МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
КАФЕДРА ИНЖЕНЕРНОЙ ГЕОДЕЗИИ

# Методические указания к лабораторным работам

по дисциплине «Высшая геодезия»

для студентов 4 курса специальности «Геодезия»

Составители: д.т.н, проф.каф.инж.геод. Подшивалов В.П.,
ст.пр.каф.инж.геод. Будо А.Ю.

Минск
**2016**

## Содержание

## Порядок выполнения лабораторных работ

Работы выполняются последовательно, начиная с первой. Исходные данные выбираются по вариантам, выдаваемым преподавателем. Также преподавателем устанавливаются крайние сроки сдачи работ на проверку (deadline). Правила оформления работ приведены в **Приложение А**.

Оценка $Est(Estimate)$ за каждую лабораторную работу вычисляется по формуле

$$Est = 10 \cdot T \cdot D/D_{max},$$

где $T(Test)$ – балл, полученный в ходе автоматизированной проверки;

$D(Defense)$ – балл, полученный по результатам защиты работы;

$D_{max}$ – максимально возможный балл при защите работы.

Величина $T$ рассчитывается на основе алгоритма Эвина Вильсона (1927г), в котором используется формула для нижней границы доверительного интервала

$$T = \frac{p + \frac{z_{\alpha/2}^2}{2 \cdot n} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p) + \frac{z_{\alpha/2}^2}{4 \cdot n}}{n}}}{1 + \frac{z_{\alpha/2}^2}{n}},$$

где $n = pos + WN$ – сумма правильных ответов и номера недели от начала года (зависит от даты проверки работы);

$p = \mathrm{pos}/\mathrm{n}$ – доля правильных ответов;

$z_{\alpha/2}$ – квантиль [1] стандартного нормального распределения для вероятности (1–α/2). Для доверительного уровня в 0.95 значение квантиля равно 1.96.

Величина $D$ вычисляется на основе следующей таблицы

**Таблица – Критерии оценки при защите работы**

| Критерий | Оформленная работа сдана до дедлайна? (1/0) | Оформление уникальное, соответствует правилам оформления? (2/0) | На защите получены ответы на все вопросы - 2; Частично неправильные или неполные ответы - 1; Неправильные ответы или работа не защищалась - 0 | Сумма |
|---|---|---|---|---|
| Max | 1 | 2 | 2 | 5 |
| Min | 0 | 0 | 0 | 0 |

[1] Квантúль в математической статистике — значение, которое заданная случайная величина не превышает с фиксированной вероятностью.

## Лабораторная работа 1. Длина дуги меридиана и параллели. Размеры рамок трапеций топографических карт

Для выполнения данной работы необходимо изучить «Введение» и разделы 1–4 лекционного курса [1]. Широты и долготы двух точек зависят от номера варианта и вычисляются по формулам

$B_1 = 53^\circ\, 35'\, 22{,}352'' + 2k'\, 0{,}125k''$;

$B_2 = 58^\circ\, 30'\, 12{,}135'' + 2k'\, 0{,}125k''$;

$L_1 = 26^\circ\, 35'\, 32{,}135'' + 2k'\, 0{,}125k''$;

$L_2 = 29^\circ\, 30'\, 51{,}415'' + 2k'\, 0{,}125k''$;

Параллель находится на широте $B = 51^\circ\, 45'\, 35'' + k^\circ$,
где k – номер варианта, заданный преподавателем.

При вычислениях использовать размеры эллипсоида Красовского (большая полуось a= 6378245,0 м; сжатие эллипсоида $\alpha$ = 1/298,3)

### 1.1. Длина дуги меридиана и параллели

Для вычислений длины дуги меридиана земного эллипсоида, принятого в системах координат WGS-84 или ПЗ-90 применяют формулу, в которой коэффициенты вычисляют по параметрам соответствующего эллипсоида.

$$s = n_1(B_2 - B_1) - n_2 \sin 2(B_2 - B_1) + n_3 \sin 4(B_2 - B_1) - n_4 \sin 6(B_2 - B_1) + \ldots \qquad (1.1)$$

Здесь разность широт берется в радианной мере и приняты следующие обозначения коэффициентов, имеющих постоянные значения для эллипсоида с данными параметрами.

