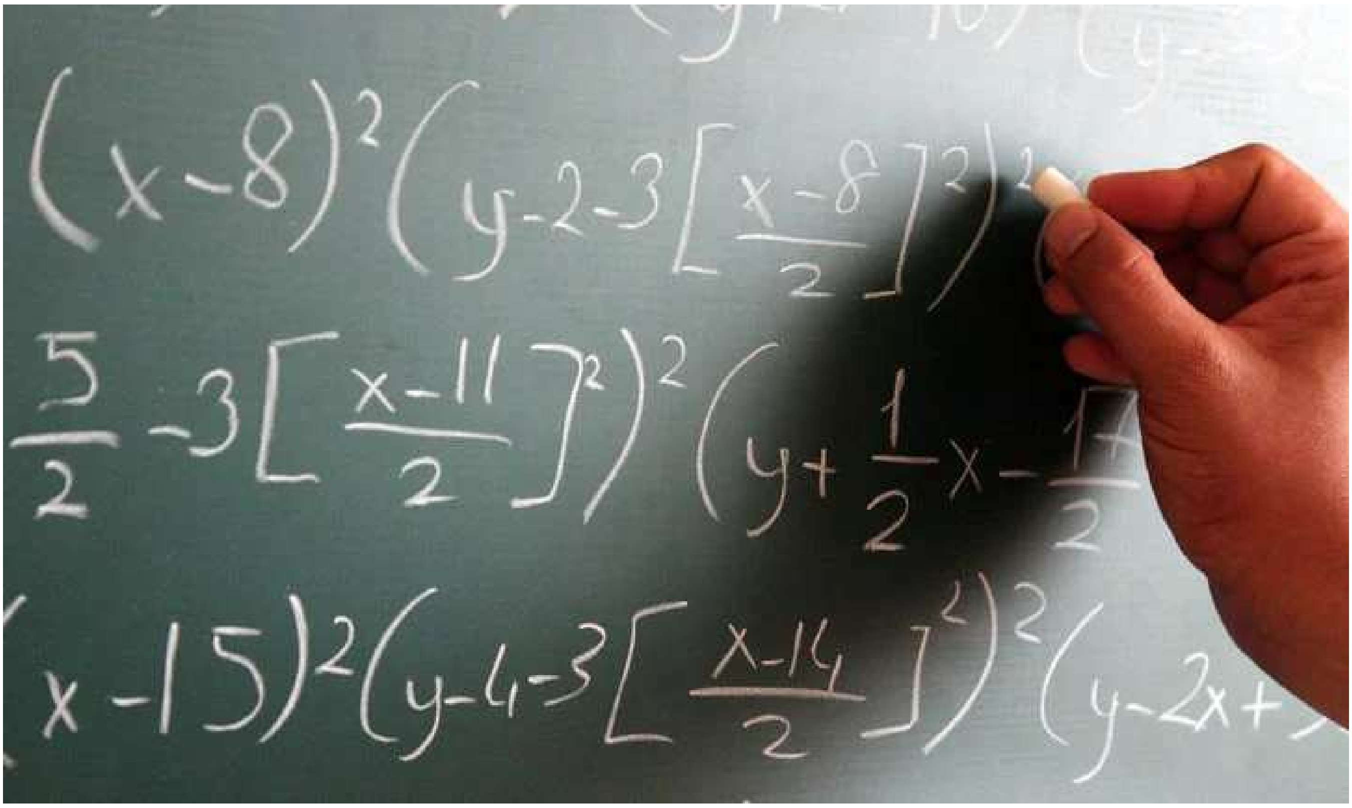
Escalonamento de matrizes – Resolver sistemas lineares

Aprenda a resolver sistemas lineares que possuem um número diferente de equações e incógnitas pelo método do escalonamento. Veja exemplos de matrizes escalonadas.

Por **Elainy Marciano** Publicado em **16 abr, 2020**

MATEMÁTICA



O **escalonamento de matrizes** é um procedimento algébrico que podemos utilizar para resolver sistemas lineares onde o número de equações não é, necessariamente, igual ao número de incógnitas.

Resolver um sistema linear significa encontrar os valores das incógnitas que satisfazem todas as equações simultaneamente. No método do escalonamento, o objetivo é encontrar um sistema linear equivalente, mas que seja mais fácil de resolver do que o sistema inicial.

Para isso, utilizamos a matriz associada ao sistema linear e obtemos a forma escalonada dessa matriz. A partir da forma escalonada, a solução do sistema é obtida com facilidade.

Matriz escalonada

A forma de uma **matriz escalonada** depende da quantidade de linhas e colunas, ou seja, da quantidade de equações e da quantidade de incógnitas no sistema linear.

