Curs 3

I.4) Schimbarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei

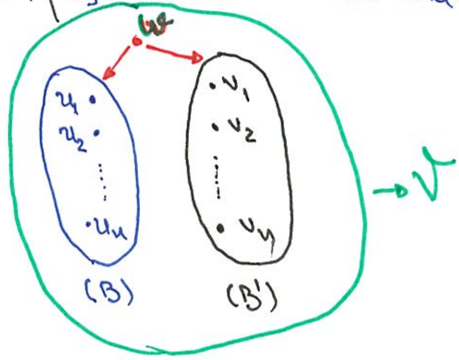
Fie $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ un spațiu liniar oarecare cu $\dim \mathcal{V} = n$ și fie (B) și (B') două baze din $\mathcal{V}$:

$$(3.1)\begin{cases} B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \leq \mathcal{V} \\ B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \leq \mathcal{V} \end{cases}$$

Fie $w \in \mathcal{V}$ un vector oarecare, care admite în cele două baze descompunerile:

$$(3.2)\begin{cases} w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \\ w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n \end{cases} \iff (3.2')\begin{cases} w_B = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \to \text{coord. lui } w \text{ în baza } (B) \\ w_{B'} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] \to \text{coord. lui } w \text{ în baza } (B') \end{cases}$$

Vom numi: $\begin{cases} (B) \to \text{prima bază / baza inițială / baza veche} \\ (B') \to \text{a doua bază / baza finală / baza nouă} \end{cases}$



Dorim să găsim o legătură (relație) dintre cele două seturi de coordonate (w_B și $w_{B'}$) ale aceluiași vector „w" în cele două baze diferite: (B) și (B') !!

Deoarece $B \leq \mathcal{V} \Rightarrow (B)$ - S.G pt. $\mathcal{V}$
deoarece $v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathcal{V}$ $\Big| \Rightarrow (\exists)\ s_{ij} \in \mathbb{R}$; $i, j = \overline{1,n}$ a.î.:

$$(3.3)\begin{cases} v_1 = s_{11}u_1 + s_{12}u_2 + \dots + s_{1n}u_n \\ v_2 = s_{21}u_1 + s_{22}u_2 + \dots + s_{2n}u_n \\ \text{— — — — — — — — — —} \\ v_n = s_{n1}u_1 + s_{n2}u_2 + \dots + s_{nn}u_n \end{cases} \iff (3.3')\begin{cases} v_1 = [s_{11}, s_{12}, \dots, s_{1n}]_B \\ v_2 = [s_{21}, s_{22}, \dots, s_{2n}]_B \\ \\ v_n = [s_{n1}, s_{n2}, \dots, s_{nn}]_B \end{cases} \to \text{descompunerile vect. } v_i, i = \overline{1,n} \text{ din } (B') \text{ în baza } (B)$$

deci „s_{ij}" sunt coordonatele vectorilor $v_i \in B'$ față de vectorii $u_j \in B$

Vom nota cu:

$$(3.4)\quad S = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \dots & u_n \end{array} \ (\in B) \\ \begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} & \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \\ (\in B') & \end{array} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \text{matricea schimbării de bază}$$

(not: (*) $S \equiv S_{B'/B}$)

Atunci relațiile (3.3) (care reprezintă legătura dintre vectorii bazei (B') și vectorii bazei (B)) se pot scrie sub formă matricială:

$$(3.3'')\quad B' = S \cdot B \quad \text{unde: } B' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

sunt cele două baze scrise matricial (ca matrici coloană)

Teoremă: Matricea schimbării de bază $S (\equiv S_{B'|B})$ este o matrice inversabilă

Dem: (m.r.a)

