

# Este posibil să studiem economie, fără matematică?

- câteva probleme practice economice modelate matematic –

Știați că:

- În anul 1968, Sveriges Riksbank (Banca centrală a Suediei) introduce “*The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences (Premiul Nobel pentru Economie)*” în memoria lui Alfred Nobel;
- Primul Premiu Nobel pentru Economie a fost câștigat de Ragnar Frisch (Norway – **economist**) and Jan Tinbergen (Netherlands – **fizician**) in 1969;
- În cei 45 de ani dintre 1969 and 2013, au fost 73 de laureați din care: **33 dintre aceștia erau licențiați în Matematică** (matematică-fizică, mecanică, inginerie, etc.) **și doar 29 în Economie** (finanțe, comerț, economie politică, etc.);
- Din acești 73 de laureați, 47 aveau M.Sc. sau PhD în ambele domenii: **Mathematică** și **Economie**.
- Nu există Premiul Nobel pentru Matematică!!!

În teoria economică, cât și în calculele corespunzătoare aplicațiilor economice, utilizăm o mulțime de noțiuni/teorii/algoritmi matematici, cum ar fi de exemplu:

- **Algebră liniară (vectorială);**
- **Cercetări operaționale;**
- **Elemente de analiză matematică n-dimensională;**
- Teoria jocurilor;
- Teoria haosului;
- Probabilități și statistică matematică;
- Ecuații diferențiale;
- Teoria grafurilor și rețelelor, etc.

Vom prezenta în continuare (foarte pe scurt) trei modele matematice, pentru trei probleme economice care apar foarte frecvent în aplicații. Primele două se pot rezolva cu ajutorul elementelor de algebră liniară, pentru cea de a treia având nevoie de utilizarea noțiunilor de derivate parțiale/diferențială pentru funcții de  $n$ -variabile.

## 1.Algoritmul Simplex pentru rezolvarea problemelor de programare liniară (PPL)

**Exemplu:** O companie produce 3 tipuri de geți pentru laptop (normale, de lux și VIP) să le numim:  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , utilizând 5 tipuri de resurse:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_4$ ,  $M_5$  (piele, fermoare, material textil, capital și ore muncă) în cantitățile din tabelul de mai jos:

	$M_1$ (piele/m <sup>2</sup> )	$M_2$ (fermoare/buc.)	$M_3$ (material textil/m <sup>2</sup> )	$M_4$ (capital/Euro)	$M_5$ (ore de muncă/h)
$P_1$	0.85	4	1.25	32	4
$P_2$	1.10	6	1.30	38	6
$P_3$	1.55	5	0.55	52	7

Compania vinde fiecare din cele trei tipuri de geți cu următoarele prețuri: **46 Euro**, **55 Euro** și **72 Euro**.

*Câte geți de fiecare tip ar trebui să producă compania, pentru a avea profit maxim, știind că au la dispoziție: **450 m<sup>2</sup>** de piele, **1.500** de fermoare, **355 m<sup>2</sup>** de material textil, **14.500 Euro** capital inițial și **760 ore de muncă**?*

Notăm cu:  $x_1, x_2, x_3$  numărul de genți de fiecare tip care ar trebui produs.

**Modelul matematic (este o Problemă de Programare Liniară \_PPL):**

$$(1) \quad (\max) f(x_1, x_2, x_3) = 46x_1 + 55x_2 + 72x_3$$

$$(2) \quad \begin{cases} 0.85x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 \leq 450 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 1.500 \\ 1.25x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 \leq 355 \\ 32x_1 + 38x_2 + 52x_3 \leq 14.500 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 760 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Pentru a o putea rezolva trebuie să o aducem la **forma standard**:

$$(1) \quad (\max) f(x_1, x_2, x_3) = 46x_1 + 55x_2 + 72x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

$$(2) \quad \begin{cases} 0.85x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 + x_4 = 450 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 1.500 \\ 1.25x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 + x_6 = 355 \\ 32x_1 + 38x_2 + 52x_3 + x_7 = 14.500 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + x_8 = 760 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_8 \geq 0$$

- **Algoritmul (metoda) Simplex** este cel mai popular și utilizat în rezolvarea PPL. A fost descoperit de către matematicianul american **George Bernard Dantzig** (8.11.1914 – 13.05.2005), fiind publicat în revista *Journal Computing in Science and Engineering* (și considerat ca unul din primii 10 algoritmi descoperiți în secolul 20)
- **Algoritmul Simplex**, este un proces iterativ de determinare a unor soluții (de bază admisibile) ale unui sistem de ecuații liniare compatibil nedeterminat (cu o infinitate de soluții), “din ce în ce mai bune”, până o găsim pe cea optimă.

