Álgebra Lineal

Espacios Vectoriales, Transformaciones Lineales y Espacios con Producto Interno.

Definiciones, teoremas y ejercicios extraidos de la cuarta edición del libro *Linear Algebra Done Right* de Sheldon Axler.

§1 Subespacios invariantes

Definición 1.1 (Subespacio invariante)
Suponiendo $T \in \mathcal{L}(V)$. Un subespacio U de V es llamado **invariante** bajo T si $u \in U$ implica $Tu \in U$.

En la búsqueda del subespacio no trivial más simple posible (1-dimensional) nos encontramos con un U definido como

$$U = \{\lambda v : \lambda \in \mathbb{F}\} = \mathrm{span}(v)$$

Vemos que si U es invariante bajo un operador $T \in \mathcal{L}(V)$ entonces $Tv \in U$ y por tanto hay un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ que cumple

$$Tv = \lambda v$$

Esta ecuación es tan importante que el vector v y el valor λ reciben su propio nombre.

§2 Vectores y valores propios

Definición 2.1 (Valor Propio o Eigenvalue)
Suponiendo $T \in \mathcal{L}(V)$. Un número $\lambda \in \mathbb{F}$ es llamado **valor propio** de T si existe $v \in V$ tal que $v \neq 0$ y $Tv = \lambda v$.

Es condición indispensable que $v \neq 0$ porque cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ cumple $T0 = \lambda 0$.

Definición 2.2 (Vector Propio o Eigenvector)
Suponiendo $T \in \mathcal{L}(V)$ y $\lambda \in \mathbb{F}$ es un valor propio de T. Un vector $v \in V$ es llamado **vector propio** de T correspondiente a λ si $v \neq 0$ y $Tv = \lambda v$.

Teorema 2.3 (Una lista de vectores propios es linealmente independiente)
Sea $T \in \mathcal{L}(V)$. Supón $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ son distintos valores propios de T y $v_1, \dots, v_m$ son los correspondientes vectores propios. Entonces $v_1, \dots, v_m$ es linealmente independiente.

Demostración. Suponeos que $v_1, \dots, v_m$ es linealmente dependiente. Siendo k el entero positivo más pequeño tal que

$$v_k \in span(v_1, \dots, v_{k-1}); \tag{5.11}$$

la existencia de k con esta propiedad se sigue del *Lema de Dependencia Lineal*

(2.21). Por tanto existe $a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{F}$ tal que

$$v_k = a_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} v_{k-1}. \tag{5.12}$$

Applicando T a ambos lados de la ecuación obtenemos

$$\lambda_k v_k = a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1}.$$

Multiplicando ambos lados de 5.12 por λ_k y luego restando la ecuación de arriba obtenemos

$$0 = a_1(\lambda_k - \lambda_1) v_1 + \cdots + a_{k-1}(\lambda_k - \lambda_{k-1}) v_{k-1}.$$

Dado que definimos k como el menor entero positivo que satisface 5.11, $v_1, \dots, v_{k-1}$ es linealmente independiente. Por tanto la ecuación de arriba implica que todas las a's son 0. Sin embargo, esto significa que v_k es igual a 0, contradiciendo nuestra hipotesis de que v_k es un vector propio. Por tanto nuestra asunción de que $v_1, \dots, v_m$ es linealmente dependiente es falsa. □

Teorema 2.4 (máximo de valores propios)
Suponiendo V finito-dimensional. Cada operador en V tiene como mucho $\dim V$ valores propios distintos.

§2.1 Definiciones clave para el calculo de valores propios

Definición 2.5
Las siguientes afirmaciones para un operador $T \in \mathcal{L}(V)$, con V de dimensión finita, y un escalar $\lambda \in \mathbb{F}$ son equivalentes:

(a) λ es un valor propio de T;

(b) $T - \lambda I$ no es inyectivo;

(c) $T - \lambda I$ no es sobreyectivo;

(d) $T - \lambda I$ no es invertible.

