Оглавление

Введение

В приведённых задачах, если отдельно не оговаривается вид погрешности, то подразумевается её средняя квадратическая форма, а вероятностный коэффициент для предельных погрешностей необходимо принять равным 2.

Некоторые общепринятые, используемые в указаниях, обозначения:

$[x] \to \sum_{i=1}^{n} x_i$; $\frac{\partial F}{\partial x_i} \to f_i$; $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \to f_{ij}$,

123.45 ± 0.02 м → $S \pm m_S$, т.е. величина плюс/минус погрешность.

Литература

1. Дегтярев А. М. Теория математической обработки геодезических измерений. Вероятностно-статистические методы. Конспект лекций. – Новополоцк, ПГУ, 2005 г. 212 с.

2. Большаков В.Д., Маркузе Ю.И. Практикум по теории математической обработки геодезических измерений. – М.: Недра, 1984 г. 352 с.

1. Оценка точности функций коррелированных и не коррелированных результатов измерений

1.1. Основные теоретические положения [1, §3.3, 2, §22]

При оценке точности функции от результатов измерений, или косвенных измерений по известной функции связи, задача ставится следующим образом: найти среднюю квадратическую погрешность m_F функции F известного вида, если даны погрешности её аргументов (прямо измеренных величин) m_i. Для решения задачи нелинейная функция $F = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ разлагается в ряд *Тейлора* с сохранением первого, линейного члена. От полученного вида, с использованием правил нахождения дисперсии от произвольной функции, находим окончательный вид оценки для дисперсии D_F исходной функции F. В результате получаем следующую формулу [1, с. 115, 2, с. 109]:

$$D_F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \cdot D_{x_i} + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial F}{\partial x_j} \right) \cdot \mathrm{cov}(x_i, x_j). \qquad (1)$$

С учетом обозначений (см. Введение) формула (1) будет иметь вид

$$D_F = \left[f^2 \cdot D_x \right] + 2 \cdot \left[f_i \cdot f_j \cdot \mathrm{cov}(x_i, x_j) \right].$$

Если измерения независимы, т.е. теснота связи в виде ковариации $cov(x_i ,x_j)$ между i- тым и j-тым элементом равна нулю, формула (1) примет вид

$$D_F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \cdot D_{x_i} = \left[f^2 \cdot D_x \right]. \qquad (1а)$$

С учетом того, что ковариация связана с погрешностями m и коэффициентом корреляции r как $\mathrm{cov}(x_i, x_j) = m_i \cdot m_j \cdot r_{ij}$, а дисперсия $D_X = m^2$, для коррелированных измерений имеем [2, с.109]

$$m_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot m_i \right)^2 + 2 \cdot \sum_{j,i=1}^{k} \frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial F}{\partial x_j} \cdot m_i \cdot m_j \cdot r_{ij}} = \sqrt{\left[f^2 m^2 \right] + 2 \cdot \left[f_i m_i \cdot f_j m_j \cdot r_{ij} \right]}. \qquad (2)$$

Если связи между i - и j - ым измерением не существует (или она не значительна), то в формулах отсутствует второе слагаемое (т.е. $r_{ij} \approx 0$) и формула (2) будет аналогична (1а), но для погрешности m_F

$$m_F = \sqrt{\left[f^2 m^2 \right]}. \qquad (2а)$$

Используя матричные обозначения, дисперсию функции можно представить в виде [1, с.115]

$$D_F = f \cdot K_x \cdot f^T . \tag{3}$$

Эта формула является выражением ***фундаментальной теоремы переноса ошибок.*** Здесь вектор-строка f состоит из значений частных производных от функции F по i- ому аргументу:

$$f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \ldots & \frac{\partial f}{\partial x_N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots f_n \end{pmatrix}, \tag{4}$$

а матрица K_x – ковариационная матрица результатов измерений, где диагональные элементы есть дисперсии i- го измерения, недиагональные - ковариации, определенные выше. Если результаты измерений не коррелированы, т.е. $r_{ij} \approx 0$, то ковариационная матрица K_x в (3) будет иметь диагональный вид (состоять только из дисперсий) и будет называться дисперсионной матрицей результатов измерений.

Если ввести нормированный вектор частных производных f', в котором каждый элемент вектора f умножен на среднюю квадратическую погрешность m_i для i - ого измерения, дисперсия функции выразится в виде [1]

$$D_F = f' \cdot R_x \cdot f'^T , \tag{5}$$

где R_x - корреляционная матрица с единицами на месте диагональных элементов и коэффициентами корреляции r_{ij} между i- ым и j-ым измерениями на месте соответствующих недиагональных элементов.

Кроме обычных средних квадратических погрешностей при решении такого рода задач часто используются предельные погрешности (или допустимая невязка) $m_{пред} = t \cdot m_F$, где t – вероятностный коэффициент,чаще всего это 2, или 3; относительная погрешность вида $\frac{m_x}{x} = \frac{1}{M}$, также её предельный аналог, т.е. в числителе используется предельная погрешность, описанная выше.

Замечание 1. ***Иметь в виду, что при наличии в формуле угловых и линейных величин, угловую погрешность следует переводить в радианы, т.е. делить на число минут в радиане ρ' = 3437.75', или секунд в радиане ρ"= 206265" в зависимости от того, в каких единицах дается погрешность измеренного угла.***

Достаточно часто при расчетах используется принцип равных влияний угловых и линейных измерений в виде $\frac{m_D}{D} = \frac{m''_\beta}{\rho''}$ что позволяет упростить вычисления, или вообще решить задачу.

Если требуется по линейным величинам получить угловые (например, из теоремы косинусов), то надо иметь ввиду, что результат получается в радианах и требует перевода в угловые величины умножением на ρ (см. Замечание 1).

Таким образом, последовательность решения такого рода задач можно свести к следующей последовательности:

Шаг 1: Записать формулу, определяющую значение оцениваемой величины;

Шаг 2: Взять частные производные по всем аргументам, имеющим заданные погрешности измерений;

Шаг 3: Подставить значения производных (в виде формул, или чисел) и погрешностей измерений в формулу 1а (нет корреляции), 1 – если есть корреляция, или 2а и 2 соответственно. Если надо, учесть Замечание 1.

Шаг 4: Вычислить, если необходимо предельную, или относительную погрешность используя приведенные выше формулы.

Задачи для практических занятий

1. Линия длиной 120 м измерена стальной 20-метровой лентой. Определить относительную среднюю квадратическую погрешность в длине линии, если средняя квадратическая погрешность одного отложения ленты равна 1 см.

2. Линия длиной 161.62 м и с углом наклона $2° \ 17' \pm 1'$ измерена стальной 20-метровой лентой, каждое уложение 4 раза. Определить среднюю квадратическую погрешность измеренной длины линии, если средняя квадратическая погрешность одного отложения ленты равна 1 *см*, погрешность домера не учитывать.

3. Линия длиной 86.33 м и с углом наклона $1° \ 04' \pm 1'$ измерена стальной 20-метровой лентой. Определить предельную среднюю квадратическую погрешность в длине линии, если средняя квадратическая погрешность одного отложения ленты равна 1 см, а коэффициент корреляции между i-ым и j-ым уложением ленты равен 0.03. Погрешность домера не учитывать.

4. В треугольнике измерены две стороны $a = 63.7 \pm 0.2$ м *и* $b = 90.3 \pm 0.3$ м и угол $C = 37° \pm 30''$. Определить площадь треугольника и её предельную среднюю квадратическую погрешность.

5. В треугольнике измерены две стороны $a = 76.3 \pm 0.3$ м *и* $b = 103.3 \pm 0.4$ м и, угол $C = 54° \ 12' \pm 30''$. Определить площадь треугольника и её среднюю квадратическую погрешность, если коэффициент корреляции между длинами сторон равен $r_{ab} = 0.23$.

6. Найти относительную погрешность определения площади треугольника, если относительные погрешности сторон $m_a/a = 1/2000$, $m_b/b = 1/3000$, а угол между сторонами с погрешностью $C = 39° \pm 30''$.

7. Вычислить относительную погрешность определения площади треугольника, используя принцип равных влияний угловых и линейных измерений, если угол $C = 62° \pm 30''$ между сторонами a и b, а коэффициент корреляции между ними $r_{ab} = 0.23$.

8. При измерении наклонной линии лентой получены длина 120 *м*. с погрешностью 0.1 м. и угол наклона 4° с погрешностью 30″. Вычислить поправку за наклон линии и среднюю квадратическую погрешность в значении величины этой поправки.

9. Среднее значение угла из n приемов имеет ошибку m''. Определить погрешность угла, полученного при тех же условиях из t приемов и допустимую невязку в k-угольнике в общем виде.

10. Даны отметки двух точек H_1 и H_2 и их средние квадратические погрешность m_1 и m_2. Получить превышение по линии 1-2 и его предельную погрешность .

11. Определить среднюю квадратическую погрешность положения конечного пункта висячего теодолитного хода в 2 стороны, если исходный дирекционный угол $\alpha = 45°$, левые углы поворота β в 170° и 150° измерены с точностью 1′, а длины в 100 и 120 м измерены с точностью, соответствующей теодолитному ходу.

12. В треугольнике ABC измерены сторона $b \pm m_b$ и углы $B \pm m_B$ и $C \pm m_C$. Вычислить сторону c, а также её среднюю квадратическую и относительную погрешности в общем виде.

13. В треугольнике ABC измерены сторона b = 143.18 ± 0.06 м и углы $A = 51°\ 52' \pm 30''$ и $B = 65°\ 41' \pm 30''$. Вычислить сторону a и её среднюю квадратическую и относительную погрешности.

14. В треугольнике ABC измерены стороны a = 162.71 ± 0.05 м b = 136.53 ± 0.04 м и угол между ними $C = 72°\ 35' \pm 30''$. Вычислить сторону c и её предельную среднюю квадратическую погрешность.

15. В треугольнике ABC измерены три стороны a = 122.57 ± 0.06 м b = 161.85 ± 0.07 м и c = 106.28 ± 0.04. Вычислить угол A и его среднюю квадратическую погрешность.

16. В треугольнике ABC измерены три стороны a = 132.15 ± 0.06 м b = 184.58 ± 0.07 м и c = 101.72 ± 0.04. Вычислить угол C и его среднюю квадратическую погрешность.

17. Найти длину и определить её относительную погрешность, вычисленную по координатам двух точек X_1 = 1275.43 м, Y_1 = 2649.72 м и X_2 = 2753.64 м, Y_2 = 3149.57 м, имеющих погрешности m_{x_1} = 0.12 м, m_{y_1} = 0.17 м и m_{x_2} = 0.08 м, m_{y_2} = 0.11 м соответственно.

18. Найти длину и определить её относительную погрешность, вычисленную по координатам двух точек X_1 = 1245.49 м, Y_1 = 2849.42 м и X_2 = 1753.14 м, Y_2 = 2149.57 м, имеющих погрешности m_{x_1} = 0.11 м, m_{y_1} = 0.12 м и m_{x_2} = 0.09 м, m_{y_2} = 0.10 м соответственно, а коэффициент корреляции между X_1 и Y_1, X_2 и Y_2 равный 0.3.

19. Найти величину дирекционного угла и определить его среднюю квадратическую погрешность, вычисленного по координатам двух точек

X_1 = 1367.14 м, Y_1 = 2012.57 м и X_2 = 2253.86 м, Y_2 = 3009.35 м, имеющих погрешности m_{x_1} = 0.06 м, m_{y_1} = 0.07 м и m_{x_2} = 0.08 м, m_{y_2} = 0.09 м соответственно.

20. Найти величину дирекционного угла и определить его среднюю квадратическую погрешность, вычисленного по координатам двух точек X_1 = 1347.24 м, Y_1 = 2212.47 м и X_2 = 2153.286 м, Y_2 = 3059.37 м, имеющих погрешности m_{x_1} = 0.05 м, m_{y_1} = 0.06 м и m_{x_2} = 0.09 м, m_{y_2} = 0.08 м соответственно, а коэффициент корреляции между X_1 и Y_1, X_2 и Y_2 равный 0.4.

21. Средняя квадратическая погрешность измерения угла одним приемом равна 5″. Какова будет предельная невязка в сумме углов четырехугольника, если каждый угол измерялся в 2 приема.

22. Среднее значение угла из 4 приемов имеет среднюю квадратическую погрешность 1.7″. Определить среднюю квадратическую погрешность вероятного значения угла, полученного при тех же условиях из 6 приемов.

