

Technische Realisierung einer
Computer-Simulation für die Reflexion von
Lichtstrahlen in einem zweidimensionalen Raum

Ben Weber

November 2021

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Aufbau	3
2.1	Welt	3
2.2	Lichtstrahl	3
2.3	Lichtweg	4
2.4	Hindernis	4
2.4.1	Kreis	5
2.4.2	Linie	5
2.4.3	Kurve	5
2.5	Material	5
3	Technische Voraussetzungen	7
4	Simulationsprozess	8
4.1	Erzeugen der Welt	8
4.2	Berechnung des Lichtwegs	9
4.3	Berechnung der Reflexion	10
5	Fazit	17

1 Einleitung

Die physikalischen Grundlagen der Reflexion von Lichtstrahlen folgen simpler Logik. So lassen sich die Bahnen von reflektierten Lichtwellen an einfachen geometrischen Formen nahezu intuitiv prognostizieren. In einem komplexeren Umfeld mit einer erhöhten Anzahl an physikalisch relevanten Entitäten wird die Prognose der Gesamtheit aller stattfindenden Einwirkungen auf den Lichtweg jedoch für Menschen zunehmend schwierig zu prognostizieren und vor allem zeitaufwendig. Wenn auch der initiale Aufwand für die digitale Implementierung dieser physikalischen optischen Grundlagen der Reflexion größer sein mag, ist dies vor allem in erwähnten umfangreicheren Situationen praktikabel und ermöglicht schnelle Iterationen bezüglich der Veränderung des Resultats im Zusammenhang mit der Ausgangssituation.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, wie eine solche digitale Simulation umgesetzt werden kann. Hierbei wird nicht nur auf die Umsetzung der tatsächlichen Reflexion eingegangen, sondern auch auf den Aufbau einer solchen Computer-Simulation, sodass eine Erweiterung hinsichtlich weiterer strahlenoptischer Phänomene möglich ist.

Zur Vereinfachung wird von einer idealisierten, zweidimensionalen, evakuierten Umgebung ausgegangen, in der Lichtstrahlen nicht an Intensität verlieren und die Oberflächen von Hindernissen störungsfrei sind.

Die Quellenlage bezüglich der hier verwendeten physikalischen Grundlagen der geometrischen Optik ist als sehr sicher zu bewerten. Der Aufbau und die technische Umsetzung der Simulation entstammen jedoch fast ausschließlich aus Überlegungen des Autors. Etwaige Fehler hat allein der Autor zu verantworten.

2 Aufbau

Im Folgenden wird der Aufbau der Simulation zunächst theoretisch und abstrahiert betrachtet. Folgende Notation soll jedoch eine Verknüpfung mit dem Quellcode vereinfachen: (`Name` im `Quellcode`)

2.1 Welt

Die Welt (`World`) ist der Grundstein für die Simulation. Zu diesem virtuellen zweidimensionalen Raum können sämtliche Entitäten hinzugefügt werden. Hier werden diese verwaltet, verarbeitet und zur Visualisierung ausgegeben.

2.2 Lichtstrahl

In der geometrischen Optik geht man bei einem Lichtstrahl (`Ray`) von einem Strahl aus, der sich von einem Ursprung A geradlinig in eine Richtung mit dem Winkel α ausbreitet. (vgl. Tipler 2015, S. 1041) Mathematisch wird dieser als Halbgerade angesehen \overrightarrow{AB} . In der Simulation ist es sinnvoll lediglich den Startpunkt als Ortsvektor \vec{O} (`origin`) innerhalb der Welt und den Winkel (`angle`), in den der Strahl ausgeht, direkt zu speichern.

