

Работа 4.3.1

Изучение дифракции света

Цель работы: исследовать явления дифракции Френеля и Фраунгофера на одной и двух щелях, изучить влияние дифракции на разрешающую способность оптических инструментов; проверить теоретические соотношения для положения максимумов при дифракции Френеля и Фраунгофера.

В работе используются: оптическая скамья, ртутная лампа, светофильтр, щели с регулируемой шириной, рамка с вертикальной нитью, экран с двойной щелью, микроскоп на поперечных салазках с микрометрическим винтом, зрительная труба.

Перед выполнением работы необходимо ознакомиться с теорией дифракции, методом зон Френеля и векторной диаграммой Корню (см. часть III, раздел 1 теоретического Введения).

А. Дифракция Френеля

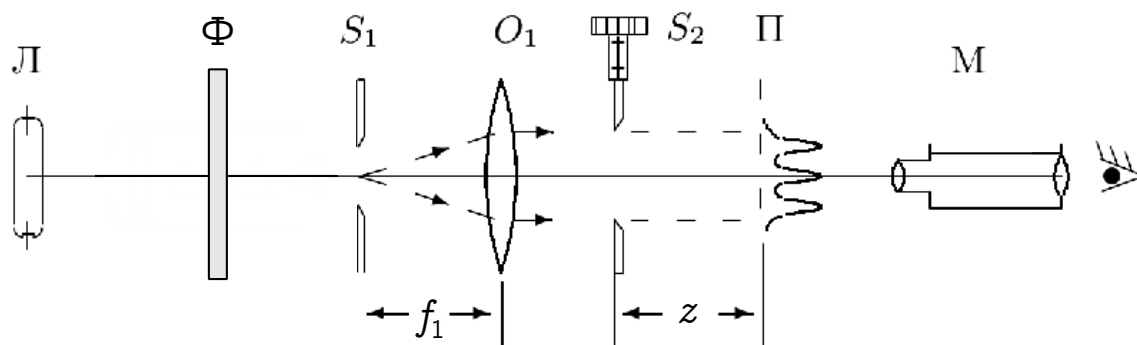


Рис. 1. Схема установки для наблюдения дифракции Френеля

Схема установки для наблюдения дифракции Френеля представлена на рис. 1. Свет от ртутной лампы Л, пропущенный через оранжевый светофильтр Ф со средней длиной волны $\lambda = 578$ нм, падает на входную щель S_1 . Щель S_1 находится в фокусе коллиматора — собирающей линзы O_1 . Коллиматор создаёт параллельный пучок монохроматического света, освещающий щель S_2 , на которой и происходит дифракция. Дифракционная картина рассматривается с помощью микроскопа М, сфокусированного на некоторую плоскость наблюдения П.

Распределение интенсивности света в плоскости наблюдения П проще всего рассчитывать с помощью *зон Френеля* (для щели их также называют *зонами Шустера*). При освещении щели S_2 параллельным пучком лучей (плоская волна) зоны Френеля представляют собой полосы, параллельные краям щели (рис. 2). Результирующая амплитуда в точке наблюдения определяется суперпозицией колебаний от тех зон Френеля, которые не перекрыты створками щели. Границы зон Френеля/Шустера ξ_m определяется соотношением

$$\xi_m = \pm \sqrt{mz\lambda}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

где ξ отсчитывается от центра щели, z — расстояние от щели до плоскости наблюдения П, а λ — длина волны. При ширине щели b ($-b/2 < \xi < b/2$) полное число открытых зон для точки наблюдения на оси равно

$$m_{\max} = \frac{b^2}{4\lambda z}.$$

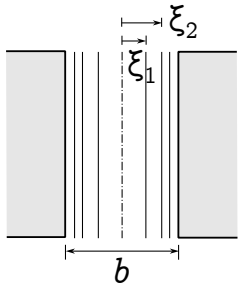


Рис. 2. Зоны Шустера в плоскости щели

По определению, разделение волнового фронта на зоны Френеля производится так, чтобы излучение от соседних зоны находилось в *противофазе*. Иными словами, разность хода (от поверхности фронта до точки наблюдения) между краями соседних зон равна $\lambda/2$. Поэтому, когда открыто *чётное* число зон Френеля, на оси системы наблюдения будет *минимум* дифракционной картины (тёмная полоса). Если число открытых зон *нечётно*, в центре картины — *максимум* (светлая полоса).

Зафиксируем размер щели b и проанализируем, как меняется картина в зависимости от расстояния до плоскости наблюдения z . Если число открытых зон Френеля велико, $m \gg 1$ ($z \rightarrow 0$), мы приходим к пределу геометрической оптики. В нём дифракционная картина отсутствует, а размер изображения щели совпадает с шириной самой щели b . Дифракционная картина наблюдается только в узкой полосе вблизи границ щели («дифракция на краю экрана»). При удалении от плоскости геометрического изображения эти две группы полос постепенно расширяются, заполняя всё изображение щели. При $m \sim 1$ на щели наблюдается сложная картина из небольшого числа дифракционных полос. При дальнейшем удалении ($m \ll 1$, $z \rightarrow \infty$) дифракционная картина начинает упрощаться и расширяться, переходя в режим *Фраунгофера* — затухающие по интенсивности эквидистантные полосы с характерным угловым размером центральной полосы λ/b .

