Coursera - Machine Learning

Benjamin Kermani

4 octobre 2020

Notions abordées dans ce cours :

- Apprentissage supervisé
  - Régression linéaire
  - Régression logistique
  - Réseaux de neurones
  - Machine à vecteurs de support (SVM)
- Apprentissage non-supervisé
  - K-Means
  - Analyse en composantes principales (PCA)
  - Détection d'anomalies
- Domaines d'application
  - Systèmes de recommandations
  - Machine learning à grande échelle (grand volume de données)
- Conseils de conception
  - Biais/variance
  - Régularisation
  - Décisions d'amélioration et de priorisation
  - Evaluer un algorithme d'apprentissage
  - Courbes d'apprentissage
  - Analyse des écarts
  - Analyse d'une pipeline d'un algorithme de machine learning

Table des matières

1 Introduction

Definition 1.1. Machine Learning "Science of getting computers to learn, without being explicitly programmed".

"A computer program is said to learn from experience E with respect to some class of tasks T and performance measure P, if its performance at tasks in T, as measured by P, improves with experience E."

1.1 Différence avec le Deep Learning

Le Deep Learning est un sous-ensemble du Machine Learning, la principale différence réside dans le fait qu'un programme de Deep Learning est capable de déterminer, grâce à un réseau de neurones, si une prédiction est précise ou non, sans l'assistance d'un ingénieur.

1.2 Apprentissage Supervisé

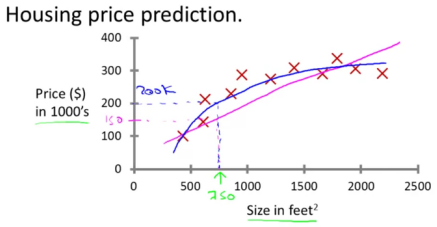
On entend par apprentissage supervisé, que le jeu de données donné à l'algorithme contient les "bonnes réponses". On sait à quoi ressemble une "bonne" sortie, avec l'idée qu'il y a une relation entre notre entrée et la sortie.

Le problème de la prédiction du prix d'une maison en fonction de sa taille est ce que l'on appelle un problème de régression

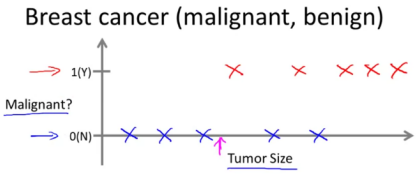
Definition 1.2. Problème de régression "Predict continuous valued output."

Tandis que le problème du "cancer du sein" est un problème de classification

Definition 1.3. Problème de classification "Predict discrete valued output."



(a) Problème de régression



(b) Problème de classification

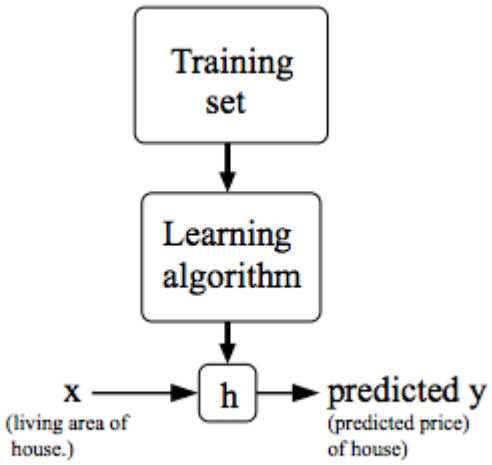
1.3 Apprentissage Non-Supervisé

Definition 1.4. Apprentissage non-supervisé Lorsqu'on donne une grande quantité de données, non-étiquetées, à un algorithme et qu'on lui demande de découvrir les structures sous-jacentes à ces données.

Cette méthode de résolution permet de résoudre des problèmes dont on a peu ou pas d'informations sur la forme de sa solution.

2 Régression Linéaire à Une Variable

2.1 Modèle et Fonction de Coût



On utilisera $x^{(i)}$ pour dénoter les entrées, $y^{(i)}$ pour les sorties, et $(x^{(i)}, y^{(i)})$ pour la ième expérience.

Fonction de coût Elle permet de trouver la meilleure fonction affine pour représenter nos données

On va chercher à minimiser la fonction de coût $J(\theta_0, \theta_1)$. Cette fonction prend la moyenne de la différence entre la fonction d'évaluation, "d'hypothèse" $h_\theta(x_i)$ et les sorties y_i :

$$J(\theta_0, \theta_1) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} (h_\theta(x_i) - y_i)^2 \tag{1}$$

Cette fonction est également appelée : "squared error function"

Fonction de coût : Intuitions Soit une équation du type $h(x) = \theta_1 x + \theta_0$ Lorsqu'on pose $\theta_0 = 0$, on remarque que notre fonction de cout $J(\theta_1)$ est une équation à 2 dimensions.

Ainsi lorsque $\theta_0 \neq 0$, On obtient une figure en 3D ("contour plot").

2.2 "Parameter Learning"

2.2.1 Descente de Gradient

La descente de gradient est un algorithme qui permet de minimiser la fonction de coût $J(\theta_0, \theta_1)$

Il garantit de trouver **un optimum local, i.e un minimum local.** On effectue des pas et on cherche le point sur la surface (le "contour plot" de la fonction de coût), qui minimise le plus sa valeur, on itère jusqu'à atteindre un minimum local

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1) \tag{2}$$

Où $j = 0, 1$ représente les index des variables et α le "taux d'apprentissage", il contrôle la "grandeur" des pas que l'on fait à chaque itération.

Il faut mettre à jour les valeurs des paramètres **simultanément**, sans quoi la valeur de la fonction de coût changerais pour les autres paramètres

Descente de gradient : Intuitions Si l'on cherche un minimum local, alors la fonction $J(\theta_0, \theta_1)$ décroît et par conséquent, la valeur de $\frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1)$ est négative, d'où le signe moins dans l'algorithme.

Si α est trop grand, il peut faire échouer la convergence et même faire diverger la fonction de coût. si α est trop petit, la convergence sera très lente.

Si α est fixé, l'algorithme converge quand même vers un minimum local puisque plus on se rapproche d'un minimum, plus la dérivée partielle, $\frac{\partial}{\partial \theta_j} J(\theta_0, \theta_1)$ décroît (la pente est moins raide).

2.2.2 Descente de Gradient Dans le Cas d'une Régression Linéaire

On va utiliser l'algorithme de "descente de gradient" pour notre fonction de coût préalablement établie. En trouvant les dérivées partielles de notre fonction de coût $J(\theta_0, \theta_1)$, on trouve :

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (h_\theta(x_i) - y_i) \tag{3}$$

$$\theta_1 := \theta_1 - \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (h_\theta(x_i) - y_i) * x_i \tag{4}$$

Cette version est appelée "Batch Gradient Descent", puisqu'on utilise tous nos tuples de données.

