IL TEOREMA DI NICOMACO E I NUMERI PITAGORICI

Progetto didattica dell’informatica 2021/2022

Ludovico Guercio (340036)

Unità Didattica

Contesto:

lezione di approfondimento per classi 2° o 3°di liceo scientifico o istituto tecnico, indirizzo informatico

Modalità lezione:

- Lezione frontale con discussioni e interazioni (2h)
- parte in laboratorio (2h)

Prerequisiti

- Conoscenze matematiche di: equazioni, funzioni di secondo e terzo grado, sommatorie
- concetti di base sui teoremi trigonometrici
- Conoscenza di base del linguaggio di programmazione per il laboratorio: costrutti iterativi e ciclici, array e vettori

Di cosa avremo bisogno?

- Slide della lezione
- Lavagna multimediale
- Ambiente di sviluppo codice C
- libro di testo/documentazione del linguaggio C

Obiettivi della lezione

- Approfondire concetti matematici come i numeri pitagorici
- Conoscere il teorema di Nicomaco
- Saper implementare un algoritmo basato sul teorema di Nicomaco

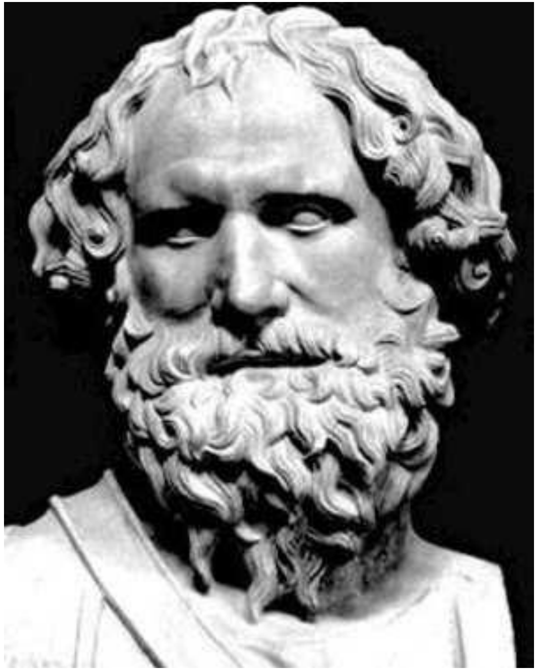
Introduzione

Nicomaco di Gerasa è stato un matematico greco tra gli anni 60 e 120 d.C.

Fu allievo di Pitagora e sostenitore assoluto di Aristotele e Platone.

Gli storici lo considerano un neopitagorico in base alla sua tendenza a vedere i numeri con proprietà mistiche. L'età in cui visse (circa 100 dC) è nota solo perché cita Trasillo nel suo “Manuale di Armonica”, e perché la sua “Introduzione all'aritmetica” fu apparentemente tradotta in latino a metà del II secolo.

Introduzione



Nicomaco fu il primo matematico a spiegare le molteplici utilità del Crivello di Eratostene(l'antico metodo per individuare i numeri primi):

- come decidere se un numero è primo
- come stabilire se due numeri sono primi tra di loro.

Introduzione

La sua influenza nel mondo matematico è stata grazie ad una delle sue più importanti opere, "Arithmetike Eisagoge" (Introduzione all'aritmetica). Nel manoscritto descrisse l'importanza del significato dei numeri primi e complessi, e come l'aritmetica sia la base di altre discipline matematiche come la geometria, trigonometria, musica e astronomia.

Il Teorema

Circa nel 100 d.C. Nicomaco affermò che la somma dei cubi dei primi n numeri primi, è uguale al quadrato dell’ n-esimo numero **triangolare.**

Interpretiamo ora l’ n-esimo numero triangolare con **Tn**

numero triangolare

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (Tn)^2$$

L’uguaglianza può essere scritta anche nella forma compatta tramite le sommatorie:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

E i numeri Triangolari ???

(parliamone …)

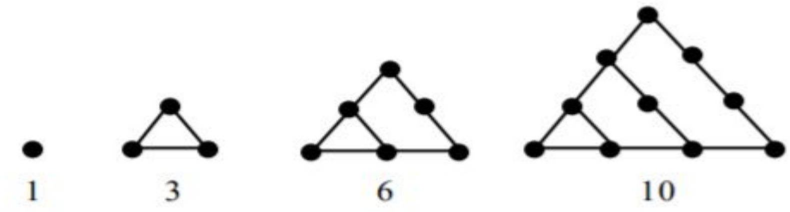
Dal nome “triangolari”, che tipo di numeri possono essere?

