```python
for ik in range(nk):
    m += 1
```

Lời giải. Giá trị khởi tạo của m bằng 0. Khối lệnh này gồm k vòng lặp khác nhau. Sau mỗi bước lặp của từng vòng lặp giá trị của k được tăng lên một đơn vị. Gọi T_i là việc thi hành vòng lặp thứ i. Có thể làm T_i bằng n_i cách vì vòng lặp thứ i có n_i bước lặp. Do các vòng lặp không thể thực hiện đồng thời nên theo quy tắc cộng, giá trị cuối cùng của m bằng số cách thực hiện một trong số các nhiệm vụ T_i, tức là $m = n_1 + n_2 + ... + n_k$. ■

Ngôn ngữ tập hợp Nếu $A_1, A_2, ..., A_k$ là các tập hợp đôi một rời nhau, khi đó số phần tử của hợp các tập hợp này bằng tổng số các phần tử của các tập thành phần. Giả sử T_i là việc chọn một phần tử từ tập A_i với $i = 1, 2, ..., k$. Có $|A_i|$ cách làm và không có hai việc nào có thể được làm cùng một lúc. Số cách chọn một phần tử của hợp các tập hợp này, một mặt bằng số phần tử của nó, mặt khác theo quy tắc cộng nó bằng $|A_1| + |A_2| + ... + |A_k|$. Do đó ta có: $|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_k|$.

Quy tắc nhân

Phát biểu. Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra thành k việc $T_1, T_2, ..., T_k$. Nếu việc T_i có thể làm bằng n_i cách sau khi các việc $T_1, T_2, ...T_{i-1}$ đã được làm, khi đó có $n_1.n_2...n_k$ cách thi hành nhiệm vụ đã cho.

Ví dụ 1.3. Người ta có thể ghi nhãn cho những chiếc ghế trong một giảng đường bằng một chữ cái và một số nguyên dương không vượt quá 100. Bằng cách như vậy, nhiều nhất có bao nhiêu chiếc ghế có thể được ghi nhãn khác nhau?

Lời giải. Thủ tục ghi nhãn cho một chiếc ghế gồm hai việc, gán một trong 26 chữ cái và sau đó gán một trong 100 số nguyên dương. Quy tắc nhân chỉ ra rằng có $26.100 = 2600$ cách khác nhau để gán nhãn cho một chiếc ghế. Như vậy nhiều nhất ta có thể gán nhãn cho 2600 chiếc ghế. ■

Ví dụ 1.4. Có bao nhiêu chuỗi nhị phân có độ dài n.

Lời giải. Mỗi bit trong n bit của chuỗi nhị phân có thể chọn bằng hai cách vì mỗi bit hoặc bằng 0 hoặc bằng 1. Bởi vậy theo quy tắc nhân có tổng cộng 2^n chuỗi nhị phân khác nhau có độ dài bằng n. ■

Ví dụ 1.5. Có thể tạo được bao nhiêu ánh xạ từ tập A có m phần tử vào tập B có n phần tử?

Lời giải. Theo định nghĩa, một ánh xạ xác định trên A có giá trị trên B là một phép tương ứng mỗi phần tử của A với một phần tử nào đó của B. Rõ ràng sau khi đã chọn được ảnh của $i - 1$ phần tử đầu, để chọn ảnh của phần tử thứ i của A ta có n cách. Vì vậy theo quy tắc nhân, ta có $n.n...n = n^m$ ánh xạ xác định trên A nhận giá trị trên B. ■

Ví dụ 1.6. Có bao nhiêu đơn ánh xác định trên tập A có m phần tử và nhận giá trị trên tập B có n phần tử?

Lời giải. Nếu $m > n$ thì với mọi ánh xạ, ít nhất có hai phần tử của A có cùng một ảnh, điều đó có nghĩa là không có đơn ánh từ A đến B. Bây giờ giả sử $m \leq n$ và gọi các phần tử của A là $a_1, a_2, ..., a_m$. Rõ ràng có n cách chọn ảnh cho phần tử a_1. Vì ánh xạ là đơn ánh nên ảnh của phần tử a_2 phải khác ảnh của a_1 nên chỉ có $n-1$ cách chọn ảnh cho phần tử a_2. Nói chung, để chọn ảnh của a_k ta có $n-k+1$ cách. Theo quy tắc nhân, ta có

$$n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$$

đơn ánh từ tập A đến tập B. ■

Ví dụ 1.7. Giá trị của biến m bằng bao nhiêu sau khi đoạn chương trình Python sau được thực hiện?

```
m = 0
for i1 in range(n1):
    for i2 in range(n2):
        ...
            for ik in range(nk):
                m += 1
```