23. С какой относительной ошибкой будет найдено расстояние по формуле $S = \frac{l}{2} \cdot ctg\frac{\phi}{2}$, если l = 24.000 ± 0.002*м*, ϕ = 5° 42’ 36″?

24. Вычислить относительную ошибку вычисления гипотенузы прямоугольного треугольника, если a = 100.00 ± 0.08 *м*, b = 50.000 ± 0.008 *м*?

25. В треугольнике ABC измерены стороны a = 126.71 ± 0.05 м b = 136.53 ± 0.04 м и угол B = 72° 35′ ± 30″. Вычислить значение угла A и его среднюю квадратическую погрешность.

26. Установить, с какой предельной погрешностью будет определена цена деления уровня по формуле $\tau = \frac{206 \cdot h}{n \cdot s}$, если h = 10.0 ± 0.2 *мм*; s = 20.00 ± 0.01 *м*; n = 10 ± 0.1 делений.

27. Определить поправку за наклон линии, измеренной нитяным дальномером по формуле $\Delta S = (k \cdot l + c) \cdot \sin^2 \nu$ и её среднюю квадратическую погрешность, если k = 100.0 ± 0.1; l = 100.0 ± 0.05 *м*; c = 0.31 ± 0.02 *м*; ν = -12° 30′ ± 1′.

28. Определить среднюю квадратическую погрешность превышения, определенного барометрическим нивелированием, из зависимости $h = \Delta H \cdot (P_2 - P_1)$, если P_2 = 780.1 ± 0.5 *мм. рт. ст.*; P_1 = 771.2 ± 0.5 *мм. рт. ст.*; ΔH - барическая ступень (превышение, соответствующее разности давления в двух точках, равной 1 *мм рт.ст.*); ΔH = 11 ± 0.*1мм рт.ст.*

29. Определить превышение по формуле $h = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \sin 2\nu$ и его среднюю квадратическую ошибку, если D = 200± 0.1 м, ν =4°30′± 0.5′.

30. Определить превышение по полной тригонометрической формуле и его среднюю квадратическую ошибку, если D = 200± 0.1 м, ν = 4°30′± 0.5′, а погрешности определения высоты инструмента и наведения были определены в 0.5 см.

31. Вычислить предельную погрешность получения приращения координат по оси абсцисс, если S = 147.34 ± 0.07 м, α = 83°47′± 0.5′.

32. Вычислить погрешность получения приращения координат по оси абсцисс, если S = 171.534 ± 0.008 м, предыдущий дирекционный угол α = 132°47′18.5 ± 1.2″, а измеренный от него на определяемую сторону угол поворота β = 73°24′51.7 ± 2″.

33. Вычислить предельную погрешность получения приращения координат по оси ординат, если S = 184.53 ± 0.09 м, α = 98°34′± 0.5′.

34. Вычислить погрешность получения приращения координат по оси отдинат, если S = 137.253 ± 0.010 м, предыдущий дирекционный угол α = 231°54′38.2 ± 1.7″, а измеренный от него на определяемую сторону угол поворота β = 167°32′15.3 ± 2″.

35. Вычислить предельную погрешность получения приращения координат по оси абсцисс, если наклонное расстояние D = 154.31 ± 0.06 м, угол наклона ν = 5°40′± 20′ и дирекционный угол стороны α = 93°17′± 0.5′.

36. Линия состоит из трех отрезков: S_1=101.14±0.04м; S_2 = 215.61 ± 0.08 м; S_3=310.33 ± 0.10 м. Вычислить абсолютную и предельную относительную средние квадратические погрешности определения всей линии.

37. Линия состоит из двух отрезков: горизонтального S_1=141.714±0.018 м и наклонного D_2 = 195.615 ± 0.028 м с углом наклона ν = 4°42′18″± 20″. Вычислить среднюю квадратическую погрешность определения всей линии.

38. Площадь участка определяется двумя обводами с помощью планиметра. Какова будет предельная ошибка в определении площади, если каждый отсчет имеет ошибку ±1 деление, а цена деления планиметра, равная 0.25 га. не содержит ошибки ?

39. Найти среднюю квадратическую ошибку функции $r = \dfrac{l_1 \cdot \sin(M + \theta)}{S}\rho$ в общем виде, если ошибки всех аргументов известны.

40. Найти относительную погрешность поправки за наклон линии, если угол наклона ν = 4°± 25′, а относительная погрешность наклонной длины $\dfrac{m_D}{D} = \dfrac{1}{2000}$.

41. Найти среднюю квадратическую погрешность определения поправки за наклон при измерении линии лентой. Значение линии получено с погрешностью 0.1 м и отношение поправки к наклонной линии 0.01.

42. Среднее значение угла из 4 приемов имеет среднюю квадратическую погрешность 2″. Определить: погрешность угла, полученного при тех же условиях из 9 приемов и допустимую невязку в 9-угольнике.

43. Отметки двух точек H_1 = 112.714 ± 0.012 м и H_2 = 114.428 ± 0.007 м. Вычислить превышение по линии 1-2 и его предельную среднюю квадратическую погрешность.

44. Отметки двух точек H_1 = 114.427 ± 0.008 м и H_2 = 118.583 ± 0.007 м а измеренная наклонная длина между ними D = 186.54 ± 0.08 м. Вычислить угол наклона линии и его среднюю квадратическую погрешность.

45. Отметки двух точек H_1 = 104.427 ± 0.005 м и H_2 = 108.283 ± 0.007 м а измеренная наклонная длина между ними D = 153.54 ± 0.06 м. Вычислить уклон по линии и его относительную среднюю квадратическую погрешность.

46. Отметки двух точек H_1 = 113.254 ± 0.010 м и H_2 = 116.754 ± 0.008 м, а измеренная наклонная длина между ними D = 163.75 ± 0.06 м. Вычислить горизонтальное проложение по линии 1-2 и его среднюю квадратическую погрешность.

47. Определить среднюю квадратическую погрешность определения высоты точки 2 из геометрического нивелирования, если H_1 = 117.214 ± 0.006 м, а отсчеты по рейке передней a = 1481 мм, задней b = 1954 мм. Нивелирование считать техническим.

48. Определить среднюю квадратическую погрешность вычисленного горизонта инструмента ГИ, если высота опорной точки H_1 = 121.742 ± 0.008м, а отсчет по рейке на эту точку a = 1738 ± 3 мм.

49. Определить среднюю квадратическую погрешность высоты точки, вычисленной через горизонт инструмента ГИ, если высота опорной точки H_1 = 121.742 ± 0.008м, отсчет по рейке на эту точку a = 1273 ± 3 мм, а на определяемую точку b = 1178 ± 2 мм.

50. Найти ошибку m_D расстояния D, измеренного дальномером, если известна средняя квадратическая погрешность m_l = 3.5 мм отрезка l, полученного из отсчетов по рейке. Коэффициент дальномера C = 100 определен с малой ошибкой, которой можно пренебречь.

51. Измерены две линии: одна - длиной 210.06 м со средней квадратической погрешностью ± 9 см и вторая – длиной 180.47 м со средней квадратической погрешностью ± 6 см. С какай точностью будут вычислены расстояния, равные: 1) сумме двух линий и 2) их разности?

52. Определить среднюю квадратическую погрешность измерения горизонтального угла теодолитом одним полным приемом, если средняя квадратическая погрешность измерения одного направления равна ± 0.5′.

53. Определить среднюю квадратическую погрешность измерения горизонтального угла теодолитом в два полных приема, если средняя квадратическая погрешность измерения одного направления равна ± 1.4″.

54. Определить среднюю квадратическую погрешность измерения горизонтального угла теодолитом одним полным приемом способом повторений при 2 перестановках лимба, если средняя квадратическая погрешность измерения одного направления равна ± 0.5′.

55. Найти среднюю квадратическую погрешность получения вертикального угла, измеренного при левом положении трубы, если отсчет по вертикальному кругу сопровождался ошибкой $m_1 = \pm\, 20''$, а место нуля получено с ошибкой $m_2 = \pm\, 5''$.

56. Найти среднюю квадратическую погрешность получения вертикального угла полным приемом, если отсчеты по вертикальному кругу сопровождались погрешностью $m = \pm\, 1.7''$.

57. Найти среднюю квадратическую погрешность вертикального угла, измеренного при двух положениях трубы, если отсчеты по вертикальному кругу сопровождались ошибками $m = \pm\ 5''$.

58. Определить среднюю квадратическую погрешность получения превышения из геометрического нивелирования по двум сторонам рейки при погрешности снятия отсчета по рейке (погрешности взгляда) былиравны 2 мм.

59. Тахеометром измерены превышения между тремя смежными станциями, при расстояниях между первой и второй станциями в 246 м и между второй и третьей станциями в 171 м. Средняя квадратическая погрешность превышения, измеренного посредством этого тахеометра при данных условиях, составляет ± 3 см на 100 м. Определить среднюю квадратическую погрешность в превышении между первой и третьей станциями.

60. Определить относительную погрешность определения периметра полигона, состоящего из 5 сторон длиной в среднем по 110 м каждая, если относительная ошибка измерения лентой всех сторон одинаковая и равна $\frac{1}{3000}$.

61. Найти среднюю квадратическую погрешность дирекционного угла 4-ой линии висячего теодолитного хода, если средняя квадратическая погрешность начального дирекционного угла равна $m_{\alpha} = 2''$, а измеренного угла - $m_{\beta} = 7''$.

62. Нивелирование по ходу между двумя реперами выполнено с применением разных инструментов. Первым инструментом пронивелировано L_1 = 4 км, а вторым L_2 = 6 км со средними квадратическими погрешностями на 1 км хода соответственно m_1 = 2 мм и m_2 = 4 мм. Определить среднюю квадратическую ошибку второго репера, вычисленного по ходу от первого репера, если средняя квадратическая ошибка отметки первого репера $m_{Р П1}$ = 2 мм.

63. Определить допустимое значение невязки нивелирного хода длиной 17.3 км, если средняя квадратическая погрешность нивелирования на 1 км хода составляет 4 мм.

64. Определить допустимое значение невязки нивелирного хода длиной 12.7 км, если средняя квадратическая погрешность определения превышения на станции составляет 2 мм, а на 1 км хода приходится 6 станций.

65. Найти среднюю квадратическую погрешность отсчета ***l*** по дальномерным нитям для случаев, когда:

1) делаются отсчеты по верхней и нижней нитям ***l*** = *В – Н*;
2) делаются отсчеты по верхней и средней нитям и разность, удваивается ***l*** = *2(В – С)*;
3) отсчет получается как сумма двух разностей: верхняя нить минус средняя и средняя минус нижняя ***l*** = *(В – С) + (С' – Н)*.

66. Площадь многоугольника определялась разбивкой его на местности на треугольники и трапеции. Средние квадратические погрешности в площадях отдельных фигур получились следующие: m_1 = 10.5 *м*^{2}; m_2 = 14.0 *м*^{2}; m_3 = 9.6 *м*^{2}, а корреляция между парами фигур была 0.2. Найти среднюю квадратическую погрешность определения площади многоугольника.

67. Определить среднюю квадратическую погрешность радиуса шара R = 10.0 м., если известно, что объем шара V, вычисленный по этому значению радиуса, ошибочен на m_v = 1.57 *м*^{3}.

68. Средняя квадратическая погрешность превышения на одной станции, полученного как среднее из превышений при двух горизонтах нивелира, равна 2,. мм. Найти средние квадратические погрешности:

1) суммы превышений, полученных на 10 станциях;
2) превышения, полученного на одной станции при одном горизонте инструмента.

69. Найти среднюю квадратическую погрешность расстояния S, определенного из параллактического звена по формуле $S = \frac{l}{2} ctg \frac{\varphi}{2}$.

70. Для определения секундного расхода воды в реке по формуле $Q = V \cdot P$ измерены площадь живого сечения P = 17.61 *м*^{2} ± 0.43 *м*^{2} и скорость воды V = 0.43 *м/сек* ± 0.036 *м/сек*. Найти расход Q и его погрешность m_Q.

71. Для определения высоты триангуляционного сигнала U измерены расстояние S = 124.18 *м* ±0.030 *м* и зенитное расстояние Z = 70°18′30″ ± 40″. Найти среднюю квадратическую погрешность измеренной части высоты сигнала, вычисленной по формуле $U = S\, ctg\, (Z)$.

