13) Sea A, una matriz cuadrada, que cumple que: $A^3 = 0$ (0 es la matriz nula de la misma dimensión que A). Demostrar que $I + A + A^2$ es la matriz inversa de $I - A$. (I es la matriz identidad de la misma dimensión que A)

Demostración:

Para que $I + A + A^2$ sea la inversa de $I - A$, hay que mostrar que:

$$(I - A)(I + A + A^2) = (I + A + A^2)(I - A) = I$$

Realizamos el primer producto usando la propiedad distributiva, teniendo en cuenta que debemos respetar el orden en que se multiplican las matrices:

$$(I - A)(I + A + A^2) = I^2 + IA + IA^2 - AI - A^2 - A^3 = I + A + A^2 - A - A^2 - A^3 = I$$

Como I es elemento neutro en la multiplicación de matrices cuadradas, se cumple que: $I^2 = I$, $IA = A$, $AI = A$, $IA^2 = A^2$

Como $A - A = 0_{nxn}$, $A^2 - A^2 = 0_{nxn}$, y por hipótesis $A^3 = 0_{nxn}$ y 0_{nxn} es el elemento neutro en la suma de matrices, se cumple que: $I + 0_{nxn} + 0_{nxn} + 0_{nxn} = I$

Por otro lado realizamos el segundo producto usando la propiedad distributiva, teniendoen cuenta que debemos respetar el orden en que se multiplican las matrices:

$$(I + A + A^2)(I - A) = I^2 - IA + AI - A^2 + A^2I - A^3 = I - A + A - A^2 + A^2 - A^3 = I$$

Como I es elemento neutro en la multiplicación de matrices cuadradas, se cumple que: $I^2 = I$, $IA = A$, $AI = A$, $A^2I = A^2$

Como $-A + A = 0_{nxn}$, $-A^2 + A^2 = 0_{nxn}$, y por hipótesis $A^3 = 0_{nxn}$ y 0_{nxn} es el elemento neutro en la suma de matrices, se cumple que: $I + 0_{nxn} + 0_{nxn} + 0_{nxn} = I$

Esto nos dice que la matriz $I + A + A^2$ multiplicada a derecha y a izquierda por la matriz $I - A$ da como resultado la matriz Identidad, por lo tanto $I + A + A^2$ es la inversa de $I - A$.

$$\boxed{(I - A)^{-1} = I + A + A^2}$$