Lời giải. Giá trị khởi tạo của m bằng 0. Ta có k vòng lặp được lồng nhau. Gọi T_i là việc thi hành vòng lặp thứ i. Khi đó số lần đi qua vòng lặp bằng số cách làm các việc $T_1, T_2, ..., T_k$. Số cách thực hiện việc T_j là n_j với $(j = 1, 2, ..., k)$, vì vòng lặp thứ j được duyệt với mỗi giá trị nguyên i_j nằm giữa 1 và n_j. Theo quy tắc nhân vòng lặp lồng nhau này được duyệt qua $n_1.n_2...n_k$ lần. Vì vậy giá trị cuối cùng của m là $n_1.n_2...n_k$. ■

Ngôn ngữ tập hợp Nếu $A_1, A_2, ..., A_k$ là các tập hữu hạn, khi đó số phần tử của tích Descartes của các tập này bằng tích của số các phần tử của mọi tập thành phần. Ta biết rằng việc chọn một phần tử của tích Descartes $A_1 \times A_2 \times ... \times A_k$ được tiến hành bằng cách chọn lần lượt một phần tử của A_1, một phần tử của A_2,..., một phần tử của A_k. Theo quy tắc nhân ta có: $|A_1 \times A_2 \times ... \times A_k| = |A_1|.|A_2|...|A_k|$.

1.1.2. Nguyên lý bù trừ

Khi hai công việc có thể được làm đồng thời, ta không thể dùng quy tắc cộng để tính số cách thực hiện nhiệm vụ gồm cả hai việc. Để tính đúng số cách thực hiện nhiệm vụ này ta cộng số cách làm mỗi một trong hai việc rồi trừ đi số cách làm đồng thời cả hai việc.

Ngôn ngữ tập hợp.

- Cho A_1, A_2 là hai tập hữu hạn, khi đó

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

- Từ đó với ba tập hợp hữu hạn A_1, A_2, A_3, ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| - |A_3 \cap A_1| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

- Bằng quy nạp, với k tập hữu hạn $A_1, A_2, ..., A_k$ ta có:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = N_1 - N_2 + N_3 - ... + (-1)^{k-1} N_k$$

  trong đó $N_m (m = 1, ..., k)$ là tổng phần tử của tất cả các giao m tập lấy từ k tập đã cho, nghĩa là

$$N_m = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_m \leq k} A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap ... \cap A_{i_m}$$

- Bây giờ ta đồng nhất tập $A_m (1 \leq m \leq k)$ với tính chất A_m cho trên tập vũ trụ hữu hạn U nào đó và đếm xem có bao nhiêu phần tử của U sao cho không thỏa mãn bất kỳ một tính chất Am nào. Gọi $\bar{N}$ là số cần đếm, N là số phần tử của U. Ta có:

$$N = N - |A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k| = N - N_1 + N_2 - N_3 + ... + (-1)^k N_k$$

  trong đó N_m là tổng các phần tử của U thỏa mãn m tính chất lấy từ k tính chất đã cho. Công thức này được gọi là nguyên lý bù trừ. Nó cho phép tính $\bar{N}$ qua các N_m.

Ví dụ 1.8. Có n lá thư và n phong bì ghi sẵn địa chỉ. Bỏ ngẫu nhiên các lá thư vào các phong bì. Hỏi xác suất để xảy ra không một lá thư nào đúng địa chỉ.