72. В параллактическом звене измерены параллактические углы φ_1 = 2°56′09.17″ ± 0.45″ и φ_2 = 2°56′12.30″ ± 0.11″ и базис b = 23.9932*м* ± 0.020*мм*. Вычислить расстояние S по формуле $S = \frac{b}{2}\left(ctg \frac{\varphi_1}{2} + ctg \frac{\varphi_2}{2} \right)$ и получить его предельную и относительную среднюю квадратическую погрешность.

73. В четырехугольнике измерены три угла со средними квадратческими погрешностями m_1=8.0″, m_2=9.0″, m_3=5.0″. Найти среднюю квадратическую погрешность четвертого угла, вычисленного по первым трём.

74. В трехугольнике измерены два угла в 2 приема со средними квадратческими погрешностями 1 приема m_1=8.0″ и m_2=9.0″. Найти среднюю квадратическую погрешность третьего угла, вычисленного по первым двум.

75. В четырехугольнике измерены четыре угла в 3 приема со средними квадратческими погрешностями m_1=3.0″, m_2=4.0″, и m_4=2.0″. Найти среднюю квадратическую погрешность суммы всех углов.

76. В четырехугольнике измерены три угла со средними квадратческими погрешностями m_1=8.0″, m_2=6.0″, m_3=5.0″. Найти среднюю квадратическую погрешность суммы всех четырех углов.

77. Средняя квадратическая погрешность превышения, полученного на одной станции геометрического нивелирования равна 2.0 мм. Определить среднюю квадратическую погрешность суммы превышений, полученных на 12 станциях.

78. В замкнутом теодолитном полигоне измерены все 9 углов со средней квадратической погрешностью измерения одного угла, равной 20″. Подсчитать допустимую величину угловой невязки полигона.

79. В разомкнутом полигонометрическом ходе измерены все 12 углов со средней квадратической погрешностью измерения одного угла, равной 2″. Подсчитать допустимую величину угловой невязки полигона, если оба исходные дирекционные углы имеют одинаковую погрешность 1.2″.

80. Определить среднюю квадратическую погрешность вычисленной длины окружности, если её радиус R измерен со средней квадратической погрешностью m_R=0.03 м.

81. Определить среднюю квадратическую погрешность измерения угла теодолитом двумям полными приёмами, если средняя квадратическая погрешность измерения одного направления равна m_0=30″.

82. Проложен ход геометрического нивелирования по ровной местности протяжением L=1600 м и при длине визирного луча l=50м. Найти среднюю квадратическую погрешность суммы превышений по всему ходу, если средняя квадратическая погрешность определения превышения на станции m_h=1.5 мм.

83. Найти среднюю квадратическую погрешность определения дирекционного угла 7-ой стороны полигонометрического хода, если средняя квадратическая погрешность начального дирекционного угла $m_н$=1.5″, а измеренного угла m_β=2.5″.

84. Найти среднюю квадратическую погрешность определения дирекционного угла 10-ой стороны теодолитного хода, если средняя квадратическая погрешность измеренного угла m_β=0.5′.

85. Для определения площади P прямоугольника измерены две стороны a = 144.28 м и b = 353.22 м с средними квадратическими погрешностями m_a = 0.12 м и m_b = 0.09 м. Вычислить площадь фигуры и её среднюю квадратическую погрешность.

86. Вычислить горизонтальное проложение измеренной длины линии $S = D\,\boldsymbol{\cos}\,\nu$ и его среднюю квадратическую погрешность, если D = 50.00 м ± 0.05 м и ν = +5°10′ ± 0.5′. Влияние какого источника ошибок преобладает в полученном результате?

87. Вычислить горизонтальное проложение измеренной длины линии $S = D\,\boldsymbol{\cos}\,\nu$ и его среднюю квадратическую погрешность, если D = 50.00 м ± 0.05 м и ν = +5°10′ используя принцип равных влияний.

88. Определить среднюю квадратическую погрешность вычисленного объема прямоугольного параллелепипеда, если ребра его a = 10.0 м, b = 4.0 м и c = 5.0 м измерены со средними квадратическими погрешностями $m_a = m_b = m_c$ = 0.2 м.

89. Среднее значение угла из 3 приемов имеет среднюю квадратическую погрешность, равную 4.0″. Определить среднюю квадратическую погрешность вероятнейшего значения угла, полученного из 5 приемов при тех же условиях.

90. При определении цены деления уровня по рейке перемещение пузырька составило 10 делений, расстояние до рейки S = 20.00 м ± 0.01 м, погрешность разности отсчетов h по рейке, сделанных при двух положениях пузырька уровня, m_h = 1.5 мм. Вычислить значение цены деления уровня и величину средней квадратической погрешности в определении цены деления уровня.

91. Длина стальной 20-метровой ленты определена на компараторе со средней квадратической погрешностью, равной 1.5 мм. Найти среднюю квадратическую погрешность в длине линии S = 197.80 м, происходящую от погрешности компарирования этой ленты.

92. Найти среднюю квадратическую погрешность определения цены деления уровня по рейке, вычисленной по формуле $\tau" = \dfrac{206 \cdot h}{n \cdot S}$, если h = 10 мм ± 0.50 мм, S = 40.00 м ± 0.010 м, n = 10 делений ± 0.10 деления.

93. Линия S измерена по частям различными дальномерами: первая часть - дальномером с коэффициентом C_1 = 200 и со средней квадратической погрешностью m_l = 0.3 м, вторая часть - дальномером с коэффициентом C_2 = 150 и m_l = 0.1 м, третья часть - дальномером с коэффициентом C_3 = 90 и m_l = 0.2 м. Вычислить среднюю квадратическую погрешность длины всей линии S.

94. Вычислить относительную погрешность определения гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого измерены как b=104.16 м ± 0.20 м и c = 96.50 м ±0.18 м.

95. Определить среднюю квадратическую погрешность третьей отметки хода геометрического нивелирования если длины секций 3 и 5 км соответственно, отметка начальной точки имеет среднюю квадратическую погрешность равную 4 мм, а погрешность превышения на один километр хода составила 2 мм.

96. Средняя квадратическая погрешность угла m_β =10″. Найти предельную ошибку суммы 8 углов.

97. Найти среднюю квадратическую погрешность угловой невязки разомкнутого полигонометрического хода, если средняя квадратическая погрешность измерения одного угла m_β = 3″, а число вершин n = 10, если

а) Примычные дирекционные углы ($\alpha_{нач}$ и $\alpha_{кон}$) безошибочны;

б) Примычные дирекционные углы не безошибочны, а определены с точностью $m_{\alpha_{нач}} = m_{\alpha_{кон}}$ = 2″.

98. Определить среднюю квадратическую погрешность вычисленной длины волны модулированного светового потока $\lambda = c/f$, если скорость

света c = 299792.5 км/с ± 0.4 км/с, а частота, равная f = 10000.0 кгц, определена со средней квадратической погрешностью m_f = 0.15 кгц.

99. Средняя квадратическая погрешность превышения на одной станции равна 2.0 мм. Нивелирование производилось по двухсторонним рейкам. Найти средние квадратические погрешности: 1) суммы превышений, полученных на 10 станциях; 2) превышения, полученного на станции как разность отсчётов по чёрным сторонам реек.

100. Определить среднюю квадратическую погрешность в определении площади трапеции, где измерены основания a = 80.20 ± 0.15 м, b = 59.30 ± 0.14 м и высота h = 61.40 ± 0.14 м.

101. Среднее значение угла из 4 приёмов имеет среднюю квадратическую погрешность 4.0″. Определить среднюю квадратическую погрешность вероятнейшего угла, полученного из 6 приёмов при тех же условиях.

102. Длина стальной 20-метровой ленты определена со средней квадратической погрешностью, равной 1.8 см. Найти среднюю квадратическую погрешность в длине линии D = 210.88 м, измеренной этой лентой.

103. Вычислить превышение на основе формулы $h = S \cdot tg\nu + i - v$ и его среднюю квадратическую погрешность, если длина линии S = 165.35 ± 0.15 м и угол наклона $\nu = -5°33' \pm 1.0'$, высота инструмента i = 0.875 ± 0.005 м, высота наведения v = 2.980 ± 0.006 м, а коэффициент корреляции $r_{i,v}$= 0.05.

104. Найти среднюю квадратическую погрешность периметра теодолитного полигона, состоящего из 9 сторон длиной в среднем по 200 м каждая, если погрешность измерения стороны составляет 2 см одной укладки, а измерения проводились прямо и обратно.

105. Проложен ход геометрического нивелирования по ровной местности протяжением 3000 *м* при длине визирного луча 50 *м*. Найти среднюю квадратическую погрешность суммы превышений по всему ходу, если средняя квадратическая погрешность превышения на одной станции равна 1.0 *мм*.

106. Базис геометрической сети длиной 720 *м* был измерен 3 раза 50-метровой лентой со средней квадратической погрешностью одного отложения, равной 2 см. Определить среднюю квадратическую и относительную погрешность вероятнейшего (среднего) значения базиса.

107. Определить длину и среднюю квадратическую погрешность вычисленного катета прямоугольного треугольника, в котором измерена гипотенуза c = 224.26 ± 0.12 м и противолежащий катету a угол A = 43°24′00″ ± 20″.

108. Определить длину и среднюю квадратическую погрешность вычисленной гипотенузы прямоугольного треугольника, в котором измерены катеты a = 224.26 ± 0.12 м и b = 172.62 ± 0.10 м, а коэффициент корреляции между сторонами a и b принят равным 0.46.

109. Найти среднюю квадратическую погрешность сближения меридианов, вычисляемого по формуле $\gamma = \Delta\lambda \cdot sin\varphi$, если широта пункта φ =

$55°41'45'' \pm 5''$, а разность долгот осевого меридиана и меридиана данного пункта $\Delta\lambda = 2°03' \pm 1'$.

110. В четырёх угольнике измерены три угла со средними квадратическими погрешностями: $m_1 = 8''$, $m_2 = 9''$, $m_3 = 5''$. Найти погрешность четвёртого угла вычисленного по первым трём, если ковариация между всеми парами углов равна 2.8.

111. Угол α получен как среднее из четырёх приёмов со средней квадратической погрешностью одного приёма равной 8.0″, а угол β – из девяти приёмов со средней квадратической погрешностью одного приёма равной 9.0″. Найти погрешность суммы углов α и β.

112. Найти среднюю квадратическую погрешность определения превышения по нивелирному ходу длиной 2.5 км, если среднее расстояние от нивелира до рейки составляло 50 м, а погрешность измерения превышения на станции равна 1.0 мм.

113. Определить среднюю квадратическую погрешность поправки за кривизну земли при получении горизонтального расстояния, если длина дуги l на поверхности измерена с погрешностью m_l = 0.10 м, а радиус Земли опеделен посредством дуги α, с погрешностью $m_\alpha = 10''$.

114. Определить погрешность получения сближения меридианов, если оно искалось для долготы $\lambda = 26°\ 24' \pm 1'$, широты $\varphi = 56°\ 43' \pm 2'$ и безошибочном определении осевого меридиана.

115. Найти среднюю квадратическую погрешность пятого дирекционного угла, если погрешность исходного составляет 2″, а углы поворота измерялись двумя приемами теодолитом 2Т5.

116. Вычислить среднюю квадратическую погрешность третьего уравненного дирекционного угла хода в 12 сторон, если углы поворота измерялись с погрешностью 5″. Исходный дирекционный угол безошибочен.

117. Определить среднюю квадратическую погрешность четвертого уравненного угла поворота хода в 10 сторон, если углы поворота измерялись с погрешностью 2″, а исходный дирекционный угол имеет погрешность $m_\alpha = 1''$.

118. Найти среднюю квадратическую погрешность определения отметки точки с карты, если отметка младшей горизонтали получена с погрешностью 10 см, высота сечения h = 0.5 м, расстояние до определяемой точки от младшей горизонтали на карте $l = 2.4 \pm 0.1$ см, а величина заложения в точке определения $d = 5.7 \pm 0.2$ см.

119. Найти среднюю квадратическую погрешность определения отметки точки с карты, если отметка младшей горизонтали получена с погрешностью 13 см, высота сечения h = 0.5 м имеет погрешность в 10% от сечения, расстояние до определяемой точки от младшей горизонтали на карте $l_1 = 1.6 \pm 0.1$ см, а от определяемой точки до старшей горизонтали $l_2 = 2.4 \pm 0.2$ см.

