Gheorghe RUSU **Marius SPÎNU**

MATEMATICI APLICATE ÎN ECONOMIE

IAŞI, 2008

CUPRINS

Prefaţă

Importanţa matematicii în orice domeniu al activităţii umane, este evidentă şi de necontestat (chiar dacă uneori este mai puţin vizibilă). Metodele şi modelele matematice puse la dispoziţia cercetătorilor şi specialiştilor din domenii foarte variate, sunt indispensabile în analiza şi studiul fenomonelor (economice, fizice, chimice, sociale, etc.) cu care aceştia se ocupă.

Şi în studiul economiei, privită ca o componentă esenţială a activităţii umane, metodele şi cunoştinţele matematice sunt fundamentale pentru asimilarea, aplicarea, modelarea şi înţelegerea fenomenelor economice. Mai mult, datorită tendinţelor de globalizare din toate domeniile şi a dezvoltării fără precedent a economiei, modelarea şi studiul fenomenelor economice din ce în ce mai complexe, necesită aplicarea unor instrumente matematice tot mai sofisticate şi elaborate.

Subliniem şi faptul că lucrările distinse cu premiul Nobel în economie în ultimii ani folosesc exhaustiv un aparat matematic extrem de complex şi elaborat. Mobilităţile academice ale studenţilor şî cadrelor didactice din domeniul economic, au relevat un grad înalt de utilizare a tehnicilor matematice în cursurile şi lucrările de cercetare din universităţile occidentale.

Matematicele aplicate în economie sunt importante şi datorită corelaţiilor pe care le realizează cu alte domenii de cercetare şi cu alte discipline de studiu. Astfel:

- *fundamentează teoria optimizării, pune bazele matematice în statistica economică şi în cercetarea operaţională (teoria stocurilor, teoria aşteptării, teoria fiabilităţii, etc.), are un rol central în finanţe şi asigurări (dobînzi, rate, obligaţiuni, acţiuni, etc.);*

- *realizează un suport teoretic, logic şi coerent, pentru alte discipline de specialitate precum: micro- şi macro-economia, statistica economică, markheting, tehnici financiare şi de asigurări, etc.;*
- *formează studenţilor deprinderea raţionamentelor logice, deducţia şi inducţia pornind de la elemente cunoscute sau demonstrate.*

În ultimii ani, învăţământul la distanţă a devenit foarte popular datorită constrângerilor financiare şi a necesitătii unei calificări superioare pe piaţa muncii din România. Nu în ultimul rând, în actualele condiţii ale economiei de piaţă, prin învăţământul la distanţă se realizează şi mult discutata reconversie profesională.

Pentru o eficienţă sporită a acestei forme de învăţământ, cursanţii trebuie să aibă acces la informaţii corecte, complete şi în concordanţă cu programele analitice şi planurile de învăţământ. Desigur, datorită modului de organizare, studenţii acestei forme de învăţământ trebuie să depună un efort mai mare decât studenţii de la zi care beneficiază de o îndrumare continuă şi sistematică din partea cadrelor didactice.

Din aceste considerente credem că materialul pe care-l prezentăm este util tuturor celor care au optat pentru învăţământul la distanţă. El a fost elaborat de cadre didactice cu experienţă în predarea matematicii, care ani la rând au ţinut cursuri şi seminarii cu studenţii facultăţii de economie, la zi şi I.D.

Structura lucrării este axată pe programa analitică în vigoare şi are în vedere înzestrarea studenţilor cu acele cunoştinţe de matematică ce le servesc la înţelegerea fenomenelor economice şi la rezolvarea unor probleme concrete pe care acestea le ridică. În acelaşi timp se urmăreşte şi formarea unor deprinderi de raţionament corect, de realizare a unor deducţii logice şi de obţinere a unui profil intelectual complet.

Am încercat realizarea unui material concis, cu o structură echilibrată, nu foarte abstract şi nici sec, dar fără a renunţa la o minimă rigurozitate atât de specifică matematicii. Acolo unde a fost cazul s-au dat demonstraţii, considerând că ele contribuie la însuşirea corectă şi profundă a noţiunilor prezentate. S-a renunţat la justificarea obţinerii unor rezultate teoretice, dacă acest lucru impunea folosirea unui aparat matematic complex şi de o anumită fineţe.

În primul capitol, se face o trecere în revistă a unor rezultate fundamentale din algebra liniară. Acestea sunt aprofundate în cap. II şi aplicate problemelor de programare liniară din cap.III. Capitolele IV şi V au drept obiectiv studiul unor clase de probleme de analiză matematică cu aplicaţii frecvente în optimizarea fenomenelor economice.

Bibliografia prezentată nu este exhaustivă, dar permite tuturor celor care doresc, aprofundarea anumitor capitole sau noţiuni introduse pe parcursul lucrării.

Septembrie, 2008 ***Autorii***

Cap. 1 TRANSFORMĂRI ELEMENTARE

Studiul matricelor este legat de discuţia şi rezolvarea sistemelor de ecuaţii algebrice liniare şi constituie elementul de control al aproape întregii programe analitice a disciplinei „Matematici aplicate în economie”. Noutatea pe care o propunem se numeşte ***transformare elementară*** efectuată asupra liniilor unei matrice, obţinând din aceasta o matrice echivalentă din punctul de vedere al rangului. Departe de a fi o abstractizare inutilă, folosirea transformărilor elementare poate duce, fără calcule dificile, la determinarea rangului, la obţinerea inversei, sau, la obţinerea soluţiei unui sistem algebric liniar.

Se cunosc dificultăţile pe care le întâmpinăm la discuţia sau rezolvarea acestui tip de sisteme. Metodele bazate pe teoremele lui Cramer, Kroneker-Capelli sau Rouché sunt greoaie şi folosesc determinanţii, al căror calcul este laborios. Prin transformarea matricei lărgite a unui astfel de sistem se obţine *forma explicită* din care se pot trage concluziile privind tipul şi soluţiile sale. O categorie specială de soluţii ale unui sistem liniar compatibil nedeterminat o formează soluţiile de bază care vor juca un rol deosebit în rezolvarea problemelor de programare liniară.

