

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Физтех-школа фотоники, электроники и молекулярной физики

Отчёт о выполнении лабораторной работы 3.7.1 Скин-эффект

Автор:
Макаров Лев Евгеньевич
Б04-306

Долгопрудный 2024

Цель работы:

1. исследовать явление проникновения переменного магнитного поля в медный полый цилиндр

В работе используются:

- генератор сигналов АКИП-3420
- соленоид
- намотанный на полый цилиндрический каркас
- медный экран в виде полого цилиндра
- измерительная катушка
- амперметр
- вольтметр
- двухканальный осциллограф GOS-620
- RLC-метр

1 Теоретические сведения

1.1 Скин-эффект для полупространства

Рассмотрим квазистационарное поле внутри проводящей среды в простейшем плоском случае. Пусть вектор \mathbf{E} направлен всюду вдоль оси y и зависит только от координаты x , т. е. $E_x = E_z \equiv 0$, $E_y = E_y(x, t)$. В квазистационарном приближении

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} \quad (1)$$

Преобразуя это уравнение, можно получить уравнение, схожее с уравнением диффузии:

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (2)$$

Точно такое же уравнение имеет место и для вектора \mathbf{E} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (3)$$

Подставляем в (3) наше электрическое поле $E_y = E_y(x, t)$

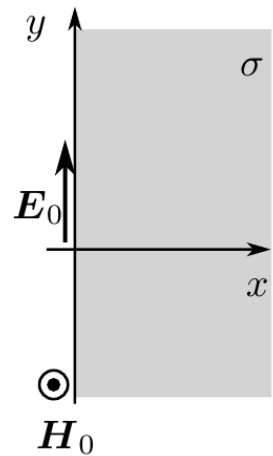
$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \sigma \mu \mu_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (4)$$

Если $E_y(0, t) = E_0 e^{i\omega t}$ то решением (4) будет функция вида

$$E_y(x, t) = E_0 e^{-x/\delta} e^{i(\omega t - x/\delta)} \quad (5)$$

где

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \sigma \mu \mu_0}} \quad (6)$$



1.2 Скин-эффект в тонком полом цилиндре

Перейдем теперь к описанию теории в нашей работе. Из соображении симметрии и непрерывности соответствующих компонент векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} можем сказать что

$$H_z = H(r)e^{i\omega t}, E_\varphi = E(r)e^{i\omega t} \quad (7)$$

и при этом функции $H(r)$ и $E(r)$ непрерывны.

Внутри цилиндра токов нет, следовательно $H(r) = H_1 = \text{const}$ внутри цилиндра. По теореме об электромагнитной индукции

$$E(r) = -\frac{1}{2}\mu_0 r \cdot i\omega H_1 \quad (8)$$

откуда мы получаем граничное условие

$$E_1 = E(a) = -\frac{1}{2}\mu_0 a \cdot i\omega H_1 \quad (9)$$

В приближении $h \ll a$ можем пренебречь кривизной стенки и смоделировать его бесконечной полосой. Тогда, надо решить уравнение (2) с граничными условиями. Решая уравнение получим связь полей H_1 (поле внутри цилиндра которое мы будем измерять) и H_0 , которое колеблется с частотой ω

$$H_1 = \frac{H_0}{\text{ch}(\alpha h) + \frac{1}{2}\alpha a \text{sh}(\alpha h)} \quad \alpha = \sqrt{i\omega\sigma\mu_0} = \frac{\sqrt{2}}{\delta} e^{i\pi/4} \quad (10)$$

из этой формулы получим сколько по фазе отстает поле H_1 от H_0 .