Lời giải. Mỗi phong bì có n cách bỏ thư vào, nên có tất cả $n!$ cách bỏ thư. Vấn đề còn lại là đếm số cách bỏ thư sao cho không lá thư nào đúng địa chỉ. Gọi U là tập hợp các cách bỏ thư và A_m là tính chất lá thư thứ m bỏ đúng địa chỉ. Khi đó theo công thức về nguyên lý bù trừ ta có:

$$\bar{N} = n! - N_1 + N_2 - ... + (-1)^n N_n$$

trong đó $N_m (1 \leq m \leq n)$ là số tất cả các cách bỏ thư sao cho có m lá thư đúng địa chỉ. Nhận xét rằng, N_m là tổng theo mọi cách lấy m lá thư từ n lá, với mỗi cách lấy m lá thư, có $(n - m)!$ cách bỏ để m lá thư này đúng địa chỉ, ta nhận được:

$$N_m = \binom{n}{m} (n - m)! = \frac{n!}{m!}$$

và

$$\bar{N} = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

Từ đó xác suất cần tìm là

$$P = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - ... + (-1)^n \frac{1}{n!} \to \frac{1}{e}$$

khi n khá lớn. ■

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$\bar{N}$	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	1334961	14684570

1.2 Nguyên lý Dirichlet

1.2.1. Giới thiệu

Giả sử có một đàn chim bồ câu bay vào chuồng. Nếu số chim nhiều hơn số ngăn chuồng thì ít nhất trong một ngăn có nhiều hơn một con chim. Nguyên lý này dĩ nhiên là có thể áp dụng cho các đối tượng không phải là chim bồ câu và chuồng chim.

Định lý 1.1. *Nếu có $k+1$ (hoặc nhiều hơn) đồ vật được đặt vào trong k hộp thì tồn tại một hộp có ít nhất hai đồ vật.*

Chứng minh. Giả sử không có hộp nào trong k hộp chứa nhiều hơn một đồ vật. Khi đó tổng số vật được chứa trong các hộp nhiều nhất là bằng k. Điều này trái giả thiết là có ít nhất $k+1$ vật. ■

Nguyên lý này thường được gọi là nguyên lý Dirichlet, mang tên nhà toán học người Đức ở thế kỷ 19. Ông thường xuyên sử dụng nguyên lý này trong công việc của mình.

Ví dụ 1.9. Trong bất kỳ một nhóm 367 người thế nào cũng có ít nhất hai người có ngày sinh nhật giống nhau.

Lời giải. Bởi vì chỉ có tất cả 366 ngày sinh nhật khác nhau. ■

Ví dụ 1.10. Trong kỳ thi học sinh giỏi, điểm bài thi được đánh giá bởi một số nguyên trong khoảng từ 0 đến 100. Hỏi rằng ít nhất có bao nhiêu học sinh dự thi để cho chắc chắn tìm được hai học sinh có kết quả thi như nhau?

Lời giải. Theo nguyên lý Dirichlet, số học sinh cần tìm là 102, vì ta có 101 kết quả điểm thi khác nhau ■

Ví dụ 1.11. Trong số những người có mặt trên trái đất, phải tìm được hai người có hàm răng giống nhau.

Lời giải. Nếu xem mỗi hàm răng gồm 32 cái như là một chuỗi nhị phân có chiều dài 32, trong đó răng còn ứng với bit 1 và răng mất ứng với bit 0, thì có tất cả $2^{32} = 4294967296$ hàm răng khác nhau. Trong khi đó số người trên hành tinh này là vượt quá 7 tỉ, nên theo nguyên lý Dirichlet ta có điều cần tìm. ■

1.2.2. Nguyên lý Dirichlet tổng quát

Định lý 1.2. *Nếu có N đồ vật được đặt vào trong k hộp thì sẽ tồn tại một hộp chứa ít nhất $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ đồ vật.*

Chứng minh. Giả sử mọi hộp đều chứa ít hơn $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ vật. Khi đó tổng số đồ vật là $\leq k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k.\frac{N}{k} = N$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết là có N đồ vật cần xếp. ■

Ví dụ 1.12. Xét một số ví dụ đơn giản sau

1. Trong 100 người, có ít nhất 9 người sinh cùng một tháng. Xếp những người sinh cùng tháng vào một nhóm. Có 12 tháng tất cả. Vậy theo nguyên lý Dirichlet, tồn tại một nhóm có ít nhất $\left\lceil \frac{100}{12} \right\rceil = 9$ người.

2. Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít ra là 6 người cùng nhận học bổng như nhau. Gọi N là số sinh viên, khi đó $\left\lceil \frac{N}{5} \right\rceil = 6$ khi và chỉ khi $5 < \frac{N}{5} \leq 6$ hay $25 < N \leq 30$. Vậy số N cần tìm là 26.