1.1 MATRICE

1.1.1 RANGUL UNEI MATRICE

Prin matrice înţelegem o aplicaţie $\mathrm{A}:\mathrm{I} \times \mathrm{J} \to \mathbb{K}$, unde $\mathrm{I} = 1,2,...,\mathrm{m}$; $\mathrm{J} = 1,2,...,n$, $\mathbb{K}$ o mulţime oarecare. Ea poate fi reprezentată printr-un tablou de elemente din $\mathbb{K}$, aşezate pe linii şi coloane.

Pentru o matrice de tipul **m x n** vom folosi notaţia:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ..... & a_{2n} \\ ..... & ..... & ..... & ..... \\ a_{m1} & a_{m2} & ..... & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1.1.1)$$

Suprimând din matricea A, **m – r** linii şi **n – r** coloane, obţinem o matrice pătratică de ordinul **r**. Determinantul acestei matrice se numeşte minor de ordinul **r** al matricei.

Definiţia 1.1.1. *Numim **rangul unei matrice** A de tipul **m x n*** $(m \leq n)$ *un număr natural **r** cu proprietăţile:*

*a) în matrice există cel puţin un minor de ordinul **r** diferit de zero.*

*b) toţi minorii de ordinul **r + 1** sunt nuli.*

Observaţie. Se demonstrează că dacă toţi minorii de ordinul **r + 1** sunt nuli, atunci sunt nuli şi toţi minorii de ordin mai mare ca **r + 1**.

În continuare vom pune în evidenţă operaţii pe care le vom numi transformări elementare, care se bucură de proprietatea că nu modifică rangul unei matrice. Ele au la bază proprietăţile determinanţilor.

1.1.2 TRANSFORMĂRI ELEMENTARE

Definiţia 1.1.2. *Numim **transformare elementară aplicată unei matrice** una din următoarele operaţii:*

(T_1) – înmulţirea unei linii cu un scalar real nenul ($\alpha \neq 0$*);*

(T_2) – adunarea unei linii la o altă linie;

(T_3) – schimbarea a două linii între ele.

Teorema 1.1.1. Transformările elementare nu modifică rangul unei matrice.

Demonstraţie. Fie matricea A de tipul m x n şi matricele $T_i (i = \overline{1,3})$ care se obţin din matricea unitate I_m. Înmulţind la stânga matricea A cu matricele T_i obţinem matricele $A_i = T_i A$. Presupunem că rangul matricei A este r_A. Vom avea:

$$r_{A_i} \leq \min (r_{T_i}, r_A) = \min (m, r_A) = r_A \tag{1.1.2}$$

Din $A_i = T_i A$, cum T_i sunt ineversabile găsim $A = T_i^{-1} A_i$ şi deci:

$$r_{A_i} \leq \min (r_{T_i}, r_A) = \min (m, r_{A_i}) = r_{A_i} \tag{1.1.3}$$

Din (1.1.2) şi (1.1.3) rezultă că $r_{A_i} = r_A$, $i=\overline{1,3}$.

Definiţia (1.1.3). *Două matrice A şi B care se obţin una din alta prin transformări elementare se numesc* ***echivalente*** *(în privinţa rangului) şi scriem* $A \sim B$.

1.1.3. FORMA GAUSS – JORDAN A UNEI MATRICE

Fie A matricea unui sistem de m ecuaţii algebrice liniare cu n necunoscute $(m < n)$.

Definiţia 1.1.4. *Matricea A se spune că are* ***forma Gauss-Jordan*** *dacă conţine* r $(r \leq m)$ *coloane ale matricei unitate de ordinul m.*

Dacă aceste coloane sunt $j_1, j_2, ..., j_r$ atunci forma matricei este

$$A = \begin{pmatrix} ....1....0....0\ a_{1k}^{'}\ ....\ a_{1n}^{'} \\ ....0....1....0\ a_{2k}^{'}\ ....\ a_{2n}^{'} \\ .... \\ ....0....0....1\ a_{rk}^{'}\ ....\ a_{rn}^{'} \\ 0..0....0....0\ 0.......0 \\ .... \\ 0..0....0....0\ 0.......0 \end{pmatrix} \qquad (1.1.4)$$

Teorema 1.1.2. Orice matrice nenulă poate fi adusă la forma Gauss-Jordan, printr-un număr finit de transformări elementare.

Demonstraţie. Fie deci matricea A de tipul m x n a unui sistem liniar de m ecuaţii cu n necunoscute.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fie $a_{11} \neq 0$. Dacă $a_{11} = 0$, atunci printr-o transformare de tipul (T_3) putem aduce în locul lui a_{11} un element $a_{i1} \neq 0$; $i = \overline{2,m}$ care există deoarece prima coloană are cel puţin un element diferit de zero, în caz contrar sistemul nu ar avea *n* necunoscute.

Printr-o transformare de tipul (T_1) cu $\alpha = \frac{1}{a_{11}}$ realizăm în poziţia (1,1) un element egal cu unu. Prin $m-1$ transformări de tipul (T_1) şi (T_2) în care linia întâi este succesiv inmulţită cu numere convenabile: $-a_{21}, -a_{31}, -a_{i1}, ..., -a_{m1}$ şi adunată de fiecare dată la liniile: a doua, a treia, . . . a *i-a* linie, . . . a *m-a* linie, realizăm pe prima coloană toate elementele nule cu excepţia primului element care este unu.

Dacă dorim să realizăm pe coloana *j* toate elementele nule cu excepţia elementului din poziţia (*i,j*) care să fie egal cu unu procedăm astfel:

a) ne asigurăm că $a_{ij} \neq 0$
b) aplicăm o transformare de tipul (T_1) cu $\alpha = \frac{1}{a_{ij}}$, obţinând în poziţia (*ij*) un element egal cu unu.
c) Aplicăm succesiv $m-1$ transformări de tipul (T_1) şi (T_2), înmulţinâd linia i cu: $-a_{1j}, -a_{2j} -, \cdots, -a_{mj}$ şi adunând-o la liniile: întâia, a doua, . . . , a *m-a* linie obţinem pe coloana *j* toate elementele nule cu excepţia elementului din poziţia (*i,j*) care devine unu. Algoritmul se opreşte când pe liniile $\overline{r+1, m}$ nu mai avem elemente nenule. Elementul nenul *aij* dat se va numi **pivot**, iar ansamblul transformărilor elementare necesare transformării matricei A într-o matrice cu coloana *i* din matricea unitate de ordinul *m* în coloana *j* se va numi *pivotajul cu element pivot* a_{ij}.