При $\delta \gg h$ (низкочастотная область)

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2}} \quad (11)$$

$$\text{tg}\psi \approx \frac{ah}{\delta^2} = \pi ah\sigma\mu_0\nu \quad (12)$$

При $\delta \ll h$ (высокочастотная область)

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{4}{2 + \alpha a} e^{-\alpha h} \approx \frac{2\sqrt{2}\delta}{a} e^{\frac{h}{\delta}} e^{-i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta}\right)} \quad (13)$$

$$\psi \approx \frac{\pi}{4} + \frac{h}{\delta} = \frac{\pi}{4} + h\sqrt{\frac{\omega\sigma\mu_0}{2}} \quad (14)$$

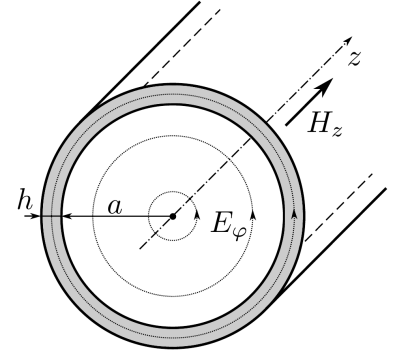


Рис. 1: Эл-магнитные поля в цилиндре

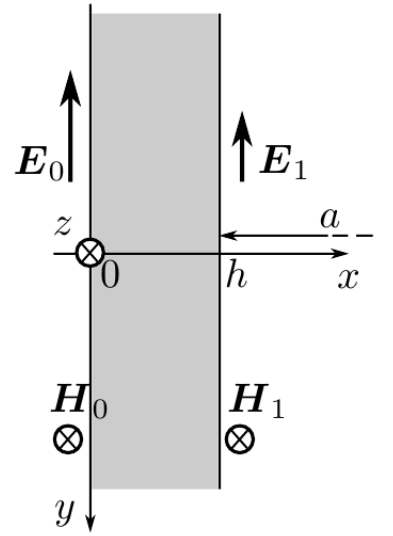


Рис. 2: Стенка цилиндра

1.3 Установка и процесс измерения

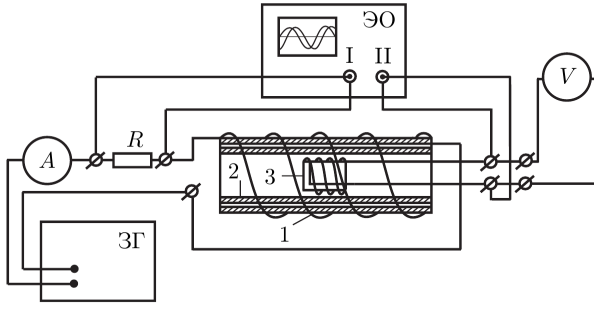


Рис. 3: Установка

Переменное магнитное поле создается соленоидом 1, на который подается переменный ток со звукового генератора ЗГ. Внутри соленоида расположен медный экран 2. Магнитное поле внутри цилиндра измеряется катушкой 3. Напряжение на катушке пропорционально производной $\dot{B}_1(t)$

$$U(t) \propto \dot{B}_1(t) = -i\omega H_1 e^{i\omega t}$$

Поле внутри цилиндра пропорционально току через соленоид

$$H_0(t) \propto I(t)$$

Отсюда несложно увидеть, что

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = c \cdot \frac{U}{\nu I} = \xi_0 \xi \quad (15)$$

где константу ξ_0 можно определить из условия $|H_1|/|H_0| \rightarrow 1$ при $\nu \rightarrow 0$.

При измерениях разности фаз нужно учесть, что первый сигнал на осциллографе пропорционален магнитному полю снаружи, а второй пропорционален производному поля внутри цилиндра по времени, поэтому измеренная на осциллографе разность фаз φ будет на $\frac{\pi}{2}$ больше реальной ψ :

$$\varphi = \psi + \frac{\pi}{2}$$

1.4 Влияние скин-эффекта на индуктивность катушки

Рассмотрим магнитный поток через катушку как сумму двух магнитных потоков: 1) пронизывающий область между катушкой и цилиндрическим экраном Φ_{out} ; 2) пронизывающий область за экраном Φ_{in} :

$$\Phi = \Phi_{out} + \Phi_{in} = H_0 S_0 + H_1 S_1 = LI \quad (16)$$

Очевидно, что минимальная индуктивность будет в случае, когда $\Phi_{in} = 0$ (поле есть только во внешней области). При этом L_{min} не зависит от частоты:

$$L_{min} = \frac{\Phi_{out}}{I} \quad \Phi_{in} = H_1 S_1 = \frac{H_1 S_1}{H_0 S_0} \Phi_{out} = \frac{\Phi_{out}}{n} \frac{S_1}{S_0} \quad (17)$$

$$n = \frac{H_0}{H_1} = \frac{|H_0|}{|H_1|} \frac{1}{\cos(\psi)} \quad (18)$$

$$\Phi_{max} = \Phi_{out} + \Phi_{in_{max}} = H_0 (S_0 + S_1) = L_{max} I_m \quad (19)$$

$$L = L_{min} + \frac{L_{max} - L_{min}}{n} \quad (20)$$

$$\frac{L_{max} - L_{min}}{L - L_{min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma \nu)^2 \quad (21)$$