3. Số mã vùng cần thiết nhỏ nhất phải là bao nhiêu để đảm bảo 25 triệu máy điện thoại trong nước có số điện thoại khác nhau, mỗi số có 9 chữ số (giả sử số điện thoại có dạng 0XX - 8XXXXX với X nhận các giá trị từ 0 đến 9). Có $10^7 = 10.000.000$ số điện thoại khác nhau có dạng 0XX - 8XXXXX. Vì vậy theo nguyên lý Dirichlet tổng quát, trong số 25 triệu máy điện thoại ít nhất có $\left\lceil \frac{25.000.000}{10.000.000} \right\rceil = 3$ có cùng một số. Để đảm bảo mỗi máy có một số cần có ít nhất 3 mã vùng.

1.2.3. Một số ứng dụng của nguyên lý Dirichlet

Trong nhiều ứng dụng thú vị của nguyên lý Dirichlet, khái niệm đồ vật và hộp cần phải được lựa chọn một cách khôn khéo. Trong phần nay có vài thí dụ như vậy.

Ví dụ 1.13. Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau. Số người quen của mỗi người trong phòng họp nhận các giá trị từ 0 đến $n-1$.

Lời giải. Rõ ràng trong phòng không thể đồng thời có người có số người quen là 0 (tức là không quen ai) và có người có số người quen là $n-1$ (tức là quen tất cả). Vì vậy theo số lượng người quen, ta chỉ có thể phân n người ra thành $n-1$ nhóm. Vậy theo nguyên lý Dirichlet tồn tại một nhóm có ít nhất 2 người, tức là luôn tìm được ít nhất 2 người có số người quen là như nhau. ■

Ví dụ 1.14. Trong một tháng gồm 30 ngày, một đội bóng chuyền thi đấu mỗi ngày ít nhất 1 trận nhưng chơi không quá 45 trận. Chứng minh rằng tìm được một giai đoạn gồm một số ngày liên tục nào đó trong tháng sao cho trong giai đoạn đó đội chơi đúng 14 trận.

Lời giải. Gọi a_j là số trận mà đội đã chơi từ ngày đầu tháng đến hết ngày j. Khi đó

$$1 \leq a_1 < a_2 < ... < a_{30} < 45$$

$$15 \leq a_1 + 14 < a_2 + 14 < ... < a_{30} + 14 < 59$$

Sáu mươi số nguyên $a_1, a_2, ..., a_{30}, a_1 + 14, a_2 + 14, ..., a_{30} + 14$ nằm giữa 1 và 59. Do đó theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất 2 trong 60 số này bằng nhau. Vì vậy tồn tại i và j sao cho $a_i = a_j + 14 (j < i)$. Điều này có nghĩa là từ ngày $j + 1$ đến hết ngày i đội đã chơi đúng 14 trận. ■

Ví dụ 1.15. Chứng tỏ rằng trong $n + 1$ số nguyên dương không vượt quá $2n$, tồn tại ít nhất một số chia hết cho số khác.

Lời giải. Ta viết mỗi số nguyên $a_1, a_2, ..., a_{n+1}$ dưới dạng $a_j = 2^{k_j} q_j$ trong đó k_j là số nguyên không âm còn q_j là số dương lẻ nhỏ hơn $2n$. Vì chỉ có n số nguyên dương lẻ nhỏ hơn $2n$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại i và j sao cho $q_i = q_j = q$. Khi đó $a_i = 2^{k_i} q$ và $a_j = 2^{k_j} q$. Vì vậy, nếu $k_i \leq k_j$ thì a_j chia hết cho a_i còn trong trường hợp ngược lại ta có a_i chia hết cho a_j. ■

Thí dụ cuối cùng trình bày cách áp dụng nguyên lý Dirichlet vào lý thuyết tổ hợp mà vẫn quen gọi là lý thuyết Ramsey, tên của nhà toán học người Anh. Nói chung, lý thuyết Ramsey giải quyết những bài toán phân chia các tập con của một tập các phần tử.