Din forma Gauss-Jordan a matricei A putem observa că rangul matricei este *r*, acesta fiind de ordinul minorului format cu primele *r* linii şi coloanele $j_1, j_2, ... j_r$. Toţi minorii de ordinul $r+1$ sunt nuli. În practică nu este neapărat necesar să obţinem coloanele matricei unitate în ordinea lor naturală, numărul lor ne va da rangul. Putem alege pivot orice element diferit de zero oriunde s-ar găsi el de preferinţă cel care este egal cu 1.

Exemplul 1.1.1. Să se aducă la forma Gauss-Jordan şi să se determine rangul matricei:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Luăm pivot elementul încercuit. Prima linie înmulţită cu 1 se adună la a doua, apoi cu –2 şi o adunăm la a treia obţinând matricea :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luăm pivot elementul încercuit. Linia a doua o înmulţim cu 1/3 şi apoi înmulţită cu –2 o adunăm la prima obţinând matricea:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Luăm pivot elementul încercuit. Linia a treia o înmulţim cu –1, apoi înmulţită cu –1 o adunăm la a doua şi obţinem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei este egal cu 3, egal cu numărul maxim de coloane ale matricei unitate.

Exemplul 1.1.2. Să se determine rangul matricei:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Făcând pivotajele cu elementele pivot încercuite obţinem succesiv:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei considerate este 3.

1.1.4 INVERSA UNEI MATRICE

Fie A o matrice pătrată de ordinul ***m*** şi B= $A \vdots I_m$ matricea obţinută prin alăturarea matricei unitate de ordinul m la matricea A. Se cunoaşte că se numeşte matrice inversă a unei matrice pătrate A, o matrice, notate cu A^{-1}, astfel încât:

$$AA^{-1}=AA=I_m \tag{1.1.6}$$

Presupunem pentru moment că există matricea A^{-1}. Înmulţind la stânga matricea B cu A^{-1} obţinem:

$$\overline{B}=A^{-1}B=\left[A^{-1}A \vdots A^{-1}I_m\right]=\left[I_m \vdots A^{-1}\right]$$

De la matricea B putem ajunge la matricea $\overline{B}$ cu ajutorul transformărilor elementare. Făcând pivotaje în matricea A în vederea obţinerii celor m coloane ale matricei unitate de ordinul m, în dreapta barei vom găsi tocmai matricea A^{-1}. Dacă coloanele nu sunt în ordinea lor naturală, putem schimba liniile între ele obţinând în stânga barei chiar matricea unitate. Dacă nu reuşim să obţinem coloane ale matricei unitate în număr egal cu ordinul matricei A, atunci matricea nu are inversă.

Exemplul 1.1.3. Să se găsească inversa matricei:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

considerând în matricea $\overline{B}$ pivotaje cu elemente pivot încercuite avem :

$$\overline{B}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1\end{array}\right]$$

Inversa matricei A este:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

Exemplul 1.1.4. Să se găsească inversa matricei:

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Vom avea:

$$\overline{B}=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -5 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -5 & -3 & 0 & 1\end{array}\right]\sim$$

$$\sim\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 3/4 & 1/2 & 1/4 & 0\\ 0 & 1 & -5/4 & -1/2 & 1/4 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1\end{array}\right]$$

Matricea nu admite inversă.

1.2. SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

Un sistem de ecuaţii algebrice liniare cu ***m*** ecuaţii şi ***n*** necunoscute (***m < n***) se prezintă sub forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.2.1}$$

unde a_{ij}, b_i (i=$\overline{1,m}$; $\alpha = \overline{1,n}$) sunt numere reale.

Dacă există $b_i \neq 0$ sistemul (1.2.1) este *neomogen*, în caz contrar ($b_i = 0, (\forall)\, i = \overline{1,m}$) sistemul se numeşte *omogen*.

Fie B matricea lărgită a sistemului (1.2.1), de forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \hline a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \tag{1.2.2}$$

Să presupunem că rangul matricei A a sistemului este r $(r \leq m)$. Prin transformări elementare putem aduce matricea A la forma Gauss-Jordan. Obţinem astfel matricea $\overline{\mathrm{B}}$, de forma:

$$\overline{\mathrm{B}} = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & \overline{a}_{1j_{r+1}} & \cdots & \overline{a}_{1n} & \overline{b}_1 \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 & \overline{a}_{2j_{r+1}} & \cdots & \overline{a}_{2n} & \overline{b}_2 \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 1 & \overline{a}_{rj_{r+1}} & \cdots & \overline{a}_{rn} & \overline{b}_r \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \overline{b}_{r+1} \\ \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & \overline{b}_m \end{array}\right] \tag{1.2.3}$$

Sistemul corespunzător matricei $\overline{\mathrm{B}}$ este:

$$\begin{cases} x_{j_1} + \ldots\ldots\ldots + \overline{a}_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}} + \ldots + \overline{a}_{1n}x_n = \overline{b}_1 \\ \quad x_{j_1} + \ldots + \overline{a}_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}} + \ldots + \overline{a}_{2n}x_n = \overline{b}_2 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad\quad x_{j_r} + \overline{a}_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}} + \ldots + \overline{a}_{rn}x_n = \overline{b}_r \\ \quad\quad\quad\quad 0 = \overline{b}_{r+1} \\ \quad\quad\quad\quad \vdots \\ \quad\quad\quad\quad 0 = \overline{b}_m \end{cases} \tag{1.2.4}$$

Deoarece matricele B şi $\overline{\mathrm{B}}$ sunt echivalente, sistemele (1.2.1) şi (1.2.4) vor fi echivalente (adică vor avea aceleaşi soluţii). Este suficient pentru aceasta să observăm că transformările elementare aplicate liniilor matricei B pentru a fi adusă la forma $\overline{\mathrm{B}}$ au drept consecinţe asupra sistemului de ecuaţii:

(T_1) – înmulţirea unei ecuaţii cu un număr diferit de zero;

(T_2) – adunarea la o ecuaţie a unei alte ecuaţii (eventual înmulţită cu un scalar nenul);

(T_3) – schimbarea a două ecuaţii între ele.

