Démonstration de la conjecture de Syracuse

b3j0f

February 29, 2016

0.1 Problème

La conjecture de syracuse veut que :

Soit la suite d'entiers naturels non nuls U_n tel que:

$$U_{n+1} = \begin{cases} U_n/2 & \text{si } U_n \text{ est pair} \\ 3Un+1 & \text{si } U_n \text{ est impair} \end{cases}$$

Alors $\forall U_n \in N$, $\exists m > n$ tel que $U_m = 1$.

0.2 Démonstration

Démonstration par récurrence du comportement de U_n dans les sous-ensembles R d'entiers fermés $[2^m; 2^{m+2}[$ où m est pair et $\in N$.

Observons le comportement de U_n sur les ensembles $R0 = [1; 4[$, $R1 = [4; 16[$ et $R2 = [16; 64[$.

Pour observer ce comportement, je ne m'attarderai que sur les valeurs impairs de U_n. C'est pourquoi je vais définir la fonction $F : N* -> N*$ telle que :

$$F(x) = \begin{cases} F(x/2) & \text{si } x \text{ est pair} \\ x & \text{si } x \text{ est impair} \end{cases}$$

Les tableaux suivants comprennent tous les entiers impairs de $R0$, $R1$, et $R2$, avec respectivement la valeur de F, un indicatif de série remarquable que j'expliquerai par la suite.

$R0$	F	Serie
1	1	2
3	5	1

$R1$	F	Serie
5	1	3
7	11	1
9	7	2
11	17	1
13	5	3
15	23	1

$R2$	F	Serie
17	13	2
19	29	1
21	1	3
23	35	1
25	19	2
27	41	1
29	11	3
31	47	1
33	25	2
35	53	1
37	7	3
39	59	1
41	31	2
43	65	1
45	17	3
47	71	1
49	37	2
51	77	1
53	5	3
55	83	1
57	43	2
59	89	1
61	23	3
63	95	1

0.2.1 Découpage de R en suites remarquables

Afin de mieux isoler des comportements récursifs de la suite U_n, je vais transformer l'ensemble des entiers naturels en trois suites bien distinctes (sans collision).

Suite 1 : $S_{1,n}$

Premièrement, intéressons-nous à la suite 1.

Cette suite a plusieurs propriétés remarquables :

Valeurs Ses valeurs correspondent à la fonction linéaire $y = 3 + 4x$, $\forall x \in N$.

Par exemple :

- $3 = 4 + 4 * 0$
- $7 = 3 + 4 * 1$
- $11 = 3 + 4 * 2$
- etc.

Application de F L'application de F est donnée par la fonction linéaire $y = 5 + 6x$, $\forall x \in N$.

Par exemple :

- $F(3) = 5 = 5 + 6 * 0$
- $F(7) = 11 = 5 + 6 * 1$
- $F(11) = 17 = 5 + 6 * 2$
- etc.

Et pour tout $S_{1,n}$, on a $F_n(S_{1,n}) = S_{1,n} * 2 - 2 * n - 1$.

Serie 2 : $S_{2,n}$

La seconde suite est très proche de la première.

Valeurs Les valeurs de cette suite sont déterminées par la fonction linéaire $y = 1 + 8x$, $\forall x \in N$.

Par exemple :

- $1 = 1 + 8 * 0$
- $9 = 1 + 8 * 1$
- $17 = 1 + 8 * 2$

Application de F L'application de F correspond à la fonction linéaire $y = 1 + 6x$, $\forall x \in N$.

Par exemple :

- $F(1) = 1 = 1 + 6 * 0$
- $F(9) = 7 = 1 + 6 * 1$
- $F(17) = 13 = 1 + 6 * 2$

Et pour tout élément de S_2, on a $F(S_{2,n}) = S_{2,n} * 2 - 2 * n$.

Suite 3 : $S_{3,n}$

Cette dernière suite est plus particulière.

Valeurs Les valeurs de $S_{3,n}$ sont déterminées par la fonction linéaire $y = 5 + 8n$, $\forall n \in N$.

Par exemple :

- $5 = 5 + 8 * 0$
- $13 = 5 + 8 * 1$
- $21 = 5 + 8 * 2$
- $29 = 5 + 8 * 3$
- $37 = 5 + 8 * 4$
- $45 = 5 + 8 * 5$
- $53 = 5 + 8 * 6$
- $61 = 5 + 8 * 7$

Application de F Contrairement aux précédentes suites, cette fois, l'application de F n'est pas linéaire mais successivement croissante et décroissante.

Par ailleurs, l'application de F provient directement des applications de F dans l'ensemble R_{x-1}, $x \in N$ qui précéde celui de $S_{3,n} \in R_x$.

On a donc : $F(S_{3,n}) = F(\frac{S_{3,n}-1}{4})$

Par exemple :

- $F(21) = F(\frac{21-1}{4}) = F(5) = 1$
- $F(29) = F(\frac{29-1}{4}) = F(7) = 11$
- $F(37) = F(\frac{37-1}{4}) = F(9) = 7$
- $F(45) = F(\frac{45-1}{4}) = F(11) = 17$
- $F(53) = F(\frac{53-1}{4}) = F(13) = 5$
- $F(61) = F(\frac{61-1}{4}) = F(15) = 23$

0.2.2 Conclusion

Par l'observation, nous avons montré un découpage de l'ensemble N en sous-ensembles R_x, $x \in N$. Dans ces sous-ensembles, nous avons observé des suites disjointes qui couvrent l'ensemble des entiers non nuls en appliquant la fonction F.

De plus, nous avons un cycle comportemental de ces suites tel que :

Les suites $S_{1,n}, S_{2,n} et S_{3,n}$ se suivent successivement et recursivement dans cet ordre :

$\{S_{2,n}, S_{1,n}, S_{3,n}, S_{1,n+1}\}$.

De plus, nous avons un respect des proportions où $\forall x \in N$, $|R_x| * 2 = |R_{x+1}|$

En sachant que pour R_0, toutes les valeurs de cet ensemble valident la conjecture de Syracuse et que R_1 est validé par proportionalité des comportements alors par récurrence, la conjecture de Syracuse est vrai quelque soit l'ensemble R_x, $\forall x \in N$ et donc par transivité sur $N*$.