$$n_1 = c\left(1 - \frac{3}{4}e'^2 + \frac{45}{64}e'^4 - \frac{175}{256}e'^6 + \frac{11025}{16384}e'^8 - \ldots\right); \qquad (1.2)$$

$$n_2 = \frac{3}{8}ce'^2\left(1 - \frac{5}{4}e'^2 + \frac{175}{128}e'^4 - \frac{105}{64}e'^6 + \ldots\right); \qquad (1.3)$$

$$n_3 = \frac{15}{256}ce'^4\left(1 - \frac{7}{4}e'^2 + \frac{147}{64}e'^4 - \ldots\right); \qquad (1.4)$$

$$n_4 = \frac{35}{3072}ce'^6\left(1 - \frac{9}{4}e'^2 + \ldots\right), \qquad (1.5)$$

где

$$e' = \sqrt{\frac{2\alpha - \alpha^2}{(1-\alpha)^2}}. \qquad (1.6)$$

$$c = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}}, \tag{1.7}$$

$$e = \sqrt{2 \cdot \alpha - \alpha^2} \tag{1.8}$$

Для упрощения вычислений на определенном эллипсоиде можно использовать известные значения коэффициентов, например, для эллипсоида Красовского, принятого в качестве координатной поверхности в системе координат СК-42, можно использовать рабочую формулу, приведенному к виду, удобному для вычислений

$$X = 6367558{,}4969B - \sin B \cos B\left[32005{,}7801 + \left(133{,}9213 + 0{,}7032\sin^2 B\right)\sin^2 B\right], \tag{1.9}$$

где широта $B$ берется в радианной мере, при этом ошибка вычисления длины дуги меридиана от экватора до точки с широтой $B$ не более 0,0001 м.. Если необходимо вычислить длину дуги меридиана $\Delta X = X_2 – X_1$ , заключенную между двумя точками с широтами, соответственно $B_2$ и $B_1$, то ее получают как разность длин дуг меридианов от экватора до этих точек. По формуле (1.1) сразу вычисляется эта разность, для вычисления длины дуги меридиана от экватора следует принять $B_1 = 0$.

На практике часто возникает необходимость вычисления малой длины меридиана, а в этом случае можно считать его радиус постоянным и равным радиусу меридиана, вычисленному по средней широте его дуги

$$\Delta X = \frac{M_m}{\rho''}(B_2 - B_1)'' = \frac{c}{V_m^3} \cdot \frac{1}{\rho''} \cdot (B_2 - B_1)'', \tag{1.10}$$

где

$$V_m = \sqrt{1 + \left(e' \cdot \cos(B_m)\right)^2}, \tag{1.11}$$

$$B_m = \frac{1}{2} \cdot (B_1 + B_2), \tag{1.12}$$

Если длина меридиана не превышает 45 км, то ошибка вычислений по этой формуле не более 0,001 м.

Параллель является окружностью радиуса $r$

$$r = N\cos B = \frac{c}{V}\cos B, \tag{1.13}$$

длина её вычисляется по строгой формуле

$$\Delta Y = \frac{c}{V}\cos \mathrm{B} \frac{\left(L_2 - L_1\right)''}{\rho''}, \tag{1.14}$$

## 1.2. Размеры рамок трапеций топографических карт

Рамки трапеций топографических карт различных масштабов являются изображениями на плоскости меридианов и параллелей эллипсоида. В основе разграфки всего номенклатурного ряда лежит трапеция карты масштаба 1:1 000 000, ограниченная меридианами с разностью долгот в 6° и параллелями с разностью широт в 4°. Номера меридианных зон обозначаются арабскими цифрами от 1 до ±30, счет ведется от Гринвича, а широтные пояса обозначаются буквами латинского алфавита, счет ведется от экватора. На топографических картах указываются номера колонн, полученных как номер зоны плюс 30 (для того, чтобы избежать отрицательных номеров зон в западном полушарии). Зная номер зоны или колонны и название пояса, довольно просто найти геодезические широты и долготы вершин рамок трапеций.

Пусть, например, дана трапеция топографической карты масштаба 1:100 000 с номенклатурой N-35-100. Здесь номер зоны будет 35 – 30 = 5 (восточная), а номер пояса 14 (порядковый номер буквы N в латинском алфавите). Следовательно, трапеция масштаба 1:1 000 000 будет ограничена параллелями с широтой 52° и 56° и меридианами с долготой 24° и 30°.

Указанная трапеция масштаба 1:100 000 будет ограничена меридианами с долготой 25°30′ и 26° и параллелями с широтой 31° и 31°20′.