I numeri Triangolari

Nella matematica pitagorica, i matematici interpretavano i numeri in forme geometriche: triangoli, quadrati, pentagoni, cubi e così via a seconda delle forme in cui erano disposti i punti.

Ad esempio i numeri triangolari erano i numeri per i quali i punti assumevano la forma di un triangolo.

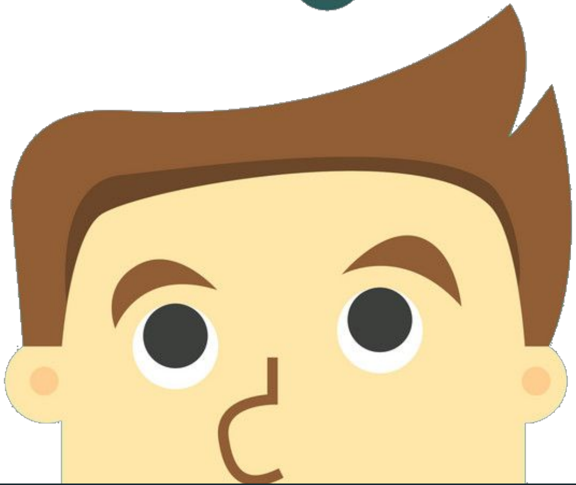
1 , 3 , 6 , 10 sono numeri triangolari.



Domanda....

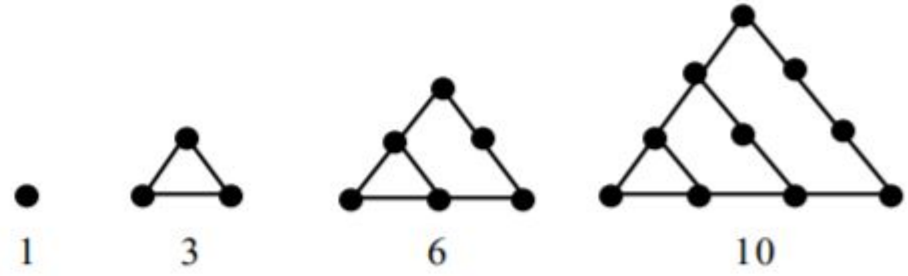
**Secondo la definizione appena data,
è facile dedurre quale sia il numero triangolare successivo a 10?**

**E il suo successivo ancora...
che numero è?**



Intuizione sui Triangolari

Dalla disposizione geometrica, si può dedurre facilmente che i numeri triangolari vengono ottenuti sommando successivamente i numeri naturali.



0 + 1 = 1
1 + 2 = 3
1 + 2 + 3 = 6
1 + 2 + 3 + 4 = 10
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15

Questa intuizione può essere scritta formalmente per calcolare l'n-esimo numero triangolare come:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots + n = n\frac{(n+1)}{2}$$

In pratica un numero triangolare rappresenta il quadrato della somma dei primi numeri naturali da 1 a n

Ancora sui numeri pitagorici...

Come anticipato precedentemente, esistono tanti tipi di numeri pitagorici.

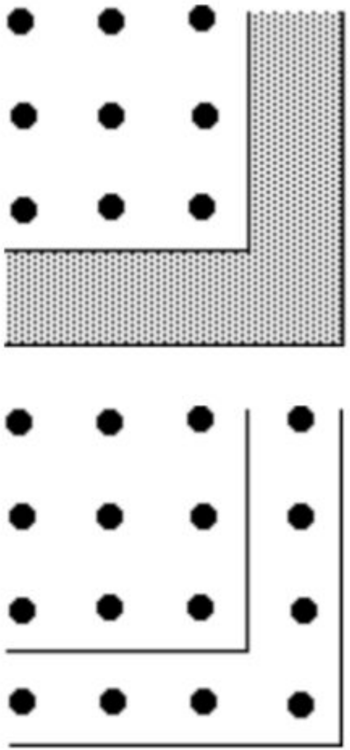
Consolidiamo il concetto!

