2) Compania **Moldova Construct SA** se aprovizionează cu materiale de construcţii (nisip şi pietriş) pentru fundaţia drumurilor de la trei balastiere de pe râul Siret, care au o capacitate maximă de sortare zilnică de 240 tone, 120 tone şi respectiv 180 tone. Materialul de construcţii sortat este transportat cu autobasculante având capacitatea (maximă) de 12 tone către cele două şantiere de autostradă unde compania execută lucrări, respectiv Ungheni şi Tg. Neamţ. Necesarul zilnic de materiale de construcţie este de 180 de tone pentru şantierul din Ungheni respectiv de 300 de tone pentru cel de la Tg. Neamţ.

Costurile de transport de la cele trei balastiere către şantierul de la Ungheni sunt de: 200 lei, 250 lei respectiv 220 lei per autobasculantă, iar până la şantierul de la Tg. Neamţ sunt de 250 lei, 300 lei respectiv 320 lei per autobasculantă.

a) Desenaţi tabelul aferent acestei probleme de transport şi scrieţi modelul matematic (de tip PPL) ataşat acestuia. Explicaţi (pe scurt) notaţiile folosite şi relaţiile scrise.

b) Determinaţi planul optim de transport zilnic al companiei, aplicând algoritmul de rezolvare a PT. Puteţi folosi orice metodă doriţi pentru determinarea soluţiei iniţiale.

Atenţie: *puteţi folosi cele mai convenabile unităţi de măsură a cantităţilor de marfă respectiv a banilor pentru simplificarea scrierii şi rezolvării problemei!*

Rezolvare: Obs:

1) Avem o P.T (neechilibrată) cu 3 "depozite = balastiere" și 2 "centre de desfacere = șantiere de construcții";

2) Deoarece materialul de construcții se transportă cu autobasculantele (de max. 12 tone), unitatea de măsură a "mărfii" va fi autobasculanta → 1 unitate de marfă = 1 autobasculantă (=12t max.)

3) Pentru ușurința calculelor vom lua ca unitate monetară "1 sută lei" → 1 u.m = 100 lei.

a) Tabelul atașat P.T este:

	S_1	S_2	
B_1	$\boxed{2}$ x_{11}	$\boxed{2{,}5}$ x_{12}	20 (autobasculante)
B_2	$\boxed{2{,}5}$ x_{21}	$\boxed{3}$ x_{22}	10 (autobasculante)
B_3	$\boxed{2{,}2}$ x_{31}	$\boxed{3{,}2}$ x_{32}	15 (autobasculante)
	15	25	

(autobasculante)

Ex: $\begin{cases} B_3 = \text{balastiera trei} \rightarrow 180t : 12t/\text{bascul.} = 15 \text{ bascul.} \\ S_1 = \text{șantier Ungheni} \rightarrow 180t : 12t/\text{bascul.} = 15 \text{ bascul.} \end{cases}$

$c_{32} = 3{,}2 \text{ (u.m)} = 320$ lei

Deoarece oferta $\left(\sum_{i=1}^{3} a_i = 20+10+15 = 45\right) >$ cererea $\left(\sum_{j=1}^{2} b_j = 15+25 = 40\right)$, modelul matem. al P.T.N este:

(1) $(\min) f(x_{11}, \ldots, x_{32}) = 2x_{11} + 2{,}5x_{12} + 2{,}5x_{21} + 3x_{22} + 2{,}2x_{31} + 3{,}2x_{32}$ (în sute de lei)

(2) $\begin{cases} x_{11} + x_{12} \le 20 \\ x_{21} + x_{22} \le 10 \\ x_{31} + x_{32} \le 15 \end{cases}$ → avem mai multă "marfă" decât este nevoie, o parte va rămâne în "depozite".

$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 25 \end{cases}$ → avem suficientă "marfă" să onorăm toată cererea "magazinelor"

(3) $x_{ij} \ge 0$; $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,2}$

b) Vom echilibra problema introducând un nou "magazin = șantier" fictiv (S_3^f).
Voi aplica metoda costurilor minime ptr. determinarea S.B.A.i ($\bar{X}_0$) pentru a fi cât mai 'aproape' de sol. optimă căutată. Nu voi perturba problema (deși ar fi înțelept!) sperând că nu voi obține S.B. degenerate.