Формулы для вычислений длин рамок трапеций

$$\left.\begin{aligned} S_{(см)} &= \frac{c_{(м)}}{V_m^3}\frac{\left(\mathrm{B}_2 - \mathrm{B}_1\right)^\circ}{180^\circ}\frac{100}{m}\pi \\ S_{1(см)} &= \frac{c_{(м)}}{V_1}\frac{\left(L_2 - L_1\right)^\circ}{180^\circ}\cos \mathrm{B}_1 \frac{100}{m}\pi \\ S_{2(см)} &= \frac{c_{(м)}}{V_2}\frac{\left(L_2 - L_1\right)^\circ}{180^\circ}\cos \mathrm{B}_2 \frac{100}{m}\pi \end{aligned}\right\}, \tag{1.15}$$

где m – знаменатель масштаба карты.

Для обеспечения необходимой точности вычислений размеров рамок (0,1 мм) достаточно ограничиться четырьмя значащими цифрами для всего масштабного ряда топографических карт.

Также для нахождения длин рамок трапеций можно воспользоваться формулами из [2]. В этом случае дуги меридиана выполняется по формуле (значение в метрах)

$$\text{с(м)} = k \cdot (M_1 + 4 \cdot M_m + M_2) \cdot \Delta B'', \quad (1.16)$$

где

$$M_1 = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{\left(1 - e^2 \cdot \left(sin\left(B_1 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right)^2\right)^3}}, \quad (1.17)$$

$$M_2 = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{\left(1 - e^2 \cdot \left(sin\left(B_2 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right)^2\right)^3}}, \quad (1.18)$$

$$B_m{}^{\circ} = \frac{B_1{}^{\circ} + B_2{}^{\circ}}{2}, \quad (1.19)$$

где $a$ – длина большой полуоси эллипсоида;

$$M_m = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{\sqrt{\left(1 - e^2 \cdot \left(sin\left(B_m \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right)^2\right)^3}} \quad (1.20)$$

$$k = \frac{1}{6 \cdot \rho} \quad (1.21)$$

$$\rho = \frac{180}{\pi} \cdot 3600 \quad (1.22)$$

Для вычисления длины дуги меридиана в масштабе карты необходимо полученное значение перевести в сантиметры

$$c(\text{см в М карты}) = \text{с(м)} \cdot \frac{100}{\text{М}} \quad (1.23)$$

Вычисление длины дуги параллели выполняется по формулам (значение в метрах)

$$\text{а}_{\text{южная}}(\text{м}) = \pi \cdot r_1 \cdot \frac{\Delta L^{\circ}}{180} \quad (1.24)$$

$$\text{а}_{\text{северная}}(\text{м}) = \pi \cdot r_2 \cdot \frac{\Delta L^{\circ}}{180} \quad (1.25)$$

$$\Delta L^\circ = L_2{}^\circ - L_1{}^\circ \tag{1.26}$$

$$r_1 = \frac{a \cdot cos\left(B_1 \cdot \frac{\pi}{180}\right)}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \left(sin\left(B_1 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right)^2}} \tag{1.27}$$

$$r_2 = \frac{a \cdot cos\left(B_2 \cdot \frac{\pi}{180}\right)}{\sqrt{1 - e^2 \cdot \left(sin\left(B_2 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right)^2}} \tag{1.28}$$

Для вычисления длины дуги параллели в масштабе создаваемой карты необходимо полученное значение перевести в сантиметры

$$a(\text{см в М карты}) = a(\text{м}) \cdot \frac{100}{\text{М}} \tag{1.29}$$

Площади съёмочных трапеций в м$^2$ на местности можно вычислить по формуле

$$S(\text{м}^2) = \frac{\Delta L}{360} \cdot 4 \cdot \pi \cdot b^2 \cdot (A1 - B1 + C1 - D1 + E1)\,, \tag{1.30}$$

где

$$b = a \cdot \sqrt{1 - e^2} \tag{1.31}$$

$$A1 = A' \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot \Delta B \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \cos\left(B_m \cdot \frac{\pi}{180}\right) \tag{1.32}$$

$$B1 = B' \cdot \sin\left(\frac{3}{2} \cdot \Delta B \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \cos\left(3 \cdot B_m \cdot \frac{\pi}{180}\right) \tag{1.33}$$

$$C1 = C' \cdot \sin\left(\frac{5}{2} \cdot \Delta B \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \cos\left(5 \cdot B_m \cdot \frac{\pi}{180}\right) \tag{1.34}$$

$$D1 = D' \cdot \sin\left(\frac{7}{2} \cdot \Delta B \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \cos\left(7 \cdot B_m \cdot \frac{\pi}{180}\right) \tag{1.35}$$

$$E1 = E' \cdot \sin\left(\frac{9}{2} \cdot \Delta B \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \cos\left(9 \cdot B_m \cdot \frac{\pi}{180}\right) \tag{1.36}$$