2 Результаты измерений и обработка данных

3 Ход работы

Параметры медного цилиндра:

$D = 45$ мм – наружный диаметр

$h = 1.5$ мм – толщина стенки.

Используя табличные значения рассчитаем критическую частоту при которой $h = \delta$

$$\nu_h = \frac{1}{\pi \mu_0 \sigma h^2} \approx 2252 \text{ Гц}$$

3.1 Измерения амплитуд в области низких частот

Воспользуемся формулой (11) для скин-слоя при низких частотах

$$\left(\frac{|H_1|}{|H_0|} \right)^2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}(ah\sigma\mu_0\omega)^2} = \xi^2 \xi_0^2 \quad (22)$$

Где $\xi = \frac{U}{I\nu}$

$$\frac{1}{\xi^2} = (\xi_0 \nu \pi a h \sigma \mu_0)^2 + \xi_0^2 \quad (23)$$

Построим график $\frac{1}{\xi^2} = f(\nu^2)$, по МНК найдём коэффициенте ξ_0 и σ .

$$\frac{1}{\xi^2} = k\nu^2 + \xi_0^2$$

$$k = \frac{\langle YX \rangle - \langle Y \rangle \langle X \rangle}{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$$

$$\xi_0^2 = \langle Y \rangle - k \langle X \rangle$$

Найдём случайную погрешность σ_k :

Погрешность коэффициента можно вычислить по формуле:

$$\sigma_k = \frac{1}{\sqrt{N-2}} \sqrt{\frac{\langle (Y)^2 \rangle - \langle Y \rangle^2}{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} - k^2}$$

$$\sigma_{\xi_0^2} = \sigma_k \sqrt{\langle X^2 \rangle}$$

$$\xi_0 = (71 \pm 6) \frac{\Gamma_{\text{Ц}}}{\text{ОМ}} \quad \sigma = (4.36 \pm 0.22) \cdot 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$$