Ví dụ 1.16. Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

Lời giải. Gọi A là một trong 6 người. Trong số 5 người của nhóm hoặc là có ít nhất ba người là bạn của A hoặc có ít nhất ba người là kẻ thù của A, điều này suy ra từ nguyên lý Dirichlet tổng quát, vì $\left\lceil \frac{5}{2} \right\rceil = 3$. Trong trường hợp đầu ta gọi B, C, D là bạn của A. nếu trong ba người này có hai người là bạn thì họ cùng với A lập thành một bộ ba người bạn lẫn nhau, ngược lại, tức là nếu trong ba người B, C, D không có ai là bạn ai cả thì chứng tỏ họ là bộ ba người thù lẫn nhau. Tương tự có thể chứng minh trong trường hợp có ít nhất ba người là kẻ thù của A. ■

1.3 Chỉnh hợp và tổ hợp

1.3.1. Chỉnh hợp có lặp

Một cách sắp xếp có thứ tự k phần tử có thể lặp lại của một tập n phần tử được gọi là một chỉnh hợp lặp chập k từ tập n phần tử. Nếu A là tập gồm n phần tử đó thì mỗi chỉnh hợp như thế là một phần tử của tập A_n^k. Ngoài ra, mỗi chỉnh hợp lặp chập k từ tập n phần tử là một hàm từ tập k phần tử vào tập n phần tử. Vì vậy số chỉnh hợp lặp chập k từ tập n phần tử là n^k.

1.3.2. Tổ hợp có lặp.

Một tổ hợp lặp chập k của một tập hợp là một cách chọn không có thứ tự k phần tử có thể lặp lại của tập đã cho. Như vậy một tổ hợp lặp kiểu này là một dãy không kể thứ tự gồm k thành phần lấy từ tập n phần tử. Do đó có thể là $k > n$.

Định lý 1.3. *Số tổ hợp lặp chập k từ tập n phần tử bằng* $\binom{k}{n+k-1}$.

Chứng minh. Mỗi tổ hợp lặp chập k từ tập n phần tử có thể biểu diễn bằng một dãy n ô và k ngôi sao. Ô thứ i chứa thêm một ngôi sao mỗi lần khi phần tử thứ i của tập xuất hiện trong tổ hợp. Chẳng hạn, tổ hợp lặp chập 6 của 4 phần tử được biểu thị bằng một dãy gồm 4 ô.

**	*		***

Hình trên mô tả tổ hợp chứa đúng 2 phần tử thứ nhất, 1 phần tử thứ hai, không có phần tử thứ 3 và 3 phần tử thứ tư của tập hợp. Mỗi dãy n ô và k ngôi sao ứng với một chuỗi nhị phân độ dài $n+k-1$ với k số 1. Do đó số các dãy n ô và k ngôi sao chính là số tổ hợp chập k từ tập $n+k-1$ phần tử. Đó là điều cần chứng minh. ■

Ví dụ 1.17. Có bao nhiêu cách chọn 5 tờ giấy bạc từ một két đựng tiền gồm những tờ 1000đ, 2000đ, 5000đ, 10.000đ, 20.000đ, 50.000đ, 100.000đ.

Lời giải. Giả sử thứ tự mà các tờ tiền được chọn là không quan trọng, các tờ tiền cùng loại là không phân biệt và mỗi loại có ít nhất 5 tờ. Vì ta không kể tới thứ tự chọn tờ tiền và vì ta chọn đúng 5 lần, mỗi lần lấy một từ 1 trong 7 loại tiền nên mỗi cách chọn 5 tờ giấy bạc này chính là một tổ hợp lặp chập 5 từ 7 phần tử. Do đó số cần tìm là $\binom{5}{5+7-1} = 462$. ■

Ví dụ 1.18. Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 15$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Lời giải. Chúng ta nhận thấy mỗi nghiệm của phương trình ứng với một cách chọn 15 phần tử từ một tập có 3 loại, sao cho có x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2 và x_3 phần tử loại 3 được chọn. Vì vậy số nghiệm bằng số tổ hợp lặp chập 15 từ tập có 3 phần tử và bằng $\binom{15}{15+3-1} = 136$. ■

1.3.3. Hoán vị của tập hợp có các phần tử giống nhau

Trong bài toán đếm, một số phần tử có thể giống nhau. Khi đó cần phải cẩn thận, tránh đếm chúng hơn một lần. Ta xét thí dụ sau.

Ví dụ 1.19. Có thể nhận được bao nhiêu chuỗi khác nhau bằng cách sắp xếp lại các chữ cái của từ SUCCESS?