120. Найти среднюю квадратическую погрешность определения отметки точки с плана масштаба 1:2000, если отметка младшей горизонтали получена с погрешностью 10 см, высота сечения h = 0.5 м, расстояние до

определяемой точки от младшей горизонтали $l = 7$ мм плана, а величина заложения в точке определения $d = 15$ мм плана. Погрешности определить с графической точнлостью.

121. Определить погрешность получения значения крутизны ската с карты масштаба 1:2000, если высота сечения $h = 0.5$ м имеет погрешность в 10% от сечения.

122. Вычислить среднюю квадратическую погрешность разности вертикальных углов, полученных полным приемом на две точки при использовании теодолита ОТ-02.

123. Получить погрешность определения поправки за наклон в линию, если превышение между точками с наклонной длиной $D = 124.18 \pm 0.08$ м получено из технического нивелирования по отсчетам $a = 1854$, $b = 0312$ по черной стороне рейки, и $a = 6986$, $b = 5440$ по красной.

124. Определить точность получения пятки рейки при техническом нивелировании.

125. Получить среднюю квадратическую погрешность получения неприступного расстояния из треугольника, если измерены и уравнены все три угла. Погрешность стороны, принятой за базис, считать безошибочной, а измеренной - 0.02 м. Углы измерялись теодолитом 2Т5.

126. Определить среднюю квадратическую погрешность получения неприступного расстояния из равностороннего треугольника, если измерены и уравнены все три угла. Погрешность стороны принятой за базис принять равной 0.02 м, измеренной – 0.08 м, а углы измерялись теодолитом 2Т2.

127. Найти погрешность получения превышения способом нивелирования вперед нивелиром Н3, если высота инструмента определялась из тригонометрического нивелирования при следующих результатах измерений: угол наклона $\nu = 2° \pm 5''$, горизонтальное расстояние $S = 50 \pm 0.05$ м при нахождении теодолита и нивелира на одном уровне.

128. Определить погрешность выноса в натуру проектной отметки если высота репера определена с погрешностью 2 мм, а отсчет по рейке на репер имеет погрешность 3 мм, а точность отложения отсчета была равна *2* мм.

129. Вычислить погрешность определения уклона по линии, если высоты конечных точек 123.764 м и 126.857 м определены с погрешностями 2 и 3 мм соответственно, а расстояние между ними получено в 4 укладки 50-ти метровой ленты с точностью одной укладки 3 мм.

130. Найти погрешность определения расстояния до точки нулевых работ при горизонтальном проектировании, если расстояние между вершинами принято за безошибочное, а рабочие отметки $a = 1.73 \pm 0.02$ м, $b = -1.76 \pm 0.02$ м соответственно.

131. Найти погрешность определения расстояния до точки нулевых работ при горизонтальном проектировании, если расстояние между вершрами определялось в 5 укладок 20-ти метровой ленты с погрешностью укладки 1 см, а рабочие отметки $a = 1.47 \pm 0.02$ м, $b = -1.96 \pm 0.02$ м соответственно.

132. Найти среднюю квадратическую погрешность при решении обратной геодезической задачи по дирекционному углу, если имеются значения координат снятых с плана масштаба 1:500 X_1 = 23465.84 м, Y_1 = 56832.61 м; X_2 = 23 302.17 м, Y_2 = 56693. 85 м.

133. Определить относительную среднюю квадратическуое погрешность при решении обратной геодезической задачи по расстоянию, если значения координат сняты с карты масштаба 1: 1000 и имеют значения: X_1 = 33665.88 м, Y_1 = 36831.68 м; X_2 = 33312.47 м, Y_2 = 36635.17 м.

134. Вычислить среднюю квадратическую погрешность получения проектной отметки при проектировании горизонтальной площадки в 25 квадратов, если погрешности определения вершин квадратов не превышают 5 мм.

135. С какой точностью будет получена высота сооружения, если наклонная дальность до нижнего основания D = 76.546 ± 0.012 м, а углы наклона на нижнее и верхнее основания 1°17′26″ и 0°54′29″ соответственно, определены с точностью ± 3″.

136. Определить погрешность графического вычисления площади способом прямоугольников в 4 прямоугольника, если высота сечения 0.5 ± 0.07, а линии измерялись с точностью 0.1 мм

137. Получить точность вычисления влияния коллимационной погрешности при измерении угла при одном круге, если коллимационная погрешность в 12″ получена с точностью 1.5″, а угол наклона 1°10′± 3″.

138. Вычислить точность получения величины влияния наклона оси вращения трубы на измеренный угол, если величина наклона i = 9″ получено с погрешностью в 1.8″, а угол наклона 3°35′± 2″.

139. С какой точностью будет определена высота при аналитическом способе определения с плана масштаба 1:5000 и сечения 1 м, если оно определено с точностью ¼ от сечения, а расстояния получены с плана с графической точностью.

140. Известно горизонтальное проложение S = 147.864 ± 0.02 м и уклон линии i = 27‰ , полученный с точностью в 5% от его величины. Рассчитать погрешность вычисления проектной наклонной линии.

2. Оценка точности вектор-функции коррелированных и не коррелированных результатов измерений и вычисление меры тесноты связи между ними

2.1. Основные теоретические положения [1. с.122]

В геодезической практике часто необходимо произвести оценку не одной функции, а нескольких, описывающих совместно какой-либо процесс. Для этого готовят вектор-функцию *V*, в виде столбца, состоящего из *k* описывающих процесс функций

$$V = \begin{cases} F_1(x_1, x_2, ...), \\ F_2(x_1, x_2, ...), \\ ..... \\ F_k(x_1, x_2, ...). \end{cases} \qquad (6)$$

Считаем, что погрешности аргументов m_{x_i} и теснота связи в виде ковариации, или коэффициента корреляции, если связь существует, известны. На следующем этапе составляем *матрицу плана W*, состоящую из частных производных от каждой строки в вектор-функции *V* по всем аргументам-измерениям, которая представляет собой таблицу размером в *k* строк по числу функций, и *n* столбцов, по числу измерений:

$$\begin{array}{c|cccc} {}^{F_i}/_{x_i} & x_1 & x_2 & ...x_n \\ \hline F_1 & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} & ...\dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ F_2 & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} & ...\dfrac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ F_k & \dfrac{\partial F_k}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_k}{\partial x_2} & ...\dfrac{\partial F_k}{\partial x_n} \end{array} . \qquad (7)$$

Полученная по (7) матрица *W*, является расширенным аналогом вектора *f* из (4) и называется ещё *матрицей Якоби*. Тогда, по аналогии с (3), оценка вектор-функции *V* в виде ковариационной матрицы K_V будет иметь вид [1, с.122, 2, с.109]

$$K_V = W \cdot K_x \cdot W^T. \qquad (8)$$

Здесь K_x – ковариационная матрица измерений (см. (3)). Оценочная матрица K_V представляет собой матрицу размера $(k \times k)$ по числу функций, где диагональные элементы являются оценками дисперсий соответствующих функций, а не диагональные – оценками тесноты связи в виде ковариаций между *i*- ой и *j*-ой составляющими в вектор-функции *V* из (6).

Возможно по аналогии с (5) в формуле (8) вместо ковариационной матрицы измерений K_x использовать корреляционную матрицу R_x. При этом, каждый столбец матрицы W необходимо умножить на соответствующую погрешность измерения m_{x_i}, получив нормированную матрицу W'. Тогда ковариационная матрица будет иметь вид

$$K_V = W' \cdot R_x \cdot W'^T. \tag{9}$$

Матрица K_V из (8) может представлять как конечный результат, так и быть использована в промежуточных вычислениях для установления тесноты связи между элементами, которые в свою очередь связаны в новую функциональную зависимость.

Замечание 2. ***В рамках такой постановки вопроса существует большая группа задач, требующая определения точности положения пункта на плоскости одним числом и с учетом погрешностей исходных пунктов. Для решения надо вспомнить, что погрешность M_P положения пункта на плоскости характеризуется длиной вектора его погрешностей по координатам x и y в виде*** $M_P = \sqrt{m_X + m_Y}$ ***(так называемая круговая погрешность, или погрешность Гельмерта). Таким образом, для решения получают погрешности положения пункта по осям x и y, составляявектор функцию из двух функций и далее используют приведенную выше формулу. Если исходный пункт имеет погрешность определения*** $M_{ИСХ.} = \sqrt{m^2_{Xисх} + m^2_{Yиис}}$ ***, то полная погрешность с учетом погрешностей исходных данных будет*** $M_{Pпол} = \sqrt{M^2_{ИСХ} + M^2_P}$***. Для получения ковариационной матрицы определяемого пункта, если известна ковариационная матрица исходного пункта, она суммируется с полученной ковариационной матрицей для координат по осям.***

Таким образом, последовательность решения задач на оценку точности вектор-функции сожно свести к следующим шагам:

Шаг 1: Записать в виде вектор-функции (6) формулы определяющие исследуемый процесс.

Шаг 2: Беря частные производные по измеренным величинам (т.е. тем величинам, которые имеют погрешности определения) от всех функций в вектор-функции, получаем матрицу плана W (матрицу Якоби) по (7).

Шаг 3. Формируем ковариационную матрицу K_x всех измерений, по которым брались производные из дисперсий и ковариаций измерений.

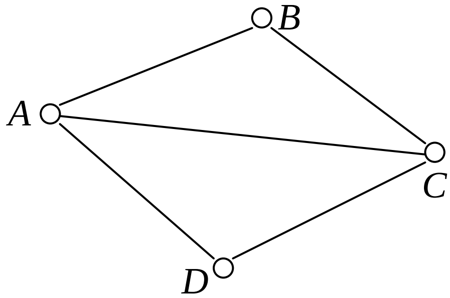
Шаг 4. По формуле (8) получаем ковариационную матрицу K_V для оценки качества вектор-функции.

Поиск коэффициентов корреляции производится обычным путем масштабирования ковариационной матрицы.

При оценивании точности определения положения точки засечкой рекомендуется использовать подход на основе сведения решения к прямой геодезической задаче и вычислении нужных промежуточных характеристик точности отдельно (см. пример [1, стр. 123]).

Задачи для практических занятий

1. Определить предельную среднюю квадратическую погрешность суммы углов в четырехугольнике *ABCD* (см. рис.), если на точках *A* и *C* измерены 3 направления, а на *B* и *D* по 2 с погрешностью 2″.



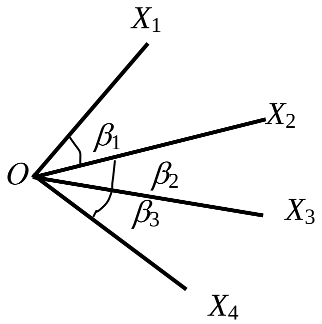
2. Определить коэффициент корреляции r_{ab} между сторонами a и b при определении площади треугольника, если относительные погрешности получения сторон a, b и площади S есть m_a/a = 1/2000, m_b/b = 1/3000, m_S/S = 1/1000, а угол между сторонами и его погрешность C = 42° ± 30″.

3. Определить коэффициент корреляции между высотами H_1 = 112.714 ± 0.007 м и H_2 = 114.428 ± 0,005 м, если средняя квадратическая погрешность определения превышения по ним равна 0.012м.

4. В висячем ходе в 3 угла измерены все углы, каждый со средней квадратической погрешностью, равной m_β = 5″. Найти средние квадратические погрешности вычисленных дирекционных углов сторон хода, если дирекционный угол начальной линии α_0 получен с погрешностью m_α = 2″.

5. Угол α получен как среднее из четырех приемов со средней квадратической погрешностью m_α = 8.0″, а угол β - из девяти приемов со средней квадратической погрешностью одного приема m_β = 9.0″. Найти среднюю квадратическую погрешность суммы углов α и β, если коэффициент корреляции между ними равен 0.5.

6. Измерены направления x_i, как показано на рис., и вычислены углы $\beta_i = x_{i+1} - x_i$. Два угла, имеющих общую сторону, зависимы между собой с коэффициентом корреляции r_{ij} = - 0.5 при i = j +1. Средние квадратические погрешности измерения направлений одинаковы и равны 2.5″. Найти среднюю квадратическую погрешность суммы всех углов.