Note : Dans notre cas, la fonction de coût ne comporte qu'un minimum global (et aucun local).

3 Rappels : Algèbre Linéaire

Dimensions d'une matrice = nombre de lignes * nombre de colonnes

Addition de matrices Pour additionner deux matrices, leurs dimensions doivent être **similaires**

Multiplication de matrices Soit une matrice A de dimensions (n,m)

Soit une matrice B de dimensions (m,p)

Pour pouvoir multiplier la matrice A par la matrice B, il faut que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.

La matrice résultat M aura pour dimensions (n,p). Soit autant de lignes que la matrice A et le même nombre de colonnes que la matrice B

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1*a+2*b+3*c \\ 4*a+5*b+6*c \\ 7*a+8*b+9*c \end{bmatrix} \tag{5}$$

Propriétés sur la multiplication de matrices

— Les matrices ne sont pas commutative : $A*B \neq B*A$ (sauf si B= I_D)

— Les matrices sont associative : $(A*B)*C = A*(B*C)$

Matrice Inverse La matrice inverse de A, dénotée A^{-1}, a pour propriété :

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_D \tag{6}$$

$\forall M_{n*n}$, tel que $det(M) \neq 0$ alors la matrice M est inversible.

Transposée d'une matrice On appelle transposée d'une matrice de type (n,p) et de terme général , $a_{i,j}$ la matrice notée ${}^tA$ de type (p,n) , dont le coefficient de la i-ème ligne et de la j-ème colonne est $a_{j,i}$.

Autrement dit, on permute le rôle des lignes et des colonnes.

$${}^t\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \tag{7}$$

4 Régression linéaire à plusieurs variables

4.1 "Multivariate Linear Regression"

Nous avons maintenant n variables :

$$h_\theta(x) = \theta_0 + \theta_1 x_1 + ... + \theta_n x_n \tag{8}$$

Notre équation d'hypothèse devient :

$$h_\theta(x) = {}^t[\theta][x] \tag{9}$$

Avec $x_0 = 1$ par convention. L'équation de descente de gradient quant à elle devient :

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (h_\theta(x^{(i)} - y^{(i)}) x_j^{(i)} for j := 0..n \tag{10}$$

4.2 Améliorer la convergence

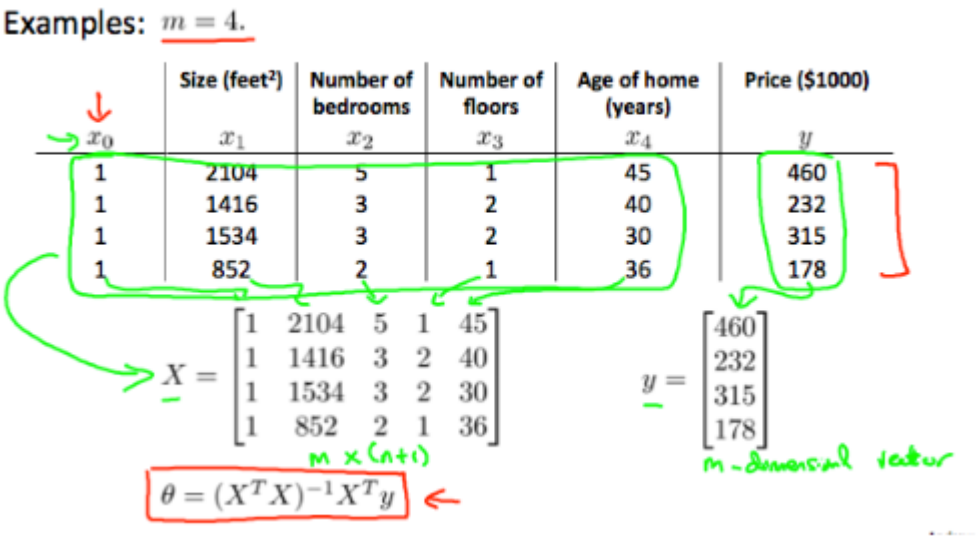
Mise à l'échelle des paramètres : Pour obtenir une convergence plus rapide il est important que chaque paramètre soit sur une même échelle de valeurs. En pratique, il faut que les valeurs de chaque paramètre se situent dans l'intervalle $-1 \leq x \leq 1$ Pour se faire on peut utiliser sur tous les paramètres (sauf x_0) la **moyenne normalisée** :

- **Debugger :** Faire un graphe Nb.iterations vs $J(\theta)$, si $J(\theta)$ croît, alors il faut probablement diminuer le paramètre α
- **Test de convergence automatique :** On considère que $J(\theta)$ a convergé si pour une itération, $J(\theta)$ décroît moins qu'une certaine valeur $\epsilon \leq 10^{-3}$
- **Régression polynomiale :** C'est l'idée de choisir ses paramètres pour obtenir un meilleur modèle. En fonction de la représentation des données (cf.nuage de points), certaines équations polynomiales s'adapteront mieux à notre modèle que d'autres.

4.3 Équation normale

C'est une autre méthode qui permet de minimiser la fonction de coût $J(\theta)$. On prend la dérivé de $J(\theta)$ pour chaque θ_j et on résout le système pour $\theta = 0$ .La formule est la suivante :

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T y \tag{11}$$



Cette méthode n'a pas besoin de **mettre à l'échelle ses paramètres**

Avantages et quand l'utiliser :

Descente de gradient	Équation normale
Besoin de choisir alpha	Pas besoin de choisir alpha
Besoin de beaucoup d'itérations	Instantané
$O(kn^2)$	$O(n^3)$ pour faire l'inverse de $X^T X$
A utiliser quand n est grand	Lent quand n est grand

5 Rappels : Matlab/Octave

5.1 Opérations de base

- **Instanciée une variable sans l'afficher :** Rajouter " ;"
- **afficher une variable :** disp(X)
- **afficher un flottant avec une certaine précision :** disp(sprintf('%0.2f',X)
- **Vecteurs et Matrices :**
  - **Créer une matrice/ un vecteur :** A = [1 2 ; 3 4]
  - **Créer un vecteur entre 2 valeurs :** A = 1 :6
  - **Créer un vecteur incrémentalement :** A = 1 :0.1 :2
  - **Opérations sur les matrices :**
    - ones(2,3) : Génère une matrice M(2x3) de 1
    - rand(1,3) : Génère une matrice M(1,3) avec des valeurs aléatoires entre 0 et 1
    - magic(N) : Génère une matrice de dimensions N dont les colonnes, lignes et la diagonale ont les même valeurs
    - eye(N) : Génère la matrice identité de dimensions N
    - size(X) : Retourne les dimensions de la matrice X
    - **accéder à un élément :** X(3,2) : accède à l'élément de la 3ème ligne et de la 2nd colonne
    - **accéder à tous les éléments d'une ligne/colonne :** X(2, :) : Accède à tous les éléments de la 2nd ligne
    - **accéder à tous les éléments de plusieurs lignes/colonnes :** X([1 3], :) : Retourne tous les éléments de la 1ère et 3ème lignes
    - **Changer la matrice en un vecteur colonne :** X(:)
- **Opérations sur les vecteurs :**
  - length(v) : dimensions du vecteur
- **Afficher un histogramme :** hist(X)
- **Charger un fichier :** load nomFichier
- **Afficher les variables utilisées :** who [whos pour plus d'informations]
- **Supprimer une varaible :** clear nomVariable [clear supprime toutes les variables]
- **Sauvegarder une variable dans un fichier :** save nomFichier nomVariable [save nomFichier.txt nomVariable -ascii]

