Curs 9 III.8) Probleme de transport neechilibrate (P.T.N)

Dacă avem (**) $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$ (oferta $\neq$ cerere) vom spune că avem o Problemă de Transport Ne-echilibrată (P.T.N). Pentru a putea rezolva o astfel de problemă trebuie mai întâi să o transformăm într-o P.T.E. (să o echilibrăm). Acest lucru se face prin introducerea unui nou depozit fictiv ($\overset{not}{=} D^{f}_{m+1}$) respectiv a unui nou centru de desfacere fictiv ($\overset{not}{=} C^{f}_{n+1}$) având costurile de transport aferente egale cu zero.

Vom avea deci următoarele două (posibile) situații:

a) $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ (oferta < cererea)

În acest caz vom adăuga un nou depozit fictiv ($\overset{not}{=} D^{f}_{m+1}$) care va conține cantitatea (fictivă) de marfă ($\overset{not}{=} a^{f}_{m+1}$) astfel ca noua problemă să fie echilibrată ($\sum_{i=1}^{m+1} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$) adică:

$$(9.1)\quad a^{f}_{m+1} \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$$

și cu costurile aferente acestui depozit fictiv egale cu zero ($c_{m+1,j}=0$; $j=\overline{1,n}$)

Ex a) PTN $\xrightarrow{+D^{f}_{3}}$ b) PTE

a) PTN

	C_1	C_2	C_3	
D_1	3	2	1	25
D_2	1	4	2	25
	30	20	10	

$\sum_{i=1}^{2} a_i = 25+25 = 50 < \sum_{j=1}^{3} b_j = 30+20+10 = 60$

b) PTE

	C_1	C_2	C_3	
D_1	3	2	1	25
D_2	1	4	2	25
D^{f}_{3}	0	0	0	10
	30	20	10	

$\sum_{i=1}^{3} a_i = 25+25+10 = \sum_{j=1}^{3} b_j = 30+20+10 = 60$

b) $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ (oferta > cererea)

În acest caz vom introduce un nou centru de desfacere fictiv ($\overset{not}{=} C^{f}_{n+1}$) care va solicita cantitatea (fictivă) de marfă ($\overset{not}{=} b^{f}_{n+1}$) a.î. noua problemă să fie echilibrată ($\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} b_j$), adică:

$$(9.2)\quad b^{f}_{n+1} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

iar costurile aferente acestui nou centru de desfacere fictiv vor fi toate egale cu 0 ($c_{i,n+1}=0$; $i=\overline{1,m}$)

Ex: b) PTN $\xrightarrow{+\,C_4^f}$ b') PTE

	C_1	C_2	C_3	
D_1	3	1	4	60
D_2	2	5	1	30
	20	25	30	

$\Downarrow$

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 60+30 = 90 > \sum_{j=1}^{3} b_j = 20+25+30 = 75$$

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3	1	4	0	60
D_2	2	5	1	0	30
	20	25	30	15	

$\Downarrow$

$$\sum_{i=1}^{2} a_i = 90 = \sum_{j=1}^{4} b_j = 75+15$$

Theoremă Fie o PTN și PTE corespunzătoare (atașată) acesteia. Atunci soluția (-ile) optimă a PTN se obține din soluția (-ile) optimă(e) a PTE prin eliminarea componentelor corespunzătoare depozitului (fictiv) sau centrului de desfacere (fictiv) introdus pentru a echilibra problema.

$$X^{PTE}_{optimă} \Longrightarrow X^{PTN}_{optimă}$$

prin eliminarea componentelor corespunzătoare < depozitului fictiv / centrului fictiv.