Lời giải. Vì một số chữ cái của từ SUCCESS là như nhau nên câu trả lời không phải là số hoán vị của 7 chữ cái được. Từ này chứa 3 chữ S, 2 chữ C, 1 chữ U và 1 chữ E. Để xác định số chuỗi khác nhau có thể tạo ra được ta nhận thấy có $\binom{3}{7}$ cách chọn 3 chỗ cho 3 chữ S, còn lại 4 chỗ trống. Có $\binom{2}{4}$ cách chọn 2 chỗ cho 2 chữ C, còn lại 2 chỗ trống. Có thể đặt chữ U bằng $\binom{1}{2}$ cách và $\binom{1}{1}$ cách đặt chữ E vào chuỗi. Theo nguyên lý nhân, số các chuỗi khác nhau có thể tạo được là:

$$\binom{3}{7}\binom{2}{4}\binom{1}{2}\binom{1}{1} = \frac{7!4!2!1!}{3!4!2!2!1!1!1!0!} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$$

. ■

Định lý 1.4. *Số hoán vị của n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau thuộc loại 1, n_2 phần tử như nhau thuộc loại 2,..., và n_k phần tử như nhau thuộc loại k, là*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

Chứng minh. Để xác định số hoán vị trước tiên chúng ta nhận thấy có $\binom{n_1}{n}$ cách giữ n_1 chỗ cho n_1 phần tử loại 1, còn lại $n - n_1$ chỗ trống. Sau đó có $\binom{n_2}{n-n_1}$ cách đặt n_2 phần tử loại 2 vào hoán vị, còn lại $n - n_1 - n_2$ chỗ trống. Tiếp tục đặt các phần tử loại 3, loại 4,..., loại $k-1$ vào chỗ trống trong hoán vị. Cuối cùng có $\binom{n_k}{n-n_1-n_2-\dots-n_{k-1}}$ cách đặt n_k phần tử loại k vào hoán vị. Theo quy tắc nhân tất cả các hoán vị là

$$\binom{n_1}{n}\binom{n_2}{n-n_1}\dots\binom{n_k}{n-n_1-\dots-n_{k-1}} = \frac{n!}{n_1!n_2!\dots n_k!}$$

■

1.3.4. Sự phân bố các đồ vật vào trong hộp

Ví dụ 1.20. Có bao nhiêu cách chia những xấp bài 5 quân cho mỗi một trong 4 người chơi từ một cỗ bài chuẩn 52 quân?

Lời giải. Người đầu tiên có thể nhận được 5 quân bài bằng $\binom{5}{32}$ cách. Người thứ hai có thể được chia 5 quân bài bằng $\binom{5}{47}$ cách, vì chỉ còn 47 quân bài. Người thứ ba có thể nhận được 5 quân bài bằng $\binom{5}{42}$ cách. Cuối cùng, người thứ tư nhận được 5 quân bài bằng $\binom{5}{37}$ cách. Vì vậy, theo nguyên lý nhân tổng cộng có

$$\binom{5}{52}\binom{5}{47}\binom{5}{42}\binom{5}{37} = \frac{52!}{5!5!5!5!32!}$$

cách chia cho 4 người mỗi người một xấp 5 quân bài. ■

Thí dụ trên là một bài toán điển hình về việc phân bố các đồ vật khác nhau vào các hộp khác nhau. Các đồ vật là 52 quân bài, còn 4 hộp là 4 người chơi và số còn lại để trên bàn. Số cách sắp xếp các đồ vật vào trong hộp được cho bởi mệnh đề sau

Định lý 1.5. *Số cách phân chia n đồ vật khác nhau vào trong k hộp khác nhau sao cho có n_i vật được đặt vào trong hộp thứ i, với $i = 1, 2, ..., k$ là*

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!(n - n_1 - n_2 - \ldots - n_k)!}$$

1.4 Sinh các hoán vị và tổ hợp

1.4.1. Sinh các hoán vị

Có nhiều thuật toán đã được phát triển để sinh ra $n!$ hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$. Ta sẽ mô tả một trong các phương pháp đó, phương pháp liệt kê các hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ theo thứ tự từ điển.

Khi đó, hoán vị $a_1a_2...a_n$ được gọi là đi trước hoán vị $b_1b_2...b_n$ nếu tồn tại $k(1 \leq k \leq n), a_1 = b_1, a_2 = b_2, ..., a_{k-1} = b_{k-1}$ và $a_k < b_k$.