5.2 Calculs sur les données

"." : Element-wise
"'" : Transposed

- **Multiplier 2 matrices :** C = A*B
- **Multiplier chaque élément :** C = A .*B : Prend chaque élément de A et le multiplie par l'élément à l'index correspond de la matrice B
- **Maximum et index d'un vecteur :** [val, ind] = max(X)
- **Index d'éléments vérifiant une condition (vecteur) :** find (X<3)
- **Index d'éléments vérifiant une condition (matrice) :** [r, c] = find

(X>=7)
— **Opérateurs :** sum(X), prod(X), floor(X), ceil(X)
— **Maximum "column-wise" (matrice) :** max(X,[ ],1)
— **Maximum "row-wise" (matrice) :** max(X,[ ],2)
— **Somme "column-wise" (matrice) :** sum(X,2)
— **Somme "row-wise" (matrice) :** sum(X,2)

5.3 Afficher des graphes

Pour afficher une graphe :

```
plot(X,Y);
```

Pour afficher un graphe par dessus un autre (en rouge) :

```
hold on;
plot(X,Y,'r');
```

Pour nommer les axes :

xlabel('nom') / ylabel('nom') / legend ([] string) / title ('titre')

Pour enregistrer un graphe :

```
print -dpng 'myPlot.png'
```

Pour afficher plusieurs graphes :

On peut utiliser : figure(1), figure(2) pour stocker les graphes et les afficher dans différentes fenêtres
On peut utliser subplot(1,2,1) : Créer une grille 1x2 et accède au 1ère élément.
On peut donc plot(X,Y) et changer l'intervalle des axes : axis([xMin xMax yMin yMax])
Pour supprimer les figures : clf;

Pour afficher des matrices en niveau de gris :

```
imagesc(A),
colorbar,
colormap gray;
```

6 Régression logistique

6.1 Classification et Représentation

Dans l'exemple d'un problème de classification binaire (cf. tumeur bénigne/maligne), utiliser le modèle de la régression linéaire ne sera pas efficace. En effet un problème de classification ne représente pas une fonction linéaire, mais des seuils (des intervalles de valeurs).

Dans le cas d'un problème de classification nous appliquerons un modèle de **régression logistique** qui donne en sorties de valeurs comprises entre 0 et 1 :

$$0 \leq h_\theta(x) \leq 1 \tag{12}$$

Où $h_\theta(x)$ est définit par une sigmoïde :

$$h_\theta(x) = g(\theta^T x) \tag{13}$$

$$h_\theta(x) = \frac{1}{1 + e^{-\theta^T x}} \tag{14}$$

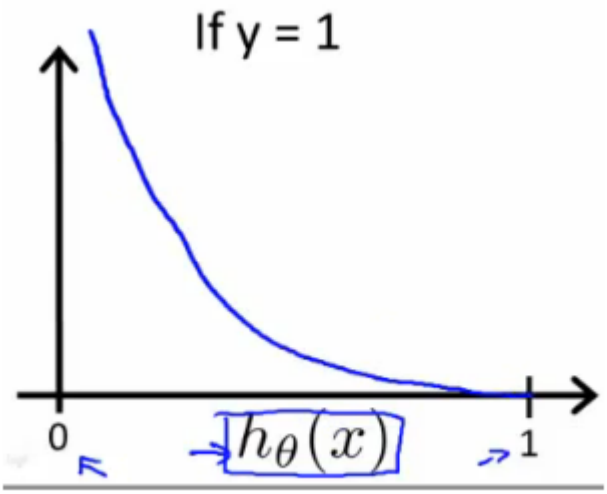
$h_\theta(x)$ représente "la probabilité estimée que y=1 quand on a x en entrée"

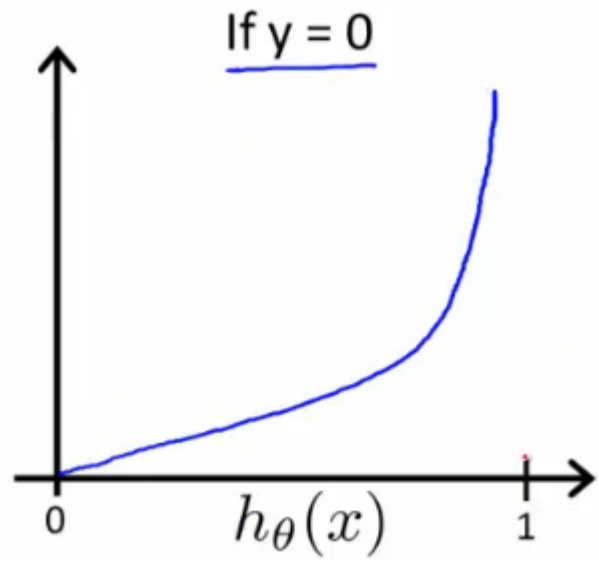
$$h_\theta(x) = P(y = 1|x; \theta) \tag{15}$$

6.2 Fonction de coût

Dans le cas d'une fonction logistique, on ne peut pas utiliser la même fonction de coût. En effet la représentation n'étant pas convexe dans ce cas, de multiples optimums locaux se créés ne permettant pas forcement de trouver l'optimum global. Ainsi, notre fonction de coût devient la suivante :

$$cost(h_\theta(x), y) = \begin{cases} -log((h_\theta(x)) & y = 1 \\ -log((1 - h_\theta(x)) & y = 0 \end{cases}$$





6.3 Descente de gradient

Notre fonction de coût peut être synthétiser en une seule équation :

$$cost(h_\theta(x), y) = -ylog(h_\theta(x)) - (1-y)log(1-h_\theta(x))$$

Ainsi l'équation de la fonction de coût complète est :

$$J(\theta) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[y^{(i)}log(h_\theta(x^{(i)}) + (1-y^{(i)})log(1-h_\theta(x^{(i)}))]$$

