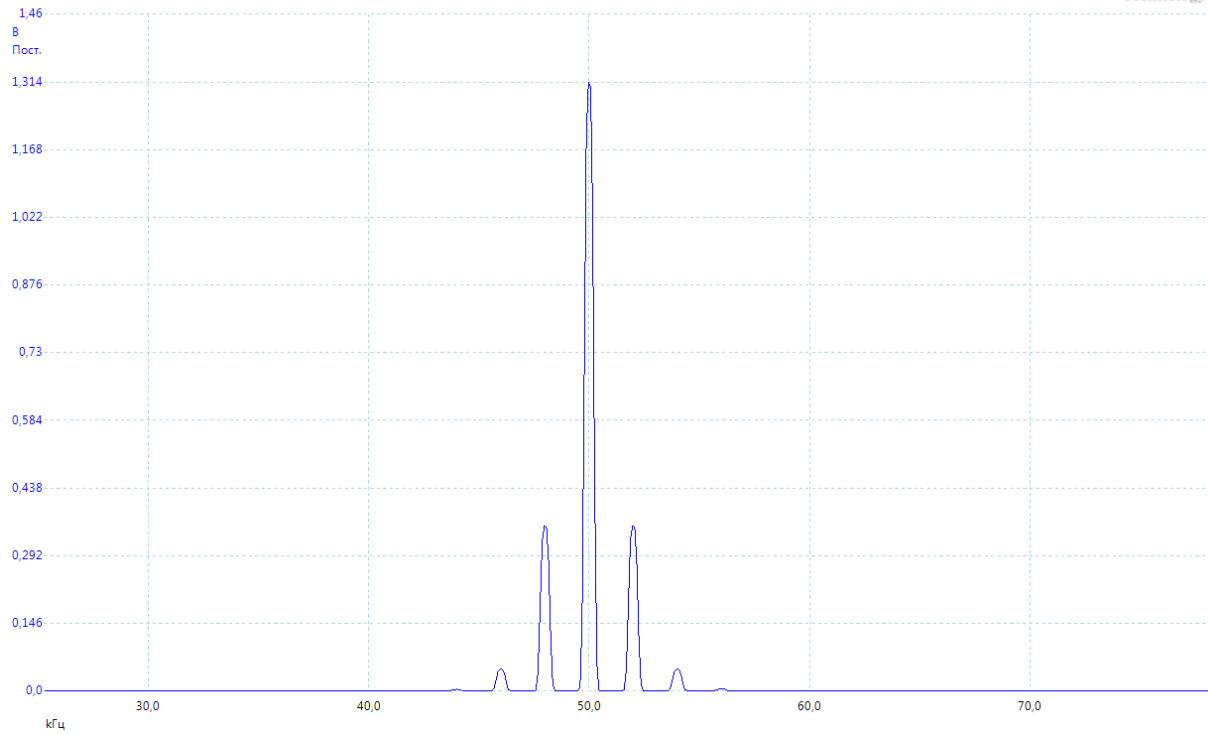


Рис. 21: Спектр сигнала при  $\nu_0 = 50$  кГц,  $\nu_{mod} = 2$  кГц,  $\phi_m = 30^\circ$