$$\Delta B = B_2 - B_1 \tag{1.37}$$

$$B_m = \frac{B_1 + B_2}{2} \tag{1.38}$$

$$A' = 1 + \frac{1}{2} \cdot e^2 + \frac{3}{8} \cdot e^4 + \frac{5}{16} \cdot e^6 + \frac{35}{128} \cdot e^8 \tag{1.39}$$

$$B' = \frac{1}{6} \cdot e^2 + \frac{3}{16} \cdot e^4 + \frac{3}{16} \cdot e^6 + \frac{35}{192} \cdot e^8 \tag{1.40}$$

$$C' = \frac{3}{80} \cdot e^4 + \frac{1}{16} \cdot e^6 + \frac{5}{64} \cdot e^8 \tag{1.41}$$

$$D' = \frac{1}{112} \cdot e^6 + \frac{5}{256} \cdot e^8 \tag{1.42}$$

$$E' = \frac{5}{2304} \cdot e^8 \tag{1.43}$$

Площадь в км$^2$ на местности можно вычислить как

$$S(\text{км}^2) = \frac{\text{S}(\text{м}^2)}{1000000} \tag{1.44}$$

Площадь в см$^2$ в масштабе карты вычисляется по формуле

$$S(\text{см}^2 \text{ в М карты}) = \frac{\text{S}(\text{м}^2)}{(\text{М}/100)^2} \tag{1.45}$$

### 1.3. Задание

1. Вычислить длины дуг меридианов $X_1$, $X_2$ от экватора до заданных широт двух точек по формуле (1.9). Найти длину дуги меридиана между двумя точками как разность $\Delta X = X_2 - X_1$.
2. Вычислить длины дуг меридианов $S_1$, $S_2$ от экватора до заданных широт двух точек по формуле (1.1). Найти длину дуги меридиана между двумя точками как разность $\Delta S = S_2 - S_1$.
3. Найти длину дуги меридиана между двумя точками по формуле со средней широтой (1.10) . Сравнить результаты, полученные тремя способами, сделать выводы.
4. Найти длину дуги параллели между двумя точками по формуле (1.14).

5. Определить номенклатуру и вычислить по формулам (1.15) размеры рамок трапеций топографических карт масштабов 1 : 1 000 000 и 1 : 100 000, в которые попадает точка с координатами (по вариантам):
   $B = 53^{\circ}\ 15' + k^{\circ}$; $L = 25^{\circ}\ 12' + k'$
6. Вычислить размеры рамок трапеций по формулам (1.23), (1.29). Сравнить значения с результатами, полученными в п.5.
7. Вычислить площадь съёмочной трапеции по формуле (1.30).

## Лабораторная работа 2. Решение геодезических треугольников

Для выполнения лабораторной работы №2 необходимо изучить раздел 5 лекционного курса.

Среди геодезических построений выделяют триангуляцию и трилатерацию, в треугольниках которых измерены либо углы, либо длины сторон. После редуцирования на поверхности эллипсоида получаем сфероидический треугольник, длины сторон которых не превышают 60 км (на территории Беларуси, не более 20км). В пределах необходимой точности вычисления поверхность эллипсоида можно заменить сферой радиусом, равным среднему радиусу кривизны поверхности эллипсоида для средней широты $B_0$ геодезического построения.

$$R_0 = \sqrt{M_0 N_0} = \frac{c}{1 + \left(e' \cdot \cos(B_0)\right)^2} \tag{2.1}$$

Следовательно, треугольники в пределах такой области можно решать как сферические по формулам сферической тригонометрии. Как известно, здесь длины сторон выражаются в частях радиуса, что для практики неудобно, поэтому в геодезии малые сферические треугольники (длины сторон которых не превосходят 90 км) решают по формулам плоской тригонометрии с введением поправок в сферические углы (способ Лежандра), либо в длины сторон (способ аддитаментов).

### 2.1. Способ Лежандра

Основан на теореме Лежандра, согласно которой в сферическом и плоском треугольнике с соответственно равными длинами сторон каждый угол сферического треугольника больше соответствующего угла плоского треугольника на одну треть сферического избытка. Сферический избыток любой фигуры определяется формулой

$$\varepsilon'' = \frac{P}{R^2}\rho'' \tag{2.2}$$

где $P$ – площадь фигуры; $R$ – радиус сферы.