Donc une implémentation vectorisée est :

$$h = g(X\theta)$$
$$J(\theta) = \frac{1}{m}\cdot\left(-y^T\log(h) - (1-y)^T\log(1-h)\right)$$

La forme générale de la descente de gradient étant :

$$\begin{aligned}&Repeat\ \{\\ &\theta_j := \theta_j - \alpha\frac{\partial}{\partial\theta_j}J(\theta)\\ &\}\end{aligned}$$

On obtient en appliquant la formule précédente :

$$\begin{aligned}&Repeat\ \{\\ &\theta_j := \theta_j - \frac{\alpha}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})x_j^{(i)}\\ &\}\end{aligned}$$

Avec pour implémentation vectorisée :

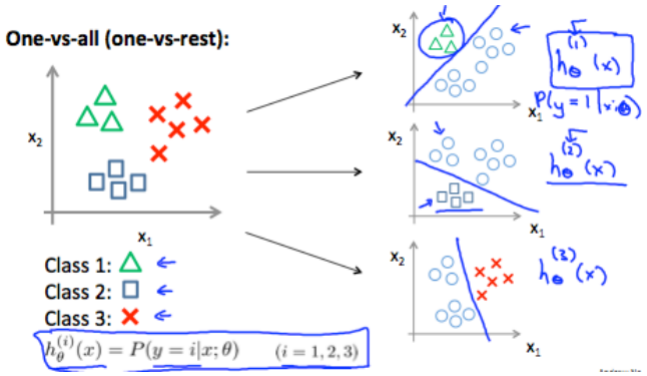
$$\theta := \theta - \frac{\alpha}{m}X^T(g(X\theta) - \overrightarrow{y})$$

6.4 Classification multi-classe : "One vs All"

Un problème de classification est dit multi-classe lorsque la classification n'est plus binaire. Ainsi, la répartition ce fait en plus de 2 ensembles.
Exemple : Système de tagging d'emails, maladie qui touche un patient (pas malade, rhume, grippe),...

One vs All On entraîne notre classificateur de régression logistique $h_\theta^{(i)}(x)$ pour chaque classe i pour prédire la probabilité que $y = i$
Pour chaque nouvelle entrée x, pour faire une prédictinon on prend la classe i qui maximise :

$$\max_i h_\theta^{(i)}(x)$$



6.5 Optimisation avancée

Il existe des algorithmes plus performants que la descente de gradient pour calculer et trouver le minimum d'une fonction de coût ("Conjugate gradient", "BFGS", and "L-BFGS").
Il y a des librairies qui implémentent ces algorithmes, il suffit simplement de leur fournir une fonction avec les formules pour chaque paramètres et pour la fonction de coût.

7 Régularisation

7.1 Le problème du sur-apprentissage "Overfitting")

Lorsque nous avons trop de paramètres, l'hypothèse peut bien s'adapter à notre ensemble de valeurs d'entraînement, mais généraliser de manière erronée de nouveaux exemples.
Pour résoudre se problème on pourrait :

1. Reduire le nombre de paramètres (manuellement ou avec un algorithme de sélection)
2. Garder le même nombre de paramètres

C'est ce que fait la **régularisation**, elle garde le même nombre de paramètres et réduit les valeurs de certains paramètres θ_j en les pénalisant

7.2 Fonction de coût

Pour déterminer quelles sont les paramètres que l'ont doit pénaliser, on modifie légèrement notre fonction de coût en ajoutant une nouvelle partie à notre équation ("regularization term") avec λ qui représente le paramètre de régularisation, c'est à dire l'inflation du coût d'un des paramètres θ_j.

Plus lambda est grand, plus la variable va coûter chère, donc pour résoudre notre équation de coût (i.e qui cherche à trouver la valeurs des paramètres θ_j qui la minimise) la valeur du paramètre θ_j va tendre vers 0. (i.e ne pas être pris en compte)

$$J(\theta) = \frac{1}{2m}[\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x_i) - y_i)^2 + \lambda \sum_{j=1}^{n} \theta_j^2] \tag{16}$$

7.3 Régression linéaire régularisé

On ne veut pas pénalisé le terme θ_0, les équations pour la descente de gradient deviennent :

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_0^{(i)} \tag{17}$$

$$\theta_j := \theta_j - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)} + \frac{\lambda}{m}\theta_j \tag{18}$$

Cette équation est aussi égale à celle si dessous après factorisation :

$$\theta_j := \theta_j(1 - \alpha \frac{\lambda}{m}) - \alpha \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} (h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)}) x_j^{(i)} \tag{19}$$

On observe que le terme $(1 - \alpha \frac{\lambda}{m}) < 1$ lorsque $\lambda, m, alpha > 0$. On remarque donc que l'on a bien la même équation que précédemment et que le paramètre θ_j est diminué.

En ce qui concerne l'équation normale, la formule est la suivante :

$$\theta = X^T X + \lambda L^{-1} X^T y \tag{20}$$

avec L, la matrice identité dont le premier terme de sa diagonale est nul.

$$X = \begin{pmatrix} x^{(1)^T} \\ ... \\ x^{(m)^T} \end{pmatrix} \tag{21}$$

$$y = \begin{pmatrix} y^{(1)} \\ ... \\ y^{(m)} \end{pmatrix} \tag{22}$$

Il est a noté que si $\lambda > 0$, alors la régularisation corrige le problème de non-inversibilité, puisque l'ajout de λL permet d'obtenir une matrice qui possède cette propriété.

7.4 Régression logistique régularisé

L'équation de coût pour la régression logistique devient :

$$J(\theta) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}[y^{(i)} log(h_\theta(x^{(i)}) + (1 - y^{(i)}) log(1 - h_\theta(x^{(i)}))] + \frac{\lambda}{2m}\sum_{j=1}^{n}\theta_j^2$$

Les équations de descente de gradient sont les mêmes que précédemment avec $h_\theta(x) = \frac{1}{1+e^{-\theta^T x}}$

$$\theta_0 := \theta_0 - \alpha\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})x_0^{(i)}$$

$$\theta_j := \theta_j(1 - \alpha\frac{\lambda}{m}) - \alpha\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(h_\theta(x^{(i)}) - y^{(i)})x_j^{(i)}$$

8 Réseaux de Neurones : Représentation

Les réseaux de neurones ont été créés dans le but de simuler le fonctionnement des neurones au sein du cerveau.

Un neurone possède deux fils de connexion, un d'entrée (les dendrites), et un de sortie (l'axone) pour communiquer avec les autres neurones. Ce n'est rien d'autre qu'une unité logistique.