Pp. că $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nu este inversabilă $((\nexists) S^{-1}) \Leftrightarrow \det S = 0$ (S este degenerată) $\Leftrightarrow \operatorname{rang} S < n$ $\Leftrightarrow$ cele „n" linii (sau coloane) ale matricei S nu sunt independente $\Leftrightarrow$ cel puțin una dintre linii se poate scrie ca o combinație liniară de celelalte $\overset{(3.3')}{\underset{(3.3)}{\Leftrightarrow}}$ cel puțin unul dintre vectorii v_i, $i=\overline{1,n}$ se poate scrie ca o combinație liniară de ceilalți vectori $\overset{def}{\Leftrightarrow}$ B' - L.D (fals deoarece $B' \leq V$) $\Leftrightarrow$ presupunerea făcută este falsă $\Leftrightarrow$ S este inversabilă $\{(\exists) S^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$

q.e.d

Vom înlocui expresiile (descompunerile) vectorilor $v_i \in (B')$, $i=\overline{1,n}$ din rel. (3.3) în expresia vectorului w din relația $(3.2)_2$ și obținem:

$$(**)\ w = \beta_1 (s_{11}u_1 + s_{12}u_2 + \dots + s_{1n}u_n) + \beta_2 (s_{21}u_1 + s_{22}u_2 + \dots + s_{2n}u_n) + \dots + \beta_n (s_{n1}u_1 + s_{n2}u_2 + \dots + s_{nn}u_n) =$$

$$= \underbrace{(\beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{21} \dots + \beta_n s_{n1})}_{=\alpha_1} u_1 + \underbrace{(\beta_1 s_{12} + \beta_2 s_{22} + \dots + \beta_n s_{n2})}_{=\alpha_2} u_2 + \dots + \underbrace{(\beta_1 s_{1n} + \beta_2 s_{2n} + \dots + \beta_n s_{nn})}_{=\alpha_n} u_n$$

cf. unicității coordonatelor unui vector într-o bază, din relațiile: $(3.2)_1 + (**)$, obținem:

$$(3.5) \begin{cases} \alpha_1 = s_{11}\beta_1 + s_{21}\beta_2 + \dots + s_{n1}\beta_n \\ \alpha_2 = s_{12}\beta_1 + s_{22}\beta_2 + \dots + s_{n2}\beta_n \\ \text{— — — — — — — —} \\ \alpha_n = s_{1n}\beta_1 + s_{2n}\beta_2 + \dots + s_{nn}\beta_n \end{cases}$$

→ legăturile (relațiile) dintre coordonatele w_B și $w_{B'}$ prin intermediul matricii schimbării de bază S^T

care scrise sub formă matricială:

$$(3.5')\ w_B = S^T w_{B'} \Leftrightarrow (3.5'')\ w_{B'} = (S^T)^{-1} w_B$$

Dem: {dem. rel. (3.5'')}

Deoarece: $|S| \neq 0 \Leftrightarrow \det(S^T) \neq 0 \Leftrightarrow (\exists!) (S^T)^{-1}$ a.î.: $S^T \cdot (S^T)^{-1} = (S^T)^{-1} \cdot S^T = I_n$ (1)

Înmulțim egalitatea (3.5), la stânga, cu $(S^T)^{-1}$ și obținem:

$$(S^T)^{-1} \cdot w_B = \underbrace{(S^T)^{-1} \cdot S^T}_{\overset{(1)}{=} I_n} \cdot w_{B'} \Leftrightarrow (S^T)^{-1} \cdot w_B = \underbrace{I_n \cdot w_{B'}}_{= w_{B'}} \Leftrightarrow \underline{(S^T)^{-1} w_B = w_{B'}}$$

q.e.d

Obs:

i) relațiile (formulele) (3.5) sau (3.5') respectiv (3.5'') se numesc: formulele de schimbare a coordonatelor unui vector la schimbarea bazei, prin intermediul matricii schimbării de bază

ii) pentru a le aplica în probleme practice, trebuie să determinăm mai întâi matricea schimbării de bază S (de fapt S^T și $(S^T)^{-1}$!!!)