Амплитуду света в произвольной точке плоскости наблюдения можно определить графически с помощью векторной диаграммы — *спирали Корню* (см. п. 1.4.2 Введения к разделу).

Распределение амплитуд в режиме дифракции Френеля ($m \sim 1$) довольно сложно. Однако если число открытых зон Френеля больше единицы и близко к целому $m = 2, 3, 4, \dots$, то в картине можно довольно чётко выделить $m - 1$ тёмных полос, заполняющих изображение щели. Так можно по виду дифракционной картины оценить число зон Френеля на полуширине щели*.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении предлагается исследовать дифракцию Френеля на узкой щели, на краю экрана, на тонкой нити. В процессе работы возможна фотофиксация наблюдаемых дифракционных картин на камеру смартфона. Для этого можно закрепить смартфон на окуляре микроскопа в специальном держателе. Программу управления камерой телефона рекомендуется перевести в ручной режим настройки.

Подготовка приборов к работе

1. *Настройте зрительную трубу на бесконечность.* Предварительно настройте её окуляр: поворотом глазной линзы добейтесь появления в поле зрения чёткого изображения окулярной шкалы или креста. затем вращением регулировочного винта найдите чёткое изображение удалённого объекта (окно в конце коридора). Следите, чтобы настройка винта в процессе работы не сбилась.
2. *Определите нуль микрометрического винта щели S_2 .* Для этого глядя сквозь щель на окно или лампу, определите момент её открытия (щель открывается при *закручивании* винта). Повторите процедуру несколько раз, вращая винт всё медленнее, и зафиксируйте значение нуля.

*Заметим, что из спирали Корню видно, что максимумы и минимумы амплитуд достигаются *не совсем* при целых значениях m , а немного раньше — примерно на четверть зоны. Распределения интенсивностей и точные положения экстремумов могут быть найдены численно с помощью интегралов Френеля (см. Приложение). Вычисления дают экстремумы приблизительно при $m \approx 0,73, 1,76, 2,75, 3,75, \dots$

Максимальная ширина щели — около 0,4 мм; один оборот винта — 100 дел — соответствует 0,1 мм (цена деления — 0,001 мм).

3. Соберите схему согласно рис. 1.

а) Включите ртутную лампу, установите за ней светофильтр, затем вертикальную входную щель S_1 . Откройте щель пошире (на 2–3 мм) и с помощью экрана или листа белой бумаги проверьте, что луч идёт вдоль оптической скамьи.

б) Установите линзу O_1 на расстоянии от щели S_1 , близком к фокусному (указано на оправе линзы).

Точная настройка пучка на параллельность осуществляется с помощью зрительной трубы, настроенной на бесконечность. Поставьте зрительную трубу сразу за линзой O_1 . Убедитесь (с помощью листа бумаги), что пучок света проходит через центр линзы и попадает на центр объектива зрительной трубы. Слегка перемещая линзу O_1 вдоль оси системы, найдите в окуляре зрительной трубы резкое изображение краёв входной щели S_1 . Закрепите входную щель и линзу на оптической скамье.

в) Поставьте щель S_2 (щель с микрометрическим винтом!) сразу за линзой O_1 и закрепите. Убедитесь, что щель вертикальна и равномерно освещена. Начальную ширину щели S_2 рекомендуется установить равной $\sim 0,2\text{--}0,3$ мм.

г) Убедитесь, что окуляр микроскопа настроен под ваш глаз, так что его окулярная шкала видна чётко. Если нет — подстройте окуляр под свой глаз: вытащив окуляр из тубуса, направьте его на любой яркий объект (лампу, окно) и поворотом глазной линзы (перемещением её вдоль оси окуляра) добейтесь чёткого видения окулярной шкалы. После настройки верните окуляр на место.

д) Сфокусируйте микроскоп на щель S_2 . Учтите, что предметная плоскость микроскопа расположена практически в фокусе его объектива ($\sim 2\text{--}4$ см). Убедитесь с помощью листа бумаги, что световой пучок попадает в центр объектива. Глядя в окуляр и немного перемещая микроскоп вдоль оптической оси, получите резкое изображение границ щели S_2 (при резком изображении видны мелкие шероховатости краёв щели).

4. Проверьте, что при небольшом удалении микроскопа от щели на ярком фоне геометрического изображения щели появляются (сначала около краёв) узкие тёмные дифракционные полосы, количество которых уменьшается по мере удаления микроскопа (дифракция Френеля).