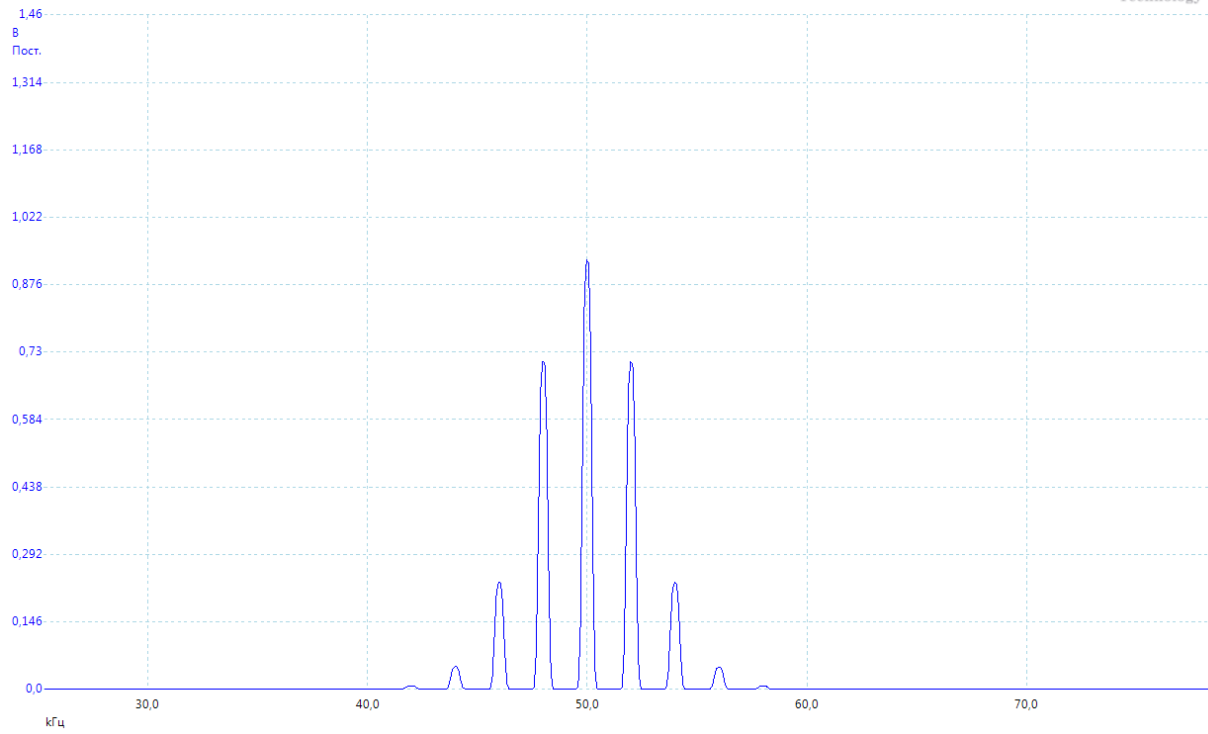


Рис. 22: Спектр сигнала при  $\nu_0 = 50$  кГц,  $\nu_{mod} = 2$  кГц,  $\phi_m = 70^\circ$