7. Найти ковариационную матрицу и коэффициент корреляции двух смежных углов, измеренных способом круговых приемов, если оценка стандарта в виде средней квадратической погрешности для направления есть $m_N = 2''$.

8. Найти ковариационную матрицу и коэффициент корреляции для приращений координат при $S = 200 \pm 0.02$ м, $\alpha = 30° \pm 5''$.

9. Найти ковариационную матрицу и коэффициенты корреляции для определения координат полярной пространственной засечкой при $S = 310.243 \pm 0.020$ м, $\alpha = 60° \pm 2''$ и угле наклона $\nu = 4° \, 25' \, 37'' \pm 2''$.

10. Найти ковариационную матрицу и коэффициент корреляции для определения координат в однократной линейной засечке при $S_1 = 412.471 \pm 0.050$ м, $S_2 = 349.773 \pm 0.050$ м, а базис безошибочен и имеет значение $b = 672.383$ м.

11. Найти среднюю квадратическую погрешность определения координат линейной засечкой при $S_1 = 364.642 \pm 0.050$ м, $S_2 = 407.374 \pm 0.050$ м, а базис $b = 672.383$ м и исходные координаты безошибочны.

12. Найти среднюю квадратическую погрешность определения координат линейной однократной засечкой при $S_1 = 465.748 \pm 0.050$ м, $S_2 = 479.275 \pm 0.050$ м, базис $b = 774.188$ м безошибочен, а ковариационная матрица исходных пунктов есть $K_{исх} = \begin{pmatrix} 2.56 & -0.78 \\ -0.78 & 3.29 \end{pmatrix}$.

13. Найти ковариационную матрицу и коэффициент корреляции для определения координат в однократной угловой засечке при $\beta_1 = 41° \, 52' \, 17'' \pm 5''$, $\beta_2 = 54° \, 56' \, 27'' \pm 5''$, а базис безошибочен и имеет значение $b = 542.573$ м.

14. Найти среднюю квадратическую погрешность определения координат точки угловой засечкой при $\beta_1 = 53° \, 27' \, 35'' \pm 5''$, $\beta_2 = 47° \, 35' \, 57'' \pm 5''$, базисе $b = 682.323$ м, и безошибочными исходными координатами.

15. Найти среднюю квадратическую погрешность определения координат точки угловой однократной засечкой при $\beta_1 = 62° \, 29' \, 25'' \pm 5''$, $\beta_2 = 57° \, 15' \, 53'' \pm 5''$, базисе $b = 824.418$ м и ковариационной матрице исходных пунктов $K_{исх} = \begin{pmatrix} 3.466 & -1.268 \\ -1.268 & 4.223 \end{pmatrix}$.

16. Найти ковариационную матрицу и коэффициент корреляции для определения координат линейной засечкой при $S_1 = 262.442 \pm 0.050$ м, $S_2 = 327.174 \pm 0.060$ м, базис $b = 672.383$ м, а исходные координаты имеют погрешности $m_X = 0.05$ м, $m_Y = 0.06$ м.

17. Найти ковариационную матрицу и коэффициенты корреляции для определения координат угловой засечкой при $\beta_1 = 43° \, 57' \, 35'' \pm 5''$, $\beta_2 = 57° \, 15' \, 57'' \pm 5''$, базисе $b = 578.289 \pm 0.02$ м, и исходных координатах, полученных с погрешностями $m_X = 0.04$ м, $m_Y = 0.05$ м.

18. Определить ковариационную матрицу при пересчете точки из системы координат (x, y) в систему (X, Y) при линейном преобразовании вида

$$\begin{cases} X = 2.7x + 1.9y - 18 \\ Y = 1.4x + 3.8y - 22 \end{cases},$$

если ковариационная матрица координат точки в системе (x, y) будет

$$K = \begin{bmatrix} 4.1 & 1.9 \\ 1.9 & 3.7 \end{bmatrix}.$$

19. Определить ковариационную матрицу при получении дирекционных углов висячего хода в 4 стороны, если углы поворота измерялись с погрешностью 2″.

20. Найти коэффициенты корреляции между уравненными углами в треугольнике, если углы измерялись 2-мя приемами теодолитом Т5.

21. Вычислить коэффициент корреляции между двумя площадями треугольников *ABC* и *ACD* с общей стороной *AC*, если результаты измерений следующие: длины *AB, AC, AD* – 56.26 ± 0.05 м, 73.18 ± 0.08 м, 49.68 ± 0.04 м; углы *BAC, CAD* – 47° 37.3′ ± 0.1′, 53° 18′ ± 0.1′ с соответствующими погрешностями.

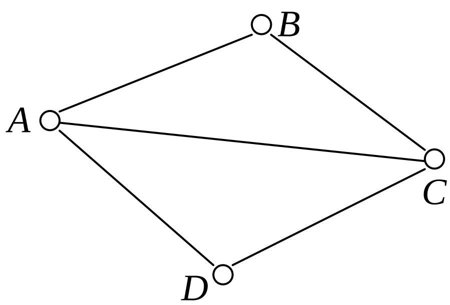
22. Вычислить среднюю квадратическую погрешность суммы двух площадей треугольников *ABC* и *ACD* с общей стороной *AC*, если результаты измерений следующие: длины *AB, AC, AD* – 76.96 ± 0.08 м, 33.58 ± 0.04 м, 58.18 ± 0.05 м; углы *BAC, CAD* – 52° 57.2′ ± 0.1′, 56° 48′ ± 0.1′ с соответствующими погрешностями.

23. Вычислить коэффициент корреляции между приращениями координат по осям, если результаты измерений с соответствующими погрешностями следующие: длина 137.56 ± 0.06 м, дирекционный угол 59°24′18″ ± 3″, а исходные координаты имеют погрешности 0.08 и 0.12 м соответственно по осям *x* и *y*.

24. Вычислить среднюю квадратическую погрешность площади прямоугольника со сторонами, определенными приращениями координат по осям, если результаты измерений с соответствующими погрешностями следующие: длина 197.26 ± 0.05 м, дирекционный угол 52°44′28″ ± 2″.

25. Определить средние квадратические погрешности уравненных высот в треугольнике, если длины секций одинаковы и определены с погрешностями *4, 5* и *7 мм* соответственно.

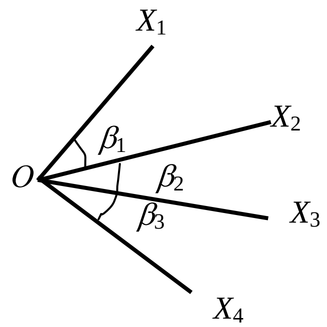
26. Определить ковариационную матрицу для совокупности углов в четырехугольнике *ABCD* (см. рис.), если на точках *A* и *C* измерены 3 направления, а на *B* и *D* по 2 с погрешностью 5″.



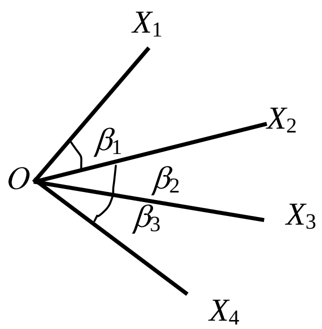
27. Определить корреляционную матрицу для совокупности углов в четырехугольнике *ABCD* (см. рис.), если на точках *A* и *C* измерены 3 направления, а на *B* и *D* по 2 с погрешностью 3″.

28. В висячем ходе в 3 угла измерены все углы, каждый со средней квадратической погрешностью, равной $m_\beta = 10''$. Найти ковариационную матрицу для дирекционных углов сторон хода, если дирекционный угол начальной линии α_0 принят как безошибочный.

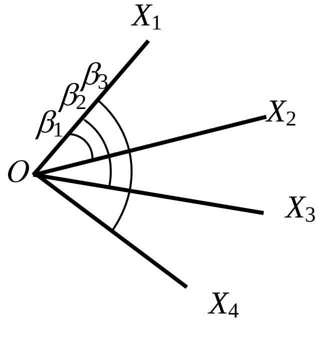
29. Измерены направления x_i, как показано на рис., и вычислены углы $\beta_i = X_{i+1} - X_i$. Средние квадратические погрешности измерения направлений одинаковы и равны 5″. Найти ковариационную матрицу совокупности всех углов.



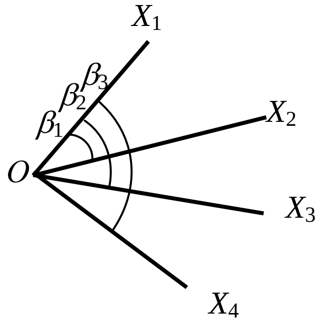
30. Измерены направления x_i, как показано на рис., и вычислены углы $\beta_i = X_{i+1} - X_i$. Средние квадратические погрешности измерения направлений одинаковы и равны 2.0″. Найти корреляционную матрицу совокупности всех углов.



31. Измерены направления x_i, как показано на рис., и вычислены углы $\beta_i = X_1 - X_i$. Средние квадратические погрешности измерения направлений одинаковы и равны 3.0″. Найти ковариационную матрицу совокупности всех углов.



32. Измерены направления x_i, как показано на рис., и вычислены углы $\beta_i = X_1 - X_i$. Средние квадратические погрешности измерения направлений одинаковы и равны 1.5″. Найти корреляционную матрицу совокупности всех углов.



33. Три смежных угла измерены способом круговых приемов. Найти оценку дисперсии суммы этих углов, если оценка стандарта в виде средней квадратической погрешности для направления есть $m_N = 4''$.

34. Найти ковариационную матрицу при определении координат линейной однократной засечкой при $S_1 = 465.748 \pm 0.050$ м, $S_2 = 479.275 \pm 0.050$ м, базис $b = 774.188$ м, а ковариационная матрица исходных пунктов есть $K_{исх} = \begin{pmatrix} 3.18 & 1.17 \\ 1.17 & 4.93 \end{pmatrix}$.

35. Найти корреляционную матрицу при определении координат точки угловой однократной засечкой при $\beta_1 = 61°\ 49'\ 55'' \pm 3''$, $\beta_2 = 77°\ 19'\ 53'' \pm 4''$, базисе $b = 724.588$ м и ковариационной матрице исходных пунктов $K_{исх} = \begin{pmatrix} 4.346 & -1.219 \\ -1.219 & 4.942 \end{pmatrix}$

36. Определить корреляционную матрицу при получении дирекционных углов висячего хода в 3 стороны, если углы поворота измерялись с погрешностью 5″.

37. Определить ковариационную матрицу при получении высот висячего нивелирного хода в 3 стороны, если превышения измерялись с погрешностью 3 мм.

38. Найти ковариационную матрицу для уравненных углов в треугольнике, если углы измерялись 2-мя приемами теодолитом Т5.

39. Найти ковариационную и корреляционную матрицы для уравненных высот в треугольнике, если исходная – одна безошибочная высота, а превышения измеряялись с точностью 5 мм.

40. Найти ковариационную матрицу для уравненных высот в треугольнике, если исходная высота имеет погрешность в 4 мм, а превышения измеряялись с точностью 6 мм.

3. Предрасчет точности измерений по заданной погрешности функции.

3.1. Основные теоретические положения [1, с.128, 2, с.113]

Вторая часть общей задачи оценки точности косвенно измеренной величины (функции) называется предрасчет точности (проектирование) измерений, входящих в функцию известного вида, по заданной погрешности функции. Иногда эту часть называют обратной задачей расчета погрешности функции, тогда как определение погрешности функции по погрешностям аргументов – прямой задачай.

Для её реализации воспользуемся формулой (1а). Совершенно очевидно, что решить одно уравнение с "n" неизвестными не представляется возможным без привлечения дополнительной информации. В качестве одного из возможных дополнений может служить известный в теории погрешностей измерений принцип равных влияний [1, стр. 128, 2, стр 113]. По этому принципу, с некоторыми допущениями можно принять положение о примерно одинаковом вкладе на формирование конечной величины всех её слагаемых.

Рассмотрим три возможных случая применения принципа равных влияний к формуле (1а) [1, с.128]

$$D_F = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \cdot D_{x_i} = \left[f^2 \cdot D_x \right] = \left[f^2 \cdot m_x^2 \right].$$

.