5. Попытайтесь улучшить контрастности картины. Она зависит от ширины щели S_1 (при уменьшении щели растёт контрастность, но падает яркость), от центрировки линзы O_1 , от равномерности освещения щелей и их параллельности.

Измерения

6. Добившись наибольшей чёткости и контрастности дифракционной картины, снова найдите резкое изображение щели (чёткие края без дифракционных полос). Запишите начальное положение микроскопа — координату по шкале продольной линейки, расположенной на оптической скамье.

Если тубус микроскопа закреплён на подставке с продольной шкалой, запишите начальное положение микроскопа по этой шкале.

7. Постепенно отодвигая микроскоп от щели S_2 , заметьте по шкале положение микроскопа, при котором на фоне щели видна одна тёмная полоса ($n = 1$). Смещение микроскопа от первоначального положения (от резкого изображения щели) даёт величину z — расстояние от щели до плоскости наблюдения (здесь для $m = n + 1 = 2$).

Если это расстояние слишком мало (меньше 2 см при погрешности измерения ± 1 мм), следует увеличить ширину щели S_2 и, при необходимости, снова поработать над контрастностью картины (см. п. 5).

8. Приближая микроскоп к щели, измерьте зависимость координаты микроскопа z от числа n наблюдаемых тёмных полос. При хорошей настройке можно увидеть 5–6 полос.
 9. Измерьте ширину b щели S_2 , используя сначала окулярную шкалу микроскопа (верхняя шкала оцифрована в миллиметрах, цена малого деления — 0,2 мм), а затем микрометрический винт поперечных салазок микроскопа (один оборот винта — 100 дел. — 1 мм). Освещённость изображения увеличится, если осветить щель настольной лампой.
- Сравните результат с показаниями микрометрического винта щели S_2 . В случае заметного расхождения (причиной может быть люфт винта) откройте щель пошире и снова сравните результаты измерения ширины. Влияние люфта можно исключить, если при измерениях вращать винт в одну сторону.
10. *Повторите измерения для другой ширины b щели S_2 .

Качественные наблюдения

11. Вновь сфокусируйте микроскоп на щель. При небольшом удалении микроскопа от щели у её краёв появляются узкие частые полосы. Это *дифракция на краю экрана*. Обратите внимание, что возле границы щели расположена самая яркая светлая полоса.
12. Закрепите микроскоп на оптической скамье и проследите за изменением дифракционной картины при уменьшении ширины b щели S_2 . Опишите результат.
13. Для исследования *дифракции Френеля на препятствии* поставьте вместо щели S_2 рамку с тонкой вертикальной нитью. Настройте микроскоп на резкое изображение нити. Убедитесь, что при удалении микроскопа от нити на её фоне всегда наблюдается *чётное* число тёмных дифракционных полос (светлый центр).

Обработка результатов

14. Подберите координаты так, чтобы зависимость расстояния до щели z от числа открытых зон Френеля m (определённое по числу наблюдаемых тёмных полос n) была линейной. Постройте график зависимости и по критерию хи-квадрат убедитесь в том, что экспериментальные точки могут быть аппроксимированы прямой линией. По наклону наилучшей прямой определите ширину щели b . Оцените погрешность результата. Сравните результат с шириной щели b , измеренной в п. 9.
15. Нарисуйте качественный график распределения интенсивности на границе света и тени при дифракции на краю экрана. С помощью спирали Корню сравните интенсивности на краю экрана и вдали от него.
16. Объясните с помощью зон Френеля и спирали Корню, как связано видимое число тёмных полос с шириной щели.

Б. Дифракция Фраунгофера на щели

На значительном удалении от щели, когда выполнено условие $m \ll 1$ (то есть ширина щели становится значительно меньше ширины первой зоны Френеля, $b \ll \sqrt{\lambda z}$), изображение щели размывается и возникает дифракционная картина, называемая дифракцией Фраунгофера.

Дифракцию Фраунгофера можно наблюдать той же установке, что и дифракцию Френеля (рис. 1). Однако при обычных размерах установки дифракция Фраунгофера возникает только при очень узких щелях. Поскольку работать с тонкими щелями неудобно, для наблюдения дифракции Фраунгофера к схеме добавляется объектив O_2 (рис. 3).