NUMERI QUADRATI…

Esercizio:

Provate a rappresentare graficamente dei numeri quadrati

Ancora sui numeri quadrati…



I numeri quadrati si ottengono sommando i numeri dispari, a partire dall’unità 1.

In passato, i Pitagorici, calcolavano questi numeri tracciando due lati del quadrato di partenza; poi aggiungevano tanti punti quanti erano necessari per formare un altro quadrato

Curiosità sui numeri pitagorici…

QUESITO:

Dato un qualsiasi tipo di numero pitagorico, è possibile determinare quel numero di quella determinata forma(poligonale) tramite una formula generale?

Cercate di determinare questa formula generale.
(Potete anche lavorare a coppie o a gruppi di 3).

Curiosità sui numeri pitagorici...

FORMULA GENERALE

Dato “s” il numero di lati di un poligono, la formula per l’n-esimo numero s-gonale si ottiene aggiungendo al precedente numero s-gonale (s-2) lati lunghi “n”, per un totale di (s-2)(n-1)+1 punti ovvero:

$$P_s(n) = P_s(n-1) + (s-2)(n-1) + 1$$

Ciò equivale a:

$$P_s(n) = \frac{(s-2)n^2 - (s-4)n}{2}$$

Tornando al teorema…

L’intuizione di Nicomaco arrivò inizialmente tramite la possibilità di esprimere il cubo di un numero naturale n come somma di n numeri dispari. Gli n termini di tale somma differiscono tra loro di 2 (quindi consecutivi).

Per esempio:

1^3 = 1
2^3 = 3 + 5
3^3 = 7 + 9 + 11
4^3 = 13 + 15 + 17 + 19
5^3 = 21 + 23 + 25 + 27 + 29
6^3 = 31 + 33 + 35 + 37 + 39 + 41
…

La dimostrazione

Data la precedente rappresentazione di un naturale n cubo si può semplicemente dimostrare il teorema per **induzione**.

Ipotesi per induzione: $(1+2+3+4+\cdots+n)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+\cdots+n^3$

- vera per $n=1$: $1^2 = 1^3$

ammessa vera per n, verifichiamo se è vera per n+1

premessa: $1+2+3+4+\cdots+n = n\dfrac{(n+1)}{2}$

La dimostrazione

quindi verificando per induzione con n+1:

$$[1+2+3+\cdots+n+(n+1)]^2=(1+2+3+\cdots+n)^2+(n+1)^2+2(1+2+3+\cdots+n)(n+1)$$

$$=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^2+\cancel{2}\frac{n(n+1)}{\cancel{2}}(n+1)$$

$$=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^2(1+n)$$

$$=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3+(n+1)^3$$

Dimostrazione grafica

Esistono alcuni diversi tipi di dimostrazioni per questo teorema, tra cui uno molto semplici e dimostrativo fatto graficamente.

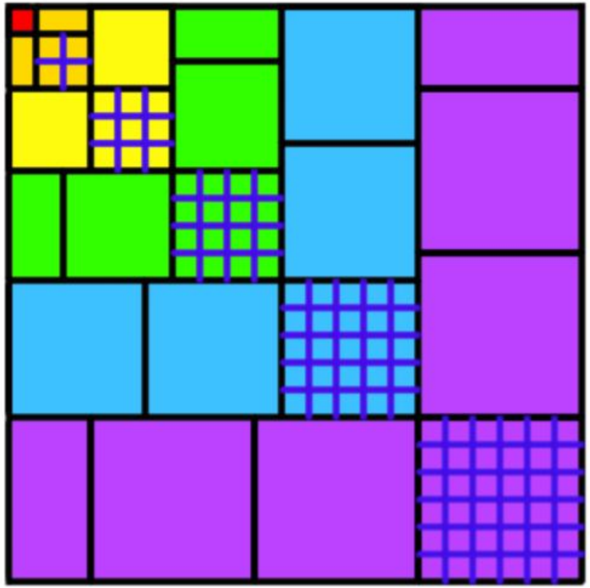
Vediamo insieme passo per passo

Dimostrazione grafica

L'area del quadrato può essere vista in diversi modi:

- **La larghezza delle colonne è in successione crescente di 1,2,3,4,5,6 quadrati elementari; l'area del quadrato grande è quindi (1+2+3+4+5+6)^2.**