iii) dacă în loc să descompunem vectorii $v_i \in (B'), i=\overline{1,n}$ în baza (B), procedam viceversa, adică descompuneam vectorii bazei inițiale $u_i \in (B), i=\overline{1,n}$ față de vectorii bazei finale (B'), am fi obținut niște relații similare lui (3.3) sau (3.3'), respectiv:

$$(3.6)\begin{cases} u_1 = s'_{11}v_1 + s'_{12}v_2 + \dots + s'_{1n}v_n \\ u_2 = s'_{21}v_1 + s'_{22}v_2 + \dots + s'_{2n}v_n \\ \dots\dots\dots \\ u_n = s'_{n1}v_1 + s'_{n2}v_2 + \dots + s'_{nn}v_n \end{cases} \quad \Longleftrightarrow (3.6')\begin{cases} u_1 = [s'_{11}, s'_{12}, \dots, s'_{1n}]_{B'} \\ u_2 = [s'_{21}, s'_{22}, \dots, s'_{2n}]_{B'} \\ \dots\dots\dots \\ u_n = [s'_{n1}, s'_{n2}, \dots, s'_{nn}]_{B'} \end{cases}$$

$\to$ coord. vectorilor $u_i \in B$ descompuși față de baza (B')

care sub formă matriceală au expresia:

$$(3.6'')\ B = S' \cdot B' \quad \text{unde} \quad (3.4')\ S' = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{array} \to (B') \\ \begin{pmatrix} s'_{11} & s'_{12} & \dots & s'_{1n} \\ s'_{21} & s'_{22} & \dots & s'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ s'_{n1} & s'_{n2} & \dots & s'_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$\downarrow (B)$

$\to$ matricea schimbării de bază

{not: $S' \equiv S'_{B|B'}$}

Se demonstrează f. ușor că $\underline{S' = S^{-1}}$ $\{S'_{B|B'} = S^{-1}_{B'|B}\}$, adică: $B \underset{S'=S^{-1}}{\overset{S}{\rightleftarrows}} B'$

__Exemple:__

1) Fie în spațiul liniar oarecare $(V,+,\cdot)$ bazele: $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ și $B'=\{v_1,v_2,v_3\}$ (deci $\underline{\dim V = 3}$). Știm că:

$$(*)\begin{cases} v_1 = 2u_1 + u_2 - u_3 \\ v_2 = u_1 + 3u_2 + u_3 \\ v_3 = \quad -u_2 + 2u_3 \end{cases}$$

iar ~~coordonate~~ vectorul $(**)\ w = 3v_1 - 2v_2 + v_3$

Se cere să se determine coordonatele vectorului „w" în baza (B).

__Dem:__

Din rel. (**) $\Rightarrow$ știm coordonatele lui „w" în baza (B'): (1) $w_{B'} = [3,-2,1]$

Din rel (*) $\Rightarrow S\ (\equiv S_{B'|B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\Rightarrow S^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2')

Conform relației (3.5*), avem:

$$\underline{\underline{w_B}} = S^T \cdot w_{B'} \overset{(1)}{\underset{(2')}{=}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{S^T} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_{B'}} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}}} \Longleftrightarrow \underline{w_B = [4,-4,-3] \Longleftrightarrow w = 4u_1 - 4u_2 - 3u_3}$$

q.e.d

__Obs:__ dacă în textul problemei am fi dat coordonatele lui „w" în baza (B) $(\Leftrightarrow w_B = [4,-4,-3])$ și am fi cerut coord. lui „w" în baza (B') $(w_{B'} = ?)$, am fi aplicat relația (3.5") dar trebuia să calculăm $(S^T)^{-1}$!!!, adică am fi obținut:

$$\underline{w_{B'}} = (S^T)^{-1} \cdot w_B = \begin{pmatrix} (S^T)^{-1} = ? \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

2) Fie (B) $\begin{cases} u_1=(1,-1)^T \\ u_2=(-1,2)^T \end{cases} \subseteq \mathbb{R}^2$ și (B') $\begin{cases} v_1=(2,1)^T \\ v_2=(-3,-2)^T \end{cases} \subseteq \mathbb{R}^2$ două baze în $\mathbb{R}^2$.

a) determinați matricea schimbării de bază $S_{B'|B} \overset{not}{=} S$

b) știind că $w_B=[2,-3]$, aflați $w_{B'}=?$

c) știind că $y_{B'}=[1,1]$, aflați $y_B=?$

$\Big\}$ cu ajutorul relațiilor (3.5') și (3.5'')