Evident, aceste operaţii aplicate unui sistem de ecuaţii îl transformă în unul echivalent.

Teorema 1.2.1. Condiţia necesară şi suficientă ca sistemul (1.2.1) să fie compatibil este ca $\overline{b}_i = 0, \quad i = \overline{r+1, m}$.

Demonstraţie. Să arătăm mai întâi necesitatea condiţiei.

Presupunem că sistemul (1.2.1) este compatibil. Aceasta înseamnă că sistemul (1.2.4) este compatibil. Din compatibilitatea acestuia din urmă rezultă $\overline{b}_i = 0$ pentru $i = \overline{r+1, m}$.

Să arătăm acum suficienţa condiţiei. Presupunem că $\overline{b}_i = 0, \quad i = \overline{r+1, m}$. Rezultă atunci că sistemul (1.2.4) este compatibil admiţând ∞^{n-r} soluţii şi deci sistemul (1.2.1) este compatibil.

În baza acestei teoreme uşor pot fi demonstrate teoremele lui Kronnecker-Capelli şi Rouché. Pentru $r = m = n$ se obţin rezultatele cunoscute de la sistemele de n ecuaţii cu n necunoscute.

Exemplul 1.2.1. Să se atudieze compatibilitatea sistemului şi în caz afirmativ să se găsească soluţia lui.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

Matricea lărgită a sistemului, după o serie de pivotaje cu elemente pivot încercuite, devine:

$$
B=\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & -1 & 1 & 1\\
1 & -1 & 2 & -2 & 2\\
3 & -1 & 3 & -3 & 5\\
-1 & 3 & -5 & 5 & -3
\end{array}\right]\sim
$$

$$
\sim\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 1 & -1 & 1 & 1\\
0 & -2 & 3 & -3 & 1\\
0 & -4 & 6 & -6 & 2\\
0 & 4 & -6 & 6 & -2
\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 3/2\\
0 & 1 & -3/2 & 3/2 & -1/2\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

Sistemul considerat este echivalent cu sistemul:

$$
\begin{cases}
x_1 \quad +1/2x_3 - 1/2x_4 = 3/2\\
\quad x_2 - 3/2x_3 + 3/2x_4 = -1/2
\end{cases}
$$

care este compatibil având soluţia:

$$
\begin{cases}
x_1 = 3/2 - 1/2\alpha + 1/2\beta,\\
x_2 = -1/2 + 3/2\alpha - 3/2\beta,\\
x_3 = \alpha, \quad x_4 = \beta, \quad \alpha,\beta\in\mathbb{R}
\end{cases}
$$

Exemplul 1.2.2. Să se studieze compatibilitatea sistemului:

$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2\\
-x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3\\
-2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 10
\end{cases}
$$

Matricea lărgită a sistemului după o serie de pivotaje cu elemente pivot încercuite devine:

$$
B=\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 2\\
-1 & 1 & 1 & -1 & 3\\
-3 & 5 & 6 & 1 & 10
\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 2 & 3 & 4 & 2\\
0 & 3 & 4 & 3 & 5\\
0 & 9 & 12 & 9 & 14
\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{rrrr|r}
1 & 0 & 1/3 & 2 & -4/3\\
0 & 1 & 4/3 & 1 & 5/3\\
0 & 0 & 0 & 0 & -1
\end{array}\right]
$$

Cum $\bar{b}_3 = -1 \neq 0$, sistemul este incompatibil.

1.2.1. EXPLICITAREA SISTEMELOR DE ECUAŢII LINIARE

Fie sistemul (1.2.1). Presupunem că rangul matricei A este m < n.

Definiţia (1.2.1). *Vom spune că sistemul (1.2.1) este* ***explicitat în raport cu un grup de m variabile*** *(necunoscute), dacă în matricea* ***A*** *a sistemului coloanele acestor variabile sunt cele* ***m*** *coloane ale matricei unitate de ordinul* ***m****.*

Deoarece cu cele n variabile ale sistemului putem forma C_n^m grupuri diferite de câte m variabile, rezultă că un sistem liniar, care poate fi explicitat în raport cu cel puţin un grup de m variabile, va avea cel mult C_n^m forme explicite. Acest număr maxim va fi atins dacă explicitarea poate avea loc în raport cu oricare dintre cele C_n^m grupuri diferite de câte n variabile şi toate formele explicite sunt distincte.

Într-un sistem liniar explicitat sunt două tipuri de variabile (necunoscute): unele, ai căror coeficienţi formează coloanele matricei unitate, altele ai căror coeficienţi formează celelalte coloane ale matricei sistemului. Ca de obicei, primele vor fi denumite ***variabile principale***, iar celelalte ***variabile secundare***. În teoria programării liniare variabilele principale mai sunt denumite ***bazice***, iar variabilele secundare ***nebazice***.

Definiţia (1.2.2). *Numim* ***soluţie de bază a unui sistem de ecuaţii liniare****, o soluţie particulară obţinută dintr-o formă explicită, prin egalarea cu zero a variabilelor secundare.*

Din definiţia dată rezultă că dacă sistemul este compatibil nedeterminat, atunci are cel puţin o soluţie de bază şi cel mult C_n^m soluţii de bază. Evident, sistemele incompatibile şi cele compatibil determinate nu au soluţii de bază.

Dacă o soluţie de bază are exact **m** componente nenule, atunci soluţia de bază se numeşte **nedegenerată**, iar dacă are mai puţin de **m** componente nenule se numeşte soluţie de bază **degenerată**.

Soluţiile de bază ale unui sistem liniar se clasifică şi după un alt criteriu. Dacă toate componentele unei soluţii de bază au valori nenegative (≥ 0), soluţia de bază se numeşte **admisibilă.** În caz contrar, soluţia de bază se numeşte **neadmisibilă** (are componente strict negative).