Fact 2.6 (Identidad de Euler)
La *identidad de Euler* es la igualdad conocida como la más bonita entre todas las igualdades matemáticas. Tiene la siguiente forma

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

En ella se relacionan dos numeros irracionales como son e y π con la unidad compleja i y los elementos neutros de la multiplicación y la suma, el 1 y el 0. Este es sin embargo un caso particular, su forma generalizada no tiene menos belleza

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

La importancia de una igualdad que relaciona un número tan presente en teoría de números y analisis matemtático como el número de Euler con las funciones trigonométricas básicas es inconmensurable y permite encontrar soluciones elegantes en cálculos complejos.

Teorema 2.7 (Teorema multiplos de 3)

Para todo $n \in \mathbb{Z}$ se cumple que al menos uno de los factores de la expresión $n(n+1)(n+2)$ es divisible por 3.

Demostración. Vamos a completar la prueba por inducción, es fácil ver que el teorema se cumple para el caso $n = 1$, $1 \cdot 2 \cdot 3 = 3 \cdot (2)$. Ahora suponiendo que se cumple para n demostraremos que lo hace también para $n + 1$. Con la expresión

$$(n+1)(n+2)(n+3) = 3k$$

Para cierto $k \in \mathbb{Z}$, desarrollando la expresión obtenemos

$$\begin{aligned}(n+1)(n+2)(n+3) &= \frac{3k}{n}(n+3) \\ &= 3 \cdot \frac{k}{n}(n+3)\end{aligned}$$

Donde la primera igualdad se sostiene de la supocisión inductiva. Vemos que si $\frac{k(n+3)}{n}$ es un entero entonces hemos terminado la prueba y sabemos que es un entero ya que de la suposición inductiva sabemos que

$$\begin{aligned}\frac{k(n+3)}{n} &= \frac{kn+3k}{n} \\ &= \frac{kn+n(n+1)(n+2)}{n} \\ &= k+(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

Por tanto $\frac{k(n+3)}{n}$ es un entero completando la prueba $\square$

§3 Singular Value Decomposition (SVD)

Definición 3.1 (SVD)

Suppose $T \in \mathcal{L}(V, W)$ and the positive singular values of T are $s_1, \dots, s_m$. Then there exist orthonormal lists $e_1, \dots, e_m$ in V and $f_1, \dots,$ in W such that

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \cdots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m \tag{7.71}$$

for every $v \in V$.

Demostración. Let $s_1, \dots, s_m$ denote the singular values of T (thus $n = dimV$). Because T^*T is a positive operator, the spectral theorem implies that there exists an orthonormal basis $e_1, \dots, e_n$ of V with

$$T^*Te_k = s_k^2 e_k \tag{7.72}$$

for each $k = 1, \dots, n$.

For each $k = 1, \dots, m$, let

$$f_k = \frac{Te_k}{s_k}. \tag{7.73}$$

If $j, k \in 1, \dots, m$, then

$$\langle f_j, f_k \rangle = \frac{1}{s_j s_k} \langle Te_j, Te_k \rangle = \frac{1}{s_j s_k} \langle e_j, T^*Te_k \rangle = \frac{s_k}{s_j} \langle e_j, e_k \rangle = \begin{cases} 0 & if\ j \neq k, \\ 1 & if\ j = k. \end{cases}$$

Thus $f_1, \dots, f_m$ is an orthonormal list in W.

If $k \in 1, \dots, n$ and $k > m$, then $s_k = 0$ and hence $T^*Te_k = 0$ (by **??**), which implies that $Te_k = 0$.

Suppose $v \in V$. Then

$$\begin{aligned} Tv &= T\left(\langle v, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle v, e_n \rangle e_n\right) \\ &= \langle v, e_1 \rangle Te_1 + \cdots + \langle v, e_m \rangle Te_m \\ &= s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \cdots + s_m \langle v, e_m \rangle f_m, \end{aligned}$$

where the last index in the first line switched from n ot m in the secod line because $Te_k = 0$ if $k > m$ (as noted in the paragraph above) and the third line follows from 7.73. The equation above is our desired result. □