Dem:

a) Fie $S=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ a.î.: $\begin{cases} v_1 = s_{11}u_1 + s_{12}u_2 \\ v_2 = s_{21}u_1 + s_{22}u_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (2,1)^T = s_{11}(1,-1)^T + s_{12}(-1,2)^T \\ (-3,-2)^T = s_{21}(1,-1)^T + s_{22}(-1,2)^T \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} \begin{cases} s_{11}-s_{12}=2 \\ -s_{11}+2s_{12}=1 \end{cases} \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{met. lui}} \bar{A}=\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_1 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} s_{11} & s_{12} \end{matrix} \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} s_{11}=5 \\ s_{12}=3 \end{cases} \\ \\ \begin{cases} s_{21}-s_{22}=-3 \\ -s_{21}+2s_{22}=-2 \end{cases} \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{met. lui}} \bar{A}=\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & v_2 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} s_{21}=-8 \\ s_{22}=-5 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow S=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$$

b) trebuie să determinăm mai întâi S^T și $(S^T)^{-1}$ pt. a putea aplica formulele (3.5') și (3.5'').

Din $S \Longrightarrow S^T=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ (*) Determinăm $(S^T)^{-1}$ cu T.E, adică:

$$\tilde{S}^T = \left(\begin{array}{cc|cc} 5 & -8 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot\frac{1}{5} \\ \cdot\left(-\frac{3}{5}\right) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{8}{5} & 1/5 & 0 \\ 0 & \boxed{-1/5} & -3/5 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-5) \cdot (-8) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underbrace{\begin{matrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{matrix}}_{=S^T} \quad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{=I_2} \qquad \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{=I_2} \quad \underbrace{\begin{matrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{matrix}}_{=(S^T)^{-1}}$$

$\Rightarrow (S^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ (**) $\begin{cases} \text{în acest caz particular am obținut că } S^T=(S^T)^{-1} \iff \\ \iff S=S^{-1} \end{cases}$

Avem: $w_{B'} \overset{(3.5'')}{=} (S^T)^{-1} w_B \overset{(**)}{=} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 21 \end{pmatrix} \iff w_{B'}=[34,21]$

$\Updownarrow$

$w = 34v_1 + 21v_2$

c) Cf (3.5'): $y_B = S^T y_{B'} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} \iff y_B = [-3,-2]$

$\Updownarrow$

$y = -3u_1 - 2u_2$

Verificare calcule:

$y_{B'}=[1,1] \iff y = v_1+v_2 = (2,1)^T + (-3,-2)^T = (-1,-1)^T$

$y_B=[-3,-2] \iff y = -3u_1-2u_2 = -3(1,-1)^T - 2(-1,2)^T = (-1,-1)^T$

corect.

Lema substituției (caz particular: cele două baze B și B' diferă printr-un singur vector)

Fie $B=\{u_1,\dots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\dots,u_n\}\leq V$ și vectorii $v,w\in V$ cu descompunerile în B:

$$(3.7)\begin{cases} v=\gamma_1u_1+\dots+\gamma_{i-1}u_{i-1}+\gamma_iu_i+\gamma_{i+1}u_{i+1}+\dots+\gamma_nu_n \\ w=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_{i-1}u_{i-1}+\alpha_iu_i+\alpha_{i+1}u_{i+1}+\dots+\alpha_nu_n \end{cases} \iff (3.7')\begin{cases} v_B=[\gamma_1,\dots,\gamma_i,\dots,\gamma_n] \\ w_B=[\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n] \end{cases}$$

Atunci:

a) $B'=\{u_1,\dots,u_{i-1},v,u_{i+1},\dots,u_n\}\leq V \iff \gamma_i\neq 0$

b) dacă $B'\leq V$, atunci $w=\beta_1u_1+\dots+\beta_{i-1}u_{i+1}+\beta_iv+\beta_{i+1}u_{i+1}+\dots+\beta_nu_n \iff w_{B'}=[\beta_1,\dots,\beta_i,\dots,\beta_n]$

unde noile coordonate „β_i, $i=\overline{1,n}$" ale lui „w" sunt date de relațiile:

$$(3.8)\begin{cases} \beta_1=\alpha_1-\dfrac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_1 \\ \text{-------} \\ \beta_{i-1}=\alpha_{i-1}-\dfrac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_{i-1} \\ \beta_i=\dfrac{\alpha_i}{\gamma_i} \\ \beta_{i+1}=\alpha_{i+1}-\dfrac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_{i+1} \\ \text{-------} \\ \beta_n=\alpha_n-\dfrac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_n \end{cases}$$

