

Capítulo 7. Sistemas y determinantes

6) Determinar qué relación debe haber entre a , b y c para que este sistema sea compatible:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + 7z = c \end{cases}$$

Vamos a pasar el sistema a su forma matricial y le haremos operaciones elementales para llegar a la matriz escalonada y reducida por filas equivalente con la matriz de los coeficientes para analizar los rangos de esa matriz y de la matriz ampliada del sistema.

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 2 & 6 & -11 & b \\ 1 & -2 & 7 & c \end{pmatrix} \rightarrow (F_2 \leftarrow F_2 - 2F_1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b - 2a \\ 1 & -2 & 7 & c \end{pmatrix} \rightarrow (F_3 \leftarrow F_3 - F_1) \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 2 & -5 & b - 2a \\ 0 & -4 & 10 & c - a \end{pmatrix} \rightarrow (F_2 \leftarrow F_2 \cdot \frac{1}{2}) \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & a \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{b - 2a}{2} \\ 0 & -4 & 10 & c - a \end{pmatrix} \rightarrow (F_1 \leftarrow F_1 - 2F_2) \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a - b + 2a \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{b - 2a}{2} \\ 0 & -4 & 10 & c - a \end{pmatrix} \rightarrow (F_3 \leftarrow F_3 + 4F_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & a - b + 2a \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & \frac{b - 2a}{2} \\ 0 & 0 & 0 & c - a - 2b + 4a \end{pmatrix}}_{A_R} \end{aligned}$$

Llegamos a la matriz escalonada y reducida por filas equivalente con A .

Ahora tenemos que analizar los rangos para poder responder.

Recordemos que **un sistema es compatible sólo si el rango de A es igual al rango de la matriz ampliada del sistema.**

Como la matriz escalonada y reducida por filas equivalente con A tiene dos filas no nulas su rango es 2.

Cuando vemos la matriz ampliada no podemos dar el valor del rango porque no conocemos los valores de a , b y c . El rango de la matriz ampliada dependerá de esos valores.

Para que la matriz ampliada también tenga rango 2 necesitamos que el elemento que está en la fila 3, columna 4 sea 0: $c - a - 2b + 4a = 0$

Entonces la relación que debe haber entre los valores a , b y c para que el sistema sea compatible es: $c - 2b + 3a = 0$.