Площадь треугольника может быть вычислена по одной из формул

$$2P = ab\sin C = bc\sin A = ac\sin B \tag{2.3}$$

$$P = a^2 \frac{\sin B \sin C}{2\sin A} \tag{2.4}$$

$$P = \sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)} \tag{2.5}$$

где: $a, b, c$ – длины сторон треугольника,

$A, B, C$ - его углы, лежащие против соответствующих сторон (против стороны $a$ лежит угол $A$ и т. д.)

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c) \tag{2.6}$$

Заметим, что для максимально возможных в триангуляции I класса длин сторон в 60 км имеем сферический избыток не более 8,5″, что является малой величиной и его вычисления можно выполнять с четырьмя значащими цифрами. А формула для его вычисления может быть записана в виде

$$\varepsilon''=2\cdot f\cdot \mathrm{P} \tag{2.7}$$

где величина $f=\frac{\rho''}{2R^2}$ может быть принята для территории Республики Беларусь постоянной и равной $f = 2{,}530 \cdot 10^{-9}$ (если длины сторон выражать в метрах).

По способу Лежандра можно решать любое число треугольников, для чего вначале необходимо на схеме сети определить последовательность их решения, в соответствии с которой пронумеровать треугольники. При этом удобнее через $A_i$ обозначать угол, лежащий против исходной (или вычисленной из предыдущего треугольника) стороны, а угол $C_i$ - против стороны, смежной с последующим решаемым треугольником.

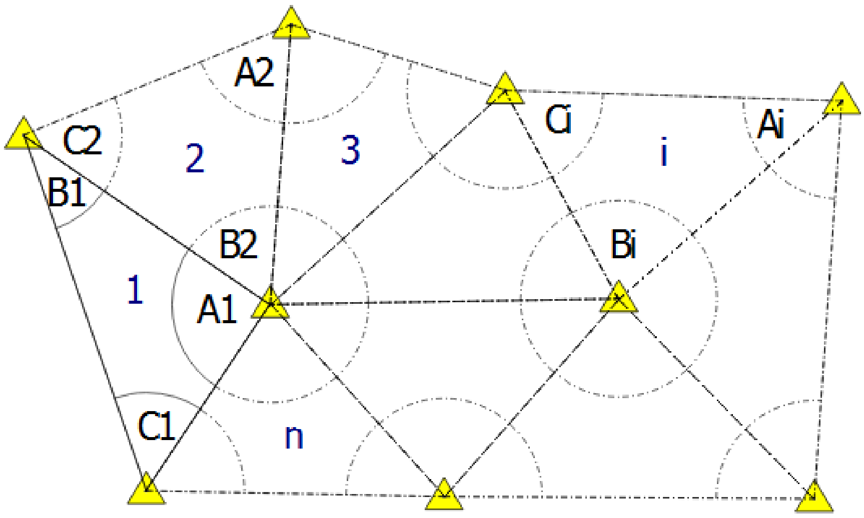


**Рис. 2.1 – Схема треугольников**

Решение треугольников ведется последовательно (от номера 1 до $n$) по единой схеме. В триангуляции вычисления ведутся следующим образом:

1. По теореме синусов плоской тригонометрии выполняют приближённое решение треугольника, с контролем вычисляют длины сторон $b_i$ , $c_i$

$$b_i=a_i\frac{\sin \mathrm{B}_i}{\sin \mathrm{A}_i};\quad c_i=a_i\frac{\sin C_i}{\sin \mathrm{A}_i}=b_i\frac{\sin C_i}{\sin \mathrm{B}_i},\quad (i=1,2,3,\ldots,n) \tag{2.8}$$

2. Вычисляются сферические избытки треугольников по формуле

$$\varepsilon''=fa_ib_i\sin C_i \tag{2.9}$$

3. Для каждого треугольника вычисляется одна треть сферического избытка и вычитается из измеренных углов треугольников, в результате получают

измеренные плоские углы. В триангуляции 1-2 классов вычисления ведут с округлением до 0.01".

4. Вычисляются невязки в треугольнике, и вычитается одна треть их из каждого угла, получают уравненные плоские углы.
5. По исходной стороне и уравненным плоским углам последовательно решают с контролем по теореме синусов треугольник, в результате чего получают искомые длины сторон. Значения длин сторон округляют до 0.001м, с той же точностью должны совпасть контрольные вычисления стороны $c_i$.
6. Приступают к решению следующего треугольника по той же схеме, при этом производим замену обозначений смежной стороны $c_i = a_{i+1}$.