B	w	v
u_1	α_1	γ_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_{i-1}	α_{i-1}	γ_{i-1}
← u_i	α_i	$\boxed{\gamma_i}\neq 0$ → pivotul transf. elim.
u_{i+1}	α_{i+1}	γ_{i+1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_n	α_n	γ_n
u_1	β_1	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_{i-1}	β_{i-1}	0
v	β_i	1
u_{i+1}	β_{i+1}	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
u_n	β_n	0

prin t.e se face unitate coloana matricei

Obs: elementele din enunțul lemei subst. precum și formulele (3.8) de schimbare a coordonatelor nu trebuie memorate dacă sunt puse sub formă tabelară.

Dem: a) Deoarece $B\leq V$ și card $B=n \Rightarrow \dim V=n$. Atunci $B'\leq V \iff \begin{cases} i)\ \text{card } B'=n=\dim V \\ ii)\ B'-L.i \end{cases}$ (A)

Verificăm în ce condiții B' ~~este~~ (sau nu) L.i. Fie scalarii $a_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$. impunem condiția: (1) $a_1u_1+\dots+a_{i-1}u_{i-1}+a_iv+a_{i+1}u_{i+1}+\dots+a_nu_n=0_V$

Înlocuind expresia lui „v" din $(3.7)_1$ în relația (1) obținem:

$a_1u_1+\dots+a_{i-1}u_{i+1}+a_i(\gamma_1u_1+\dots+\gamma_{i-1}u_{i-1}+\gamma_iu_i+\gamma_{i+1}u_{i+1}+\dots+\gamma_nu_n)+a_{i+1}u_{i+1}+\dots+a_nu_n=0_V \iff$

(2) $(a_1+a_i\gamma_1)u_1+\dots+(a_{i-1}+a_i\gamma_{i-1})u_{i-1}+a_i\gamma_iu_i+(a_{i+1}+a_i\gamma_{i+1})u_{i+1}+\dots+(a_n+a_i\gamma_n)u_n=0_V \overset{def}{\Rightarrow}$

deoarece $B\leq V \Rightarrow$ vectorii $u_1,\dots,u_i,\dots,u_n - L.i$

$$(3)\begin{cases} a_1+a_i\gamma_1=0 \\ \text{-------} \\ a_{i-1}+a_i\gamma_{i-1}=0 \\ a_i\gamma_i=0 \\ a_{i+1}+a_i\gamma_{i+1}=0 \\ \text{-------} \\ a_n+a_i\gamma_n=0 \end{cases} \longrightarrow \text{dacă:} \begin{cases} i)\ \gamma_i\neq 0 \Rightarrow a_i=0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} a_1=\dots=a_{i-1}=a_{i+1}=\dots=a_n=0 \Rightarrow B'-L.i \Leftrightarrow B'\leq V \\ ii)\ \gamma_i=0 \Rightarrow a_i\neq 0 \Rightarrow B'-L.D \Rightarrow B\not\leq V \end{cases}$$

poate fi orice nr. real, deci și diferit de 0

b) înlocuim în relația: $w = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{i-1} u_{i-1} + \beta_i v + \beta_{i+1} u_{i+1} + \dots + \beta_n u_n$ vectorul v cu expresia din $(3.7)_1$ și vom obține:

$$w = \beta_1 u_1 + \dots + \beta_{i-1} u_{i-1} + \beta_i (\gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_{i-1} u_{i-1} + \gamma_i u_i + \gamma_{i+1} u_{i+1} + \dots + \gamma_n u_n) + \beta_{i+1} u_{i+1} + \dots + \beta_n u_n \iff$$

$$(4)\quad w = (\beta_1 + \beta_i \gamma_1) u_1 + \dots + (\beta_{i-1} + \beta_i \gamma_{i-1}) u_{i-1} + \beta_i \gamma_i u_i + (\beta_{i+1} + \beta_i \gamma_{i+1}) u_{i+1} + \dots + (\beta_n + \beta_i \gamma_n) u_n$$