Obs: deci ptr. a rezolva o P.T.N procedăm conform schemei de mai jos

$$PTN \underset{\text{echilibrăm problema}}{\longrightarrow} PTE \xrightarrow[\text{aplicăm alg. de rezolvare a PTE}]{} X^{PTE}_{optim} \xrightarrow[\text{eliminăm componentele depozitului/centrului fictiv}]{} X^{PTN}_{optim}$$

III.9) Metoda perturbării

În etapele aplicării algoritmului de rezolvare a unei PTE putem obține S.B.A degenerate (poate fi chiar soluția inițială $\overline{X}_0$ sau o soluție intermediară $\overline{X}_k$) {$\overline{X}$ este SBA degenerată $\iff$ are cel puțin o componentă bazică $=0$ $\iff$ $(\exists)$ mai puțin de $m+n-1$ componente „>0"}. În această situație este foarte posibil să apară așanumitul "fenomen de ciclaj":

$$\overline{X}_0 \to \overline{X}_1 \to \overline{X}_2 \to \dots\dots \to \overline{X}_k \to \overline{X}_{k+1} \to \dots \to \overline{X}_s \not\to \dots\dots \to \overline{X}_{optim}$$

ciclaj

Pentru a evita apariția acestui fenomen de ciclaj, vom aplica metoda perturbării care constă în aplicarea a următorilor 4 pași foarte simpli:

1) vom adăuga (aduna) la fiecare cantitate „a_i, $i=\overline{1,m}$" aflată în depozitul „D_i" o nouă cantitate (f.f. mică $\simeq 0$) notată cu „$\varepsilon>0$", adică vom "perturba" problema:

$$(3.3)\quad a_i \longrightarrow a_i+\varepsilon \ ; \ i=\overline{1,m}$$

(obs: acum problema s-a "dezechilibrat")

2) vom "re-echilibra" problema, adăugând la cererea „b_n" a ultimului centru de desfacere „C_n" cantitatea „$m\cdot\varepsilon$", adică:

$$(3.4)\quad b_n \longrightarrow b_n+m\varepsilon$$

3) rezolvăm PTE perturbată obținută cu alg. de rezolvare a P.T.E. și obținem soluția optimă

4) facem $\varepsilon=0$ în soluția optimă a PTE perturbate și vom obține soluția optimă a problemei neperturbate, adică

$$\overline{X}^{perturbată}_{optimă} \xrightarrow{\varepsilon=0} \overline{X}^{inițială}_{optimă}$$

P.T.E inițială

	C_1	C_2	...	C_n	
D_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	a_1
D_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
D_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	a_m
	b_1	b_2		b_n	

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad (P.T.E)$$

P.T.E. perturbată

	C_1	C_2	...	C_n	
D_1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	$a_1+\varepsilon$
D_2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	$a_2+\varepsilon$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
D_m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	$a_m+\varepsilon$
	b_1	b_2		$b_n+m\varepsilon$	

$$\sum_{i=1}^{m} (a_i+\varepsilon) = \left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) + m\varepsilon \quad (P.T.E.)$$

IV) Elemente de analiză matematică pe spațiul (liniar / afin) $\mathbb{R}^n$

IV.1) Noțiuni introductive: vecinătăți și șiruri în $\mathbb{R}^n$

Fie $\mathbb{R}^n \stackrel{def}{=} \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\dots\times\mathbb{R}}_{\text{"n" ori}} = \{X=(x_1,x_2,\dots,x_n) \,/\, x_i\in\mathbb{R};\ i=\overline{1,n}\}$ → vector "linie"

Fiecărui element (vector) din $\mathbb{R}^n$ îi vom asocia un "punct" dintr-un spațiu (afin/punctual) n-dimensional, adică:

$$\begin{cases} X=\underbrace{(x_1,x_2,\dots,x_n)}_{\text{componentele lui „}X\text{”}} \longrightarrow P\underbrace{(x_1,x_2,\dots,x_n)}_{\text{coordonatele punctului „}P\text{”}} \\ Y=(y_1,y_2,\dots,y_n) \longrightarrow Q(y_1,y_2,\dots,y_n)\end{cases}$$

Def 1: Numim distanță (euclidiană) între punctele $X,Y\in\mathbb{R}^n$, numărul real nenegativ (≥ 0):

$$(9.5)\quad d(X,Y) \stackrel{def}{=} \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2} \equiv d(P,Q) \left\{= \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\right\}$$