При решении треугольников трилатерации следует иметь в виду, что в каждом треугольнике измерены длины сторон, необходимо вычислить сфероидические углы. Подготовительные действия выполняют аналогично триангуляции. Последовательность решения треугольников определяется также

1. По теореме косинусов плоской тригонометрии вычисляют все три угла треугольника

$$\left.\begin{aligned} \cos A_i^{/} &= \frac{b_i^2 + c_i^2 - a_i^2}{2 b_i c_i} \\ \cos B_i^{/} &= \frac{a_i^2 + c_i^2 - b_i^2}{2 a_i c_i} \\ \cos C_i^{/} &= \frac{a_i^2 + b_i^2 - c_i^2}{2 a_i b_i} \end{aligned}\right\}, \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \qquad (2.10)$$

2. Вычисляют сферические избытки треугольников
3. Сферические углы треугольников получают путём добавления к плоским углам A′, B′, C′ одной трети сферического избытка.

Результаты вычислений необходимо оформить в виде таблицы.

**Таблица 2.1 – Решение геодезических треугольников по способу Лежандра**

| Вершина тр-ка | Измеренные углы тр-ка | Уравненные сферические углы тр-ка | Уравненные плоские углы | Sin уравненных плоских углов | Длины сторон |
|---|---|---|---|---|---|
| $C_i$ | $82^0 37^/ 42.67^{//}$ | $82^0 37^/ 42.40^{//}$ | $82^0 37^/ 41.58^{//}$ | 0.99173447 | 42837.260 |
| $A_i$ | 60 02 17.42 | 60 02 17.15 | 60 02 16.33 | 0.86635570 | 37421.614 |
| $B_i$ | 37 20 03.18 | 37 20 02.91 | 37 20 02.09 | 0.60645914 | 26195.568 |
| Σ | 180 0003.27 | 180 00 02.46 | 180 00 00.00 | | |
| $\varepsilon^{//}$ | +2.46 | | | | |
| $w^{//}$ | +0.81 | | | | |

### 2.2. Способ аддитаментов

Способ аддитаментов основан на теореме синусов сферической тригонометрии, в которой тригонометрические функции малых аргументов представляют в виде ряда с удержанием двух членов разложений. В результате получают теорему синусов плоской тригонометрии

$$\frac{a'}{\sin \mathrm{A}} = \frac{b'}{\sin \mathrm{B}} = \frac{c'}{\sin C} \tag{2.11}$$

где $a'$, $b'$, $c'$ – приведённые длины сторон треугольника, вычисляемые по формулам

$$\left.\begin{aligned} a' &= a - ka^3 = a - A_a \\ b' &= b - kb^3 = b - A_b \\ c' &= c - kc^3 = c - A_c \end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

Величина $k = \frac{1}{6R_c^2} = 4,09 \cdot 10^{-15}$ для всей территории Беларуси, если длины сторон брать в метрах. $A_a$, $A_b$, $A_c$ – аддитаменты сторон.

Порядок решения треугольников триангуляции:

1. Вычисляется аддитамента исходной стороны и вычитается из её длины, получается приведенная длина исходной стороны

$$\mathrm{A}_{S_0} = kS_0^3, \quad S_0{}' = S_0 - \mathrm{A}_{S_0} \tag{2.13}$$

2. По приведенной длине исходной стороны из решения треугольников по теореме синусов плоской тригонометрии последовательно вычисляются приведенные длины сторон треугольников (с контролем). Углы в треугольниках берут сферические уравненные (из способа Лежандра)

$$c_i^{/} = a_i^{/} \frac{\sin C_i}{\sin \mathrm{A}_i}, \quad b_i^{/} = a_i^{/} \frac{\sin B_i}{\sin \mathrm{A}_i} = c_i^{/} \frac{\sin B_i}{\sin C_i}, \tag{2.14}$$

3. Вычисляются аддитаменты по приведенным длинам сторон и путём сложения с ними, получают точные значения сторон треугольника

$$S_i = S_i^{/} + \mathrm{A}_{S_i} \tag{2.15}$$

При большом числе треугольников триангуляции или трилатерации их решение производится последовательно. В триангуляции, как известно, может быть измеренной или вычисленной длина одной стороны, соединяющая исходные пункты. Вначале решается треугольник, включивший исходную сторону, а затем решаются другие треугольники, смежные с уже решённым. В трилатерации решение треугольников может производиться в любой последовательности.

При вычислении аддитаментов предварительные значения длин сторон достаточно вычислять с округлением до десятков метров. Результаты вычислений необходимо оформить в виде таблицы.

В практике геодезических вычислений решение треугольников производят с контролем, применяя для этой цели оба способа. Расхождение в длинах сторон не должно превышать 0.001м, а в углах 0.01″ в сетях 1-2 классов.