Să considerăm că **r = m**. În acest caz din (1.2.4) obţinem o soluţie de bază:

$x_{j_1} = \bar{b}_1,\ x_{j_2} = \bar{b}_2,\ ...\ \bar{x}_{j_i} = \bar{b}_i, ...\ x_{j_m} = \bar{b}_m$, restul până la **n** egale cu zero. Dorim ca variabila principală x_{j_i} să devină secundară iar variabila secundară $x_j (j \neq j_1, ..., j_r)$ să devină principală. Pentru aceasta fie şi $a_{ij} \neq 0$. Efectuând în matricea $\bar{\mathrm{B}}$ un pivotaj cu element pivot a_{ij} găsim o altă soluţie de bază:

$$x_{j_1} = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1j}\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}, x_{j_2} = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2j}\frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}, ..., x_j = \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_{ij}}, ... x_{j_m} = \bar{b}_m - \bar{a}_{mj}\frac{b_i}{a_{ij}}$$

şi restul până la n egale cu zero.

Putem scrie variabilele principale concentrat sub forma:

$$\begin{cases} x_{j_k} = \bar{b}_k - a_{kj}\dfrac{\bar{b}_i}{a_{ij}} & , \quad \text{pentru } \mathrm{k} \neq \mathrm{j} \\ x_j = \dfrac{\bar{b}_i}{a_{ij}} & , \quad \text{pentru } \mathrm{k} = \mathrm{j} \end{cases} \tag{1.2.5}$$

Exemplul 1.2.3. Să se determine toate formele explicite şi soluţiile de bază corespunzătoare pentru sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Matricea lărgită a sistemului este:

$$\mathrm{B} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Pivotajele:

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \vdots & 2 \end{bmatrix}$

conduc la formele explicite în raport cu grupurile:

$$(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4),$$

a) $\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_2 \quad + x_4 &= 2 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x_1 \quad + x_3 \quad &= 2 \\ x_2 \quad + x_4 &= 2 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x_2 \quad + x_4 &= 2 \\ x_1 \quad + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} -x_1 + x_2 - x_3 \quad &= 0 \\ x_1 \quad + x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= 2 \end{aligned}$

Soluţiile de bază vor fi:

(S_1) $x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0;$ soluţie de bază nedegenerată admisibilă

(S_2) $x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2;$ soluţie de bază nedegenerată admisibilă

(S_3) $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = 2,\ x_4 = 0;$ soluţie de bază nedegenerată admisibilă

(S_4) $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2;$ soluţie de bază degenerată admisibilă

(S_5) $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 2;$ soluţie de bază degenerată admisibilă

Sistemul nu poate fi explicitat în raport cu grupul de variabile (x_1, x_3) şi admite doar patru soluţii de bază distincte din numărul maxim de $C_4^2 = 6$ posibilităţi.

Cap. 2 SPAŢII LINIARE

Înzestrând o mulţime oarecare cu o serie de operaţii având anumite proprietăţi obţinem noţinea de ***structură algebrică***. Unele tipuri de structuri algebrice au fost studiate în liceu (monoid, grup, inel, corp). ***Spaţiul liniar*** se defineşte în acelaşi mod, elementele sale (vectorii) generalizând noţiunea de vector liber utilizat în fizică sau matematică.

În orice spaţiu liniar se introduce noţiunea de ***independenţă liniară*** precum şi cea de ***bază***. Vom introduce aceleaşi noţiuni dar numai în cazul particular al spaţiului liniar $\mathbb{R}^n$ (care apare cel mai des în contextul aplicaţiilor economice).

În studiul problemelor economice se impune problema determinării valorii maxime sau a valorii minime a unor funcţii. Un ajutor preţios în acest scop îl constituie **formele pătratice** care generalizează funcţia de gradul al doilea.

2.1. DEFINIŢIA SPAŢIULUI LINIAR

Fie **A** o mulţime oarecare şi *K* un corp având elementele neutre 0_K respectiv 1_K. Presupunem că pe A se pot defini două operaţii astfel:

a) $(\forall)\mathbf{x},\mathbf{y}\in \mathrm{A}$, $(\exists)$ un element notat cu $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in \mathrm{A}$ astfel încât $(\mathbf{x},\mathbf{y})\to \mathbf{x}+\mathbf{y}$.

b) $(\forall)\ \mathbf{x}\in \mathrm{A}$, $(\forall)\ \lambda\in \mathrm{K}$, $(\exists)$ un element notat $\lambda\,\mathbf{x}\in \mathrm{A}$, astfel încât $(\lambda,\mathbf{x})\to \lambda\,\mathbf{x}$.

Prima operaţie, de tip aditiv, este o operaţie internă iar cea de doua, de tip multiplicativ, este o operaţie externă pentru **A**.

Definiţie. *Mulţimea **A** formează un **spaţiu liniar** peste corpul K dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăţi*:

L_1) $(\forall)\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}\in \mathrm{A}$, $\quad \mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$,

L_2) $(\forall)\ \mathbf{x},\ \mathbf{y}\in \mathrm{A}$, $\quad \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$,

L_3) $(\exists)0_A\in \mathrm{A}$ astfel încât $\quad \mathbf{x}+0_A=\mathbf{x}$, $(\forall)\ \mathbf{x}\in \mathrm{A}$,

L_4) $(\forall)\ \mathbf{x}\in \mathrm{A},\ (\exists)-\mathbf{x}\in \mathrm{A}$ astfel încât $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=0_{\mathrm{A}}$,

L_5) $(\forall)\ \lambda\in \mathrm{K},\ \ (\forall)\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in \mathrm{A},\ \ \lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$,

L_6) $(\forall)\ \lambda\in \mathrm{K},\ \ (\forall)\ \mu\in \mathrm{K},\ \ (\forall)\ \mathbf{x}\in \mathrm{A},\qquad (\lambda+\mu)\ \mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y}$,

L_7) $(\forall)\lambda,\mu\in \mathrm{K},\ (\forall)\mathbf{x}\in \mathrm{A},\qquad \lambda(\mu\mathbf{x})=\mu(\lambda\mathbf{x})=(\lambda\mu)\mathbf{x}$,

L_8) $(\forall)\mathbf{x}\in \mathrm{A},\ 1_{\mathrm{K}}\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

Elementele lui *K* se numesc **scalari**, iar cele ale lui A, **vectori**. Prima operaţie se numeşte **adunarea vectorilor** iar cea de a doua **înmulţirea vectorilor cu scalari** din **K**. Atunci când nu este pericol de confuzie vectorul nul 0_A se notează simplu 0. De asemenea, elementele neutre ale lui *K* se scriu 0 şi 1 (în imensa majoritate a aplicaţiilor $\mathrm{K}=\mathbb{R}$).