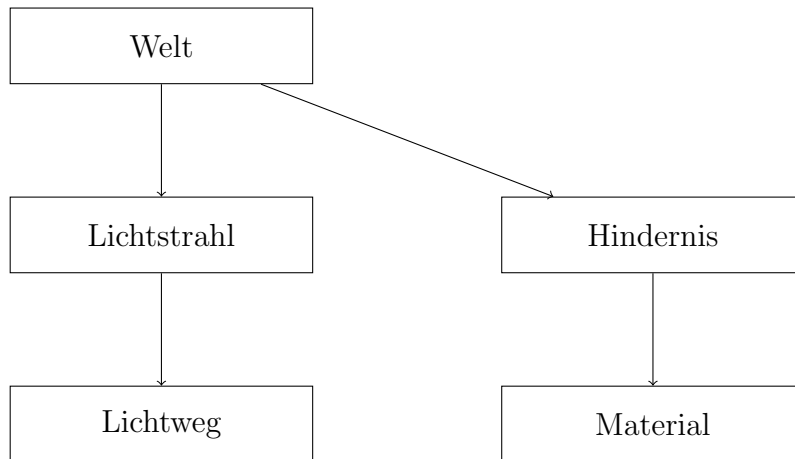


Abbildung 2.1: Schematischer Aufbau der Simulation

Quelle: Eigene Darstellung

2.3 Lichtweg

Es muss davon ausgegangen werden, dass ein Lichtstrahl in der die Kollision mit anderen Objekten seine Richtung verändert. Ab einer Richtungsänderung wird der bisherige Lichtstrahl als Lichtweg (**Line**) gespeichert, um in später zu visualisieren. Hierbei besteht ein Lichtstrahl aus den Ortsvektoren \vec{O} (**origin**), dem Ursprung des Lichtstrahls und \vec{E} (**end**), dem Punkt der Kollision.

2.4 Hindernis

Bei allen Entitäten in der Welt, die nicht Strahl oder Lichtweg sind, handelt es sich um Hindernisse. Diese definieren sich durch ihre geometrische Form und Position in der Welt und können von Lichtstrahlen getroffen werden. Es sind verschiedene Variationen möglich. Jedes Hindernis (**Obstacle**) hat jedoch einen Startpunkt als Ortsvektor \vec{A} (**start**) in der Welt und ein Material (**material**) (vgl. 2.5). Folgende Typen wurden für diese Arbeit ausgewählt:

2.4.1 Kreis

Der Kreis (`type: 'circle'`) hat eine zusätzliche Angabe über den Radius r (`radius`).

2.4.2 Linie

Neben einen Anfangspunkt hat die Linie (`type: 'line'`) auch einen Ortsvektor \vec{B} als Endpunkt.

2.4.3 Kurve

Zusätzlich kann ein Hindernis auch eine Kurve (`type: 'curve'`) sein. Das ermöglicht die Konstruktion verschiedener besonderer Reflektoren (z. B. Parabolischer Reflektor). Für den Verlauf der Kurve besitzt dieser Hindernis-Typ eine Funktion f . Um eine Kurve beliebig in der Welt zu positionieren, kann ihr zusätzlich einen Winkel γ (`rotation`) übergeben werden, der alle Punkte auf der Kurve, relativ zum Ursprung, rotiert.

Im Umfang dieser Arbeit wird bewusst auf eine vollständige und genaue Darstellung eines Graphen verzichtet. Daher werden nur Punkte in einem Intervall $[-40, 40]$ im Abstand von einer übergebenen Skalierung k (`scale`) errechnet, als Linien verbunden und als diese fortlaufend verarbeitet. Diese Annäherung ist ausreichend, während gleichzeitig der Umfang stark reduziert wird.

2.5 Material

Die Existenz eines Materials (`Material`) in der Welt besteht nur in der Verknüpfung zu einem Hindernis. Ein Material ist für die Verarbeitung eines einfallenden, mit dem Hindernis kollidierenden, Lichtstrahls verantwortlich und

kann eine beliebige Anzahl an neuen Lichtstrahlen zurückgeben.

In dieser Arbeit wird nur die Reflexion bei dem Material Spiegel (**mirror**) behandelt. Eine Trennung von Material und Hindernis ermöglicht jedoch eine einfache Erweiterung. Dabei können, trotz Veränderung der strahlenoptischen Funktion, die geometrischen Eigenschaften beibehalten werden. So könnte beispielsweise ein Kreis einerseits als Spiegel die Lichtstrahlen reflektieren und andererseits als Glas die Lichtstrahlen brechen; ohne das dafür die Veränderung des Hindernisses vonnöten wäre.

3 Technische Voraussetzungen

Um die Zugänglichkeit der Simulation zu erhöhen, wird diese als Web-App programmiert. Dazu wird die Programmiersprache TypeScript genutzt und die Applikation wird mit dem Framework „SvelteKit“¹ kompiliert. Zur Visualisierung wird die Library „Pts“² verwendet. Diese ermöglicht eine einfache Verwendung der Canvas-API. Zusätzlich werden aber auch einige mathematische Hilfsfunktionen von dieser Library verwendet.