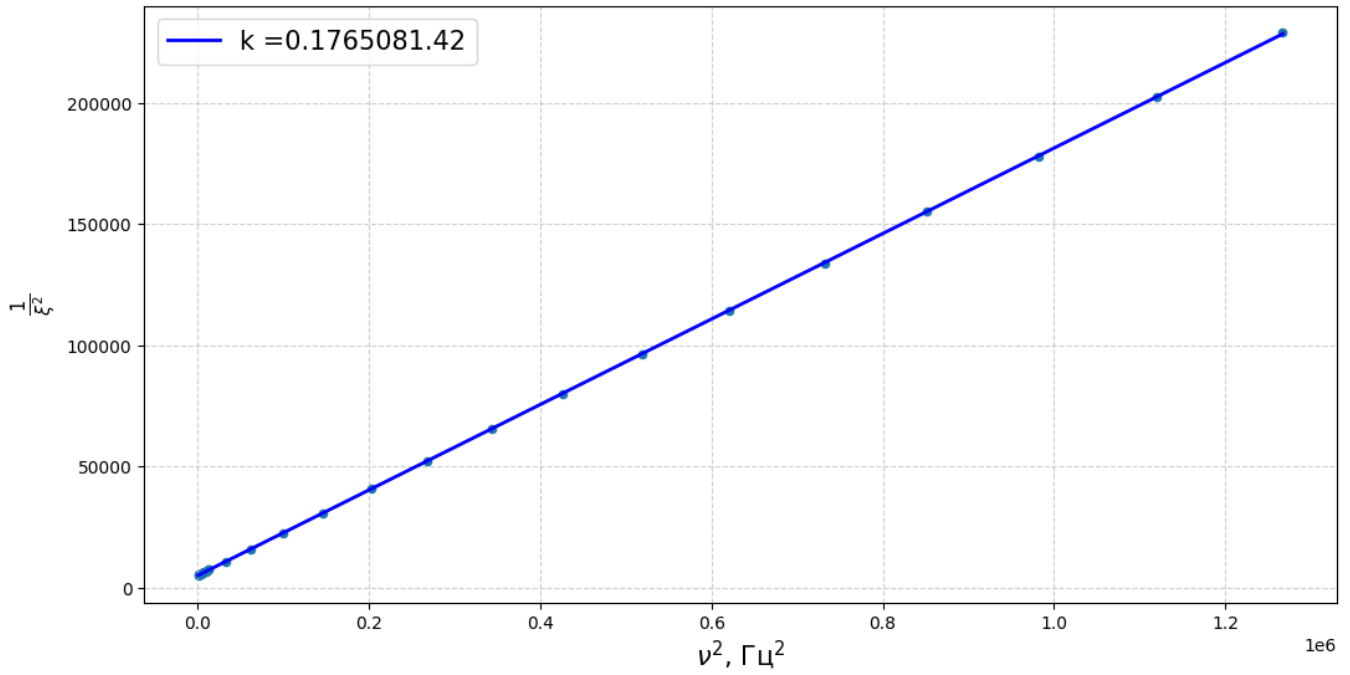


Рис. 4: График зависимости $\frac{1}{\xi^2}(\nu^2)$

3.2 Измерение проводимости через разности фаз при низких частотах

Построим график зависимости $\text{tg}(\psi) = f(\nu)$

По МНК определим коэффициент проводимости меди

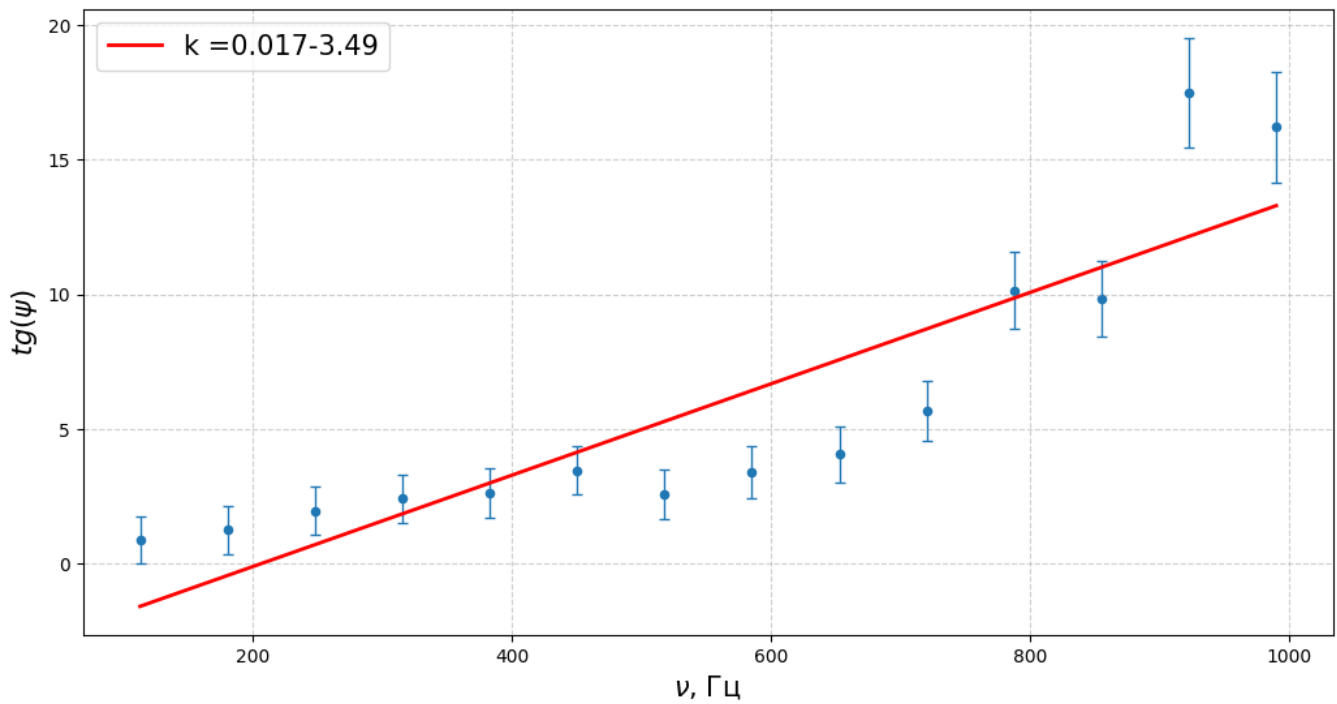


Рис. 5: График зависимости $\text{tg}(\psi) = f(\nu)$

$$k = \pi a h \mu_0 \sigma = 0.017, \text{ с} \quad \sigma = \frac{k}{\pi a h \mu_0} = 7.61 \pm 0.54 \cdot 10^7 \frac{\text{С}_\text{М}}{\text{М}}$$

3.3 Измерение проводимости через разность фаз в высокочастотном диапазоне

По формуле (14), при $\delta \ll h$

$$\psi - \frac{\pi}{4} = k \cdot \sqrt{\nu} \quad k = h\sqrt{\pi\mu_0\sigma} = 0.023 \pm 0.001$$