Notations :

1. $a_i^{(j)}$: "activation" de l'unité i de la couche j
2. $\phi^{(j)}$: Matrice de poids contrôlant le mappage de fonction de la couche j à la couche $j+1$

Propriété : Si le réseaux possède s_j unités logistiques pour sa couche j, et s_{j+1} unités logistiques pour sa couche $j+1$, alors $\phi^{(j)}$ sera de dimensions :

$$s_{j+1} X (s_j + 1)$$

Nous allons encapsuler dans une nouvelle variable z les paramètres à l'intérieur de notre fonction g. Pour la couche $j = 2$ et le noeud k

$$z_k^{(2)} = \theta_{k,0}^{(1)} x_0 + ... + \theta_{k,n}^{(1)} x_n$$

Sachant que :

$$x = \begin{bmatrix} x_0 x_1 \cdots x_n \end{bmatrix} z^{(j)} = \begin{bmatrix} z_1^{(j)} z_2^{(j)} \cdots z_n^{(j)} \end{bmatrix}$$

En remplaçant $x = a^{(1)}$, on obtient :

$$z^{(j)} = \theta^{(j-1)} a^{(j-1)}$$

Ainsi :

$$a^{(j)} = g(z^{(j)})$$

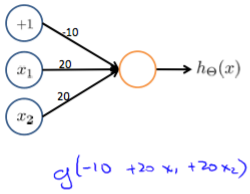
Finalement :

$$h_\theta(x) = a^{(j+1)} = g(z^{(j+1)})$$

L'intuition à avoir est de visualiser la fonction g(z) comme une sigmoïde (fonction de répartition de la loi logistique) et de dresser une table de vérité en fonction des entrées pour savoir quelle opération notre réseau de neurones construit.

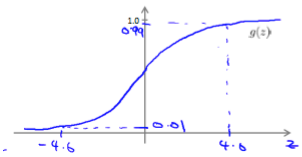
Si l'on a besoin d'effectuer des opérations "complexes", il suffit d'associer les sous-opérations (AND, OR) en utilisant plusieurs couches ("hidden-layers")

Example: OR function



x_1	x_2	$h_\Theta(x)$
0	0	$g(-10) \approx 0$
0	1	$g(10) \approx 1$
1	0	≈ 1
1	1	≈ 1

Where g(z) is the following:



9 Réseaux de Neurones : Apprentissage

9.1 Fonction de coût

Nous devons définir certaines variables :
— L = Nombre total de couches dans le réseau
— s_l = Nombre d'unité logistique
— K = Nombre d'unité en sortie (i.e, nombre de classe)
— $h_\theta(x)_k$ = Hypothèse du résultats de la k^{th} sortie
La fonction de coût, pour un réseau de neurones, est la suivante :

$$J(\Theta) = -\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{K}\Big[y_k^{(i)}\log((h_\Theta(x^{(i)}))_k) + (1-y_k^{(i)})\log(1-(h_\Theta(x^{(i)}))_k)\Big] + \frac{\lambda}{2m}\sum_{l=1}^{L-1}\sum_{i=1}^{s_l}\sum_{j=1}^{s_{l+1}}(\Theta_{j,i}^{(l)})^2$$

9.2 Algorithme de Rétro-propagation

Le terme "rétro-propagation" est une terminologie des réseaux de neurones pour minimiser notre fonction de coût.

$$min_\Theta J(\Theta)$$

C'est à dire qu'on cherche à minimiser J en utilisant un ensemble du paramètre Θ qui est optimal. Pour ce faire il nous faut calculer les dérivés partielles de $J(\Theta)$.

$$\frac{\partial J(\Theta)}{\partial \Theta_{i,j}^{(l)}}$$

Intuition Calculer $\delta_j^{(l)}$, l'erreur pour le nœud j de la couche l

Algorithme Soit les variables suivantes
— Un jeu de données $\{(x^1,y^1),...,(x^m,y^m)\}$
— $\Delta_{ij}^{(l)} = 0\ \forall i,j,l$
Pour chaque jeu de données $(i = 1:m)$, effectuer les étapes suivantes :
1. Établir $a^{(1)} = x^{(i)}$
2. Effectuer la propagation (cf. forward propagation) pour calculer $a^{(L)}$
3. En utilisant $y^{(i)}$, calculer $\delta^{(L)} = a^{(L)} - y^{(i)}$
4. Calculer $\delta^{(L-1)}$,...,$\delta^{(2)}$
5. Calculer $\Delta_{ij}^{(l)} := \Delta_{ij}^{(l)} + a_j(l)\delta_i^{(l+1)}$

Finalement, calculer :

$$D_{ij}^{(l)} := \tfrac{1}{m}\Delta_{ij}^{(l)} + \lambda\Theta_{ij}^{(l)} \text{ si } j \neq 0$$

$$D_{ij}^{(l)} := \tfrac{1}{m}\Delta_{ij}^{(l)} \text{ si } j = 0$$

Sachant que :

$$\frac{\partial J(\Theta)}{\partial \Theta_{i,j}^{(l)}} = D_{ij}^{(l)}$$

9.3 La Rétro-propagation en Pratique

Dérouler les paramètres Si l'on souhaite obtenir toutes nos matrices dans un long vecteur, nous devons "dérouler" les matrices de la manière suivante (en MATLAB) pour les données à une fonction de minimisation de fonction de coût :

$$thetaVector = thetaVector = [Theta1(:); Theta2(:); Theta3(:);]$$

Pour retrouver les vecteurs d'origines si les dimensions sont les suivantes

- Theta1 (10x11)
- Theta2 (10x11)
- Theta3 (1x11)

$$Theta1 = reshape(thetaVector(1:110), 10, 11)$$

$$Theta2 = reshape(thetaVector(111:220), 10, 11)$$

$$Theta3 = reshape(thetaVector(221:231), 1, 11)$$

Vérifier le gradient Nous pouvons vérifier les valeurs de nos dérivées partielles pour la fonction de coût de la façon suivante :

$$\frac{\partial J(\Theta)}{\partial \Theta} = \frac{J(\Theta + \epsilon) - J(\Theta - \epsilon)}{2\epsilon}$$

Initialisation aléatoire Nous devons initialiser les valeurs de $\Theta_{ij}^{(l)}$ dans l'intervalle $[-\epsilon, \epsilon]$

En MATLAB, si Theta1 est une matrice de dimensions (10x11), on peut écrire le code suivant :

$$Theta1 = rand(10, 11) * (2 * EPSILON) - EPSILON$$

En résumé D'abord il faut choisir une architecture pour notre réseau de neurones :

- Nombre d'unités en entrée = dimensions des features $x^{(i)}$
- Nombre d'unités en sortie = nombre de classes
- Nombre d'unités par couche intermédiaire (i.e, "hidden layer") = usuellement, le plus le mieux

Pour entraîner le réseau de neurones :