Der gesamte Quellcode für die Simulation ist auf GitHub zu finden³. Im Folgenden werden nur rudimentäre Ausschnitte aus dem Code eingebunden. Die fertige Web-App ist ebenfalls als Website aufrufbar⁴.

¹<https://kit.svelte.dev>

²<https://ptsjs.org>

³<https://github.com/b3ngg/ray-optics-simulation>

⁴<https://optics.b3n.gg>

4 Simulationsprozess

Im Folgenden wird nun der Ablauf der Simulation vom Erstellen der Szene bis hin zum Visualisieren des Resultats beschrieben.

4.1 Erzeugen der Welt

Zunächst muss für die Simulation eine Umgebung errichtet werden. Dazu wird eine Welt erstellt. Zu dieser werden in dieser Szene ein von links oben (man beachte, dass das Koordinatensystem den Ursprung links oben hat und die y-Achse umgekehrt ist) beginnender und diagonal nach rechts unten strahlender Lichtstrahl hinzugefügt.

Zudem wird auch ein Hindernis in der Form einer vertikalen Linie in der Mitte der Szene hinzugefügt. Diese hat das Material Spiegel (`mirror`).

Nun wird mit `world.update()` die Simulation aktualisiert und die Lichtwege berechnet. Diese werden zum Schluss visualisiert.

Bei dem Objekt `space` handelt es sich um ein von `Pts` bereitgestellte und zur Visualisierung benötigtes Objekt. Die Klasse `Pt` ist ebenfalls Teil von `Pts` und wird zur Vektormathematik verwendet.

```

/**
 * Simple reflection of a ray on a vertical line
 */
export const lineReflection: Scene = (space) => {
  const form = space.getForm();
  const world = createWorld();

  world.addSource('ray', createRay(new Pt(), Math.PI * 2.25));
  world.addObstacle(
    'line',
    createLine(new Pt(800, 0), { end: new Pt(800, 5000), material: mirror })
  );

  world.update();
  space.add(() => {
    world.draw(form);
  });

  space.playOnce();
};

```

4.2 Berechnung des Lichtwegs

Bei der Berechnung eines Lichtwegs startet die Simulation nur mit einem Ausgangs-Lichtstrahl. Zunächst muss die erste Überschneidung des Strahls mit einem Hindernis bestimmt werden. Für die Bestimmung des Schnittpunktes werden die üblichen Verfahren der euklidischen Geometrie genutzt. Die Funktionen dafür werden von Pts bereitgestellt und sollen hier nicht weiter vertieft werden.

Der Weg von \vec{O} des Lichtstrahls bis zum Schnittpunkt \vec{E} wird als Lichtweg gespeichert und später visualisiert. Aus der Kollision mit dem Hindernis und dem entsprechenden Material können weitere Lichtstrahlen resultieren. Diese Lichtstrahlen durchlaufen den gleichen Prozess wie der erste Lichtstrahl. Daher wird die Funktion als rekursive Funktion verwendet und mit den jeweils

neuen Lichtstrahlen erneut aufgerufen.

```
const calculateTraceLines = (
  currentRay: Ray,
  lines: PtIterable[],
  depth: number
): PtIterable[] => {
  // Prevent infinite reflections
  if (depth >= MAX_TRACE_DEPTH) return lines;

  // Get all collisions
  const allCollisions = getAllCollisions(currentRay, obstacles);

  // Get best collision
  const collision = getFirstCollision(allCollisions, currentRay.origin);

  // Return the lines and the current ray if not collision is found
  if (!collision) return [...lines, rayToPts(currentRay)];

  const { intersection, collider, obstacle } = collision;

  // Get new rays resulting of the collision
  const newRays = obstacle.material.handleCollision(intersection, collider, currentRay, obstacle);

  // Trace new rays
  return newRays
    .map((ray) => {
      return calculateTraceLines(ray, [...lines, [currentRay.origin, intersection]], depth + 1);
    })
    .flat();
};
```

4.3 Berechnung der Reflexion

Bei dem Material des Spiegels wird für jeden eintreffenden Lichtstrahl ein neuer Lichtstrahl mit verändertem Winkel zurückgegeben. Hierbei gilt das Fermat'sche-Prinzip (vgl. Hering 2017, S. 20).