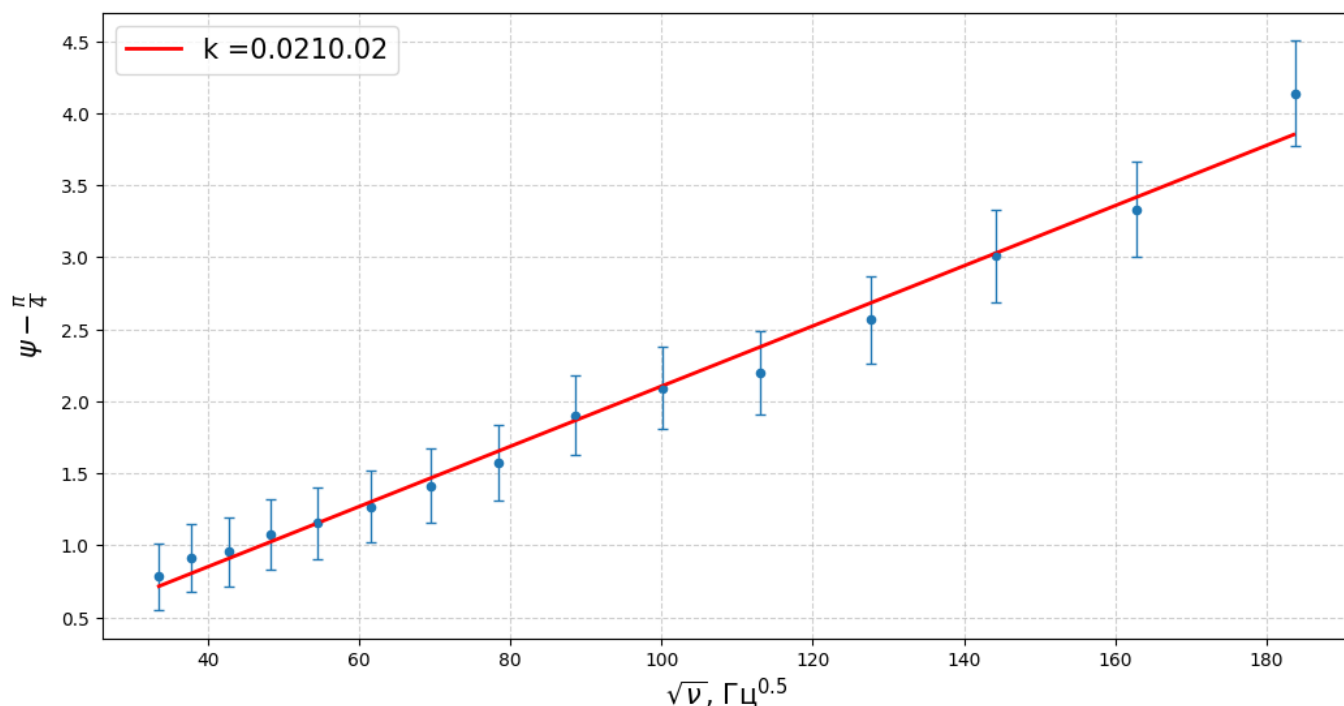


Рис. 6: График зависимости $\text{tg}(\psi) = f(\nu)$

$$\sigma = 6.09 \pm 0.31 \cdot 10^7 \frac{\text{СМ}}{\text{М}}$$

3.4 Измерение проводимости через изменение индуктивности

Измерить проводимость можно также через изменение индуктивности катушки внутри цилиндра. Данные, измеренные с помощью RCL-метра: Построим график $L(\nu)$