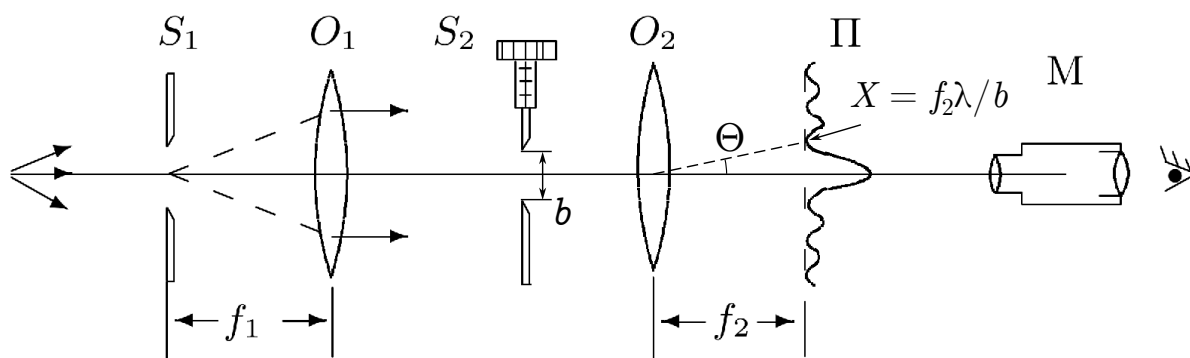


Рис. 3. Схема установки для наблюдения дифракции Фраунгофера на щели

Дифракционная картина наблюдается в фокальной плоскости объектива O_2 . Поскольку объектив не вносит дополнительной разности хода между интерферирующими лучами (*таутохронизм* тонкой линзы), в его фокальной плоскости наблюдается неискажённая дифракционная картина Фраунгофера, соответствующая бесконечно удалённой плоскости наблюдения.

При дифракции Фраунгофера в центре поля зрения наблюдается дифракционный максимум (светлая полоса). Сбоку от неё наблюдаются чередующиеся минимумы и максимумы с довольно быстро затухающей интенсивностью. Направление на минимумы (тёмные полосы)* при малых углах Θ определяется соотношением

$$\Theta_n^{\min} = n \frac{\lambda}{b}, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (2)$$

где b — ширина щели. Каждому значению угла Θ соответствует точка в плоскости объектива с фокусным расстоянием f_2 , отстоящая от оптической оси на расстоянии

$$X_n = f_2 \operatorname{tg} \Theta_n \approx f_2 \Theta_n. \quad (3)$$

Измеряя зависимость X от m или расстояние между полосами ΔX , можно определить ширину щели S_2 .

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении предлагается исследовать дифракцию Фраунгофера на щели и проследить, как влияют изменение ширины щели и её смещение на характер дифракционной картины.

Настройка установки

1. Не разбирая схемы из упражнения А, добавьте к ней линзу O_2 (см. рис. 3). Поставьте линзу O_2 между щелью S_2 и микроскопом (чем короче установка, тем ярче будет картина).
2. Настройте микроскоп на фокальную плоскость Π линзы (фокус линзы указан на её оправе). Для этого временно снимите со скамьи щель S_2 и убедитесь, что свет проходит через центры линз и попадает на объектив микроскопа. Перемещая микроскоп вдоль скамьи, найдите резкое изображение щели S_1 . Закрепите микроскоп и линзы на скамье.

*Если измерять положения максимумов (светлых полос), следует учесть, что находятся приблизительно посередине между минимумами (кроме центрального), и из-за убывания интенсивности немного смещены к центру картины. Максимумы функции $|\sin x/x|^2$ находятся в точках $x = 0, \pm 1,43\pi, \pm 2,46\pi, \pm 3,47\pi, \dots$

- Верните щель S_2 между линзами и подберите её ширину так, чтобы в поле зрения микроскопа появилась дифракционная картина.

В отличие от френелевой дифракционной картины, фраунгоферова занимает всё поле зрения микроскопа. Уменьшая ширину входной щели S_1 , добейтесь наибольшей контрастности картины.

Измерения

- Измерьте с помощью окулярной шкалы микроскопа координаты x_m нескольких (на сколько позволяет видимость, но не менее 5) дифракционных минимумов в обе стороны от центра.
- Запишите ширину b щели S_2 (по микрометрическому винту) и фокусное расстояние f_2 линзы O_2 .
- *Повторите измерения для другой ширины щели b .

Качественные наблюдения

- Убедитесь, что смещение щели S_2 в боковом направлении не приводит к сдвигу дифракционной картины. Объясните явление.
- Наблюдайте, как изменяется масштаб дифракционной картины при уменьшении ширины b щели S_2 .

Обработка результатов

- Постройте график зависимости положений x_m экстремумов дифракционной картины от их номера m . Убедитесь, что зависимость может быть аппроксимирована прямой линией. По наклону прямой определите ширину щели b . Оцените погрешность результата. Сравните результат с прямым измерением по микрометрическому винту.

В. Дифракция Фраунгофера на двух щелях

Схема для наблюдения дифракции Фраунгофера на двух щелях изображена на рис. 4. По сравнению с рис. 3 в ней щель S_2 заменена на экран Э с двумя щелями. При этом щель S_2 (с микрометрическим винтом) установлена вместо входной щели S_1 (для измерения влияния ширины источника на чёткость картины).

Результат дифракции на двух щелях можно представить как *интерференцию* дифракционных картин от каждой щели (аналог интерференционной схемы Юнга).