Consecinţe. Din axiome decurg următoarele proprietăţi:

a) $(\forall)\ \mathbf{x}\in \mathrm{A},\quad 0\mathbf{x}=0$,

Într-adevăr, din L_6) obţinem $(\lambda+0)\ \mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+0\mathbf{x}$, adică $\lambda\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+0\mathbf{x}$.
Axioma L_3) conduce la $0\mathrm{x}=0$.

b) $(\forall)\lambda\in K,\qquad \lambda\cdot 0=0$.

Plecăm de la L_5) : $\lambda(\mathbf{x}+0)=\lambda\mathbf{x}+\lambda 0$. Obţinem $\lambda\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\lambda 0$.

Aceeaşi axiomă L_3) arată că: $\lambda 0=0$.

c) $(\forall)\ \mathbf{x}\in A,\qquad (-1)\ \mathbf{x}=-\mathbf{x}$

Folosim a), adică $0\mathbf{x}=0$ şi înlocuim 0 prin $1+(-1)$. Din L_6) obţinem:

$1\mathbf{x}+(-1)\mathbf{x}=0$. L_8) conduce la $\mathbf{x}+(-1)\mathbf{x}=0$, iar L_4) arată că $(-1)\mathbf{x}=0$.

Exemplu:

Considerăm $\mathrm{A}=\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\ \mathrm{x}\ \mathbb{R}\ \mathrm{x}\ldots\mathbb{R}=\ \mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)/\,x_i\in\mathbb{R}$

şi $\mathrm{K}=\mathbb{R}$. Adunarea elementelor din A revine la adunarea matricelor cu o singură coloană sau cu o singură linie.

$(\forall)\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\quad \mathbf{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ din $\mathbb{R}^n$,

$\mathbf{x}+\mathbf{y}=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ldots\ x_n+y_n)\in\mathbb{R}^n$

În mod similar produsul unui scalar din $\mathbb{R}$ cu un element al lui $\mathbb{R}^n$ se defineşte prin: $\lambda\mathbf{x}=\lambda(x_1,x_2,\ldots,x_n)=(\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ldots\ldots,\ \lambda x_n)$.

2.2. DEPENDENŢĂ ŞI INDEPENDENŢĂ LINIARĂ

Fie **A** un spaţiu liniar peste corpul *K* şi fie $\mathbf{x}_i \in \mathrm{A}, \lambda_i \in \mathrm{K},\ i = \overline{1,h}$.

Definiţie 2.2.1. Se numeşte <u>combinaţie liniară</u> a vectorilor $\mathbf{x}_i$ cu scalarii λ_i expresia :

$$\mathbf{E} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_h \mathbf{x}_h . \tag{2.2.1}$$

Consecinţa a) din definiţia spaţiului liniar ne arată că atunci când $\lambda_i = 0, (\forall)\ i = \overline{1,h} \ \Rightarrow \mathrm{E} = 0$. Reciproca acesteia nu este întotdeauna adevărată.

Definiţie 2.2.2. **Vectorii $\mathbf{x}_i = \mathbf{A},\ i = \overline{\mathbf{1},h}$ se numesc liniar independenţi dacă:**

$$\boldsymbol{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_h \mathbf{x}_h = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_h = 0.}$$

În caz contrar, dacă **E=0** cu măcar un scalar nenul, vectorii $\mathbf{x}_i$ se numesc liniari dependenţi, adică:

$$\boldsymbol{\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_h \mathbf{x}_h = 0 \quad \not\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_h = 0}$$

Exemplu:

Fie spaţiul liniar $\mathrm{A} = \mathbb{R}^{\mathrm{n}} = \mathcal{M}_{\mathrm{n},1}(\mathbb{R})$ şi vectorii:

$$\mathbf{x}_1 = (x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n})^t, \mathbf{x}_2 = (x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2n})^t, \ldots, \mathbf{x}_h = (x_{h1}, x_{h2}, \ldots x_{hn})^t$$

vectori din A. Condiţia $\mathrm{E} = 0$ conduce la sistemul liniar şi omogen:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{21} + \cdots + \lambda_h x_{h1} = 0 \\ \lambda_1 x_{12} + \lambda_2 x_{22} + \cdots + \lambda_h x_{h2} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 x_{1n} + \lambda_2 x_{2n} + \cdots + \lambda_h x_{hn} = 0 \end{cases} \tag{2.2.3}$$

Vectorii sunt liniari independenţi dacă sistemul (2.2.3) admite numai soluţia banală şi liniar dependenţi în caz contrar.

Din teoria sistemelor omogene independenţa liniară este caracterizată prin:

$$\text{rang M} \equiv \mathrm{r_M} = \mathrm{h} \tag{2.2.4}$$

unde matricea $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_{\mathrm{n,h}}(\mathbb{R})$ este formată prin componentele vectorilor $\mathbf{x}_i$.

Dacă (2.2.3) are soluţii nebanale, ele se exprimă prin $\mathrm{h}-\mathrm{r}_{\mathrm{M}}$ parametri reali. Înlocuite în (2.2.2) aceste soluţii conduc la una sau mai multe relaţii de dependenţă liniară.

Pe baza acestui exemplu vom realiza un mare număr de aplicaţii. Proprietăţile familiilor de vectori liniar independenţi şi al familiilor de vectori liniar dependenţi sunt date în următoarele teoreme:

Teorema 2.2.1. O mulţime de vectori liniar independenţi nu poate conţine vectorul nul.

Demonstraţie: Presupunem prin absurd că mulţimea de vectori independenţi $\mathcal{F}= \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots\mathbf{x}_i,\ldots,\mathbf{x}_h$ ar conţine vectorul nul şi că $\mathbf{x}_i=\mathbf{0}$. Combinaţia liniară :

$\mathrm{E}=0\cdot\mathbf{x}_1+0\cdot\mathbf{x}_2+\ldots+1\cdot\mathbf{x}_i+\ldots+\lambda_h\mathbf{x}_h=0$ cu scalarul λ_i nenul. Contradicţia justifică teorema.