L, мГн	19	13.2	9	7.82	7.12	6.6	5.61	5.67	5.68	5.46
ν	40	150	300	400	500	600	800	1500	2000	6000
L, мГн	5.63	6.02	6.77	8.74						
ν	12000	16200	20000	25000						

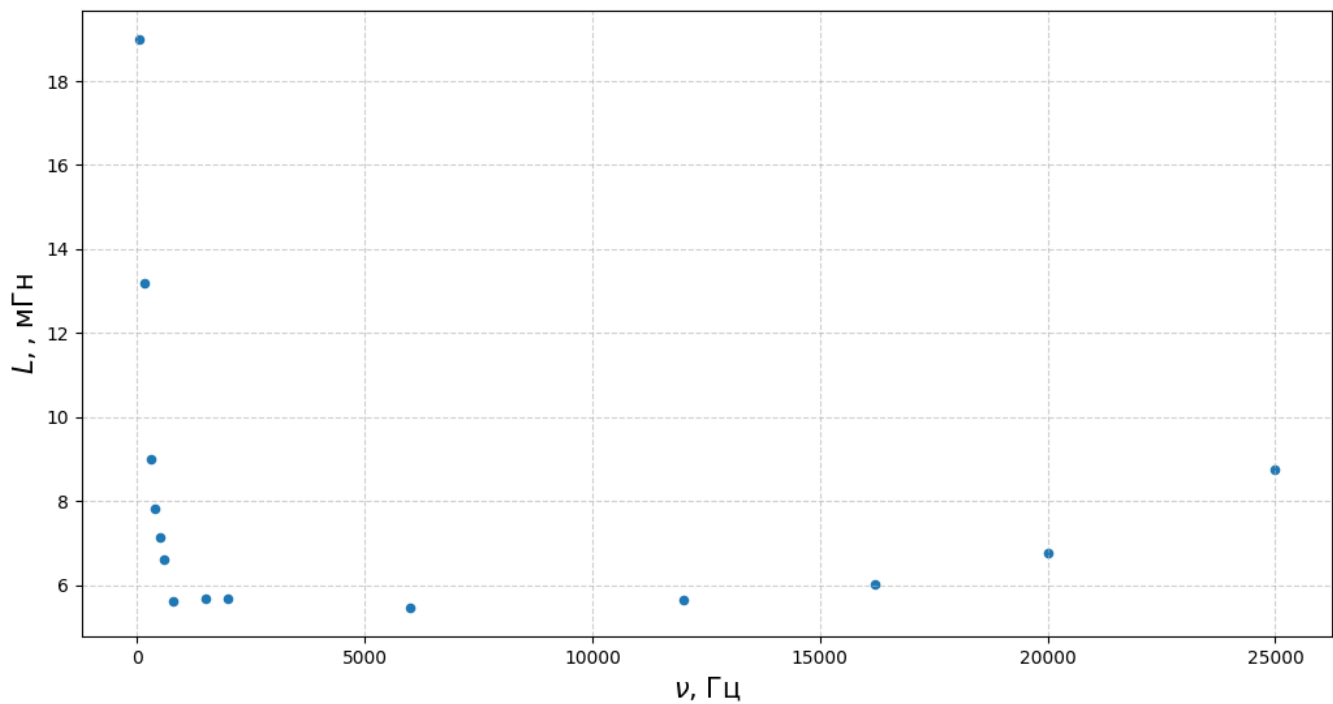


Рис. 7: График зависимости $L(\nu)$

Полученные максимальные и минимальные значения индуктивности $L_{min} = 5.46$ мГн, $L_{max} = 19$ мГн по формуле (21)