Thuật toán sinh các hoán vị của tập $\{1, 2, ..., n\}$ dựa trên thủ tục xây dựng hoán vị kế tiếp, theo thứ tự từ điển, từ hoán vị cho trước $a_1a_2...a_n$.

Đầu tiên nếu $a_{n-1} < a_n$ thì rõ ràng đổi chỗ a_{n-1} và a_n cho nhau thì sẽ nhận được hoán vị mới đi liền sau hoán vị đã cho. Nếu tồn tại các số nguyên a_j và a_{j+1} sao cho $a_j < a_{j+1}$ và $a_{j+1} > a_{j+2} > ... > a_n$, tức là tìm cặp số nguyên liền kề đầu tiên tính từ bên phải sang bên trái của hoán vị mà số đầu nhỏ hơn số sau. Sau đó, để nhận được hoán vị liền sau ta đặt vào vị trí thứ j số nguyên nhỏ nhất trong các số lớn hơn a_j của tập $a_{j+1}, a_{j+2}, ..., a_n$, rồi liệt kê theo thứ tự tăng dần của các số còn lại của $a_j, a_{j+1}, a_{j+2}, ..., a_n$ vào các vị trí $j + 1, ..., n$. Dễ thấy không có hoán vị nào đi sau hoán vị xuất phát và đi trước hoán vị vừa tạo ra.

Ví dụ 1.21. Tìm hoán vị liền sau theo thứ tự từ điển của hoán vị 4736521.

Lời giải. Cặp số nguyên đầu tiên tính từ phải qua trái có số trước nhỏ hơn số sau là a $3 = 3$ và a $4 = 6$. Số nhỏ nhất trong các số bên phải của số 3 mà lại lớn hơn 3 là số 5. Đặt số 5 vào vị trí thứ 3. Sau đó đặt các số 3, 6, 1, 2 theo thứ tự tăng dần vào bốn vị trí còn lại. Hoán vị liền sau hoán vị đã cho là 4751236. ■

Mã python phát sinh hoán vị liền sau:

```python
def DoiCho(a, i, j):
    a[i], a[j] = a[j], a[i]

def HoanViLienSau(a):
    n = len(a)
    j = n - 2
    while a[j] > a[j+1]:
        j -= 1
```

```
    k = n - 1
    while a[j] > a[k]:
        k -= 1
    DoiCho(a, j, k)
    r = n - 1
    l = j + 1
    while l < r:
        DoiCho(a, l, r)
        l += 1
        r -= 1

a = [4, 7, 3, 6, 5, 2, 1]
HoanViLienSau(a)
print(a)
```

kết quả chạy sẽ in ra màn hình

```
[4, 7, 5, 1, 2, 3, 6]
```

1.4.2. Sinh các tổ hợp

Làm thế nào để tạo ra tất cả các tổ hợp các phần tử của một tập hữu hạn? Vì tổ hợp chính là một tập con, nên ta có thể dùng phép tương ứng 1-1 giữa các tập con của $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ và chuỗi nhị phân độ dài n. Ta thấy một chuỗi nhị phân độ dài n cũng là khai triển nhị phân của một số nguyên nằm giữa 0 và $2^n - 1$. Khi đó 2^n chuỗi nhị phân có thể liệt kê theo thứ tự tăng dần của số nguyên trong biểu diễn nhị phân của chúng. Chúng ta sẽ bắt đầu từ chuỗi nhị phân nhỏ nhất 00...00 (n số 0). Mỗi bước để tìm chuỗi liền sau ta tìm vị trí đầu tiên tính từ phải qua trái mà ở đó là số 0, sau đó thay tất cả số 1 ở bên phải số này bằng 0 và đặt số 1 vào chính vị trí này.

Mã python để phát sinh chuỗi nhị phân liền sau:

```
def ChuoiNhiPhanLienSau(b):
    i = 0
    while b[i] == 1:
        b[i] = 0
        i += 1
    b[i] = 1

b = [0, 1, 1, 0, 0]
ChuoiNhiPhanLienSau(b)
print(b)
```

kết quả chạy sẽ in ra màn hình

```
[1, 1, 1, 0, 0]
```