Ejercicio 24 : Demostrar que si $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ y B $\in \mathbb{R}^{nxn}$ y $A.B = 0_{nxn}$ y B tiene inversa entonces $A = 0_{nxn}$

Queremos ver que $A = 0_{nxn}$ donde 0_{nxn} es la matriz nula de n filas y n columnas. Como por hipótesis B tiene inversa, llamemosla B^{-1}, podemos aplicarla a derecha en la igualdad $A.B = 0_{nxn}$, es decir:

$$A.B.B^{-1} = 0_{nxn}.B^{-1}$$

aplicando propiedad asociativa tenemos que

$$A.(B.B^{-1}) = 0_{nxn}.B^{-1}$$

Como $0_{nxn}.B^{-1} = 0_{nxn}$ y por definición de inversa $B.B^{-1} = I_{nxn}$,

$$A.I_{nxn} = 0_{nxn}$$

y como $A.I_{nxn} = A$ tenemos $A = 0_{nxn}$ que es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 25 : Sean las matrices A, B y C de nxn, tales que B tiene inversa. Indique si la siguiente afirmación es verdadera o falsa, justificando su respuesta: Si $C.B = A$, entonces $C = B^{-1}.A$

Veamos con un contraejemplo que la afirmación es FALSA.

Sean $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ por lo que $C.B = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = A$

Buscamos la inversa de la matriz B usando el método:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow^{F2+(-3)F1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \rightarrow^{-\frac{1}{2}F2}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \rightarrow^{F1+(-2)F2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

Por lo tanto $B^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Luego, $B^{-1}.A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -6 & -7 \end{pmatrix} \neq C.$

Ejercicio 26: Demuestre que si una matriz de $2x2$ tiene dos filas iguales entonces no tiene inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ la matriz de $2x2$ como el dato es que tiene dos filas iguales,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix}$$

Intentemos calcular la inversa usando el método:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & 0 & 1 \end{array}\right) \to^{F2+(-1)F1} \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ a_{11}-a_{11} & a_{12}-a_{12} & 0-1 & 1-0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} a_{11} & a_{12} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

como del lado izquierdo de la matriz ampliada quedó una fila nula, no vamos a poder conseguir la matriz identidad 2x2, por lo que la matriz A no tiene inversa.

Ejercicio 27: Sean A,B y C matrices cuadradas de la misma dimensión. Demuestre que si A tiene inversa y se cumple que $A.B = A.C$ entonces $B = C$

Partimos de la igualdad $A.B = A.C$. Como A admite inversa A^{-1}, podemos aplicarla a izquierda y obtenemos

$$A^{-1}A.B = A^{-1}A.C$$

por propiedad asociativa:

$$(A^{-1}A).B = (A^{-1}A).C$$

como $A.A^{-1} = Id$,

$$(Id).B = (Id).C$$

y por propiedad de la matriz identidad tenemos que $B = C$ como queriamos demostrar.