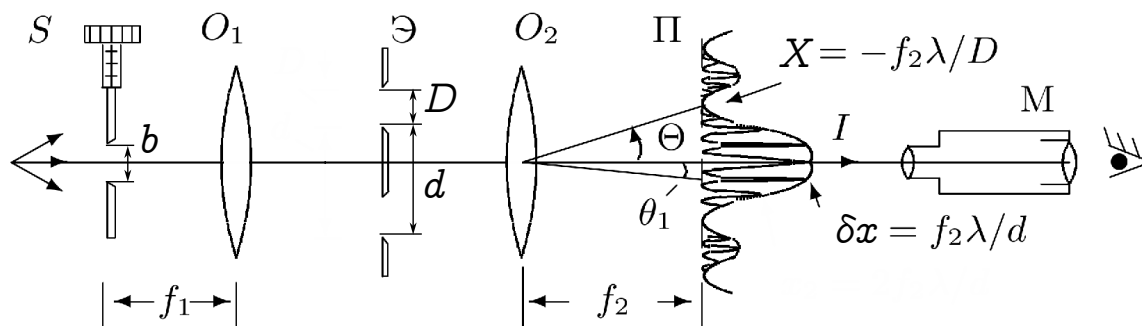


Рис. 4. Схема для наблюдения дифракции Фраунгофера на двух щелях

Если входная щель достаточно узка, то дифракционная картина в плоскости П (рис. 4) подобна той, что получалась при дифракции на одной щели, однако теперь вся картина

испещрена рядом дополнительных узких полос. Наличие этих полос объясняется суперпозицией (*интерференцией*) световых волн, приходящих в плоскость наблюдения через разные щели экрана Э. В центре главного дифракционного максимума располагается светлая полоса (разность на оси, в силу симметрии, равна нулю). Светлая интерференционная полоса наблюдается также, когда разность хода кратна длине волны. Угловая координата θ_n интерференционного максимума n -го порядка определяется соотношением

$$\theta_n d = n\lambda, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4)$$

где d — расстояние между щелями. Линейное расстояние δx между соседними интерференционными полосами в плоскости П равно поэтому

$$\delta x = f_2 \frac{\lambda}{d}. \quad (5)$$

На рис. 4 показано распределение интенсивности в фокальной плоскости объектива O_2 . Штриховой линией (в увеличенном масштабе) изображено распределение интенсивности при дифракции света на одиночной щели. Поскольку полная угловая ширина главного дифракционного максимума (от минимума до минимума) равна $2\lambda/D$, где D — ширина отдельной щели, то на нём укладывается $N = \frac{2d}{D}$ *тёмных* интерференционных полос (в центре картины максимум, поэтому светлых полос — на одну больше).

При дифракции света на двух щелях чёткая система интерференционных полос наблюдается только при достаточно узкой ширине входной щели (S_2), которую можно рассматривать как протяжённый источник света размером b . Для наблюдения интерференции необходимо, чтобы расстояние d между щелями не превышало *радиуса когерентности* (см. раздел II):

$$d \leq \rho_{\text{ког}} \approx \frac{\lambda}{b} f_1. \quad (6)$$

Таким образом, по размытию интерференционной картины можно оценить размер источника b . Этот метод используется в звёздном интерферометре при измерении угловых размеров звёзд.

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении предлагается исследовать картину дифракции на двух щелях и оценить влияние размеров источника на чёткость картины.

Подготовка и настройка

1. Не перемещая (!) линз и микроскопа в установке, собранной к предыдущему упражнению, уберите входную щель S_1 и установите на её место щель с микрометрическим винтом S_2 .

Слегка передвигая щель S_2 вдоль скамьи, найдите в микроскопе резкое изображение новой входной щели. Закрепите щель.

2. Поставьте между линзами (там где раньше была щель S_2) экран Э с двойной щелью. В области главного дифракционного максимума должна появиться система равноотстоящих тёмных и светлых полос (рис. 4). Центрировкой системы и подбором ширины входной щели добейтесь наибольшей чёткости дифракционной картины.

Измерения

3. Подсчитайте число N тёмных интерференционных полос в пределах главного (центрального) дифракционного максимума.

4. Измерьте расстояние δx между минимумами интерференционной картины. Для этого можно с помощью микрометрического винта поперечных салазок микроскопа определить координаты самых удалённых друг от друга тёмных полос внутри центрального дифракционного максимума и разделить на число светлых промежутков между ними.
5. Исследуйте влияние размера источника на видность (контрастность) интерференционной картины. Для этого, расширяя входную щель S , выберите такую её ширину b_0 , при которой наступает первое исчезновение интерференционных полос.
6. Убедитесь, что при дальнейшем увеличении входной щели картина вновь появляется, но она заметно менее контрастна. Определите соответствующую ширину входной щели b_1 .
7. Запишите фокусные расстояния обеих линз.
8. Ширину двойных щелей D и расстояния между ними d можно измерить с помощью микроскопа. Чтобы не испортить настройку положения микроскопа, эти измерения рекомендуется делать в последнюю очередь. Метод изложен в упражнении Г, п. 4.