- **si può considerare il quadrato a partire dall'angolo in alto a sinistra, composto da un quadratino rosso elementare; un totale di 2 quadrati arancio, che contengono in tutto 8 (2^3) quadratini elementari; 3 quadrati gialli per un totale di 27 (3^3) quadratini; 4 quadrati verdi per un totale di 64 (4^3) quadratini elementari e così via fino a 6^3**



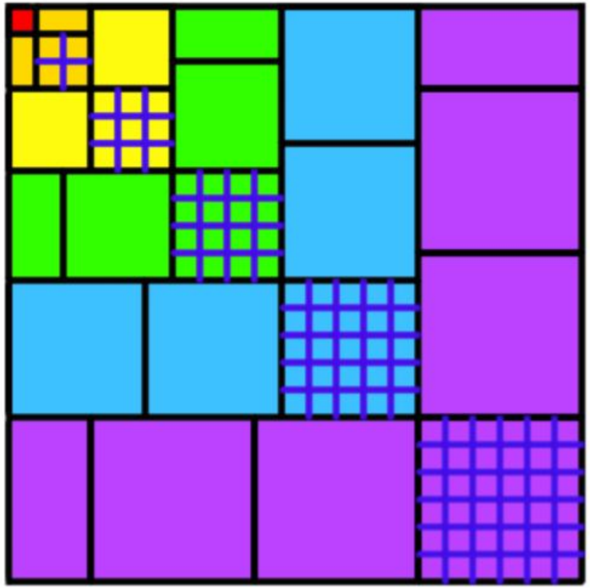
Dimostrazione grafica

Quando i quadrati hanno un lato costituito da un numero pari di quadrati elementari, si noti che uno di essi è diviso in due rettangoli uguali.

Fino a questo esempio con n = 6 si dimostra ,quindi, che

il calcolo dell’area del quadrato può essere fatto in entrambi i modi appena descritti:

$$(1+2+3+4+5+6)^2 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+6^3$$



Il nostro lavoro

Conoscendo ora il teorema di Nicomaco, possiamo implementare un algoritmo che determini i termini delle somme di dispari che rappresentano un numero naturale?

A disposizione, naturalmente, avremo il nostro numero naturale cubico:

$$4^3 = 64 = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots$$

Cosa sappiamo su questa sommatoria di termini?

Osservazioni per l’algoritmo

Dall’intuizione di Nicomaco, abbiamo scoperto che possiamo interpretare un numero n cubo come somma di numeri naturali successivi dispari.

Quindi ci sono alcune considerazioni importanti:

1) Se è possibile determinare l'ultimo termine della somma, allora sono noti tutti i termini della somma(perchè sappiamo che sono successivi).

2) L'ultimo termine della somma è sicuramente un numero dispari il cui ordine è dato dall'ennesimo numero triangolare. Ciò vuol dire che, per esempio, nella scomposizione 2^3 = 3 + 5, il 5 è il terzo numero dispari, e il suo ordine (terzo) è uguale al numero triangolare 3 che è il secondo numero triangolare.
Insomma, la base del cubo mi fornisce l'indicazione sull'ordine di un numero triangolare, e il valore di quest'ultimo mi fornisce il posto occupato dal numero dispari cercato nella successione dei numeri dispari.
3) La base del cubo ci fornisce anche quanti sono i valori della sommatoria che formano quel numero

Esempio

Prendiamo un come esempio 3^3:

3^3 = 27

La base del cubo è 3: la base ci indica il grado dell'n-esimo numero triangolare

Qual'è il terzo numero triangolare? ...

Ora con questo numero possiamo dedurre l'n-esimo numero dispari della sommatoria:

Qual'è il …. numero dispari?

Sapendo anche quanti sono i termini totali della sommatoria, ora abbiamo tutto a disposizione:

3^3 = … + … + ...