Ex: Dacă avem punctele $\begin{cases}P(2,-1,0,3,1)\\Q(-1,1,2,2,-3)\end{cases}\in\mathbb{R}^5$, atunci "distanța" dintre ele este egală cu:

$$d(P,Q) \stackrel{(9.5)}{=} \sqrt{(2+1)^2+(-1-1)^2+(0-2)^2+(3-2)^2+(1+3)^2} = \sqrt{3^2+2^2+2^2+5^2+4^2} = \sqrt{58} \cong 7{,}62$$

Obs: noțiunea de distanță se definește pe un spațiu afin (punctual), înzestrat cu noțiunea de "produs scalar (de vectori)" astfel: $\begin{cases} d: V\times V\longrightarrow\mathbb{R}_+ \\ d(u,v)=\alpha\geq 0\end{cases}$ care verifică următoarele 3 condiții

$$\begin{cases} i)\ d(u,v)=0 \iff u=v \\ ii)\ d(u,v)=d(v,u) \\ iii)\ d(u,w)\leq d(u,v)+d(v,w) \end{cases} ;\ (\forall)\,u,v,w\in V$$

iii) → inegalitatea triunghiului

Interpretare geometrică

a) $n=1 \iff \mathbb{R}^n\equiv\mathbb{R}^1$

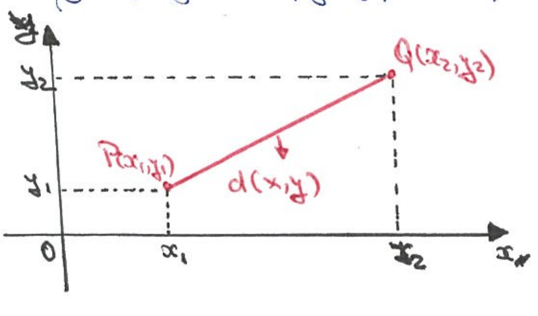
Fie $x,y\in\mathbb{R} \stackrel{(9.5)}{\Longrightarrow} d(x,y)=\sqrt{(x-y)^2}=|x-y|$ (*)

Obs: $\sqrt{a^2}=|a|$

$d(x,y)=\ell([PQ])$ → lungimea segmentului [PQ]

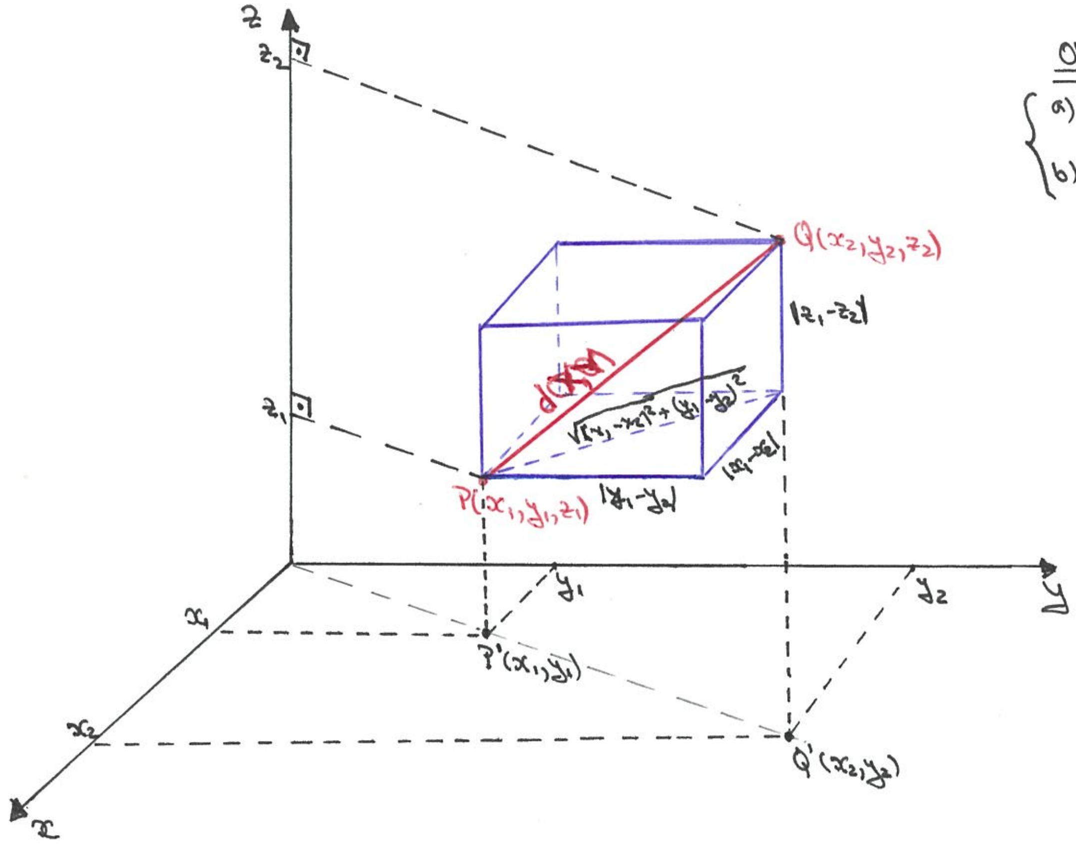
b) $n=2 \iff \mathbb{R}^n\equiv\mathbb{R}^2$

