1. Fie sistemul de ecuaţii liniare: $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 3 \\ x_1 + 4x_3 + 2x_4 - 2x_5 = -4 \end{cases}$. Care dintre următoarele afirmaţii de mai jos sunt adevărate?

$\begin{cases} m = 2 \text{ (nr. de ecuaţii)} \\ n = 5 \text{ (nr. de variabile)} \end{cases}$

Obs:

i) Pentru a rezolva exerciţiul trebuie să aplicaţi metoda lui Gauss, să determinaţi forma explicită şi soluţia de bază corespunzătoare acesteia considerând variabile principale pe x_2 şi x_4.

ii) Se bifează numai variantele corecte. Pot fi adevărate oricâte variante: 0,1,2,…, toate.

a) sistemul are cel mult C_4^2 forme explicite **(F)**; deoarece sistemul are 5 variabile ⇒ max C_5^2 F.E şi S.B.;

b) matricea extinsă ataşată sistemului este: $\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -4 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & -2 & -4 \end{array} \right)$ **(F)**; matricea extinsă are doar 4+1 coloane în loc de 5+1;

c) făcând coloana lui x_4 coloana matricei unitate, obţinem: $\bar{A} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} \frac{7}{2} & 1 & 2 & 0 & -3 & -3 \\ \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right)$ **(A)**; conform calculelor din rezolvare

d) considerând variabile secundare pe $x_1 = \alpha,\ x_3 = \beta$ şi $x_5 = \gamma$ obţinem forma explicită:

$X_{EXPLICIT} = (\alpha,\ -3 - \frac{7}{2}\alpha - 2\beta + 3\gamma\ ,\ \beta\ ,\ -2 - \frac{1}{2}\alpha - 2\beta + \gamma\ ,\ \gamma)^T$ **(A)**; similar, vezi rezolvarea de mai jos

e) soluţia de bază obţintă pentru x_2 şi x_4 variabile principale este: $\bar{X} = (0, -3, -2, 0, 0)^T$ **(F)**; v.p. sunt x_2 şi x_4

f) soluţia de bază obţinută pentru variabilele secundare x_1, x_3 şi x_5 este: $\bar{X} = (0, -3, 0, -2, 0)^T$ **(A)**; nu x_2 şi x_3

g) soluţia de bază obţinută pentru x_2 şi x_4 variabile principale este nedegenerată **(A)**;

h) soluţia de bază obţinută pentru variabilele secundare x_1, x_3 şi x_5 este neadmisibilă **(A)**; vezi explicaţiile din rezolvare

Dem: Ataşăm sistemului matricea extinsă $\bar{A}$ şi facem cu T.E. coloanele lui „x_2" şi „x_4" coloanele lui I_2

$$\begin{array}{c} \\ \bar{A} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -4 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & \boxed{2} & -2 & -4 \end{array} \right) \end{array} \Big/ \cdot \tfrac{1}{2} \Big/ \cdot \tfrac{3}{2} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 7/2 & 1 & 2 & 0 & -3 & -3 \\ 1/2 & 0 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \end{array} \xrightarrow[x_3 = \beta,\ x_5 = \gamma]{x_1 = \alpha} X = (\alpha, -3 - 7/2\alpha - 2\beta + 3\gamma, \beta, -2 - 1/2\alpha - 2\beta + \gamma, \gamma)^T$$

var. secundare var. princ.

forma explicită $(X \in \mathbb{R}^5)$

$\alpha = \beta = \gamma = 0 \Longrightarrow \bar{X} = (0, -3, 0, -2, 0)^T \in \mathbb{R}^5$ – soluţia de bază corespunzătoare

- este neadmisibilă (are componente negative)
- este nedegenerată (comp. principale sunt nenule)

q.e.d

Obs:

Deoarece, coloana lui „x_2" este prima coloana a matricei unitate I_2, a trebuit să facem doar coloana lui „x_4" ca de a doua coloană a lui I_2!!!