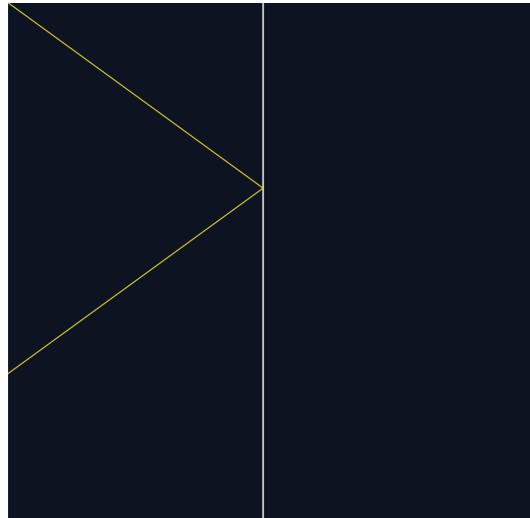


Abbildung 4.1: Reflexion eines Lichtstrahls an einer Linie in der Simulation

Quelle: Eigene Darstellung

An einer Linie

Das Hindernis der Linie kann als eine ebene Grenzfläche angenommen werden. Demnach ist der Betrag des Einfallswinkels ε relative zum Lot der Grenzfläche gleich mit dem Reflexionswinkel ε_r .

$$-\varepsilon = \varepsilon_r \quad (4.1)$$

Es gilt daher zunächst das Lot der Linie zu berechnen. Das Lot ist orthogonal zur Linie. Es kann berechnet werden, indem der Vektor der Linie in zwei Teile zerlegt wird. (vgl. Greve 2006, S. 1)

```
/** Calculate the normal point of a line */
const getLineNormal = (line: PtIterable): Readonly<Pt> => {
  const normalAngle = line[0].$subtract(line[1]).angle() + Math.PI / 2;
  return new Pt(0, 1).toAngle(normalAngle).$unit();
};
```

Mit dem Lot \vec{N} und dem Einfallsvektor \vec{E} lässt sich nun der Reflexionsvektor \vec{R} berechnen. (vgl. Cross 2013, Kapitel 10)

$$\vec{R} = \vec{E} - (\vec{E} \cdot \vec{N})\vec{N} \quad (4.2)$$

Gleichung 4.2 implementiert, sieht wie folgt aus und gibt den neuen reflektierten Lichtstrahl zurück. Die Klasse **Vec** ist von **Pts** bereitgestellt und beinhaltet Operationen der Vektormathematik.

```
/** Calculate the reflected ray of an incoming ray with the angle d to a line on a point */
const getReflectedRayOnLine = (
  incidentRay: Ray,
  line: PtIterable,
  collisionPoint: Pt
): Readonly<Ray> => {
  const d = new Pt(1, 0).toAngle(incidentRay.angle);
  const lineNormal = getLineNormal(line);

  const perpendicular = 2 * Vec.dot(d, lineNormal);
  const reflection = Vec.subtract(d, Vec.multiply(lineNormal, perpendicular));
  const r = new Pt(reflection);

  return createRay(collisionPoint, r.angle());
};
```

An einem Kreis

Ein Kreis kann als Konvexspiegel mit dem Mittelpunkt M und dem Brennpunkt F angesehen werden. (vgl. Kuchling 2004, S. 362) Wobei bei einem Kreis Folgendes gilt:

$$M = F \quad (4.3)$$

4.3 nach ergibt sich für den Reflexionsvektor \vec{R} mit dem Mittelpunkt \vec{M} und dem Schnittpunkt \vec{E} folgende Gleichung:

$$\vec{R} = \vec{E} - \vec{M} \quad (4.4)$$

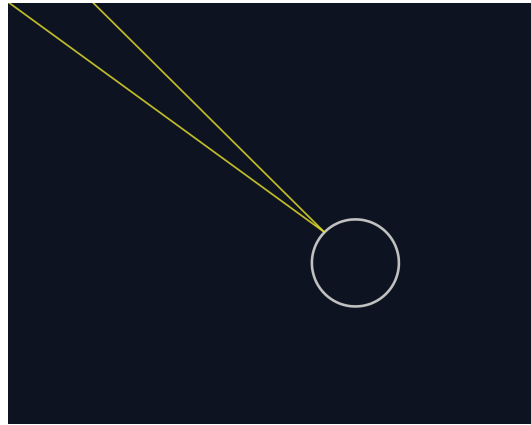


Abbildung 4.2: Reflexion eines Lichtstrahls an einem Kreis in der Simulation
Quelle: Eigene Darstellung

Um Gleichung 4.4 zu implementieren genügt lediglich folgender Quellcode:

```
/** Calculates the reflected ray of an incoming ray on a circle */  
const getReflectedRayOnCircle = (collisionPoint: Pt, circleCenter: Pt): Readonly<Ray> => {  
  const perpendicularAngle = collisionPoint.$subtract(circleCenter).angle();  
  return createRay(collisionPoint, perpendicularAngle);  
};
```

Zusatz: Komplexe Umgebungen

Im Folgenden sollen komplexere Umgebungen und deren Resultat in der Simulation demonstriert werden. Weitere interaktive Beispiele sind online¹ aufzufinden.