Din $(3.7)_2$ și (4), conform unicității coordonatelor în baza B, obținem:

$$(5)\ \begin{cases} \beta_1 + \beta_i \gamma_1 = \alpha_1 \\ \dots\dots \\ \beta_{i-1} + \beta_i \gamma_{i-1} = \alpha_{i-1} \\ \beta_i \gamma_i = \alpha_i \ \Big/ \cdot \frac{1}{\gamma_i} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\beta_i = \frac{\alpha_i}{\gamma_i}}\ (*) \\ \beta_{i+1} + \beta_i \gamma_{i+1} = \alpha_{i+1} \\ \dots\dots \\ \beta_n + \beta_i \gamma_n = \alpha_n \end{cases} \iff (5')\ \begin{cases} \beta_1 = \alpha_1 - \beta_i \gamma_1 \overset{(*)}{=} \alpha_1 - \frac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_1 \\ \dots\dots \\ \beta_{i-1} = \alpha_{i-1} - \beta_i \gamma_{i-1} \overset{(*)}{=} \alpha_{i-1} - \frac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_{i-1} \\ \beta_i = \frac{\alpha_i}{\gamma_i} \\ \beta_{i+1} = \alpha_{i+1} - \beta_i \gamma_{i+1} \overset{(*)}{=} \alpha_{i+1} - \frac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_{i+1} \\ \dots\dots \\ \beta_n = \alpha_n - \beta_i \gamma_n \overset{(*)}{=} \alpha_n - \frac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_n \end{cases} \equiv (3.8)$$

q.e.d.

Ex:

Fie $B = \{u_1, u_2, u_3\} \subseteq V$ și vectorii $\begin{cases} v = u_1 - u_2 + 2u_3 \\ w = 3u_1 + u_2 \end{cases}$ $\{v_B = [1, -1, 2]\}$, $\{w_B = [3, 1, 0]\}$

Determinați coordonatele lui „w" în bazele:

a) $B' = \{u_1, v, u_3\}$ c) $B''' = \{v, u_2, u_3\}$

b) $B'' = \{u_1, u_2, v\}$

Dem: Aplicăm lema substit. scriind datele problemei sub formă tabelară:

a)

B	w	v
u_1	3	1
u_2	+1	$\boxed{-1}$
u_3	0	2
u_1	4	0
v	-1	1
u_3	2	0

$/(-1)/$ $/\cdot 2$

$$w = 4u_1 - v + 2u_3 \iff w_{B'} = [4, -1, 2]$$

b)

B	w	v
u_1	3	1
u_2	1	-1
u_3	0	$\boxed{2}$
u_1	3	0
u_2	1	0
v	0	1

$/\cdot\frac{1}{2}$ $/\cdot\frac{1}{2}$ $/\cdot(-\frac{1}{2})$

$$w = 3u_1 + u_2 + 0v \iff w_{B''} = [3, 1, 0]$$

c)

B	w	v
u_1	3	$\boxed{1}$
u_2	1	-1
u_3	0	2
v	3	1
u_2	4	0
u_3	-6	0

$/\cdot(-2)$

$$w = 3v + 4u_2 - 6u_3 \iff w_{B'''} = [3, 4, -6]$$

Obs:

i) Lema substituției (L.S.) poate fi aplicată iterativ a.î. putem afla coordonatele unui vector (sau a mai multora) într-o nouă bază B' care diferă de baza inițială prin 2, 3, ... sau toți vectorii

ii) când noua bază B' diferă prin toți vectorii de vechea bază B, pentru a putea aplica L.S. trebuie să știm deja matricea schimbării de bază (așa cum vedeți în tabelul de mai jos); evident că în acest caz ar fi mult mai simplu să aplicăm formulele de schimbare a coord. la schimbarea bazei ($v_B = S^T v_{B'}$ sau $v_{B'} = (S^T)^{-1} v_B$)