1. Принимаем в (1а) погрешности всех измерений примерно равными

$$m_1 \approx m_2 \approx m_3 \approx \ldots = m.$$

Тогда, в символах Гаусса формула (1а) примет вид:

$$D_F = m_F^2 = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right] \cdot m^2 = \left[f^2 \right] \cdot m^2, \qquad (10)$$

откуда погрешности измерений

$$m = m_F \cdot \sqrt{\frac{1}{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 \right]}} = m_F \cdot \sqrt{\frac{1}{\left[f^2 \right]}}. \qquad (11)$$

Если f - вектор-строка из частных производных f_i, то формула (11) в матричном виде есть

$$m = m_F \cdot (f \cdot f^T)^{-1/2}. \qquad (11a)$$

2. Предположим, что в (1а) принимаются примерно равными произведения частной производной f_i на соответствующую погрешность m_i

$$f_1 \cdot m_1 \approx f_2 \cdot m_2 \approx \ldots = f_i \cdot m_i. \tag{12}$$

Тогда формула (1а) примет вид

$$D_F = n \cdot \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \cdot m_i^2 \right) = n \cdot f_i^2 \cdot m_i^2. \tag{13}$$

Отсюда погрешность $i-$ого измерения будет равна

$$m_i = m_F \cdot \frac{1}{\sqrt{n} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)} = m_F \cdot \frac{1}{\sqrt{n} \cdot f_i}. \tag{14}$$

3. Пусть в (1а) приняты примерно равными следующие части

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_1} \right) \cdot m_1^2 \approx \left(\frac{\partial F}{\partial x_2} \right) \cdot m_2^2 \approx \ldots = f_i \cdot m_i^2. \tag{15}$$

При этих предположениях формула (1а) имеет вид

$$D_F = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right] \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right) \cdot m_i^2 = [f] \cdot f_i \cdot m_i^2. \tag{16}$$

Из вида (16) погрешности измерений получим как

$$m_i = m_F \cdot \sqrt{\frac{1}{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) \right] \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)}} = m_F \cdot \sqrt{\frac{1}{[f] \cdot f_i}}. \tag{17}$$

Не сложно показать (см. [1, стр. 190]), что погрешности измерений предрасчитанные по формуле (17), приводят к максимальному весу оцениваемой функции, а, следовательно, и к наилучшей точности спроектированных результатов измерений.

Для линейно-угловых измерений обязательно применяют принцип равных влияний в виде

$$\frac{m_S}{S} = \frac{m_\beta}{\rho}, \tag{18}$$

где m_S, m_β – погрешности определения длины S и угла β, $\rho = 206265''$ - число секунд в радиане.

Нередко погрешность определения функции задается в виде предельной величины вида $M_{пред.} = t \cdot m_F$, где t – табличный коэффициент, связанный с доверительной вероятностью P попадания случайной величины в заданный интервал (см., [1, с.109] и др.). Обычно коэффициент принимает следующие значения: $t = 3$, при вероятности $P = 0.9973$, $t = 2.5$, при вероятности $P = 0.95$, $t = 2$, при вероятности $P = 0.90$. Тогда формулы (11), (14) и (16) примут соответственно вид

$$\begin{cases} m = \dfrac{M_{пред.}}{t \cdot \sqrt{[f^2]}}, \\ m_i = \dfrac{M_{пред.}}{t \cdot \sqrt{n} \cdot f_i}, \\ m_i = \dfrac{M_{пред.}}{t \cdot \sqrt{[f] \cdot f_i}}. \end{cases} \tag{19}$$

Замечание 3. ***Ряд задач на предрассчет точности измерений (задача проектирования) решается без использования формул (11), (14) и (17). Решение на основе этих формул в принципе возможно, но достаточно затруднительно. К таким задачам относятся задачи на количество приемов при измерении углов, допустимая невязка в угловом построении и в нивелирном ходе. Здесь берутся типовые формулы (см. Параграф 1.2 пример 1 и 2) и из них выражаются неизвестные элементы точности.***

Исходя из вышесказанного, решение задач на предрассчет точности можно свести, в общем, к следующей последовательности шагов:

Шаг 1: Записать формулу решающую поставленную задачу.

Шаг 2: На основе формул оценки погрешности функции (1а) или (2а) записать вид оценки точности определяемой функции.

Шаг 3: Если не оговаривается отдельно, использовать любой из трех принципов равных влияний для предрасчета точности измерений при заданной погрешности функции.

Если метод решения не оговаривается – используется любой из рассмщтренных выше на усмотрение студента.

Задачи для практических занятий

1. Какую величину должна иметь средняя квадратическая погрешность одного уложения при измерении 20-ти метровой лентой длины в 240.2 м, чтобы относительная погрешность соответствовала линейной точности теодолитного хода.

2. Какой величины должна достигнуть относительная средняя квадратическая погрешность одного измерения 20-ти метровой лентой длины в 145.7 м, чтобы предельная относительная погрешность определения длины была не ниже 1/4000.

3. С какой относительной погрешностью нужно измерить стороны прямоугольника a = 20 м и b = 60 м, чтобы вычислить его площадь с предельной погрешностью m_p = 3.4 м^2?

4. Линия измерена 6 раз инварными проволоками. Получено среднее арифметическое L = 280 м со средней квадратической погрешностью m = 0.028 м. Найти относительную среднюю квадратическую погрешность измерения линии одной проволокой.

5. С какой относительной средней квадратической погрешностью нужно знать радиус круга, чтобы определить его площадь с предельной погрешностью 1:1000?

6. Превышение на одной станции геометрического нивелирования получено как среднее из превышений при двух горизонтах инструмента со средней квадратической погрешностью, равной ± 1.0 мм. Найти среднюю квадратическую погрешность отсчета по рейке.

7. Требуется определить площадь квадрата размером около 1 га со средней квадратической погрешностью m_p = 10 м^2. С какой точностью в относительной мере необходимо измерить для вычисления площади: а) одну сторону; б) две смежные стороны; в) диагональ участка d, чтобы получить площадь с заданной точностью?

8. Горизонтальное проложение S наклонной линии D определяют как $S = D \cdot Cos(\nu)$. С какой точностью необходимо измерить расстояние D угол наклона ν, чтобы горизонтальное проложение получить со средней квадратической погрешностью m_S = 0.05 м при наклонном расстоянии D = 900 м и угле наклона ν = 15°.

9. Рассчитать, какую среднюю квадратическую погрешность можно допустить при измерении сторон прямоугольника a = 40 м и b = 15 м. чтобы вычислить его площадь со средней квадратической погрешностью равной ± 4.0 м^2 с использованием различных видов принципа равных влияний. Сделать вывод.

10. Для производства угловых измерений в полигонометрии получено три теодолита. Первый теодолит дает результат со средней квадратической погрешностью измерения угла одним приемом, равной 10″, второй - с той же ошибкой, равной 15″, третий - с погрешностью, равной 20″. Определить какое минимальное число приемов нужно сделать каждым теодолитом, чтобы обеспечить получение средней квадратической погрешности вероятнейшего (среднего) значения угла не более 5.0″.

11. Подсчитать среднюю квадратическую погрешность отсчета по одной нити для расстояния D = 175 м, определенного по дальномеру с относительной погрешностью равной 1/300. Расчет сделать для дальномеров C_1 = 100 и C_2 = 200.

12. Площадь квадрата P = 260 м^2. С какой средней квадратической погрешностью должна быть измерена сторона a, чтобы обеспечить среднюю квадратическую погрешность вычисленного значения площади квадрата равной 2 м^2.

13. В государственной геодезической сети 1 класса на концах базисных сторон определяют азимуты Лапласа A, которые вычисляют по формуле $A = a - (\lambda - L)\cdot sin(\varphi)$. Найти, с какой точностью должны быть определены астрономический азимут a, разности долгот $(\lambda - L)$ и широта φ, чтобы азимут был получен не грубее 0.5″ при данных $\varphi = 60°$, $(\lambda - L) = 9°$.

14. С какой точностью должны сниматься отсчеты по рейке, чтобы получить среднюю квадратическую погрешность определения превышения ±3 мм при геометрическом нивелировании по двум сторонам рейки.

15. Определить среднюю квадратическую погрешность радиуса шара R = 10.0 м, если известно, что объём шара V, вычисленный по этому значению радиуса, ошибочен на 1.6 м^3.

16. Средняя квадратическая погрешность непосредственного измерения угла инструментом равна 30″. Определить минимальное число измерений, необходимое для получения результата со средней квадратической погрешностью не более 10″.

17. Площадь прямоугольника составляет 2377 см^2. С какой точностью должны быть измерены стороны, чтобы обеспечить предельную среднюю квадратическую погрешность вычисленного значения площади 32 см^2?

18. Значение угла получено как среднее из 8 приёмов и имеет среднюю квадратическую погрешность 1.5″. Найти среднюю квадратическую погрешность угла, измеренного в два приёма.

19. Рассчитать, какую среднюю квадратическую погрешность можно допустить при измерении сторон прямоугольника $a \approx 40$ м и $b \approx 15$ м, чтобы вычислить его площадь со средней квадратической погрешностью 4.0 м^2 используя три известных вида принципа равных влияний.

20. При проектировании результатов измерений по первому принципу (равенство погрешностей измерений) требуется получить площадь прямоугольника с погрешностью 4.5 м^2 при соотношении сторон $к = 2$ и погрешности измерения стороны m_S = 0.02 м. Найти длины сторон прямоугольника a и b, удовлетворяющие поставленному условию на погрешность площади.

21. Горизонтальное проложение наклонной линии D определяют по формуле $S = D\cdot cos\,v$. С какой относительной погрешностью необходимо измерить расстояние D при точности получения угла наклона 30″, чтобы иметь горизонтальное проложение со средней квадратической погрешно-

стью 0.10 м? При этом наклонное расстояние $D \approx 900$ м, а угол наклона $\nu \approx 7°$.

22. Превышение получено по формуле $h = S \cdot tg\,\nu$. С какой точностью должно быть измерено расстояние S и угол наклона ν, если превышение требуется получить со средней квадратической погрешностью 3.2 с*м*? Длина линии $S \approx 120$ м, а угол наклона $\nu \approx 3°$.

23. В замкнутом теодолитном полигоне измерены все 9 углов. С какой погрешностью необходимо измерять углы, чтобы предельная невязка достигла значения 3′.

24. С какой точностью необходимо измерять радиус окружности, чтобы определить длину окружности со средней квадратической погрешностью m_l=0.09 м.

25. С какой погрешностью необходимо измерять углы в шестиугольнике, чтобы их сумма была получена с погрешностью 26.0″.

26. Проложен ход геометрического нивелирования по ровной местности протяжением L=1600 м и при длине визирного луча l=50 м. Найти среднюю квадратическую погрешность превышения на станции m_h, при которой погрешность суммы превышений по всему ходу будет равна 30 мм.

27. Найти среднюю квадратическую погрешность измерения углов поворота, чтобы определить дирекционный угол 10-ой стороны теодолитного хода с погрешностью 5″, если средняя квадратическая погрешность начального дирекционного угла $m_н$=2″.

28. Вычислить погрешности измерений сторон для определения площади P прямоугольника a = 144.28 м и b = 353.22 м, чтобы погрешность определения площади была 1: 2000.

29. Рассчитать погрешности измерений двух углов и линии в треугольнике ABC со значениями b = 210.20 м, A = 57° 30′, B = 62° 40′, чтобы вычисленная длина a имела среднюю квадратическую погрешность m_a = 0.08 м.

30. Определить средние квадратические погрешности измерения ребер прямоугольного параллелепипеда a = 10.0 м, b = 4.0 м и c = 5.0 м, при которых его объем будет получен с погрешностью m_V = 2.5 м^3.

31. Какова должна быть точность снятия отсчета по теодолиту при измерении горизонтального угла полным приемом, чтобы точность угла составляла ±2″.

32. Невязка в сумме превышений нивелирного хода не должна превышать 50 мм. Какова может быть предельная длина нивелирного хода, если средняя квадратическая погрешность в сумме превышений на 1 км хода составляет 4 мм.

33. Средняя квадратическая погрешность измерения вертикального угла теодолитом 2*Т*5*К* одним приемом составила 9″. Сколько приемов нужно сделать теодолитом 2*Т*30, чтобы получить угол с той же точностью.

34. При геометрическом нивелировании средняя квадратическая погрешность определения превышения на станции равна 0.35 мм. На каждый

километр хода приходится 12 станций. При какой максимальной длине замкнутого нивелирного хода невязка в превышениях не выйдет за пределы 8 мм?

