Capítulo 6. Matrices

16) Dada $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}$

a) Hallar k para que sea $A^2 = \mathbf{0}_{2x2}$

b) Hallado k, encontrar el rango de A.

a) Primero hallamos la matriz A^2 :

$$A^2 = A.A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.2 + (-4).1 & 2(-4) + (-4)k \\ 1.2 + k.1 & 1(-4) + k^2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -8 - 4k \\ 2 + k & -4 + k^2 \end{pmatrix}$$

Para que esa matriz sea la matriz nula 2x2, todos sus elementos deben ser 0, entonces:

$$-8 - 4k = 0$$

$$2 + k = 0$$

$$-4 + k^2 = 0$$

Tenemos que encontrar valores de k que cumplen todas las ecuaciones a la vez, despejando de la primera:

$-8 - 4k = 0$ entonces $-4k = 8$ entonces $k = -2$

Como ese es el único valor de k que cumple la primer igualdad, analizamos si cumple también las otras dos:

$$2 - (-2) = 0$$

$$-4 + (-2)^2 = 0$$

Como ambas se cumplen $\boxed{k = -2}$

b) Para hallar el rango realizamos operaciones elementales para llegar a la matriz escalonada y reducida por filas equivalente con A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \; f_1 \leftrightarrow f_2 \; \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} f_2 \leftarrow f_2 - 2f_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_R$$

La matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la escalonada y reducida por filas equivalente con A, como tiene una sola fila no nula su rango es 1.