1. Initialiser les poids de manière aléatoire
2. Implémenter la propagation pour obtenir $h_\theta(x^{(i)}$
3. Implémenter la fonction de coût
4. Implémenter la rétro-propagation pour calculer les dérivés partielles
5. Utiliser la vérification de gradient pour confirmer que la rétro-propagation est correcte. Ne pas oublier de "désactiver" cette vérification par la suite
6. Utiliser la descente de gradient (ou une autre fonction ex : fminc) pour minimiser la fonction de coût

10 Conseils pour appliquer les algorithmes de Machine Learning

Pour débugger un algorithme d'apprentissage, dans le cas où l'on obtient des erreurs trop élevés sur les prédictions, on peut essayer les démarches suivantes :

— Avoir un plus grand jeu d'exemples
— Essayer avec moins de features
— Essayer d'ajouter des features
— Essayer d'ajouter des features polynomiales
— Essayer de diminuer/augmenter λ
— **Diagnostiquer l'algorithme d'apprentissage**t

10.1 Évaluer une hypothèse

Pour vérifier si notre hypothèse sur-apprend le jeu de données (cf. "overfitting problem"), on peut séparer le jeu d'apprentissage en 2 parties :
Un jeu d'exemples (70% de l'ensemble) et un jeu test (30%).

Avec ces deux ensembles, la procédure pour évaluer une hypothèse est la suivante :

1. Apprendre Θ et minimiser $J_{train}(\Theta)$ en utilisant le jeu d'exemple classique
2. Calculer l'erreur de test sur le jeu de test $J_{test}(\Theta)$

10.1.1 Regression linéaire

Dans le cas de la régression linéaire, l'erreur test, sur le jeu de test est :

$$J_{test}(\Theta) = \frac{1}{2m_{test}} \sum_{i=1}^{m_{test}} (h_\Theta(x_{test}^{(i)}) - y_{test}^{(i)})^2$$

10.1.2 Regression logistique (classification)

Dans le cas de la régression logistique, l'erreur test, sur le jeu de test est :
$err(h_\Theta(x), y) = 1$ if $h_\Theta(x) \geq 0.5$ and $y = 0$
$err(h_\Theta(x), y) = 1$ if $h_\Theta(x) < 0.5$ and $y = 1$
$err(h_\Theta(x), y) = 0$ otherwise

La moyenne des erreurs de test pour le jeu de test est :

$$TestError = \frac{1}{m_{test}} \sum_{i=1}^{m_{test}} err(h_\Theta(x_{test}^{(i)}) - y_{test}^{(i)})$$

10.1.3 Sélectionner le modèle

Pour choisir le modèle de notre hypothèse, on peut tester chaque degré de polynôme et regarder l'erreur du résultat. Une manière de faire est de diviser le jeu d'entraînement en trois parties :

— Un jeu d'entraînement classique (60%)
— Un jeu de validation (20%)
— Un jeu de test (20%)

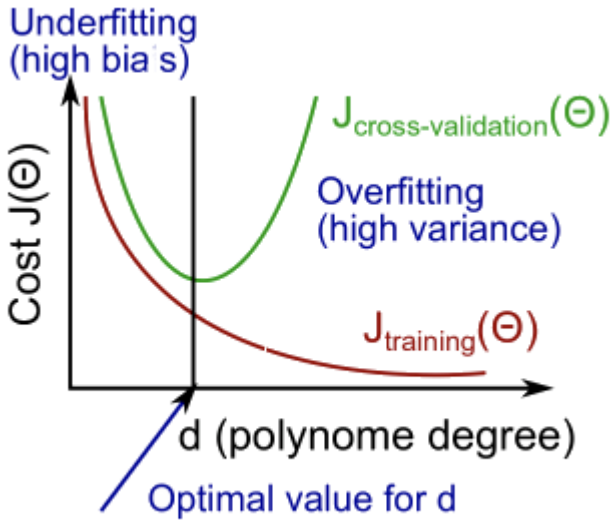
On peut maintenant avoir trois valeurs d'erreurs pour chaque sous-jeu en suivant la méthode suivante :

1. Optimiser le paramètre Θ en utilisant le jeu d'entraînement classique pour chaque degré de polynôme
2. Trouver le degré de polynôme qui possède la plus petite valeur d'erreur sur le jeu de validation
3. Estimer la généralisation de l'erreur sur le jeu de test

De cette manière le degré du polynôme d (i.e, une variable) n'a pas été entraîné sur le jeu de test.

10.2 Biais vs Variance

Un problème de sous-apprentissage est du à un biais élevé. Et un problème de sur-apprentissage est du à une variance élevée.

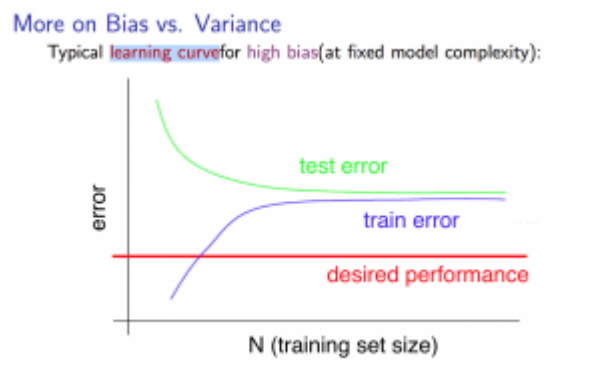


10.3 Courbe d'apprentissage

Afficher les courbes d'apprentissage permet de se rendre compte de la présence d'un haut biais ou bien d'une variance élevée.

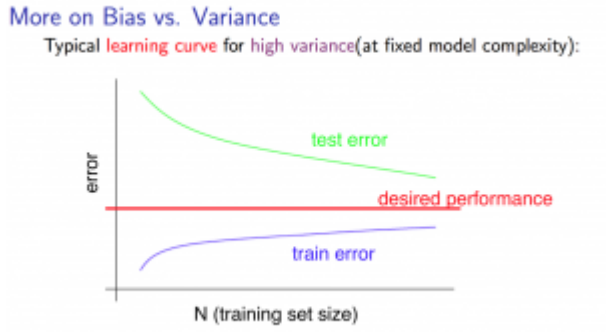
10.3.1 Fort biais

Si un algorithme d'apprentissage souffre d'un fort biais, avoir un plus grand jeu de données n'aiderait pas (à lui seul) à régler le problème.



10.3.2 Forte variance

Si un algorithme d'apprentissage souffre d'une variance élevée, avoir un plus grand jeu de données aidera (à lui seul) à régler le problème.