Parabolischer Reflektor

Bei einem parabolischen Reflektor handelt es sich um einen Konkavspiegel. (vgl. Kuchling 2004, S. 362). Senkrecht einfallende Strahlen werden hierbei zu einem Brennpunkt reflektiert.

```
/**
 * Reflections of multiple rays on a parabolic reflector
 */
export const parabolic: Scene = (space) => {
  const form = space.getForm();
  const world = createWorld();
  for (let i = 0; i < 10; i++) {
    world.addSource('ray' + i, createRay(new Pt(500 + 40 * i, 0), Math.PI * 2.5));
  }
  world.addObstacle(
    'reflector',
    createCurve(new Pt(480 + 5 * 40, 500), { f: (x) => (x / 10) ** 2, scale: 6, material: mirror })
  );
  world.update();
  space.add(() => world.draw(form)).playOnce();
};
```

¹<https://optics.b3n.gg>

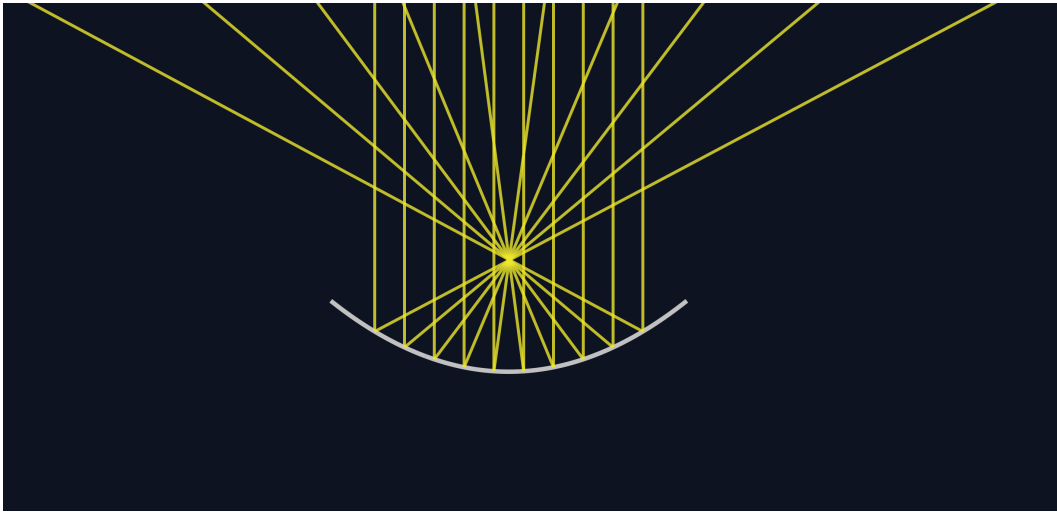


Abbildung 4.3: Reflexion mehrerer Lichtstrahlen an einem parabolischen Reflektor

Quelle: Eigene Darstellung

Feld von Kreisen

Bei einer großen Anzahl an Kreisen entwickeln sich sehr schnell viele Reflexionen. Eine Art Stress-Test für die Simulation.

```
export const circleChaos: Scene = (space) => {
  const form = space.getForm();
  const world = createWorld();
  space.add({
    start: (bound) => {
      const pts = Create.distributeRandom(bound, 30);
      pts.forEach((pt, i) => {
        world.addObstacle('circle' + i, createCircle(pt, { material: mirror, radius: 60 }));
      });

      world.addSource('dynamic-ray', createRay(space.center, Const.pi));
    }
  });
  space.playOnce();
};
```