Considerando um sistema com mesmo número de equações e de incógnitas, a matriz escalonada será uma matriz triangular superior, que é uma matriz onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero.

Exemplos de matrizes escalonadas:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & 1 \\ 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{-1} & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & -1 & 1 \\ 0 & \mathbf{2} & 2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 2 \\ 0 & \mathbf{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como fazer o escalonamento

Considerando um sistema linear, o primeiro passo é escrever a matriz associada a esse sistema, que é uma matriz formada por todos os coeficientes das equações e pelos termos independentes (aqueles após a igualdade).

Como vimos nos exemplos anteriores, matrizes escalonadas possuem alguns elementos iguais a zero. Então, o nosso objetivo ao escalonar uma matriz qualquer, é tornar alguns elementos iguais a zero.

Para isso, podemos fazer algumas operações entre as linhas da matriz:

- Trocar duas linhas de lugar;
- Somar ou subtrair uma linha por outra;
- Multiplicar ou dividir uma linha por um número real diferente de zero.

Exemplo: Vamos resolver o sistema linear abaixo para encontrar os valores de x, y e z.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ 3x + 2y + 2z = 1 \\ 5x + 4y + 3z = 4 \end{cases}$$

Primeiro, vamos escrever a matriz de coeficientes e termos independentes e indicar cada uma das três linhas da matriz.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \longrightarrow L_1 \\ \longrightarrow L_2 \\ \longrightarrow L_3 \end{array}$$

Escalonar essa matriz, significa zerar o primeiro elemento da segunda linha, e o primeiro e o segundo elemento da terceira linha.

1º objetivo: zerar o primeiro elemento da segunda linha.

Vamos multiplicar cada elemento da linha 2 pelo número 2 e subtrair cada valor da linha 1 multiplicado por 3.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \quad L_2 \rightarrow 2L_2 - 3L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right)$$

2º objetivo: zerar o primeiro elemento da terceira linha.

Vamos multiplicar cada elemento da linha 3 pelo número 2 e subtrair cada elemento da linha 1 multiplicado por 5.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 5 & 4 & 3 & 4 \end{array}\right) \quad L_3 \rightarrow 2L_3 - 5L_1 \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 3 & 16 & -42 \end{array}\right)$$

3º objetivo: zerar o segundo elemento da terceira linha.

Vamos subtrair da linha 3 cada elemento da linha 2 multiplicado pelo número 3.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 3 & 16 & -42 \end{array}\right) \quad L_3 \rightarrow L_3 - 3L_2 \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 10 & -28 \\ 0 & 0 & -14 & 42 \end{array}\right)$$

A matriz está escalonada!

Agora, vamos reescrever o sistema linear, considerando a matriz escalonada.

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 10 \\ \quad y + 10z = -28 \\ \quad\quad -14z = 42 \end{cases}$$

Esse sistema escalonado é equivalente ao sistema inicial, porém muito mais fácil de determinar a solução.

Na equação 3 temos que:

$-14z = 42 \Rightarrow z = -42/14 \Rightarrow z = -3$

Substituindo o valor de z por -3 na equação 2, temos que:

Substituindo o valor de z por -3 na equação 2, temos que:

$$y + 10z = -28 \Rightarrow y + 10.(-3) = -28 \Rightarrow y - 30 = -28$$

$$\Rightarrow y = -28 + 30 \Rightarrow \mathbf{y = 2}$$

Substituindo o valor de z por -3 e o valor de y por 2 na equação 1, temos que:

$$2x + y - 2z = 10 \Rightarrow 2x + 2 - 2.(-3) = 10 \Rightarrow 2x + 2 + 6 = 10$$

$$\Rightarrow 2x = 20 - 8 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 2/2 \Rightarrow \mathbf{x = 1}$$

Portanto, a solução do sistema é **S = {1, 2, -3}**.

Observações:

- Se no escalonamento da matriz, todos os elementos de uma linha zerarem, então o sistema possui infinitas soluções.
- Se no escalonamento da matriz, todos os coeficientes de uma linha zerarem, mas o termo independente for diferente de zero, então o sistema não possui solução.

Você também pode se interessar:

- Tipos de matrizes
- Determinante de uma matriz
- Multiplicação de matrizes
- Adição e subtração de matrizes

COMO FAZER O ESCALONAMENTO | COMO RESOLVER UM SISTEMA POR ESCALONAMENTO | MATRIZ ESCALONADA | MATRIZES | SISTEMAS LINEARES

Elainy Marciano - 469 Posts

11.4 Regressão linear múltipla

Uma **regressão linear múltipla** é o problema análogo à regressão linear simples no caso em que a variável dependente pode depender de mais fatores independentes. Tipicamente, queremos encontrar uma equação afim que melhor se ajusta a alguns dados conhecidos.