Fie $\begin{cases} x=(x_1,x_2)\to P(x_1,x_2)\\ y=(y_1,y_2)\to Q(y_1,y_2)\end{cases}\in\mathbb{R}^2 \stackrel{(9.5)}{\Longrightarrow} d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\ \left(=\ell([PQ])\right)$ (**)



c) $\underline{n=3} \Leftrightarrow \underline{\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^3}$

Fie $\begin{cases} X=(x_1,y_1,z_1) \to P(x_1,y_1,z_1) \\ Y=(x_2,y_2,z_2) \to Q(x_2,y_2,z_2) \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \Bigg| \Rightarrow d(X,Y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_3)^2}$ (**) $\{= \ell([PQ])\}$



Obs:

$\begin{cases} a) \ |x_i-y_i|^2=(x_i-y_i)^2 \ ; \ i=\overline{1,3} \\ b) \ d=\sqrt{a^2+b^2+c^2} \to \text{lungimea diagonalei într-un paralelipiped dreptunghic de lungimile laturilor: } a,b,c. \end{cases}$

Obs:

i) în cele 3 cazuri de mai sus se poate observa că definiția "algebrică" a distanței (9.5) coincide cu definiția "geometrică" a distanței și anume: "lungimea segmentului de dreaptă determinat de punctele P și Q";

ii) de aceea putem spune că formula algebrică a distanței (9.5) ne dă lungimea segmentului "n-dimensional" [P,Q]!!, adică:

$$(9.5') \quad \underline{d(X,Y) = \ell([PQ])} \quad ; \ [PQ] \text{ - "segment" n-dimensional în } \mathbb{R}^n.$$

Def 2: Numim **norma** elementului (vectorului) $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, nr. real nenegativ ($\geq 0$) dat de relația:

$$(9.6)\quad \|x\| \overset{def}{=} \sqrt{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}\quad ;\ (\forall)\, x=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$$

Obs:

i) $\|x\| = d(x,0_n)$ cu $0_n=(0,0,\dots,0)\in\mathbb{R}^n$

ii) Fie $\begin{cases} x=(x_1,x_2,\dots,x_n) \\ y=(y_1,y_2,\dots,y_n)\end{cases}\in\mathbb{R}^n \implies \underbrace{x-y}_{\overset{not}{=} z} = (\underbrace{x_1-y_1}_{\overset{not}{=} z_1}, \underbrace{x_2-y_2}_{\overset{not}{=} z_2},\dots,\underbrace{x_n-y_n}_{\overset{not}{=} z_n})$