35. При измерении линии 50–метровой рулеткой, средняя квадратическая погрешность одного отложения рулетки составляет 5 мм. Сколько раз нужно измерить линию длинной 200 м, чтобы получить окончательный результат со средней квадратической погрешностью не более 1 см?

36. При каком угле наклона при измерении длины линии относительная погрешность поправки за наклон будет 1/2000 при измерении длины с относительной средней квадратической погрешностью 1/4000.

37. Во сколько раз увеличится средняя квадратическая погрешность измеренного прибором Т2 угла, если количество приемов увеличится в два раза, и какой величины достигнет.

38. С какой вероятностью будет получена допустимая невязка в 5″ в 25-угольнике при измерении угла теодолитом Т2 четырьмя приемами.

39. Какова должна быть погрешность измерения угла одним приемом, чтобы предельная невязка достигала 12″ при измерении угла 4 приемами в 16-ти угольнике?

40. Сколько приемов необходимо выполнить при измерении углов теодолитом Т2 в 9-ти угольнике, чтобы предельная невязка достигла 5″?

41. Сколько углов должно быть в многоугольнике, чтобы при измерении углов теодолитом Т2 4 приемами предельная невязка была равна 9″?

42. Фокусное расстояние объектива зрительной трубы f = 198 *мм* ± 2.0 *мм*. С какой средней квадратической погрешностью должно быть определено фокусное расстояние окуляра $\varphi \approx$ 8 мм, чтобы средняя квадратическая погрешность в определении увеличения v была равна ± 1.0 мм?

43. Требуется определить площадь квадрата P со средней квадратической погрешностью m_p = 10 м^2. С какой точностью нужно измерить для вычисления площади: а) одну сторону а, б) две смежных стороны, в) диагональ d, чтобы получить площадь участка с заданной точностью?

44. Измерение угла одним приемом дает среднюю квадратическую ошибку, равную 15″. Какое минимальное число приемов нужно сделать данным инструментом, чтобы получить среднюю квадратическую погрешность окончательного результата m не более 5.0″?

45. Найти среднюю квадратическую погрешность одного угла в полигоне с 16 углами, если средняя квадратическая погрешность суммы всех углов составляет ±2.0′.

46. Определить вероятность получения предельной невязки равной 0.015 м в 9–и угольнике при измерении углов теодолитом 3Т5.

47. Определить погрешность получения отсчета для выноса в натуру проектной отметки с точностью 5 мм, если высота репера определена с погрешностью 1.2 мм, а отсчет по рейке на репере имеет погрешность 3 мм.

48. Найти, во сколько раз повышается точность, если в качестве способа измерения угла использовать способ повторений c = 2 при двух кругах, по сравнению с обычным способом приемов теодолитом 2Т5.

49. Сколько станций на 1 км хода надо иметь, чтобы при длине хода в 6 км, погрешности определения превышения на станции в 2 мм получить допустимую невязку хода ±40 мм.

50. Превышение определялось тригонометрическим нивелированием по формуле $h = S \cdot tg\nu + i - v$. С какой точностью должны быть измерены i и v.чтобы получить превышение со средней квадратической погрешностью 5 см, если расстояние S и угол наклона νимеют одинаковые относительные погрешности измерения 1:1000, а сама длина линии $S \approx 120$ м, угол наклона $\nu \approx 3°$.

4. Вычисление весов измерений и функций от измерений

4.1. Основные теоретические положения [1, с.177, 2, с.121]

Часто в геодезической практике совместно обрабатываются разнородные и неравноточные измерения. Для облегчения совместной обработки результатов таких измерений вводится понятие *веса.*

В самом общем случае весом P называют степень доверия к результату, который, таким образом, является величиной, обратно пропорциональной к точности измерения, как для самого измерения, так и для функции от измерений. С другой стороны, веса предназначены в вычислениях учитывать неоднородность условий измерений. Веса являются числами положительными и представляются в виде [1, с. 179]

$$P_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}, \qquad P_F = \frac{\mu^2}{m_F^2} \tag{20}$$

где m_i – средняя квадратическая погрешность результата измерения, m_F – средняя квадратическая погрешность определения функции; μ – размерный (масштабный) коэффициент.

Если $P_i = 1$, то численно $\mu = m_i$. На этом основании величину μ называют *погрешностью единицы веса*.

Таким образом, вес функции может быть найден из зависимости (20), если определена средняя квадратическая погрешность функции, например по формулам (1), или (1а). При другом подходе левая и правая части (1) делятся на постоянную величину μ^2, и на основе замены (3) получают [1, с. 186, 2, с.123]

$$\frac{\mathrm{m}_\mathrm{F}^2}{\mu^2} = \sum_{i=1}^{n} f_i^{\,2} \cdot \frac{m_i^2}{\mu^2} + 2 \cdot \sum_{(i \neq j)=1}^{k} f_i \cdot f_j \cdot \frac{m_i \cdot m_j \cdot r_{ij}}{\mu^2}. \tag{21}$$

Обозначив $\frac{m_i^2}{\mu^2} = \frac{1}{P_i} = q_i$ и $\frac{m_F^2}{\mu^2} = \frac{1}{P_F} = Q_F$ (т.е. большие буквы для функции, малые для измерений), будем иметь полную формулу *обратного веса* функции n измерений, k из которых зависимы:

$$Q_F = \sum_{i=1}^{n} f_i^{\,2} \cdot q_i + 2 \sum_{(i \neq j)=1}^{k} f_i \cdot f_j \cdot r_{ij} \cdot \sqrt{q_i \cdot q_j}\,. \tag{22}$$

Если результаты измерений независимы, то в формуле (22) отсутствует второе слагаемое.

Если погрешность функции представлена в матричном виде (2), то обратный вес функции будет [1, с.187]

$$Q_F = f \cdot Q \cdot f^T, \tag{23}$$

где Q – матрица обратных весов измерений (матрица кофакторов) и связей между ними, в которой по диагонали находятся обратные веса i – ого измерения $q_{ii} = \frac{m_i^2}{\mu^2}$, а недиагональные – мера связи между i – ым и j – ым измерениями вида $q_{ij} = r_{ij} \cdot \sqrt{q_i \cdot q_j}$, (см. (22)). Если исследуется не функция f а вектор-функция F, то значение Q_F будет в виде матрицы обратных весов.

При установлении соотношения весов однородных измерений чаще всего пользуются зависимостью

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{m_2^2}{m_1^2}. \tag{24}$$

Если рассматривается изменение веса измерения после обработки, например, отношение веса среднего арифметического к весу одного измерения, то, используя (24) имеем

$$\frac{P_{ср.}}{P_1} = \frac{\left(\frac{\mu^2}{m_{ср.}^2}\right)}{\left(\frac{\mu^2}{m_1^2}\right)} = \frac{m_1^2}{\frac{m_1^2}{n}} = n, \tag{25}$$

так как квадрат погрешности среднего арифметического равен $m_{ср.}^2 = \frac{m_1^2}{n}$, используя формулу (1а). Мы получили правило *Ансерметта* по которому вес среднего арифметического больше веса одного измерения в число измерений n, или вес измеренной n раз величины в n раз больше веса одного измерения $P_n = n \cdot p_1$.

При установлении весов разнородных измерений пользуются формулой (20), приписывая единичный вес одному из измерений. Так, при установлении весов измерений в полигонометрических ходах поступают следующим образом. Используя (20) записывают вес для угловых и линейных измерений, $P_\beta = \frac{\mu^2}{m_\beta^2}$ и $P_S = \frac{\mu^2}{m_S^2}$. Принимаем или вес P_S или P_β равным единице. Тогда, если $P_\beta = 1$, $\mu^2 = m_\beta^2$, а $P_S = \frac{m_\beta^2}{m_S^2}$. Если $P_S = 1$, $\mu^2 =$

$m_S^{\,2}$, а $P_\beta = \dfrac{m_S^2}{m_\beta^2}$. Следовательно, при установлении весов разнородных измерений нужно помнить, что в этом случае веса будут иметь размерность.

Заметим, что для установления весов результатов иногда используют число измерений *n*, число станций *k*, длины линий *S* или длины ходов *L*, так как через них можно выразить погрешность измерения в (20).

Средняя квадратическая погрешность единицы веса может быть вычислена по истинным ошибкам Δ (невязкам) и поправкам

$$\mu = \sqrt{\frac{[P\Delta^2]}{n}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{[PW^2]}{n}} \quad \mu = \sqrt{\frac{[PV^2]}{r}} \tag{26}$$

При проектировании результатов измерений на основе веса (см. пункт 2) с использованием принципа равных влияний перепишем формулу (1а) в виде

$$m_F = \sqrt{[f^2 \cdot m^2]}, \tag{27}$$

а затем примем, что все погрешности измерений m_i в формуле примерно равны и обозначены *m*. Тогда (20) можно представить как

$$m_F = m \cdot \sqrt{[f^2]}. \tag{27a}$$

Величину $[f^2] = Q_F = \dfrac{1}{P_F}$ называют обратным весом функции *F*. Таким же образом поступают и для других предположений. Исходя из формул (27), (27а) и им подобным, возможно проектирование результатов измерений на основе веса, или значений измеряемых величин, а также получение значения веса, если заданы погрешности измерений и функции (см. [1, с.189]).

Задача на определение веса измерения трудностей не вызывает, если известны точностные характеристики или их аналоги. В этом случае используют формулу (20) или её модификации (см. пример 2). Для определения веса (обратного веса) функции можно следовать следующим шагам:

Шаг 1: Записать функцию, являющуюся основой задачи и вид квадрата её погрешности (1), (1а) и др.

Шаг 2: Здесь имеем два подхода

а) если есть погрешность функции и погрешность единицы веса, то используем (20) для получения веса функции;

б) используем формулы (21), (22), или (23), не вычисляя погрешность функции, получаем обратный вес функции, из которого имеем требуемое значение веса.

Задачи для практических занятий

1.Общая площадь участка состоит из пяти частей, измеренных планиметром с одинаковой точностью. Вес всей площади $P_S =$ 0.25. Найти вес P одной части участка.

2. Вес угла равен 9. Найти среднюю квадратическую погрешность этого угла, если он измерен 6-ю приёмами, а погрешность единицы веса равна 5″.

3. Угол измерен теодолитом 9-ю приёмами. Средняя квадратическая погрешность определения одного направления 7″. Какой вес имеет полученный результат, если погрешность единицы веса равна 3.3″?

4. Сколько раз необходимо измерить линию длиной 300 м , чтобы вес результата оказался равным 3 при весе результата измерения линии длиной 100 *м* равном 1.

5. Угол получен со средней квадратической погрешностью 4.5″. Сколько приёмов нужно сделать инструментом, дающим результат одного измерения со средней квадратической погрешностью 11.2″, чтобы веса углов оказались одинаковыми?

6. В треугольнике один угол измерен тремя приёмами, второй – двумя. Найти вес третьего угла, вычисленного по первым двум, учитывая, что за единицу принят вес результата измерения угла одним приёмом.

7. Радиус окружности R измерен с весом P_R=4. Определить веса вычисленных значений длины окружности и площади круга.

8. Определить вес площади треугольника, если его основание b=12 м получено с весом P_b=2, а высота h=20 м – с весом P_h=1.5.

Средняя квадратическая погрешность измерения угла 0.5″, вес равен 4. Вычислить среднюю квадратическую погрешность единицы веса.

10. Углы треугольника определены с весами $P_1 = 4$, $P_2 = 9$, $P_3 = 16$. Средняя квадратическая погрешность единицы веса $\mu = 10''$. Определить средние квадратические погрешности измерения углов.

11. Измерение со средней квадратической погрешностью $m_1 = 2''$ даёт вес $P_1 = 1$. Какой вес соответствует измерению со средней квадратической погрешностью $m_2 = 1.4''$?

12. Угол измерен тремя приёмами. Какой вес имеет полученный результат, если вес одного направления принять за единицу?

13. Измерены 5 сторон теодолитного хода: S_1 = 251.37 м, S_2 = 198.57 м, S_3 = 228.59 м, S_4 = 276.64 м, S_5 = 310.55 м. Средние квадратические погрешности линий определяются по формуле $m_i = 0.006\text{м} \cdot \sqrt{S_i}$. Найти веса всех сторон, приняв за единицу вес линии длиной 100 м.

14. Средняя квадратическая погрешность измерения угла 2″, вес равен 5. Вычислить среднюю квадратическую погрешность единицы веса угла измеренного в 3 приема.