## 2.3. Задание на выполнение работы

Решить три треугольника звена триангуляции 1 класса по способу Лежандра и способу Лежандра и способу аддитаментов.

**Таблица 2.2 – Исходные данные для выполнения лабораторных работ № 2 - 4**

<table>
<tr><td>Названия углов треугольников</td><td>Измеренные углы</td><td>B, L – широта, долгота пункта A<br>A – азимут выходной стороны AB<br>S – длина выходной стороны AB</td></tr>
<tr><td>$C_1$<br>$A_1$<br>$B_1$</td><td>67° 56′ 33. 41″<br>56 38 20. 76<br>55 25 07. 20</td><td rowspan="3">B = 53° 06' 59. 8567" + k' k"<br>L = 24 15 23. 2078 + k' k"<br>A = 42 42 10. 513 + k° k' k"<br>S = (23 580. 591 + 1. 211·k) м<br>k – номер варианта</td></tr>
<tr><td>$C_2$<br>$A_2$<br>$B_2$</td><td>59 49 38. 18<br>39 02 33. 10<br>81 07 48. 64</td></tr>
<tr><td>$C_3$<br>$A_3$<br>$B_3$</td><td>57 13 27. 94<br>59 20 17. 84<br>63 26 16. 97</td></tr>
</table>

## Лабораторная работа 3. Решение главной геодезической задачи на поверхности земного эллипсоида

Для выполнения данной работы необходимо изучить раздел 6 лекционного курса [1].

### 3.1. Общие сведения

Как отмечено, положение точек на поверхности земного эллипсоида определяется широтами и долготами, декартовыми прямоугольными координатами в геодезической проекции. После редуцирования измеренных линий на поверхности эллипсоида получают геодезические линии (кратчайшие кривые на поверхности, соединяющие две любые точки). Длина геодезической линии $S_{12}$ и угол, образованный ею с меридианом точки, называемый геодезическим азимутом $A_{12}$, называются полярными сфероидическими координатами.

Главная геодезическая задача связывает системы координат и включает в себя прямую задачу, когда по данным широте, долготе одной точки, расстоянию и азимуту до другой точки необходимо определить широту и долготу другой точки и обратный азимут. В обратной задаче по данным широтам и долготам двух точек требуется определить длину, прямой и обратный азимуты геодезической линии между ними.

Заметим, что для обеспечения необходимой точности при решении геодезических задач широты и долготы вычисляют с округлением до 0,0001″, геодезические азимуты до 0,001″, а в каталогах помещают их значения, округлённые до 0,001″ и 0,01″ соответственно, расстояния вычисляют до 0,001 м..

При использовании спутниковых систем позиционирования получают пространственные прямоугольные координаты точек, по которым можно вычислить геодезические широты, долготы и высоты по формулам раздела 3. 2 лекционного курса. Здесь актуальным является решение обратной геодезической задачи, когда расстояния между смежными пунктами могут быть от 20 до 20 000 км. Поэтому применяют способ Бесселя. Формулы для решения главной геодезической задачи по способу Бесселя приведены в разделах 6. 7 – 6. 8 лекционного курса.

При выполнении данной работы главная геодезическая задача решается в триангуляции 1 класса, поэтому используем формулы со средними аргументами, приведенные в разделах 6. 4 – 6. 6 лекционного курса.

### 3.2. Задание на выполнение работы:

По исходным данным, приведенным в Задание на выполнение работы, составляем схему геодезической сети.

**Прямую геодезическую задачу** решаем, используя сферические уравненные углы и длины сторон сферических треугольников из Лабораторная работа 2. Для решения используем формулы (6.18) по методике, описанной в разделе 6. 5 лекционного курса. Точность вычисления широт и долгот не ниже 0.0002″, азимутов – 0.001″.

В процессе решения задачи следует обратить внимание на передачу геодезических азимутов, используя сферические уравненные углы треугольников:

$$\boldsymbol{A_{AC}} = \boldsymbol{A_{AB}} + C_1; \quad \boldsymbol{A_{BC}} = \boldsymbol{A_{BA}} - B_1; \quad A_1 = \boldsymbol{A_{CB}} - \boldsymbol{A_{CA}}$$

Прямую геодезическую задачу необходимо решить по всем трем треугольникам.

**Обратную геодезическую задачу** решаем, используя формулы, приведенные в разделе 6.6 лекционного курса. Решение производится для всех пунктов сети, геодезические широты и долготы которых определены при решении прямой задачи. Для контроля необходимо сравнить полученные значения азимутов и расстояний из решения обратной задачи с исходными данными и результатами вычислений при решении прямой задачи. Сходимость результатов должна быть не хуже $0.0002''$ в широтах и долготах, $0.001''$ - в азимутах и 0. 001 м – в расстояниях.