Atunci, cf. (11.10):

$$(9.7)\quad \|x-y\| = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\dots+(x_n-y_n)^2} = d(x,y)$$

iii) cf. (9.7), avem: $\begin{cases} a)\ \|x-y\| = \|y-x\| \\ b)\ \|x-y\| = 0 \iff x=y \\ c)\ \|x-z\| \leq \|x-y\|+\|y-z\| \end{cases}\ ;\ (\forall)\, x,y,z\in\mathbb{R}^n$

Def 3: Numim **sferă deschisă** de centru $x_0\in\mathbb{R}^n$ și rază „$r>0$", mulțimea:

$$(9.8)\quad S(x_0,r) = \{x\in\mathbb{R}^n \,/\, d(x_0,x)\equiv\|x-x_0\|<r\}\subset\mathbb{R}^n$$

interpretare geometrică

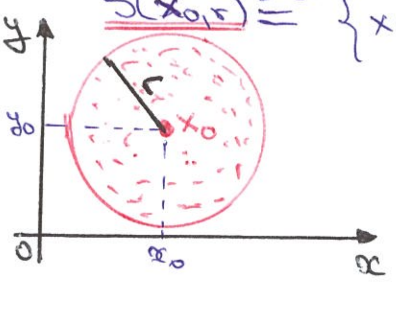
1) $n=1 \iff \mathbb{R}^n\equiv\mathbb{R}$. Fie $x_0\in\mathbb{R}$ și $r>0$. Atunci:

$$S(x_0,r) \overset{(9.8)}{=} \{x\in\mathbb{R} \,/\, d(x_0,x)\equiv|x-x_0|<r\} = (x_0-r,\, x_0+r)$$

sfera "1-dimensională" ≡ segment deschis, centrat în x_0 de lungime „$2r$"

2) $n=2 \iff \mathbb{R}^n\equiv\mathbb{R}^2$; Fie $x_0=(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ și $r>0$. Atunci:

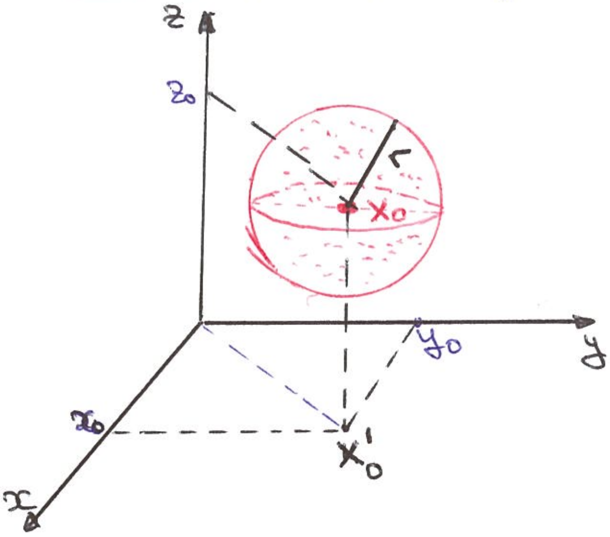
$$S(x_0,r) \overset{(9.8)}{=} \{x=(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, d(x,x_0)\equiv\|x-x_0\|<r\} \equiv \mathrm{int}\, C(x_0,r)$$



→ sfera "2-dimensională" ≡ interiorul cercului de centru x_0 și rază „r"

3) $n=3 \Leftrightarrow \mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^3$ Fie $X_0=(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ și $r>0$. Avem:

$$S(X_0,r)=\{X=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,/\, d(X,X_0)\equiv\|X-X_0\|<r\} \equiv \text{int. } S(X_0,r)$$



→ sfera deschisă "3-dimensională" ≡ interiorul sferei cu centrul în „X_0" și raza „r"

Def 4 Numim vecinătate (deschisă) a "punctului" $X_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in\mathbb{R}^n$, o mulțime $V(X_0)\subset\mathbb{R}^n$ cu proprietatea că există o sferă deschisă centrată în „X_0" inclusă în aceasta.

