Capítulo 6. Matrices

5) Dadas $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ establecer si es cierto que:

a) (A+B)(A - B) = A^2 - B^2

Realizamos las operaciones:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+1 \\ -2-1 & 0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 3-1 \\ -2+1 & 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r|l} & \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = A - B \\ \hline A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 3.(-1) + 4(-1) & 3.2 + 4(-2) \\ (-3)(-1) + 2(-1) & (-3)2 + 2(-2) \end{pmatrix} = (A+B)(A-B) \end{array}$$

Entonces: $\boxed{(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}}$

$$\begin{array}{r|l} & \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = A \\ \hline A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.1 + 3(-2) & 1.3 + 3.0 \\ (-2)1 + 0(-2) & (-2)3 + 0.0 \end{pmatrix} = A^2 \end{array}$$

Entonces: $A^2 = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{r|l} & \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = B \\ \hline B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2.2 + 1(-1) & 2.1 + 1.2 \\ (-1)2 + 2(-1) & (-1)1 + 2.2 \end{pmatrix} = B^2 \end{array}$$

Entonces: $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$

Observación: notar que elevar una matriz al cuadrado no es elevar cada elemento al cuadrado porque si fuera así no habría números negativos. Elevar una matriz al cuadrado es multiplicarla por sí misma

Ahora hacemos: $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Entonces $\boxed{A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}}$

Por lo tanto tenemos que:

$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}$ y $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

Y no se cumple la igualdad.

¿Por qué no son iguales?

Sabemos que si x e y son números reales: $(x+y)(x-y) = x^2 - y^2$

Es la propiedad que llamamos *diferencia de cuadrados*

Sin embargo en las matrices esta no es una propiedad.

Notemos que:

$$(A+B)(A-B) = AA - AB + BA - BB$$

Y acá vemos que si AB fuera igual a BA, $-AB + BA$ daría como resultado la matriz nula, sin embargo la conmutatividad en el producto de matrices no se cumple, esa es la razón por la que tampoco se cumple la propiedad de la diferencia de cuadrados.