Обработка результатов

9. По расстоянию δx между полосами, рассчитайте расстояние между щелями d и сравните с измеренным.
10. Сравните наблюдаемое число полос в главном максимуме с теоретическим.
11. Сравните измеренную ширину b_0 входной щели S с расчётом по формуле (6). При какой ширине b_1 изображение должно опять восстановиться?

Г. Влияние дифракции на разрешающую способность оптического инструмента

Установка, использованная в упражнении Б (рис. 3), позволяет исследовать влияние дифракции на *разрешающую способность* оптических инструментов.

Линзы O_1 и O_2 (без щели S_2) создают в плоскости Π изображение щели входной S_1 , рассматриваемое в микроскоп М. Таким образом, пара линз O_1 , O_2 и микроскоп в совокупности может рассматриваться как некий *оптический инструмент*. При этом входная щель S_1 и коллиматор O_1 создают модель далёкого предмета, а объектив O_2 и микроскоп М составляют «зрительную трубу», наведённую на этот предмет.

Если перед объективом O_2 зрительной трубы расположить щель S_2 , то изображение объекта будет *искажено дифракцией* на щели S_2 . Чем меньше ширина b этой щели, тем сильнее искажение. Качественной характеристикой этих искажений может служить минимальное угловое расстояние φ между точками рассматриваемого предмета, которые воспринимаются как *раздельные*.

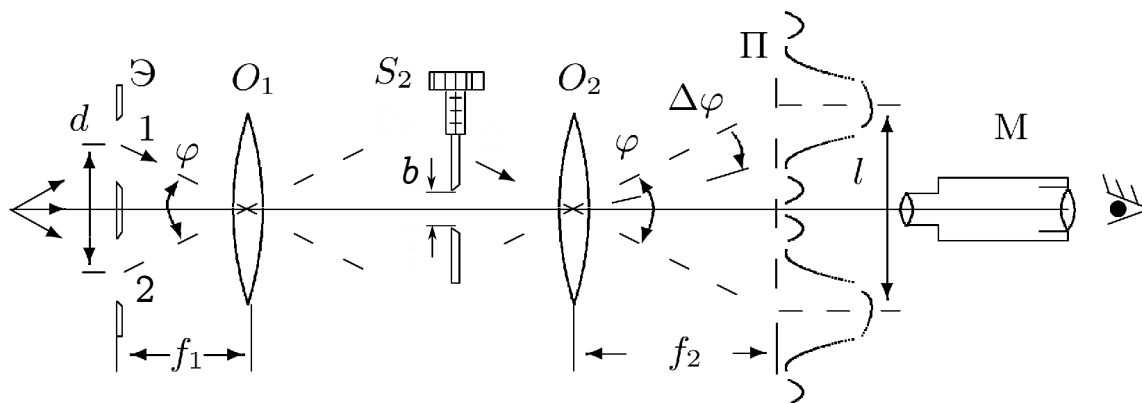


Рис. 5. Схема для исследования разрешающей способности оптического инструмента

В качестве предмета будем использовать экран Э с двумя узкими щелями (поместим его вместо щели S_1). Пусть расстояние между щелями равно d . Тогда от каждой из щелей экрана на щель S_2 будут падать два параллельных пучка света, составляющих между собой угол

$$\varphi \approx \frac{d}{f_1} \quad (7)$$

(а центры двух дифракционных пятен в плоскости П будут находиться на расстоянии $l = f_2 \varphi$ друг от друга).

Угловая ширина же $\Delta\varphi$ каждого изображения определяется *дифракцией* света на щели S_2 . В режиме дифракции Фраунгофера полуширина центрального дифракционного максимума равна $\Delta\varphi \sim \lambda/b$, где b — ширина щели S_2 .

Если полуширина главного дифракционного пятна превысит расстояние между центрами пятен $\Delta\varphi > \varphi$, пятна от двух щелей сольются в одно, и по виду дифракционной картины будет трудно определить, представляет ли собой источник двойную или одиночную щель. Это условие разрешения двух изображений называют также *критерием Рэля*. Итак, щели можно считать различимыми, если

$$\frac{\lambda}{b} < \frac{d}{f_1}. \quad (8)$$

ЗАДАНИЕ

В этом упражнении предлагается исследовать влияние размера диафрагмы, ограничивающей поперечный размер пучка света, на чёткость изображения объекта.

Настройка и измерения

1. Соберите схему согласно рис. 5. Для этого в предыдущей схеме (рис. 4), не меняя(!) положений линз и микроскопа, уберите входную щель S и поставьте на её место экран Э с двойной щелью. Перемещая экран вдоль оси системы, получите в поле зрения микроскопа чёткое, симметричное изображение двойного источника.
2. Установите максимальную ширину щели S_2 и поставьте её между линзами O_1 и O_2 . Постепенно уменьшая её ширину b , наблюдайте за ухудшением качества изображения двойной щели в микроскоп.
3. Подберите ширину b_0 щели S_2 так, чтобы изображения обеих щелей почти сливались, но всё-таки ещё воспринимались раздельно.
4. Для измерения размеров двойной щели, поставьте её непосредственно перед микроскопом и измерьте с помощью микрометрического винта поперечных салазок микроскопа расстояние d между щелями и ширину каждой щели D (сделайте чертёж щели и запишите координату каждой из 4-х вертикалей). Используйте подсветку лампой.