10.4 Focus sur les conseils

Si l'on revient sur les démarches précédemment établies, nous pouvons faire les conclusions suivantes :

— Avoir un plus grand jeu d'exemples **corrige la variance élevée**
— Essayer avec moins de features **corrige la variance élevée**
— Essayer d'ajouter des features **corrige un biais élevé**
— Essayer d'ajouter des features polynomiales **corrige un biais élevé**
— Essayer de diminuer λ **corrige un biais élevé**
— Essayer d'augmenter λ **corrige la variance élevée**

Réseaux de neurones et sur-apprentissage Un "petit" réseau de neurones sera enclin à sous-apprendre. Tandis qu'un "grand" réseau de neurones sera enclin à sur-apprendre. (utiliser la régularisation λ pour corriger ce problème.

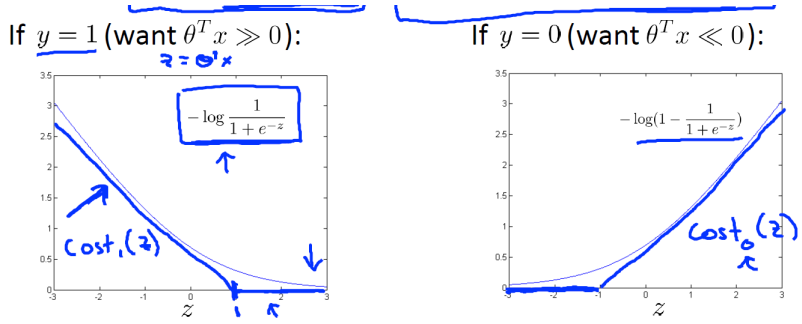
11 "Support Vector Machine" (Machine à vecteurs de support)

Les machines à vecteurs de support sont un ensemble de techniques d'apprentissage supervisé destinées à résoudre des problèmes de discrimination et de régression.

La fonction de coût est légèrement différente :

$$\min_\theta C \sum_{i=1}^{m} [y^{(i)} cost_1(\theta^T x^{(i)}) + (1 - y^{(i)}) cost_0(\theta^T x^{(i)})] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \theta_j^2$$

Avec $C = \frac{1}{\lambda}$, $cost_1(x)$ et $cost_0(x)$:



La particularité des SVM est d'être des séparateurs à vaste marge. ("Large Margin Classifier")

11.1 Kernel

L'astuce du noyau ("Kernel trick") permet d'adapter les SVM pour développer des classificateurs non-linéaire complexe.

Le principe est de définir si un point est proche d'un point de repère, si c'est le cas, lui attribuer la valeur 1, sinon, lui attribuer la valeur 0.

Exemple :

$$f_1 = similarity(x, l^{(1)}) = exp(-\frac{norme(x - l^{(1)})}{2\sigma^2}) = exp(-\frac{\sum_{j=1}^{n}(x_j - l_j^{(1)})^2}{2\sigma^2})$$

La fonction de similarité est en réalité le "Gaussian Kernel". Pour choisir les points de repère, on prendra les $x^{(i)}$ du jeu d'exemple, et on remplacera les x par des f avec :

$$f_i = similarity(x, l^{(i)})$$

11.2 Influence des paramètres

C Une grande valeur de C implique, un faible biais et une grande variance. Une petite valeur de C au contraire, implique un fort biais et une faible variance.

σ^2 Une grande valeur de σ^2 (pour laquelle les features f_i varient de manière fluide) implique un fort biais et une faible variance. Une faible valeur de σ^2 implique un faible biais et une grande variance.

11.3 Régression logistique vs SVM

Soit les variables suivantes :
— n = le nombre de features
— m = le nombre d'exemples d'entraînement
Si $n >> m$ alors il faut utiliser la regréssion logistique, ou SVM sans kernel. ("linear kernel").
Si n est petit et m est moyen, alors il faut utiliser SVM avec le "Gaussian kernel".
Si n est petit et m est grand, alors il faur ajouter des features pour ensuite utiliser la régression logistique ou SVM sans kernel.

12 Apprentissage Non-Supervisé

Dans un problème d'apprentissage non-supervisé, le jeu d'exemples n'a pas de label, on ne sait pas à quelles classes les données appartiennent. Cependant on peut encore distinguer des clusters et observer une tendance pour notre nuage de point.

L'algorithme de partitionnement des données (i,e clustering) est un exemple d'algorithme d'apprentissage non-supervisé.

12.1 Algorithme de partionnement des données : K-Means

K-Means est un algorithme itératif qui fait deux choses :

1. D'abord il effectue une étape d'assignation de cluster
2. Ensuite il bouge les centres des clusters. Il fait la moyenne des centres des points appartenant au cluster et bouge le centre du cluster

Ensuite il itère sur ces deux opérations, jusqu'à convergence. Au départ les centre des clusters sont générés aléatoirement.

Notation :
— $c^{(i)}$ = index du cluster auquel l'exemple $x^{(i)}$ est assigné
— μ_k = centre du cluster k
— $\mu_c^{(i)}$ = centre du cluster auquel l'exemple $x^{(i)}$ a été assigné

Objectif d'optimisation L'algorithme K-Means tente de minimiser la fonction de coût suivante :

$$J(c^{(1)}, ...c^{(m)}, \mu_1, ..., \mu_K) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Norme_2(x^{(i)} - \mu_c(i))$$

C'est ce que fait l'algorithme, dans un 1er temps en minimisant les variables $c^{(i)}$ et dans un 2nd temps en minimisant les variable μ_i

Initialisation aléatoire Nous devons avoir $K < m$ (moins de cluster que d'exemple dans le jeu d'exemples). On prend aléatoirement K exemple du jeu d'exemples et les centres de ses clusters seront égaux aux centres des valeurs du jeu d'exemples choisi. Si on ne veut pas être coincer dans des optimums locaux, il faut appliquer cette méthode de multiple fois.

Choisir le nombre de clusters On peut essayer la "Elbow Method", qui consiste à choisir K si pour une certaine valeur, les valeurs suivantes font décroître la fonction de coût que très légèrement. Sinon, il faut réfléchir à ce que l'on souhaite représenter et faire un choix.

12.2 Réduction Dimensionnelle

Permet de comprimer les données (optimiser les temps de calculs) et d'améliorer la visualisation des données. (moins de dimensions, donc plus compréhensible)

12.3 Analyse en composantes principales (PCA)

Algorithme le plus utilisé pour réduire la dimension d'un jeu de données.