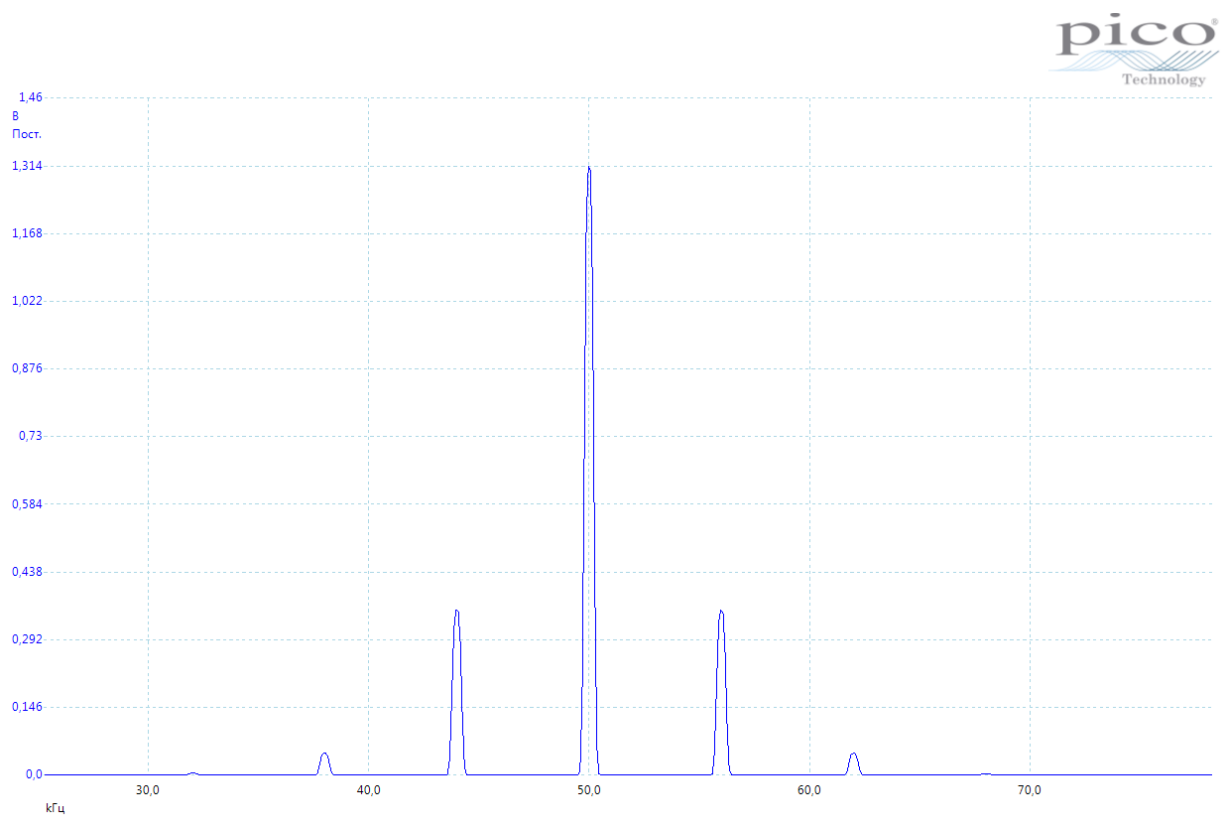


Рис. 23: Спектр сигнала при  $\nu_0 = 50$  кГц,  $\nu_{mod} = 6$  кГц,  $\phi_m = 30^\circ$

#### 4.4 Е. Изучение фильтрации сигналов

26. Для RC-цепочки рассчитаем ее характерное время и соответствующую частоту:  $C = 1000$  пФ,  $R = 3$  кОм.

$$\tau_{RC} = RC \approx 3 \text{ мкс}$$

$$\nu_{RC} = 1/\tau_{RC} \approx 333 \text{ кГц}$$

Соберем схему с RC-цепочкой. Подадим на нее последовательность прямоугольных импульсов с периодом повторения  $T = 3$  мкс и длительностью  $\tau = 150$  нс.

27. Пронаблюдаем форму сигнала и его спектр на выходе RC-цепочки для нескольких значений параметров. Сигналы представлены на рис. 24