B	w	v_1	v_2	...	v_n
u_1	α_1	$\boxed{s_{11}}$	s_{21}	...	s_{n1}
u_2	α_2	s_{12}	s_{22}	...	s_{n2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
u_n	α_n	s_{1n}	s_{2n}	...	s_{nn}
v_1	α_1'	1	s_{21}'	...	s_{n1}'
u_2	α_2'	0	$\boxed{s_{22}'}$	...	s_{n2}'
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
u_n	α_n'	0	s_{2n}'	...	s_{nn}'
v_1	α_1''	1	0	...	s_{n1}''
v_2	α_2''	0	1	...	s_{n2}''
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
u_n	α_n''	0	0	...	$\boxed{s_{nn}''}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
v_1	β_1	1	0	...	0
v_2	β_2	0	1	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
v_n	β_n	0	0	...	1

→ sunt componentele matricii S^T (!!!)

T.E

T.E

T.E

Obs: pentru a se evita calculul matricii S (necesară în primul tabel din L.S) se va lua întotdeauna ca bază inițială ≡ baza canonică din $\mathbb{R}^n$ (B_c)

iii) Lema subst. poate fi folosită și atunci când dorim să aflăm coord. unui vector direct într-o bază B, vom considera în acest caz:

$$\begin{cases} \text{Baza inițială} : B_c \to \text{baza canonică} \\ \text{Baza finală} : B \to \text{baza în care se cer coord. vect.} \end{cases}$$

Ex: Fie $(B) \begin{cases} u_1 = (1,-1,0)^T \\ u_2 = (-1,2,2)^T \\ u_3 = (0,-2,-1)^T \end{cases} \subseteq \mathbb{R}^3$

Se cere:

$$\begin{cases} a)\ w = (3,3,-4)^T \Rightarrow w_B = ? \\ b)\ z_B = [2,1,1] \Rightarrow z = ? \end{cases}$$

Dem:

a)

B	w	u_1	u_2	u_3	
e_1	3	$\boxed{1}$	-1	0	
e_2	3	-1	2	-2	
e_3	-4	0	2	-1	
u_1	3	1	-1	0	
e_2	6	0	$\boxed{1}$	-2	$/\cdot(-2)$
e_3	-4	0	2	-1	
u_1	9	1	0	-2	
u_2	6	0	1	-2	
e_3	-16	0	0	$\boxed{3}$	$/\cdot\frac{1}{3}$ $/\cdot\frac{2}{3}$ $/\cdot\frac{2}{3}$
u_1	-5/3	1	0	0	
u_2	-14/3	0	1	0	
u_3	-16/3	0	0	1	

$$w = -5/3\, u_1 - 14/3\, u_2 - 16/3\, u_3 \Leftrightarrow w_B = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{16}{3}\right]$$

b) $z_B = [2,1,1] \Leftrightarrow z = 2u_1 + u_2 + u_3 = 2(1,-1,0)^T + (-1,2,2)^T + (0,-2,-1)^T = \underline{(1,-2,1)^T}$

iv) atunci când dorim să aflăm $v_{B'}$ cunoscând v_B (sau invers), dar nu știm matricea S, vom folosi întotdeauna ca bază inițială baza canonică B_c.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "S=?"] \arrow[dr] & & B' \\ & B_c \arrow[ur] & \end{tikzcd} \qquad \text{adică :} \qquad \begin{tikzcd} u_B \arrow[rr, "???"] \arrow[dr] & & u_{B'} \\ & u_{B_c} \equiv u \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

v) tabelul inițial al lemei substituției atunci când vrem să aflăm coord. unui vector $w = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$ în baza $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ cu vectorii u_i, $i = \overline{1,n}$ având componentele : $\begin{cases} u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})^T \\ u_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})^T \\ \vdots \\ u_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})^T \end{cases}$ va fi următorul :

B	w	u_1	u_2	$\dots$	u_n
e_1	α_1	a_{11}	a_{21}	$\dots$	a_{n1}
e_2	α_2	a_{12}	a_{22}	$\dots$	a_{n2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
e_n	α_n	a_{1n}	a_{2n}	$\dots$	a_{nn}