$$\frac{L_{max} - L_{min}}{L - L_{min}} = (\pi a h \mu_0 \sigma \nu)^2$$

получается коэффициент наклона графика

$$k = (\pi a h \mu_0 \sigma)^2 \quad \sigma = \frac{\sqrt{k}}{\pi a h \mu_0}$$

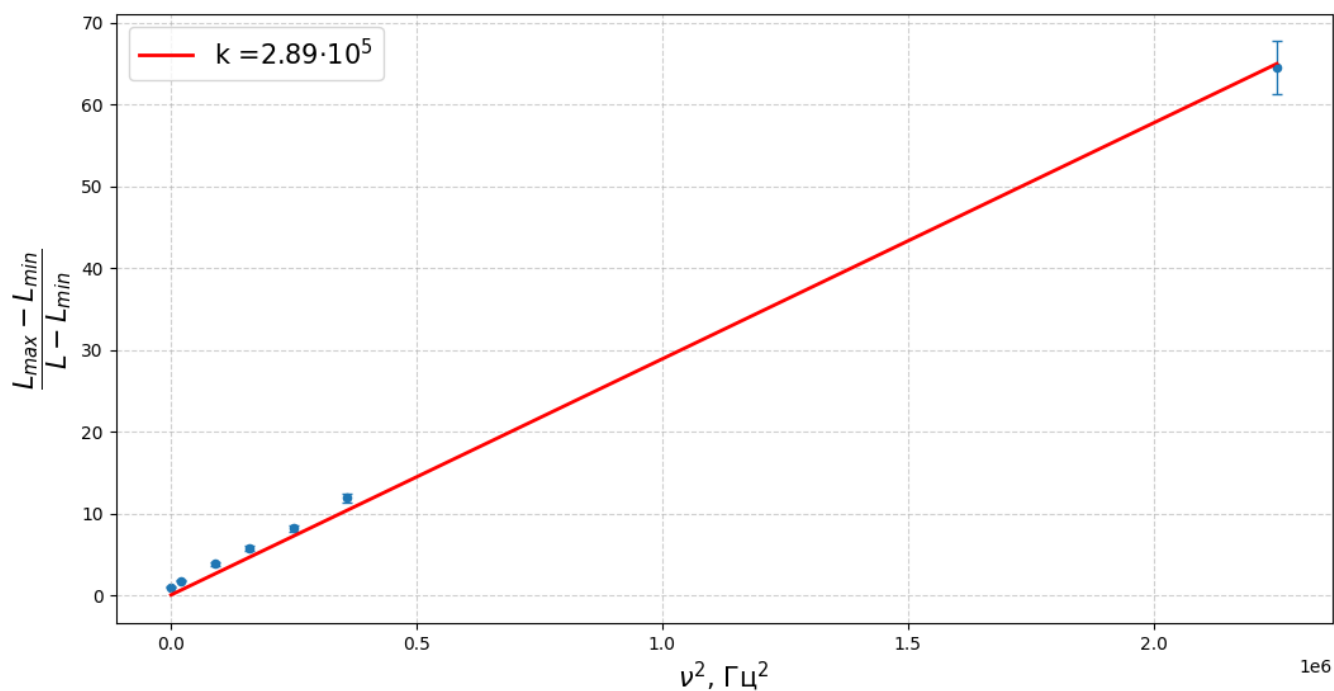


Рис. 8: График зависимости $\frac{L_{max} - L_{min}}{L - L_{min}} = f(\nu^2)$

$$\sigma = 4.6 \pm 0.1 \cdot 10^7 \frac{\text{C}_M}{\text{M}}$$

Построим график для $\frac{|H_1|}{|H_0|}$, для теоретических значений и полученных приближений при низких частотах и высоких частотах

Формула для теоретических значений, где $x = \frac{h}{\delta}$

$$\frac{|H_1|}{|H_0|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\text{ch}(x) \cos(x) + \frac{1}{2\delta} a \text{sh}(x) \cos(x)\right)^2 + \left(\text{sh}(x) \sin(x) + \frac{1}{2\sigma} a \text{ch}(x) \sin(x)\right)^2}} \quad (24)$$