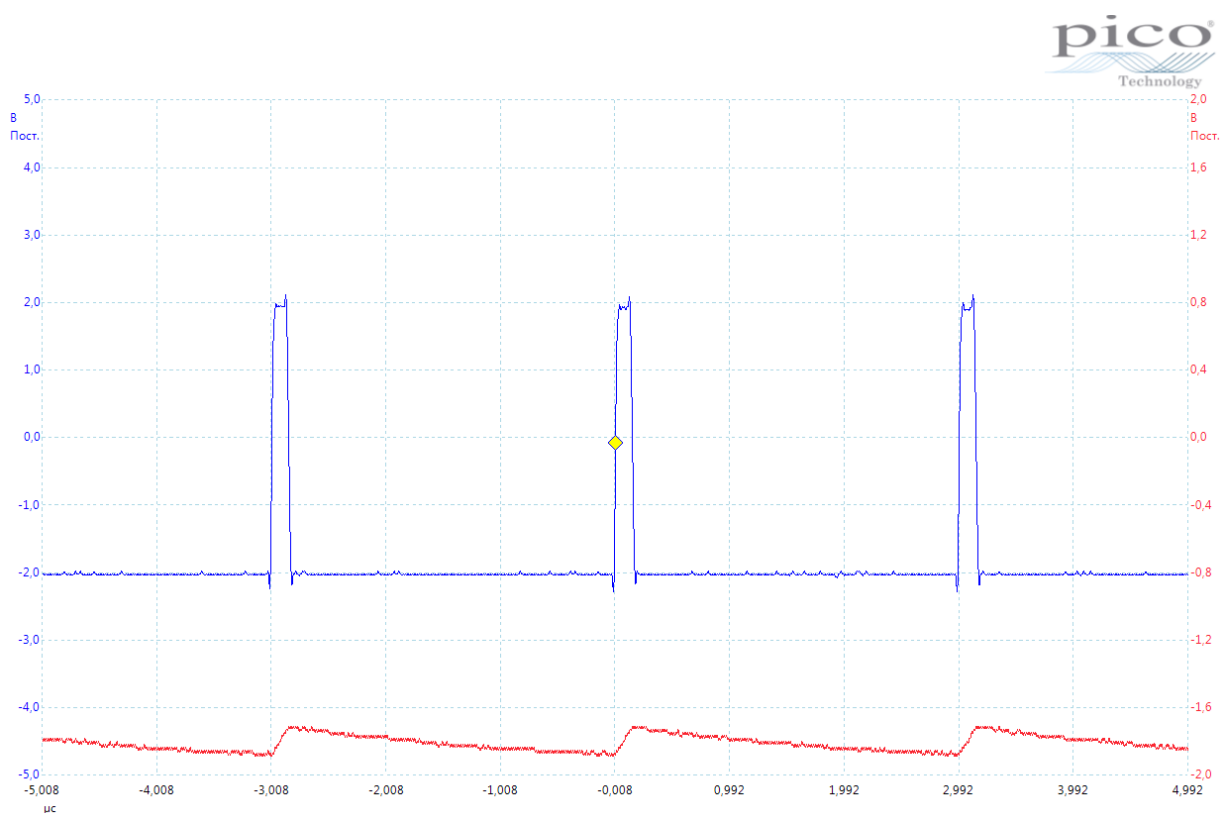


Рис. 24: Спектр сигнала на выходе RC-цепочки при  $T = 3$  мкс,  $\tau = 150$  нс