No caso especial em que y depende de apenas outros dois fatores, escreveremos

$$z = a + bx + cy, \tag{11.46}$$

que, geometricamente, representa um plano no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$. Seja agora uma conjunto de dados:

$$(x_1, y_1, z_1), \quad (x_1, y_1, z_1), \dots, (x_k, y_k, z_k). \tag{11.47}$$

Queremos encontrar coeficientes (a, b, c) que satisfaçam:

$$\begin{cases} a + bx_1 + cy_1 = z_1 \\ a + bx_2 + cy_2 = z_2 \\ \vdots \\ a + bx_k + cy_k = z_k \end{cases} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_k \end{bmatrix}. \tag{11.48}$$

Quanto maior o número de dados, mais provável de o sistema ser impossível (podemos fazer a analogia geométrica de que por três pontos não colineares no espaço passa um único plano; se aumentarmos o número de pontos, mais difícil que haja um plano contendo todos eles). Por isto, procuramos por uma solução de mínimos quadrados.

Exemplo 107. Uma pesquisa com 214 mulheres em uma universidade americana[2] (main81.html#fn2x12) coletou informações sobre a altura das participantes, assim como a altura de seus pais. Abaixo, listamos *apenas alguns destes dados*, para que nossas contas não fiquem tão extensas. Fizemos também uma mudança de unidades nas alturas (de polegadas) para centímetros,

Altura	Altura Mãe	Altura Pai
152	155	165
162	155	160
165	170	173
170	163	183
173	168	183
183	165	183

Queremos encontrar uma solução de mínimos quadrados para o sistema linear

$$\begin{bmatrix} 1 & 155 & 165 \\ 1 & 155 & 160 \\ 1 & 170 & 173 \\ 1 & 163 & 183 \\ 1 & 168 & 183 \\ 1 & 165 & 183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 152 \\ 162 \\ 165 \\ 170 \\ 173 \\ 183 \end{bmatrix} \quad \leftrightsquigarrow \quad A\vec{x} = \vec{b}. \tag{11.49}$$

Calculamos

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 155 & 155 & 170 & 163 & 168 & 165 \\ 165 & 160 & 173 & 183 & 183 & 183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 155 & 165 \\ 1 & 155 & 160 \\ 1 & 170 & 173 \\ 1 & 163 & 183 \\ 1 & 168 & 183 \\ 1 & 165 & 183 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 976 & 1047 \\ 976 & 158968 & 170553 \\ 1047 & 170553 & 183221 \end{bmatrix} \tag{11.50}$$

$$A^T\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 155 & 155 & 170 & 163 & 168 & 165 \\ 165 & 160 & 173 & 183 & 183 & 183 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 152 \\ 162 \\ 165 \\ 170 \\ 173 \\ 183 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1005 \\ 163689 \\ 175803 \end{bmatrix}. \tag{11.51}$$

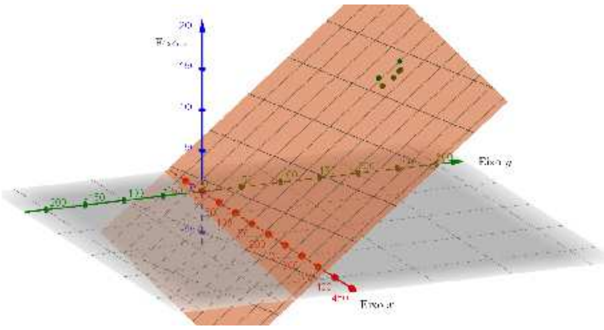
Por escalonamento,

$$\begin{bmatrix} 6 & 976 & 1047 & 1005 \\ 976 & 158968 & 170553 & 163689 \\ 1047 & 170553 & 183221 & 175803 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2154573\,/\,145769 \\ 0 & 1 & 0 & 14475\,/\,145769 \\ 0 & 0 & 1 & 114081\,/\,145769 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a \simeq 14.781 \\ b \simeq 0.099 \\ c \simeq 0.783 \end{cases} \tag{11.52}$$

A equação de melhor ajuste procurada é, portanto, aproximadamente,

$$z \simeq 14.781 + 0.099x + 0.783y. \tag{11.53}$$

Tente calcular sua altura z a partir da altura de sua mãe x e de seu pai y. O teste deve funcionar melhor para mulheres! Além disso, a aproximação linear deve ser melhor utilizando mais dados nos cálculos.



(s14-regressx00e3o_nx00e3o_linear.html) (main.html#s14-regressx00e3o_linear_mx00faltipla.html) (s14-fatorax00e7x00e3o_qr_e_mx00ednimos_quadrados.