Implementiamo l’algoritmo

Per creare l’algoritmo, possiamo seguire i seguenti passi:

1. Si calcola l’n-esimo numero triangolare con la formula:

   $$n(n+1)/_2$$

2. Sapendo che un numero “k” dispari è dato dalla formula **2k-1**, possiamo determinare l’**ultimo termine** della sommatoria sostituendo “k” con l’n-esimo numero triangolare:

   $$2k-1 \rightarrow 2\left[n\frac{(n+1)}{2}\right]-1 = n^2+n-1$$

3. Rappresentando la sommatoria come:

   S = (x+1) + (x+3) + (x+5) + … + (x + 2n-1)

   L’ultimo termine è dato da $n^2+n-1 \; se \; solo \; se \; x = n^2-n$

Implementiamo l’algoritmo…

Esercitazione in laboratorio

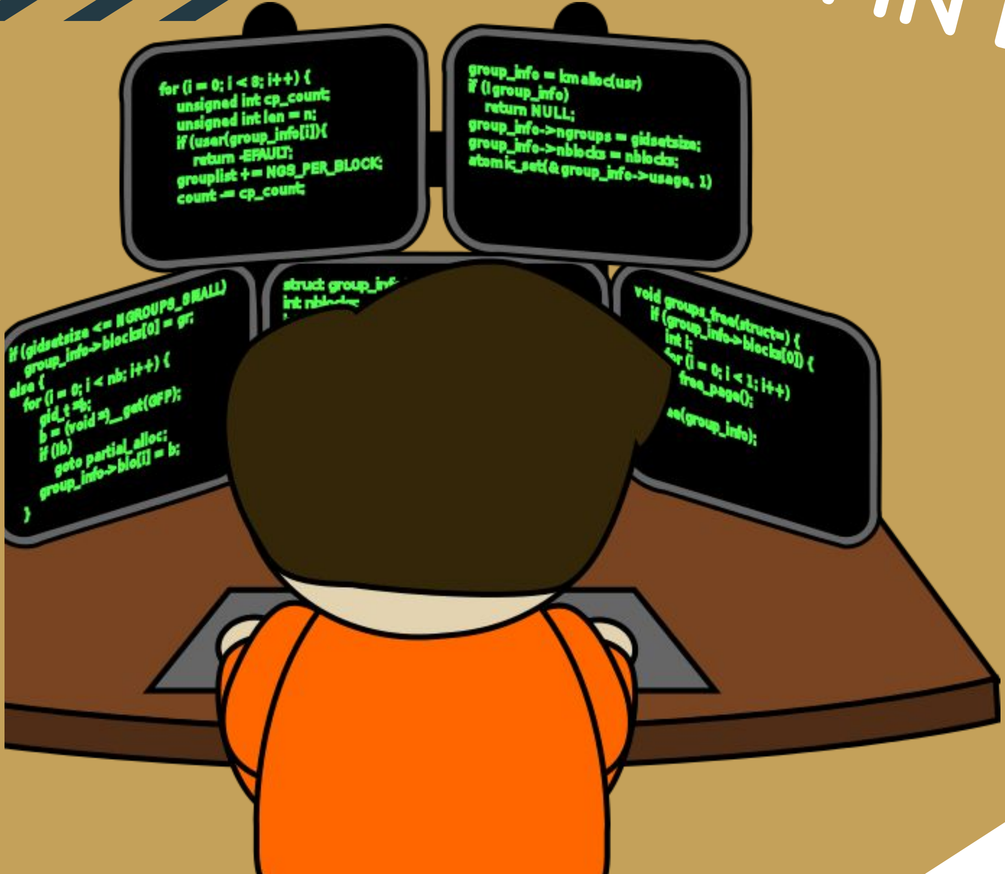
In questa esercitazione di laboratorio, dovrete implementare l’algoritmo discusso nella parte teorica.

1) **Scrivere uno pseudo-codice del possibile algoritmo**

2) **Scrivere l’algoritmo in linguaggio C nel vostro editor di codice**

(Possono esserci diversi soluzioni!)

TUTTI IN LABORATORIO!



Esempio di possibile risoluzione del programma in C

```
#include <stdio.h>

int main()
{
    int n;
    int x;
    int i;
    int sequenza[500];
    int triangolari[500];

    printf("Digitare la base del cubo\n");
    scanf("%d", &n);
    printf("Calcolo dei termini dispari della sommatoria di %d al
cubo\n", n);
    printf(".....\n");

    for(i=1; i <=n; i++) {
        triangolari[i] = (i-1)*2 + 1;
        x = n * n - n;
    }
        for(i=1; i<=n; i++) {
            sequenza[triangolari[i]] = triangolari[i]+x;
        }
        printf("il cubo di %d Ã¨ la somma di:", n);
        for(i=1;i<=n;i++){
    printf("%d+",sequenza[triangolari[i]]);
         }


}
```

E QUI È TUTTO!

GRAZIE PER L'ATTENZIONE