Pour réduire un problème n-dimensionnelle à un problème k-dimensionnelle il faut : trouver k vecteurs $u^{(1)}, ..., u^{(k)}$ sur lesquels projeter les données, pour minimiser l'erreur de projection. (plus courte distance entre le vecteur et le points, différent de la régression linéaire)

Algorithme Pour réduire des données n-dimensionnelle à des donnes k-dimensionnelle, il faut calculer la matrice de covariance :

$$\Sigma = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} (x^{(i)})(x^{(i)})^T$$

Il faut ensuite calculer les vecteurs propres de la matrice Σ :

$$[U, S, V] = svd(\Sigma)$$

De la matrice U, on ne récupère que les k premiers vecteurs colonnes, appelons-la U_{reduce}, on peut obtenir un vecteur z tel que :

$$z = U_{reduce}^T x$$

Ne pas oublier d'effectuer au préalable la moyenne normalisé et le feature scaling (optionnel)

Reconstruire le modèle Pour revenir au modèle de base à partir du modèle compressé, il suffit de faire la transformation suivante :

$$X = U_{reduce} Z$$

Choisir le nombre de composantes principales Pour choisir le nombre de composantes principales (i.e, la valeur de la variable K) au veut que 99% de la variance soit retenue :

$$\frac{Average_squared_projection_error}{Total_variation_in_the_data} = \frac{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Norme_2(x^{(i)} - x_{approx}^{(i)})}{\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} Norme_2(x^{(i)})} \leq 0.01$$

Ce qui revient à faire :

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} S_{ii}}{\sum_{i=1}^{m} S_{ii}} \geq 0.99$$

13 Détection d'anomalies

Un algorithme de détection d'anomalies qui fonctionne avec la loi normale est le suivant :

1. Choisir une feature x_i que vous pensez être anormal
2. Mettre en forme les paramètres

$$\mu_j = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} x_j^{(i)}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(x_j^{(i)} - \mu_j)^2$$

3. Pour un nouvel exemple, calculer $p(x)$:

$$p(x) = \prod_{j=1}^{n} p(x_j; \mu_j; \sigma^2) = \prod_{j=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu_j} exp(-\frac{(x_j - \mu_j)^2}{2\sigma_j^2})$$

   Détecter comme anomalie si $p(x) < \epsilon$

Détection d'anomalies vs Apprentissage supervisé On utilise l'algorithme de détection d'anomalies quand le jeu d'exemple contient un très petit nombre d'exemple positif ($y = 1$) et un grand nombre d'exemples négatifs ($y = 0$). Dans le cas contraire, on utilise un algorithme d'apprentissage supervisé.

14 Systèmes de Recommandations

Les systèmes de recommandations permettent de définir si un utilisateur va potentiellement aimer un contenu, en fonction de ses intérêts communiqué via de précédentes évaluations.

Formulation d'un problème : Recommandation de films On définit les variables suivantes

- $r(i,j) = 1$ si l'utilisateur j a évalué le film i
- $y^{(i,j)}$ = évaluation (0 à 5 étoiles) de l'utilisateur j pour le film i. (Sinon $y = undefined$)
- $\theta^{(j)}$ vecteur de paramètres pour l'utilisateur j
- $x^{(j)}$ = vecteur de features pour le film i
- Pour l'utilisateur j, le film i, la prédiction d'évaluation est :

$$(\theta^{(j)})^T(x^{(j)})$$

- $m^{(j)}$ = nombre de films évalué par l'utilisateur j

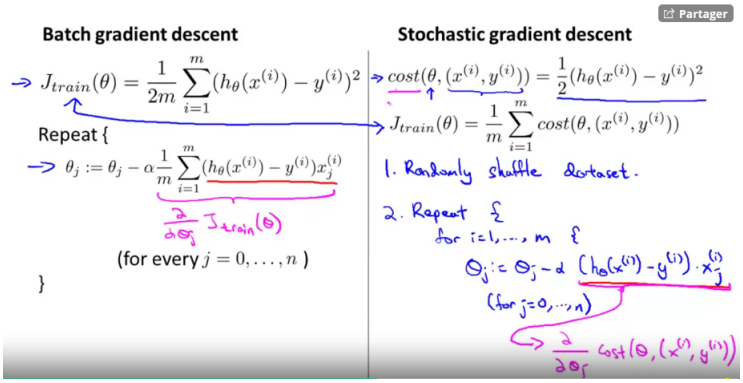
Pour apprendre $\theta^{(j)}$ (pour un utilisateur) :

$$\min_{\theta^{(j)}} \frac{1}{2} \sum_{i:r(i,j)=1} ((\theta^{(j)})^T(X^{(i)}) - y^{(i,j)})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{n} (\theta_k^{(j)})^2$$

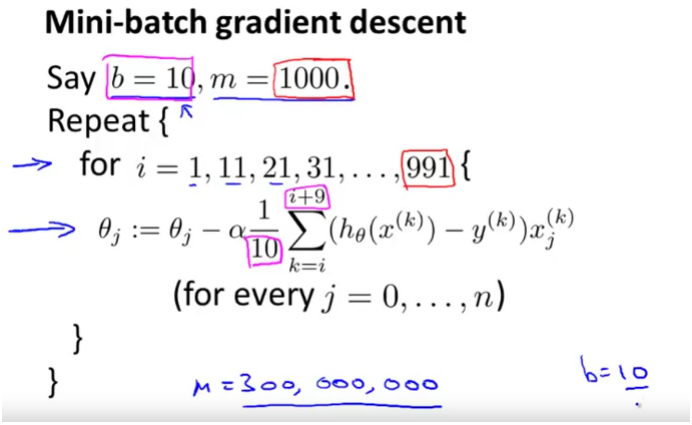
15 Descente de gradient avec des grands jeux de données

L'algorithme de descente de gradient est un algorithme coûteux (forte complexité temporelle). Pour chaque itération on parcours tous les exemples du jeu de données. Ainsi, il existe des variantes à cet algorithme de descente de gradient :

1. "stochastic gradient descent"



2. "mini-batch gradient descent"



Map-Reduce C'est un patrons de conception qui permet de diviser le jeu de données en plusieurs parties, pour traiter les données sur différents ordinateurs (ou cœur logique) et de les regrouper par la suite, dans le but de traiter les données plus rapidement.

16 Application : Reconnaissance d'images

Pour extraire des informations d'une image (personne, texte, ...), il faut exécuter la pipeline suivante dans le cas d'un algorithme de reconnaissance de textes :

1. Détecter les zones de texte
2. Segmenter les chaînes de caractères
3. Reconnaître chaque caractère

Pour arriver à détecter les zones de texte, il faut utiliser la méthode dite de la fenêtre glissante. C'est à dire qu'il faut essayer avec plusieurs tailles de rectangle différentes, d'identifier des objets en avançant chaque rectangle d'un pas (ex : 1px, 4px, 8px). A la fin de ce processus, on obtient les différentes localisation des zones qui comportent nos objets.

Pour arriver à segmenter des chaînes de caractères. On applique le même processus. Sachant qu'un exemple est positif (i.e, $y = 1$) lorsque la fenêtre contient une séparation entre deux caractères (un espace vide).

Enfin pour arriver à reconnaître un caractère, il suffit d'appliquer un algorithme d'apprentissage supervisé étudié précédemment.