Обработка результатов

5. Для проверки разрешающей способности по критерия Рэля сравните измеренную ширину b_0 щели S_2 с расчётом по формуле (8).

Версия от 18.02.2023

ПРИЛОЖЕНИЕ

Детальное изучение картины дифракции Френеля на щели

Как следует из формулы (3.19) теоретического Введения (см. п. 1.4.2), комплексная амплитуда колебаний в точке, находящейся в плоскости наблюдения на расстоянии x от оси, равна

$$A(x) = \text{const} \int_{x-b/2}^{x+b/2} e^{ik\xi^2/2z} d\xi = \text{const} \int_{x-b/2}^{x+b/2} \left[\cos\left(\frac{k\xi^2}{2z}\right) + i \sin\left(\frac{k\xi^2}{2z}\right) \right] d\xi \quad (1)$$

Эти интегралы, конечно, не вычисляются в элементарных функциях. Однако они входят в число стандартных специальных функций, численное вычисление которых реализовано практически в любом математическом пакете или библиотеке.

Функции

$$\mathcal{S}(t) = \int_0^t \sin\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du, \quad \mathcal{C}(t) = \int_0^t \cos\left(\frac{\pi u^2}{2}\right) du$$

принято называть *интегралами Френеля*. Чтобы свести комплексную амплитуду (1) к комбинации стандартных функций, сделаем замену $\pi u^2/2 = k\xi^2/2z$, т.е. $\xi = u\sqrt{\lambda z/2}$. Кроме того, обезразмерим задачу: будем измерять координату в единицах полуширины щели $\tilde{x} = 2x/b$ (и $\tilde{\xi} = 2\xi/b$), а также введём в качестве безразмерного параметра число открытых зон Френеля $m = b^2/4\lambda z$. Тогда после подстановки получим

$$A(\tilde{x}) = \text{const} \cdot [\mathcal{C}(t) + i\mathcal{S}(t)] \Big|_{\sqrt{2m}(\tilde{x}-1)}^{\sqrt{2m}(\tilde{x}+1)}.$$

Для вычисления наблюдаемой интенсивности дополнительно нужно вычислить квадрат модуля функции: $I(\tilde{x}) = |A(\tilde{x})|^2$.

Численное вычисление интегралов Френеля реализовано, например, функцией `fresnel` в модуле `scipy.special` пакета `scipy` для языка Python.

На рис. 1 представлена расчётная зависимость интенсивности в центре картины I_0 от числа открытых зон Френеля $m = b^2/(4\lambda z)$. Видно, что положения экстремумов действительно лежат примерно на 0,25 зоны левее от целых значений m .

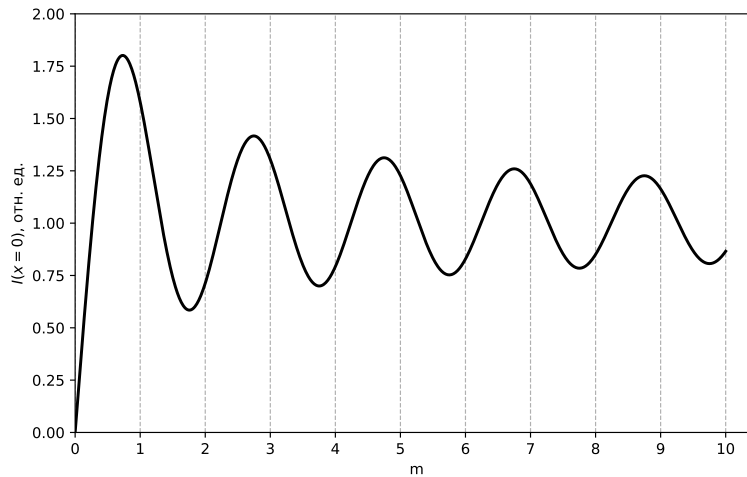


Рис. 1. Зависимость интенсивности в центре картины от числа открытых зон Френеля

На рис. 2 изображены зависимости и соответствующие им дифракционные картины распределения интенсивности при различном числе открытых зон Френеля, соответствующих экстремумам интенсивности на оси. Видно, что картины испещрены множеством полос, но относительно чётко на светлом фоне выделяются тёмные полосы в количестве $m - 1$ (округлённо до целого).