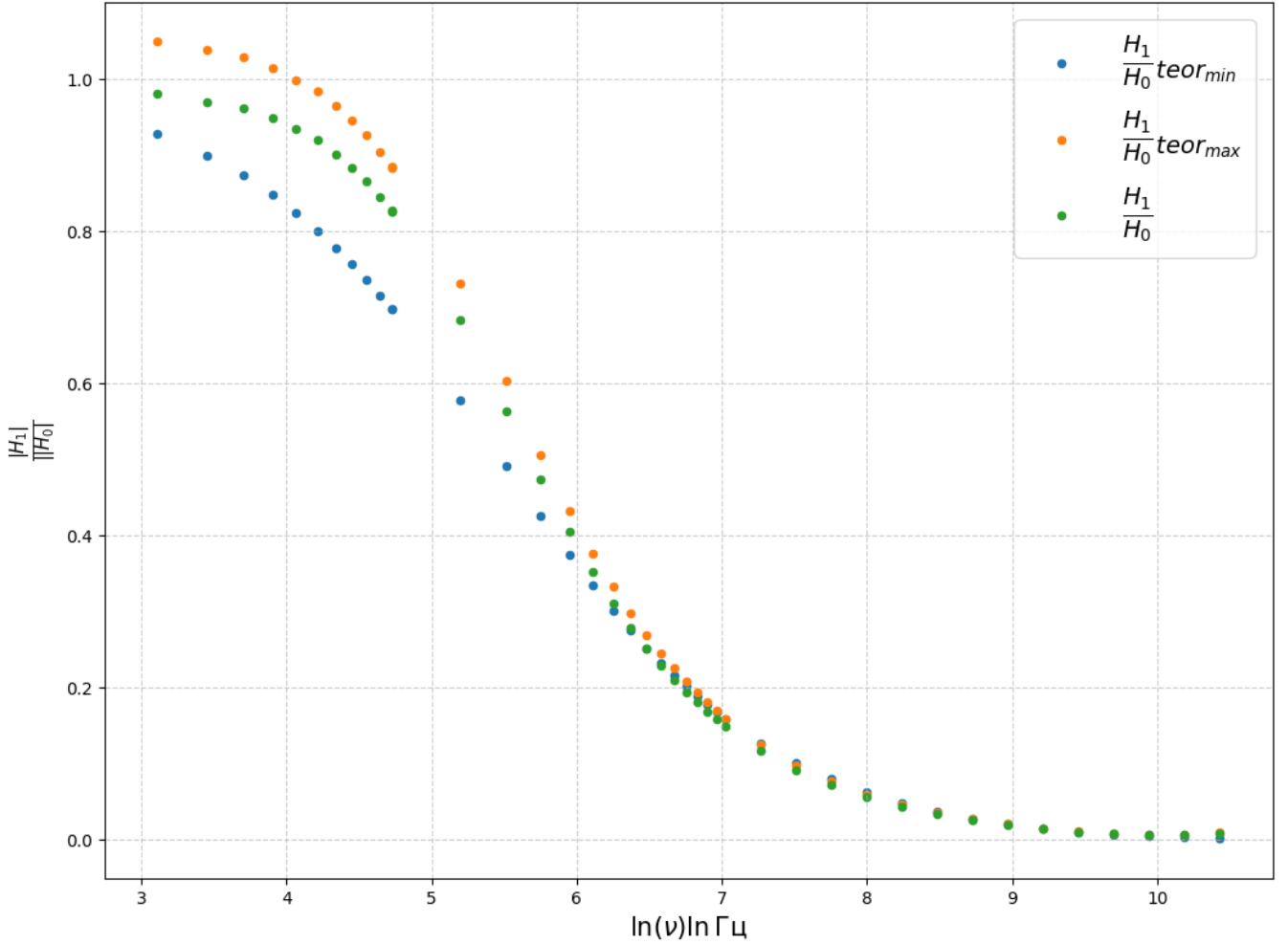


Рис. 9: График зависимости $\frac{|H_1|}{|H_0|}(\nu)$

4 Вывод

N	1	2	3
σ	4.36 ± 0.22	7.61 ± 0.54	4.6 ± 0.1