{ $V(X_0)$ → vecinătate a lui $X_0\in\mathbb{R}^n \Leftrightarrow (\exists)\, r>0$ a.î. $S(X_0,r)\subset V(X_0)$ }

$V(X_0)$ (include o sferă deschisă cu centrul în „X_0")

Def 5: Numim șir de elemente din $\mathbb{R}^k$, o funcție $\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^k \\ f(n)=X_n\in\mathbb{R}^k \end{cases}$

Notăm cu: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}: X_0, X_1, X_2, \dots, \underset{\downarrow}{X_n}, X_{n+1}, \dots \xrightarrow[\text{în } \mathbb{R}^k]{?} \overline{X}_0$

termenul general al șirului

unde: $\left\{\begin{array}{l} X_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\dots,x_k^{(0)}) \\ X_1=(x_1^{(1)},x_2^{(1)},\dots,x_k^{(1)}) \\ \dots\dots\dots \\ X_n=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\dots,x_k^{(n)}) \\ \dots\dots\dots \end{array}\right. \in\mathbb{R}^k$

Ex 1) $X_n=\Big(\underbrace{\frac{1}{n^2+1}}_{=x_1^{(n)}},\ \underbrace{\sqrt{2n+1}}_{=x_2^{(n)}}\Big)\in\mathbb{R}^2$ 2) $X_n\equiv(x_1^n,x_2^n,x_3^n)=\Big(\underbrace{\frac{2n+1}{\sqrt{n^3+1}}}_{x_1^{(n)}},\ \underbrace{\ln(n+1)}_{x_2^{(n)}},\ \underbrace{ne^{2n+1}}_{x_3^{(n)}}\Big)\in\mathbb{R}^3$

Def 6: Fie șirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^k$. Spunem că șirul converge la $\overline{X}_0 \in \mathbb{R}^k$, dacă

(9.9) $X_n \xrightarrow[\mathbb{R}^k]{} \overline{X}_0 \iff (\forall)\varepsilon>0, (\exists) n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ a.î. $\underbrace{\|X_n - \overline{X}_0\|}_{=d(X_n,\overline{X}_0)} < \varepsilon, (\forall) n > n_\varepsilon$

not: $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \overline{X}_0 \in \mathbb{R}^k$

Teoremă (de caracterizare a convergenței șirurilor din $\mathbb{R}^k$)

Fie șirul $(X_n)_{n\in\mathbb{N}} \equiv (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \dots, x_k^{(n)}) \subset \mathbb{R}^k$ și $\overline{X}_0 = (\overline{x}_1^{(0)}, \overline{x}_2^{(0)}, \dots, \overline{x}_k^{(0)}) \in \mathbb{R}^k$. Atunci:

$$X_n \xrightarrow[\mathbb{R}^k]{} \overline{X}_0 \iff (11.14) \begin{cases} x_1^{(n)} \xrightarrow[\mathbb{R}]{} \overline{x}_1^{(0)} \\ x_2^{(n)} \xrightarrow[\mathbb{R}]{} \overline{x}_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_k^{(n)} \xrightarrow[\mathbb{R}]{} \overline{x}_k^{(0)} \end{cases}$$

(convergența unui șir din $\mathbb{R}^k$ $\iff$ convergența a „k" șiruri reale)

Ex 1) $X_n = \left(\frac{3n}{n^2+1}, \frac{2n+1}{3n+2}\right) \xrightarrow[\mathbb{R}^2]{} \overline{X}_0 = \left(0, \frac{2}{3}\right)$ (C)

2) $Y_n = \left(\frac{(-1)^n}{n}, \frac{\sqrt{2n^2+1}}{3n+5}, \frac{n^2}{2n^2+3n+4}\right) \xrightarrow[\mathbb{R}^3]{} \overline{X}_0 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{2}\right)$ (C)

3) $Z_n = \left(\underbrace{\frac{n+1}{n+2}}_{\downarrow\ 1}, \underbrace{\sqrt{n}}_{\downarrow\ +\infty}, \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\downarrow\ e}\right) \xrightarrow[\mathbb{R}^3]{} ?$ (D) $\left(Z_n \to (1, \infty, e) \to \text{limita nu este „finită"}\right)$