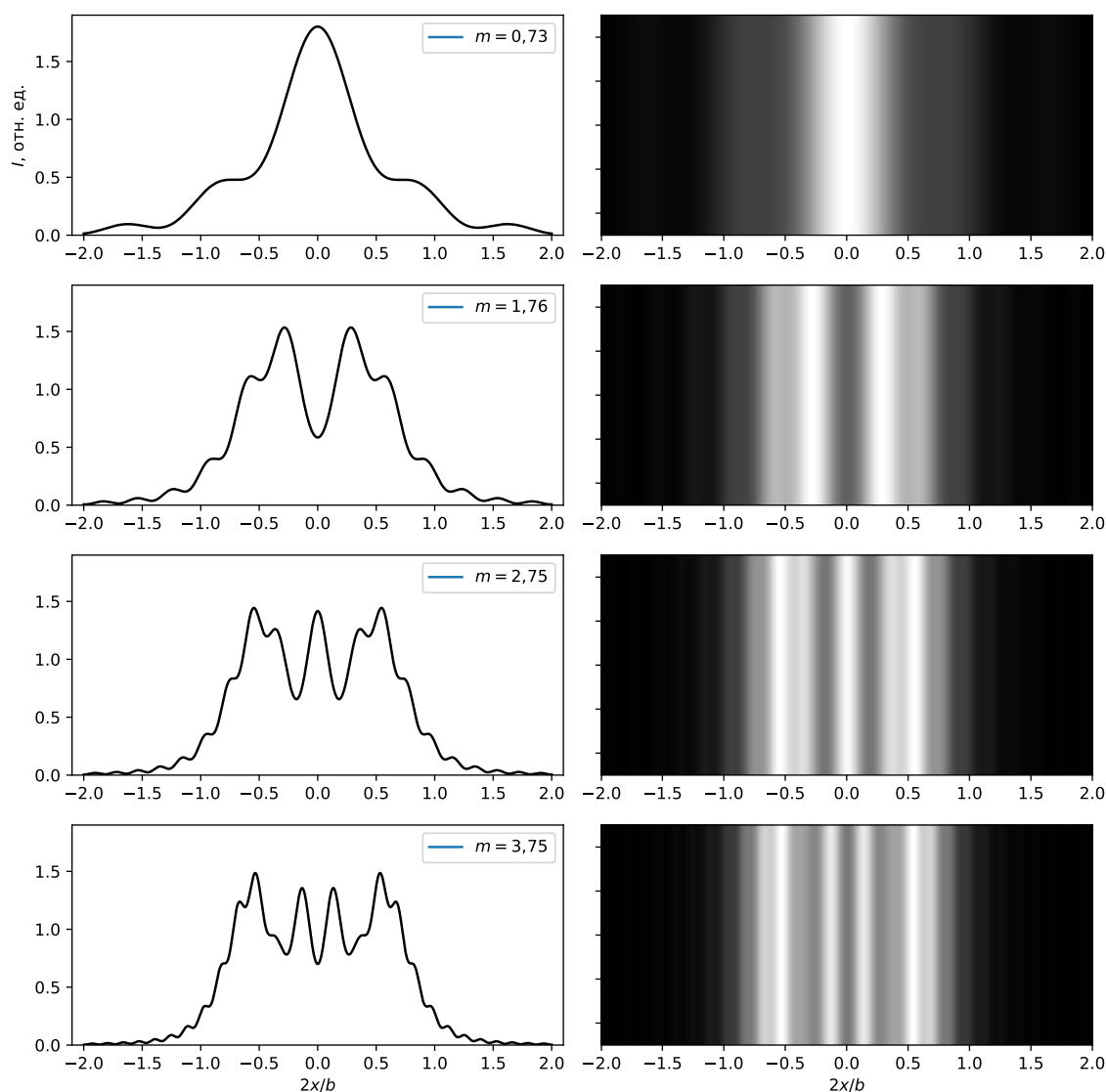


Рис. 2. Зависимости интенсивности от координаты при разном числе открытых зон Френеля

ЗАДАНИЕ

1. Сфотографируйте дифракционные картины, когда на них наиболее чётко наблюдается целое число тёмных полос. При съёмке важно убедиться, что картина не «пересвечена» — регистрируемая интенсивность нигде не превышает максимальную и на фото отсутствуют области, залитые исключительно белым цветом. Сравните (качественно) полученные фотографии с расчётными картинками рис. 2.
2. Обработайте полученные фотографии (с помощью графического редактора или самостоятельно написанной программы) и получите соответствующие зависимости интенсивности от координаты $I(x)$.

Следует понимать, что матрица и программное обеспечение фотоаппарата могут существенно искажать вид функции $I(x)$ (особенно, при включённых автонастройках), однако на положения максимумов и минимумов они практически не влияют.

3. Сопоставьте положения экстремумов на фотографиях и на аналитических зависимостях на рис. 2 (аналитические зависимости можно получить самостоятельно, например, с помощью упомянутой выше функции `scipy.optimize.fresnel` языка Python). Сделайте вывод о практической применимости интегралов Френеля для расчёта картины дифракции.