## 2.Probleme de transport

### **Exemplu:**

Firma Petromar Oil SRL operează 4 stații de benzină situate în: Copou ( $S_1$ ), Bucium ( $S_2$ ), Păcurari ( $S_3$ ) and Tătărași ( $S_4$ ) care vând în medie pe săptămână cantitățile: 15.000 l, 10.000 l, 25.000 l and 20.000 l de benzină. Firma se aprovizionează cu benzină de la 3 depozite:  $D_1$ ,  $D_2$ ,  $D_3$ , fiecare dintre ele putând furniza săptămânal următoarele cantități: 20.000 l, 40.000 l, 35.000 l. Costurile de transport de la depozite la stațiile de benzină pentru 1.000 l sunt date în tabelul de mai jos:

	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	S <sub>3</sub>	S <sub>4</sub>	
<b>D<sub>1</sub></b>	3 $x_{11}$	1 $x_{12}$	5 $x_{13}$	2 $x_{14}$	<b>20</b>
<b>D<sub>2</sub></b>	6 $x_{21}$	4 $x_{22}$	1 $x_{23}$	3 $x_{24}$	<b>40</b>
<b>D<sub>3</sub></b>	2 $x_{31}$	1 $x_{32}$	3 $x_{33}$	1 $x_{34}$	<b>35</b>
	<b>15</b>	<b>10</b>	<b>25</b>	<b>20</b>	

### Model mathematic:

$$(1) (\min) f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34}) = 3x_{11} + x_{12} + 5x_{13} + x_{14} + 6x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 3x_{33} + x_{34}$$

$$(2) \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 35 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20 \end{cases}$$

$$(3) x_{11}, x_{12}, \dots, x_{34} \geq 0$$

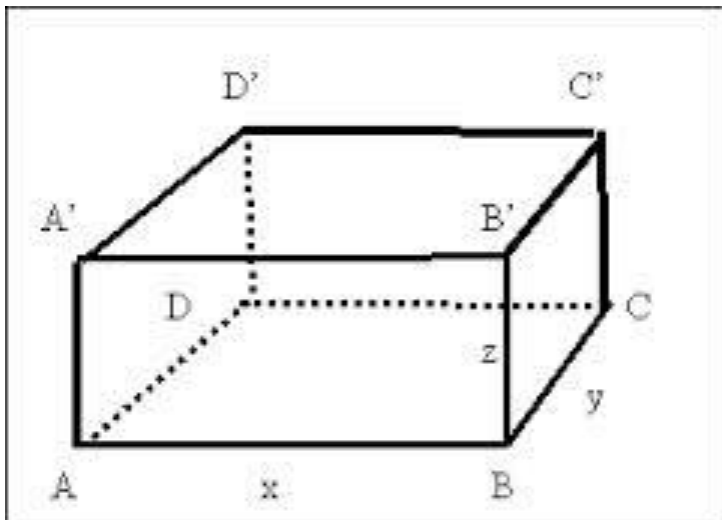
- Se observă că o problemă de transport este de fapt un caz particular de PPL, deci am putea rezolva problema cu ajutorul algoritmului SIMPLEX.
- Totuși, în aplicațiile practice reale, numărul depozitelor este de ordinul zecilor sau sutelor, iar cel al centrelor de desfacere (magazine) de ordinul sutelor sau chiar al miilor!!! Pentru astfel de probleme chiar și algoritmul SIMPLEX este inefficient, așa că a fost “îmbunătățit” obținându-se un nou algoritm de rezolvare a PT.

### **3. Determinarea punctelor de extrem local (condiționate/necondiționate) pentru funcții de $n$ -variabile**

#### **Aplicație economică:**

*“Datorită deselor întreruperi în furnizarea apei potabile, societatea S.C. ANTIBIOTICE S.A., decide construcția unui bazin descoperit, de forma unui paralelipiped dreptunghic, cu capacitatea (volumul) de  $1.000 \text{ m}^3$ . Cunoscând că prețul (fix) de construcție este de  $500 \text{ Euro/m}^2$ , să se determine costul total (minim) de construcție al bazinului.”*

### Model matematic:



$$A_{totala} = xy + 2xz + 2yz$$

$$V = xyz = 1.000$$

$$C_{total} = 500 \cdot A_{totala} \text{ (Euro) - minim} \Leftrightarrow A_{totala} \text{ - minima}$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R}_+^{*3} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \\ f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz \end{cases} \quad (\text{minim})$$

$$xyz = 1.000 \Leftrightarrow g(x, y, z) = xyz - 1.000 = 0$$

Trebuie sa determinam x,y,z=? a.i. f sa fie minima!!!

Solutia optima este:

$$\begin{cases} x = y = 10\sqrt[3]{2} \text{ m} \\ z = 5\sqrt[3]{2} \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{totala}^{minima} = 300\sqrt[3]{4} \text{ m}^2 \cong 476 \text{ m}^2 \\ C_{total}^{minim} = 150.000\sqrt[3]{4} \text{ Euro} \cong 238.000 \text{ Euro} \end{cases}$$