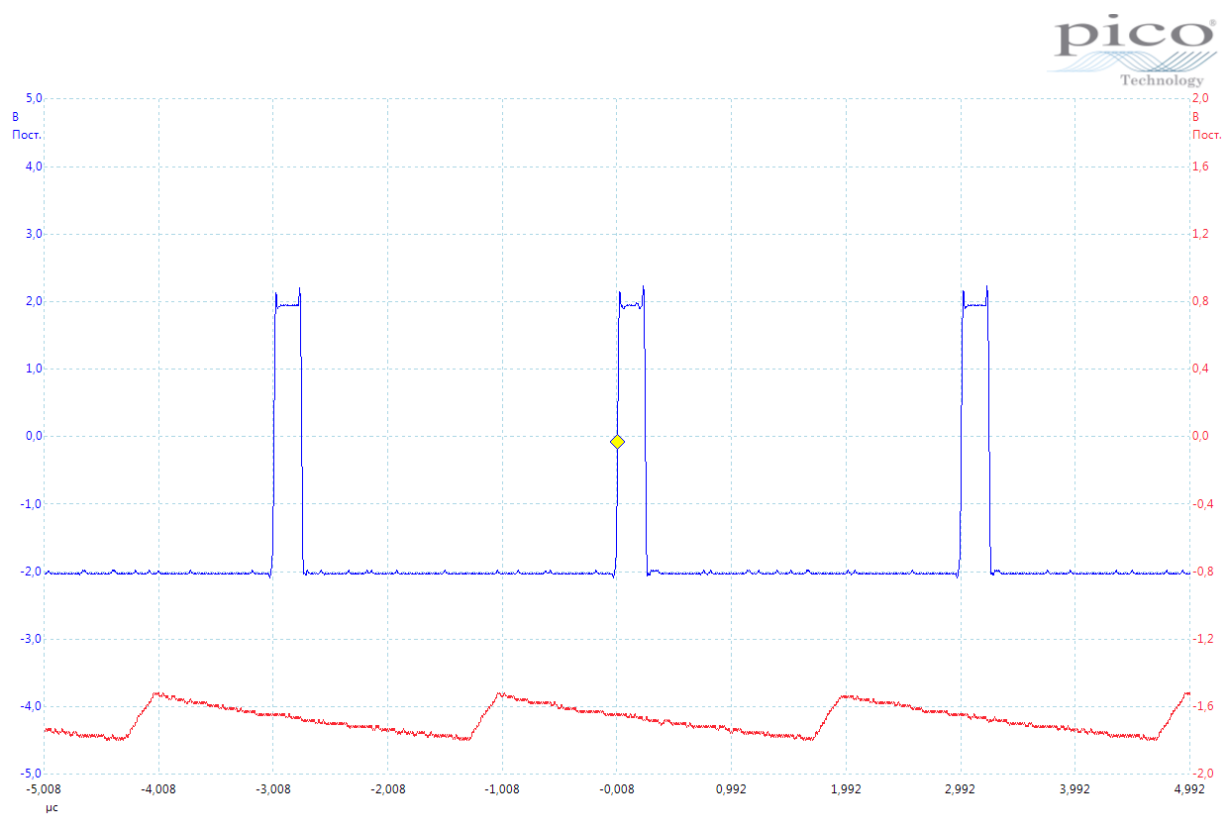


Рис. 25: Спектр сигнала на выходе RC-цепочки при  $T = 3 \text{ мкс}$ ,  $\tau = 250 \text{ нс}$

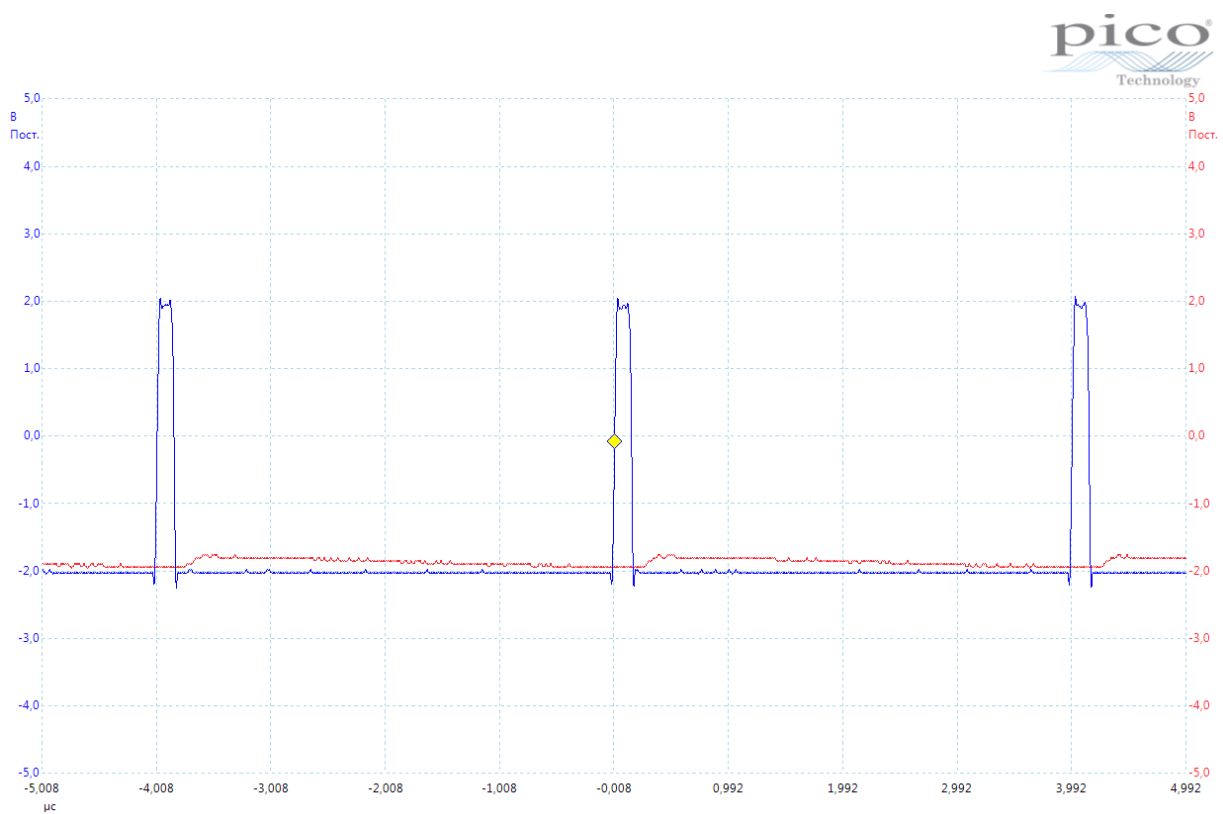


Рис. 26: Спектр сигнала на выходе RC-цепочки при  $T = 4 \text{ мкс}$ ,  $\tau = 150 \text{ нс}$

28. При фиксированном  $T = 3$  мкс и  $\tau = 250$  нс измерим отношение соответствующих гармоник фильтрованного и исходного сигнала  $K_n = a_n^\Phi / a_n^0$ . Результаты измерений запишем в таблицу 6.