Teorema 2.2.2. Orice submulţime a unei mulţimi de vectori liniar independenţi este formată tot din vectori liniar independenţi.

Demonstraţie: Tot prin reducere la absurd presupunem că deşi $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\ldots,\mathbf{x}_h$ sunt liniar independenţi, submulţimea $\mathbf{x}_{i_1},\mathbf{x}_{i_2},\ldots,\mathbf{x}_{i_k}$, $k\leq h$ este formată din vectori liniar dependenţi. Atunci, egalitatea:

$$\lambda_{i_1}\mathbf{x}_{i_1}+\lambda_{i_2}\mathbf{x}_{i_2}+\cdots+\lambda_{i_k}\mathbf{x}_{i_k}=0$$

are loc cu măcar un scalar nenul.

Rezultă că: $\lambda_{\mathrm{i}_1}\mathbf{x}_{\mathrm{i}_1}+\lambda_{\mathrm{i}_2}\mathbf{x}_{\mathrm{i}_2}+\cdots+\lambda_{\mathrm{i}_\mathrm{k}}\mathbf{x}_{\mathrm{i}_\mathrm{k}}+\sum_{\substack{\mathrm{j}=\overline{1,\mathrm{h}}\\ \mathrm{j}\notin\mathrm{I}}}0\cdot\mathbf{x}_\mathrm{j}=0$

cu măcar un scalar nenul ceea ce contrazice ipoteza teoremei.

Teorema 2.2.3. **Într-o mulţime de vectori liniar dependenţi cel puţin un vector se scrie ca o combinaţie liniară a celorlalţi.**

Demonstraţie: Definiţia vectorilor liniar dependenţi arată că:

$$\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+\cdots+\lambda_i\mathbf{x}_i+\cdots+\lambda_h\mathbf{x}_h=0$$

cu măcar un scalar nenul. Presupunem că acesta este λ_i. Cum orice spaţiu liniar este grup abelian, regulile de calcul dintr-o astfel de structură permite să scriem:

$$\lambda_i \mathbf{x}_i = -\lambda_1 \mathbf{x}_1 - \lambda_2 \mathbf{x}_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - \lambda_i \mathbf{x}_{i-1} - \lambda_{i+1} \mathbf{x}_{i+1} - \ldots\ldots\ldots\ldots - \lambda_h \mathbf{x}_h$$

În corpul K, λ_i este inversabil iar dacă λ_i^{-1} este inversul său

$$\mathbf{x}_i = -\lambda_i^{-1} \lambda_1 \mathbf{x}_1 - \ldots\ldots - \lambda_i^{-1} \lambda_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} - \lambda_i^{-1} \lambda_{i+1} \mathbf{x}_{i+1} - \ldots\ldots - \lambda_i^{-1} \lambda_h \mathbf{x}_h \qquad (2.2.5)$$

şi teorema este demonstrată.

Când corpul de scalari este $\mathbb{R}$ inversul λ_i^{-1} al lui λ_i este $1/\lambda_i$ şi obţinem:

$$\mathbf{x}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \mathbf{x}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} \mathbf{x}_2 - \cdots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \mathbf{x}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \mathbf{x}_{i+1} - \cdots - \frac{\lambda_h}{\lambda_i} \mathbf{x}_h \qquad (2.2.6)$$

Teoremele prezentate au consecinţe importante cu valoare teoretică şi practică. Astfel, modificarea componenţei unei mulţimi de vectori liniar independenţi prin suprimarea unora conduc totdeauna la o familie de vectori liniar independenţi. Dacă adăugăm noi vectori unei astfel de familii, rezultatul nu este previzibil, noua mulţime poate fi dependentă sau independentă. Din (2.2.3) rezultă că (2.2.4) nu poate fi realizată dacă $h>n$, deci numărul maxim de vectori liniar independenţi din $\mathbb{R}^n$ este n.

Există efectiv mulţimi de vectori liniar independenţi. Una dintre acestea este:

$$F = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \qquad (2.2.7)$$

unde: $\mathbf{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)^t$, $\mathbf{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)^t, \ldots, \mathbf{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)^t$.

Dacă prin transformări elementare modificăm matricea M a vectorilor mulţimii F, obţinem alte mulţimi formate tot din n vectori liniar independenţi. Numărul acestor mulţimi este infinit.

2.3. BAZE DE VECTORI. COORDONATELE UNUI VECTOR ÎNTR-O BAZĂ

Am luat în studiu în paragraful precedent familiile maximale de vectori liniar independenţi dintr-un spaţiu liniar. Rolul acestora va fi precizat în cele ce urmează.

Definiţie. *Familia* $\mathrm{B} = \ \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ *formează o bază în spaţiul vectorial V dacă:*

a) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ *sunt liniar independenţi;*

b) $(\forall)\ \mathbf{u} \in \mathrm{V}$ *, mulţimea* $\mathrm{F} = \ \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k$ *, este formată din vectori liniar dependenţi.*

Mulţimea B este aşadar o mulţime maximală de vectori liniar independenţi. Când spaţiul V este $\mathbb{R}^n$, această mulţime conţine n vectori, deci k = n.

Spaţiul $\mathbb{R}^n$ are cel puţin o bază: cea formată din $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ numită **bază canonică**. Aşadar:

$$\mathrm{B}_c = \ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$$

Din aceasta prin procedeul indicat anterior putem obţine o infinitate de baze toate având n vectori. Numărul n, al vectorilor oricărei baze din $\mathbb{R}^n$ se numeşte **dimensiunea** acestui spaţiu.

Condiţia b) din definiţia bazei şi una din proprietăţile fundamentale ale unei familii de vectori liniar dependenţi ne permit să formulăm şi să demonstrăm:

Teorema 2.3.1. Orice vector din $\mathbb{R}^n$ se exprimă în mod unic printr-o combinaţie liniară a vectorilor unei baze B.