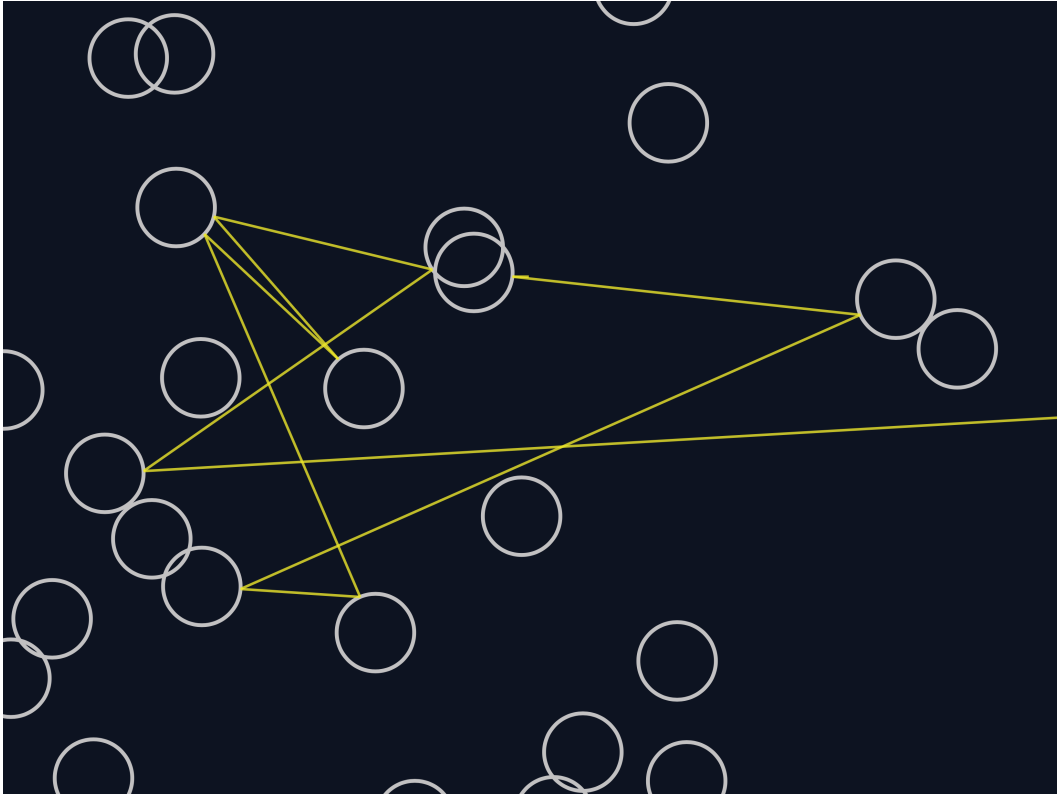


Abbildung 4.4: Reflexion eines Lichtstrahls an vielen Kreisen

Quelle: Eigene Darstellung

5 Fazit

Es ist faszinierend, wie sich in der geometrischen Optik aus simpelsten Regeln schnell spannendes und komplexes Verhalten entwickeln kann. Damit zu experimentieren wäre ohne die Assistenz einer Computer-Simulation nur schwer möglich.

Die aktuelle Version wird mir eine große Hilfe sein, wenn ich in meiner Facharbeit das komplexe Verhalten von Lichtstrahlen im Bezug auf die Chaos-Theorie behandeln werde. Dennoch ist diese Simulation noch weit davon entfernt, vollständig zu sein. Dank der Separierung von Hindernis und Material ist eine Erweiterung im Bezug auf die Brechung von Licht und weiteren Phänomenen einfach möglich. Aber auch die aktuelle Version kann noch optimiert werden. So ist die Performance bei vielen Lichtstrahlen und/oder Hindernissen nicht sonderlich gut. Hier gilt es in Zukunft vor allem das Testen auf Schnittpunkte zu optimieren.

Literatur

- Cross, Don (2013). *Fundamentals of Ray Tracing*. http://cosinekitty.com/raytrace/chapter10_reflection.html. [Online; Zugriff: 21.11.21].
- Greve, Bram de (2006). *Reflections and Refractions in Ray Tracing*. https://graphics.stanford.edu/courses/cs148-10-summer/docs/2006--degreve--reflection_refraction.pdf. [Online; Zugriff: 21.11.21].
- Hering, Ekbert (2017). *Optik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Grundlagen und Anwendungen*. München: Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag. ISBN: 978-3-446-44281-8.
- Kuchling, Horst (2004). *Taschenbuch der Physik mit zahlreichen Tabellen*. München/Wien: Fachbuchverl. Leipzig im Carl-Hanser-Verl. ISBN: 3-446-22883-7.
- Tipler, Paul (2015). *Physik für Wissenschaftler und Ingenieure [der Begleiter bis zum Bachelor]*. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum. ISBN: 978-3-642-54165-0.