Таблица 6: Измерение отношения амплитуд фильтрованного и исходного сигнала

$n$	$n\nu_0$ , кГц	$a_n^\Phi$ , мВ	$a_n^0$ , мВ	$K_n$
1	333	153,7	461,1	0.333
2	667	78,42	439,1	0.179
3	1000	51,76	414,1	0.125
4	1333	25,09	379,5	0.066
5	1667	25,09	334,1	0.075
6	2000	20,39	291,7	0.070
7	2333	10,98	244,7	0.045

29. Построим график зависимости  $K(\nu)$ ,  $\nu = n\nu_0$ ,  $\nu_0 = 333$  кГц. График изобразим на рис. 27.

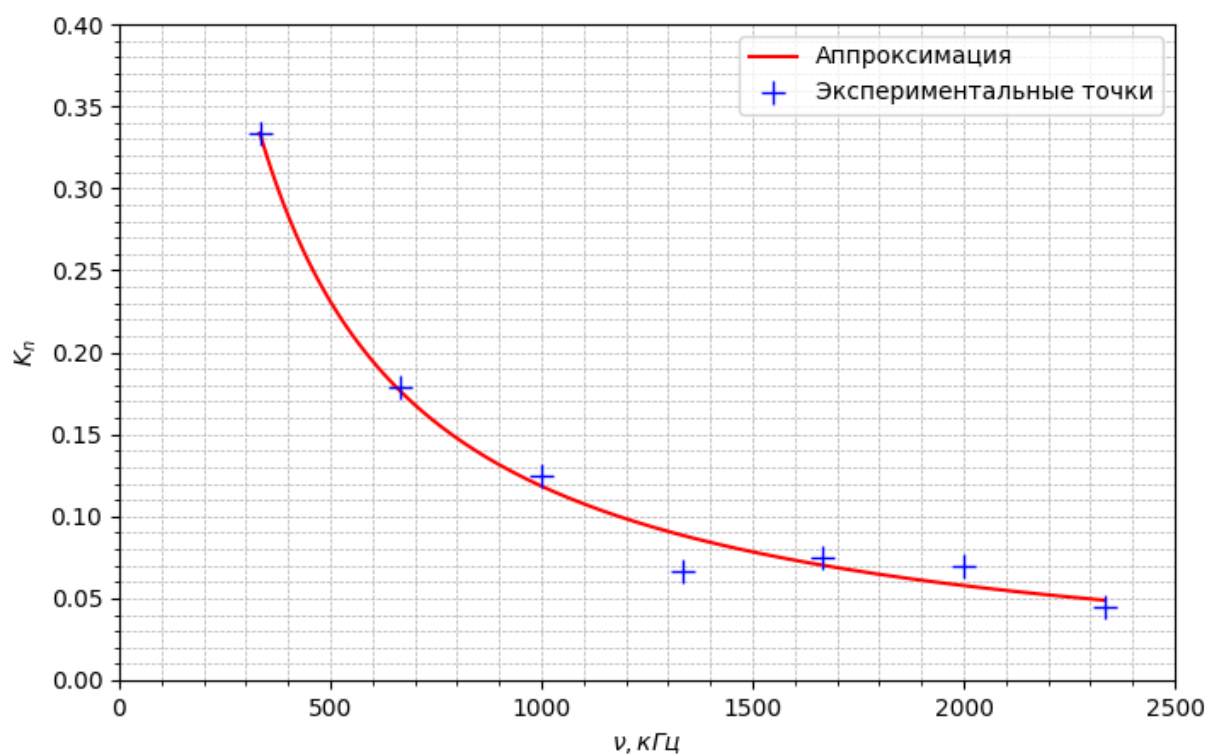


Рис. 27: График зависимости  $K(\nu)$