15. В треугольнике измерены три угла в 2 приема каждый теодолитом 2Т2. Найти, какой величины может достигать средняя квадратическая погрешность единицы веса для суммы этих углов, если вес суммы равен 2.

16. Углы треугольника определены с весами $P_1 = 5$, $P_2 = 11$, $P_3 = 20$. Определить средние квадратические погрешности измерения углов в 2 приема, если погрешность единицы веса $\mu = 5''$.

17. Измеренная величина со средней квадратической погрешностью одного измерения $m=5''$ имеет вес $P = 1$. Какой вес соответствует измерению со средней квадратической погрешностью $m=3''$, если угол измерен 2 приёмами?

18. Линия измерена 5 раз с одинаковой точностью. Найти вес среднего арифметического, если вес одного измерения равен единице.

19. Вес суммы шести углов многоугольника равен единице, измерения равноточные. Определить вес одного угла многоугольника.

20. Превышение по нивелирному ходу длиной 450 *м* имеет вес 4. Найти длину хода, которому соответствует превышение весом единица.

21. Сколько раз необходимо измерить линию длиной 500 м, чтобы вес результата оказался равным 2, если вес результата измерения линии длиной 50 м равен единице?

22. В треугольнике измерены два угла, каждый двумя приёмами инструментом, дающим результат со средней квадратической погрешностью одного приёма 5.0″. Сколько раз нужно измерить третий угол треугольника инструментом, дающим результат со средней квадратической погрешностью одного приёма 11.0″, чтобы веса всех углов были одинаковы?

23. Угол измерялся четырьмя различными инструментами. При измерении первым теодолитом получен результат 63°21′18″ как среднее из двух приёмов, вторым 63°21′30″ – из четырёх приёмов, третьим 63°21′12″ – из шести приёмов, четвёртым 63°21′22″ – из восьми приёмов. Средние квадратические погрешности результата измерения угла одним приёмом для теодолитов оказались соответственно 10″, 15″, 20″, 12″. Определить веса каждого из углов.

24. Один угол треугольника измерен 10 раз инструментом со средней квадратической погрешностью результата одного измерения угла $m_1 = 6''$. Сколько раз нужно измерить каждый из оставшихся углов треугольника инструментом, средняя квадратическая погрешность одного измерения угла которым $m_2 = 8''$, чтобы веса углов, были одинаковыми?

25. В прямоугольнике измерялись стороны $a = 140$ м и $b = 86$ м с весами результатов $P_a = 40$ и $P_b = 100$. Вычислить площадь и её вес.

26. В прямоугольном треугольнике один угол измерен тремя приёмами со средней квадратической погрешностью одного измерения $m = 0.5'$. Величина угла составила $A = 43°24'$. Значение измеренной гипотенузы $c = 280.42$ м с погрешностью 0.12 м. Определить длину катета а и его среднюю квадратическую погрешность, если погрешность единицы веса $\mu = 0.12$ м.

27. Средняя квадратическая погрешность измерения угла 15″. Найти вес суммы 20 углов, измеренных в тех же условиях, если погрешность единицы веса $\mu = 30''$.

28. В треугольнике один угол измерен тремя приёмами, второй шестью. Найти вес третьего вычисленного угла, если все приёмы равноточные и вес угла, полученного из одного приема, принят за единицу.

29. Вычислить вес угла полученного из одного приёма, если веса полуприёмов соответственно равны 3 и 5.

30. Угол γ получен как среднее из углов α и β, которые измерены шестью и двумя приёмами соответственно. Средние квадратические погрешности результата измерения угла одним приёмом оказались m_α= 3.0″ и m_β= 5.0″. Найти вес угла γ, приняв за единицу вес угла α.

31. Угол $\gamma = \alpha + \beta$. Угол α получен как среднее из результатов измерений 4 приемами со средней квадратической погрешностью измерения одним приёмом m_α= 5.0″. Для угла β сделано 6 приёмов, с m_β= 8.4″. Определить вес угла γ, приняв за единицу вес результата измерения угла α одним приёмом.

32. Один угол треугольника измерен 6 раз со средней квадратической погрешностью одного измерения m_1= 8.0″. Значение второго угла получено с весом P_2= 2. Считая, что вес первого угла равен единице, найти среднюю квадратическую погрешность и вес третьего угла.

33. Углы треугольника измерялись тремя различными теодолитами. Первый угол измерен первым теодолитом 6 раз, второй – вторым теодолитом 5 раз и третий – третьим теодолитом 6 раз. Средние квадратические погрешности одного измерения для теодолитов соответственно равны 3.0″, 4.5″, 6.2″. Найти вес каждого угла, если за единицу веса принять результат со средней квадратической погрешностью μ = 1.0″.

34. Вес каждого из углов α и β равен 10. Найти вес угла γ, полученного как сумма углов α и β.

35. Определить вес вычисленного объёма прямоугольного параллелепипеда, если рёбра его a = 10 м, b = 4 м, c = 5 м измерены с весами P_a= 80, P_b= 100 и P_c= 160.

36. В треугольнике ABC измерены сторона a =514.18 м ± 0.05 м и прилежащие ней углы: B = 57°08′16″ ± 7″ и C = 75°28′30″ ± 7″. Определить средние квадратические погрешности и веса сторон b и c при условии, что погрешность единицы веса μ = *0.05 м*.

37. Найти среднюю квадратическую погрешность и вес превышения, вычисленного по формуле $h = S{\cdot}tg\nu$, если S = 580.92 ± 0.1 м и ν = 1°34′10″ ± 12″, а погрешность единицы веса μ = 0.05 м.

38. Вес однократного измерения линии длиной 100 м равен единице. Полагая, что измерения производятся в одинаковых условиях, определить, сколько раз потребуется измерить линию длиной 375 м, чтобы вес среднего из результатов был равен 0.5.

39. Сторона a = 60 м квадрата измерена с весом P_a= 16. Определить вес площади квадрата.

40. Стороны a = 100 м и b = 150 м прямоугольника измерены с весами P_a= 300 и P_b= 200. Определить вес вычисленной площади.

41. Катеты $a = 360$ м и $b = 270$ м прямоугольного треугольника измерены с весами $P_a = 18$ и $P_b = 24$. Определить вес вычисленной гипотенузы c.

42. Определить вес площади треугольника, если основание его $b = 15$ м получено с весом равным единице, а высота $h = 30$ м – с весом 0.5.

43. Радиус окружности равный 50 м измерен с весом 5. Определить веса окружности и площади круга.

44. Определить вес одного направления, если вес угла, полученного как разность двух направлений, равен единице.

45. Веса независимо измеренных углов α, β и γ соответственно равны 5, 3 и 2. Определить вес суммарного угла.

46. Эмпирическая средняя квадратическая погрешность единицы веса при измерении углов оказалась равной $5''$. Вычислить погрешность среднего из трёх результатов измерений, веса которых соответственно равны 6, 7 и 12.

47. В треугольнике измерены три угла со средними квадратическими погрешностями одного измерения и числом приемов соответственно $m_1 = 3''$, $n_1 = 4$, $m_2 = 4''$, $n_2 = 9$, $m_3 = 5''$, $n_3 = 12$. Найти веса среднего значения каждого угла и вес невязки, приняв за погрешность единицы веса погрешность m_1.

48. Найти вес приращения координат по оси x, приняв за погрешность единицы веса μ: а) линейную погрешность m_S, б) угловую погрешность m_α.

49. Площадь многоугольника определялась разбивкой его на местности на треугольники и трапеции. Веса площадей отдельных фигур получились следующие: $p_1 = 4$, $p_2 = 2$, $p_3 = 3$, $p_4 = 5$. Определить вес площади многоугольника.

50. При нивелировании отсчеты по нитям делались по трем нитям. Вес отсчета по крайней нити в 2 раза меньше веса отсчета по средней нити. Приняв вес отсчета по крайней нити за единицу, найти вес среднего арифметического из отсчетов по трем нитям.

51. В треугольнике один угол измерен 7 раз с средней квадратической погрешностью одного измерения $3.2''$. Второй угол измерен 10 раз с погрешностью $6.1''$. Найти средние квадратические погрешности и веса всех трех углов, их суммы, приняв за единицу вес среднего значения первого угла.

52. Найти вес площади треугольника, если основание его $b = 8$ м получено с весом $p_b = 1$, высота $h = 16$ м с весом $p_h = 1.2$.

53. В треугольнике измерены все углы. Первый угол измерен тремя приемами с погрешностью измерения одним приемом в $3.0''$, второй двумя приемами с погрешностью $6.0''$, третий – пятью приемами с погрешностью в $4.0''$. Определить вес суммы средних значений углов треугольника, если погрешность единицы веса равна $5.0''$.

54. Один угол треугольника измерен 8 раз теодолитом, с средней квадратической погрешностью одного измерения $3.3''$. Сколько раз надо

измерить два других угла треугольника теодолитом, дающим погрешность одного измерения 5.2″, чтобы веса всех углов были одинаковы?

55. Превышение по нивелирному ходу длиной 630 м имеет вес 4. Найти длину хода, которому соответствует превышение весом 1.

5. Дополнительные возможности при оценивании косвенных измерений.

5.1. Совместный учет случайной и систематической составляющей [1, §3.3, стр. 115].

При совместном учете случайной и систематической составляющей для оценки точности функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ с известными оценками меры случайного разброса аргументов в виде средней квадратической погрешности m_i и систематическими погрешностями аргументов θ_i используют формулу [1, стр. 119]

$$m_f = \sqrt{m_\Delta^2 + m_\theta^2}\,. \tag{28}$$

Здесь m_Δ – случайная средняя квадратическая погрешность функции из (2), а m_θ – систематическая погрешность функции, имеющая вид

$$m_\theta = f_1 \cdot \theta_1 + ... + f_n \cdot \theta_n\,. \tag{29}$$

Считается, что если $m_\Delta > 3m_\theta$ (или $m_\Delta / m_\theta > 3$), то систематической составляющей **можно пренебречь**.

Рассмотрим пример.

Пусть требуется выполнить оценку точности получения среднего арифметического, когда результаты 10 измерений отягощены как случайными, так и систематическими погрешностями. Измерения не коррелированны и равноточны с $m_i = 0.05$ *м и* $\theta_i = 0.03$ *м.*

Исходя из (28), (2) и (29) имеем

$$m_{\bar{X}}^2 = m_\Delta^2 + m_\theta^2 = \frac{m^2}{n} + \theta^2\,.$$

Подставив значения из условия задачи, получим

$$m_{\bar{X}}^2 = m_\Delta^2 + m_\theta^2 = \frac{0.05^2}{10} + 0.03^2 \rightarrow m_{\bar{X}} = 0.034 \text{ м}$$

погрешность определения среднего арифметического с учетом влияния случайной и систематической составляющей.

Ещё пример: *при вычислении погрешности k-ого дирекционного угла по углам поворота с погрешностью исходного дирекционного угла* m_{α_0}, *полная формула (28) будет* $m_f = \sqrt{m_{\alpha_0}^2 + \theta^2 + m_y^2}$. *Здесь* m_y *– средняя квадратическая погрешность k-ого дирекционного угла без учета дополнительных влияний.*

5.2. Использование численного дифференцирования [1, §3.3, стр. 121]

Во всех формулах оценки точности необходимо получать значения частных производных $f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$. В некоторых случаях, из-за громоздкости аналитических вычислений, или не слишком высоких требований к точности, возможно заменить аналитический вид производных на их численный аналог. Для этого используют обычные формулы *численного дифференцирования*, например, вида

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}, \tag{30}$$

более точные

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x+\Delta) - f(x-\Delta)}{2\Delta}, \tag{31}$$

или другие, известные из численных методов математического анализа. Формулы численного дифференцирования для **многомерной** функции будут

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_1,...,x_i+\Delta,...,x_n) - f(x_1,...,x_n)}{\Delta}, \tag{32}$$

или

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{f(x_1,...,x_i+\Delta,...,x_n) - f(x_1,...,x_i-\Delta,...,x_n)}{2\Delta}. \tag{33}$$

Замечание 4. В качестве приращения Δ берут наименьшую величину, связанную с погрешностью измерений. Например, для угловой точности в секундах – это 1″, в минутах - 1′, в миллиметрах – 1 мм, в сантиметрах – 1 см и т.п.

Замечание 5. В качестве необходимого дополнительного задания требуется придумать и решить одну задачу по любому из пяти разделов работы.