	S_1	S_2	S_3^f	
B_1	$15\ \boxed{2}$	$5\ \boxed{2,5}$	$*\ \boxed{0}$	$\cancel{20}, \cancel{5}, 0$
B_2	$*\ \boxed{2,5}$	$5\ \boxed{3}$	$5\ \boxed{0}$	$\cancel{10}, \cancel{5}, 0$
B_3	$*\ \boxed{2,2}$	$15\ \boxed{3,2}$	$*\ \boxed{0}$	$\cancel{15}, 0$
	$\cancel{15}$, 0	$\cancel{25}, \cancel{20}, \cancel{15}, 0$	$\cancel{5}$, 0	

1) ordinea de selectare a celulelor/variabilelor bazice este: $x_{23}, x_{11}, x_{12}, x_{22}$ și x_{32}. Avem:

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = (15,5,0,0,5,5,0,15,0) \in \mathbb{R}^9 \text{ - S.B.A.i nedegenerată (deoarece toate cele } m+n-1=3+3-1=5 \text{ comp. bazice sunt } \neq 0) \\ f(\bar{X}_0) = 105,5 \text{ (u.m) } (= 105.500 \text{ lei}) \end{cases}$$

2) aplicăm crit. de optim (verificăm dacă $\bar{X}_0$ este optimă sau nu):

$$\begin{cases} \delta_{13} = -0+0-3+2,5 = -0,5 \\ \delta_{21} = -2,5+3-2,5+2 = 0 \\ \delta_{31} = -2,2+3,2-2,5+2 = \underline{0,5>0} \\ \delta_{33} = -0+0-3+3,2 = \underline{0,2>0} \end{cases}$$

$(\exists)\ \delta_{ij}>0 \Longrightarrow \bar{X}_0$ nu este S.O.

3) aplicăm crit. de intrare în bază: $\delta_{kl} = \max\{\delta_{ij}>0\} = \max\{\underbrace{\delta_{31}}_{=0,5}, \underbrace{\delta_{33}}_{=0,2}\} = \delta_{31} \Rightarrow$ "$x_{31}\downarrow$"

4) aplicăm crit. de ieșire din bază:

$(4)\ (1,1)\ 15-\theta \longleftarrow (1,2)\ 5+\theta\ (3)$

$(1)\ (3,1)\ \theta=15 \longrightarrow (3,2)\ 15-\theta\ (2)$

$\theta = \min\{\underbrace{\bar{x}_{11}}_{=15}, \underbrace{\bar{x}_{32}}_{=15}\} \overset{!}{=} 15 \Longrightarrow$ "$\bar{x}_{32} \rightarrow$" aleg eu.

Obs: deoarece val. minimă este atinsă în mai multe celule bazice ⟹ noua soluție $\bar{X}_1$ va fi degenerată !!!

5) Determinăm noua soluție $\bar{X}_1$:

	S_1	S_2	S_3^f	
B_1	$0\ \boxed{2}$	$20\ \boxed{2,5}$	$*\ \boxed{0}$	20
B_2	$*\ \boxed{2,5}$	$5\ \boxed{3}$	$5\ \boxed{0}$	10
B_3	$15\ \boxed{2,2}$	$*\ \boxed{3,2}$	$*\ \boxed{0}$	15
	15	25	5	

$$\begin{cases} \bar{X}_1 = (\underset{\text{v. princip.}}{0},20,0,0,5,5,15,0,0) \in \mathbb{R}^9 \text{ - S.B.A. degenerată} \\ f(\bar{X}_1) = 98 \text{ (u.m)} < f(\bar{X}_0) = 105,5 \text{ (u.m)} \end{cases}$$

Verificăm dacă $\bar{X}_1$ este S.O:

$$\begin{cases} \delta_{13} = -0+0-3+2,5 = -0,5 \\ \delta_{21} = -2,5+3-2,5+2 = 0 \\ \delta_{32} = -3,2+2,2-2+2,5 = -0,5 \\ \delta_{33} = -0+0-3+2,5-2+2,2 = -0,3 \end{cases}$$

$(\forall)\ \delta_{ij} \leq 0 \Longrightarrow \bar{X}_1$ este S.O dar nu este unică! (PT are o ∞ de S.O cu acc. valoare a costului minim de transp.)

Obs: chiar dacă am obținut o S.B.D., deoarece alg. s-a încheiat, nu am intrat în fen. de ciclaj!!

Concluzie finală: Planul optim de transport presupune ca toată 'marfa' din balastiera trei (15 basculanți = 180 tone) să o ducem la șantierul din Unghieni, iar cel de la Tg. Neamț va fi aprovizionat cu 240 t (20 basculante) de la balastiera unu și 60 t (5 basculante) de la balastiera doi.
Costul minim (zilnic) de transport va fi de: 9.800 lei.

q.e.d.