## Список литературы


1. Высшая геодезия: сфероидическая геодезия, теоретическая геодезия: учеб.-метод. комплекс для студ. спец. 1-56 02 01 «Геодезия»/ сост. и общ. ред. В. П. Подшивалова. Новополоцк : ПГУ, 2008. – 180 с.
2. Закатов П. С. Курс Высшей Геодезии. Изд. 4, перераб. и доп. М., «Недра», 1976. 511 с.
3. Морозов В.П. Курс сфероидической геодезии. Изд. 2, перераб. и доп. М., Недра, 1979, 296 с.
4. ГОСТ 32453–2013. Глобальная навигационная спутниковая система. Системы координат. Методы преобразований координат определяемых точек. М., Стандартинформ, 2014.

# Приложения

## Приложение А. Правила оформления лабораторных работ

Лабораторная работа должна быть выполнена на стандартной белой бумаге формата А4 по ГОСТ 2.301 с одной стороны листа.

Должны быть установлены стандартные поля по СТБ 6.38:

- левое поле – 30 мм;
- правое поле – 10 мм
- верхнее и нижнее поля – 20 мм.

Лабораторная работа должна быть оформлена в соответствии с ГОСТ 2.105 одним из следующих способов:

1. С применением печатающих и графических устройств вывода Персонального Компьютера (ПК) – ГОСТ 2.004 – шрифтом Times New Roman чёрного цвета с высотой 14 пт, через полтора интервала, в обычном начертании, выравнивая по ширине (пункт – единица, принятая в полиграфии: 1пт=1/72"=0.352мм).
2. Рукописным – чертёжным шрифтом по ГОСТ 2.304 с высотой не менее 2.5 мм, чёрными чернилами (пастой, тушью) – чётким почерком.

Абзацы в тексте начинают отступом 1.25 см, одинаковым по всему тексту.

Вписывать в отпечатанный текст отдельные слова, формулы, условные знаки, а также выполнять иллюстрации следует чёрными чернилами (пастой, тушью). Для выполнения иллюстраций разрешается использовать графические редакторы, фотографии, ксерокопии и т.п.

Для оформления формул используется встроенный в Microsoft Word стандартный текстовый редактор формул либо Microsoft Euqation (Вставка – Объект – Microsoft Euqation 3.0). Формулы и уравнения в тексте следует оформлять в соответствии с ГОСТ 2.105, раздел 4. Формула должна располагаться по центру страницы. Номер формулы указывается арабскими цифрами в круглых скобках в той же строке с выравниванием по правому краю. В формулах в качестве символов следует применять обозначения, установленные соответствующими государственными стандартами. Пояснения символов и числовых коэффициентов, входящих в формулу, если они не пояснены ранее в тексте, должны быть приведены непосредственно под формулой, при этом после формулы должна присутствовать запятая. В том случае, когда пояснения символов и численных коэффициентов, входящих в формулу пояснены ранее в тексте, после формулы должна ставиться точка. Пояснения каждого символа следует давать с новой строки в той последовательности, в которой символы приведены в формуле. Первая строка пояснения должна начинаться с новой строки (без абзацного отступа) со слова «где» и без двоеточия после него. Формулы, следующие одна за другой и не разделённые текстом, разделяют точкой с запятой. Ссылки в тексте на порядковые номера формул дают в скобках, например, «… в формуле (1.3)».

Иллюстрации следует располагать в работе непосредственно на странице с текстом после абзаца, в котором они упоминаются впервые, или отдельно на следующей странице. Иллюстрации обозначают словом «Рисунок» или «Рис.» и нумеруют последовательно. Иллюстрации нумеруют последовательно в пределах работы, например:

«Рисунок 1. Общеземной эллипсоид» без кавычек. Слово «Рисунок», его номер и наименование печатают обычным шрифтом под рисунком посередине строки размером шрифта 14 пт.

На все иллюстрации и таблицы должны быть даны ссылки в тексте работы.

Опечатки и описки допускается исправлять подчисткой или закрашиванием белой краской и нанесением на том же месте исправлений машинным или рукописным способом чёрными чернилами (пастой, тушью). Повреждение листов, помарки и следы прежнего текста не допускаются. Допускается не более трёх исправлений на одной странице.

В тексте работы не допускается применять сокращения слов (кроме установленных правилами орфографии и соответствующими государственными стандартами).