Demonstraţie. Teorema 2.2.3 ne arată că cel puţin un vector al mulţimii $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ în care $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ formează bază în $\mathbb{R}^n$ se exprimă printr-o combinaţie liniară a celorlalţi. Acest lucru este valabil şi pentru **u**, deoarece în caz contrar, din:

$$\lambda\mathbf{u}+\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{u}_n=0 \tag{2.3.1}$$

în care $\lambda=0$ ar rezulta:

$$\lambda_1\mathbf{u}_1+\lambda_2\mathbf{u}_2+\cdots+\lambda_n\mathbf{u}_n=0 \tag{2.3.2}$$

şi unul din scalari fiind nenul s-ar contrazice condiţia a) din definiţia bazei.

Aşadar $\lambda\neq 0$ şi obţinem:

$$\mathbf{u}=-\frac{\lambda_1}{\lambda}\mathbf{u}_1-\frac{\lambda_2}{\lambda}\mathbf{u}_2-\cdots-\frac{\lambda_n}{\lambda}\mathbf{u}_n \tag{2.3.3}$$

Notăm: $\mu_1=-\frac{\lambda_1}{\lambda},\ \mu_2=-\frac{\lambda_2}{\lambda},\ldots,\ \mu_n\frac{\lambda_n}{\lambda}$ şi scriem:

$$\mathbf{u}=\mu_1\mathbf{u}_1+\mu_2\mathbf{u}_2+\cdots+\mu_n\mathbf{u}_n \tag{2.3.4}$$

Prin reducere la absurd demonstrăm că scalarii μ_i din (2.3.4) sunt unic determinaţi. În caz contrar, are loc şi relaţia:

$$\mathbf{u}=\nu_1\mathbf{u}_1+\nu_2\mathbf{u}_2+\cdots+\nu_n\mathbf{u}_n \tag{2.3.5}$$

Din (2.3.4)-(2.3.5), obţinem:

$$(\mu_1-\nu_1)\mathbf{u}_1+(\mu_2-\nu_2)\mathbf{u}_2+\ldots+(\mu_n-\nu_n)\mathbf{u}_n=0 \tag{2.3.6}$$

Cum $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$ sunt liniar independenţi, toţi scalarii din (2.3.6) sunt nuli, deci:

$$\mu_1=\nu_1,\ \mu_2=\nu_2,\ldots,\mu_n=\nu_n$$

ceea ce este în contradicţie cu ipoteza. Teorema este demonstrată.

Observaţie. Scalarii $\mu_i,\ (i=\overline{1,n})$ se numesc în mod uzual coordonatele vectorului **u** în baza $B=\ \mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\ldots,\mathbf{u}_n$. Unicitatea lor rezultă şi din teoremă dar şi din faptul că (2.3.4) conduce la un sistem Cramer (cu soluţie unică).

Vom nota mulţimea coordonatelor vectorului **u** în baza B cu $\mathbf{u}_B$, adică:

$$\mathbf{u}_B=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)^t \tag{2.3.7}$$

Un calcul elementar ne arată că în baza canonică $B_c=\ \mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n$ coordonatele oricărui vector **u** coincid cu componentele sale, adică:

$$\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_n)^t=u_1\mathbf{e}_1+u_2\mathbf{e}_2+\cdots+u_n\mathbf{e}_n$$

Exemplu:

Să se arate că vectorii $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)^t$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,1)^t$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,3)^t$ formează o bază în $\mathbb{R}^3$ şi să se determine coordonatele lui $\mathbf{u} = (6,1,8)^t$ în această bază.

Relaţia (2.3.4) devine:

$\mathbf{u} = \mu_1\mathbf{u}_1 + \mu_2\mathbf{u}_2 + \mu_3\mathbf{u}_3$

şi conduce la sistemul:

$$\begin{cases} \mu_1 + \ \ \mu_2 + \ \ \mu_3 = 6 \\ \mu_1 + 2\mu_2 + \ \ \mu_3 = 1 \\ \mu_1 + \ \ \mu_2 + 3\mu_3 = 8 \end{cases}$$

Prin transformări elementare de linii în matricea lărgită a sistemului obţinem:

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

care corespunde sistemului cu $r(M) = 3$) deci ($\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3$ formează baza).

$$\begin{cases} \mu_1 = 10 \\ \mu_2 = -5 \\ \mu_3 = 1 \end{cases}$$

acestea fiind valorile coordonatelor căutate.

2.4. SCHIMBAREA COORDONATELOR UNUI VECTOR LA SCHIMBAREA BAZEI

Dacă în locul bazei $B = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ a spaţiului liniar $\mathbb{R}^n$ considerăm o altă bază $B' = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ având acelaşi număr de vectori, n, ne aşteptăm ca în relaţia (2.3.4) coordonatele să se schimbe. Dorim să aflăm legea de schimbare a acestora în cazul general şi într-un caz particular.

Să considerăm că în baza B (numită baza veche) vectorul $\mathbf{u}$ are coordonatele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, deci:

$$\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \alpha_2\mathbf{u}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{u}_n \tag{2.4.1}$$

şi că acelaşi vector are în baza B' (numită baza nouă) coordonatele $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$, adică:

$$\mathbf{u} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \beta_n \mathbf{v}_n \tag{2.4.2}$$

Pe de altă parte fiecare din vectorii $\mathbf{v}_i$ ai bazei noi are în baza veche coordonatele a_{ji}, unic determinate

$$\mathbf{v}_i = a_{1i}\mathbf{u}_1 + a_{2i}\mathbf{u}_2 + \ldots + a_{ni}\mathbf{u}_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\mathbf{u}_j \tag{2.4.3}$$

Înlocuim (2.4.3) în (2.4.2) şi comparăm cu (2.4.1).

Obţinem:

$$\alpha_i = a_{i1}\beta_1 + a_{i2}\beta_2 + \ldots + a_{in}\beta_n, \quad i = \overline{1,n} \tag{2.4.4}$$

Dacă notăm cu A matricea coordonatelor vectorilor din baza nouă faţă de vectorii din baza veche (numită **matrice de trecere**):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

cu $u_B = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^t$ şi cu $u_{B'} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^t$ atunci (2.2.4) se scrie matricial :

$$\mathbf{u}_B = A^t \mathbf{u}_{B'} \tag{2.4.5}$$

Cum vectorii lui B' sunt liniar independenţi, A este inversabilă şi din (2.4.5) putem obţine relaţia:

$$\mathbf{u}_{B'} = \left(A^t\right)^{-1} \mathbf{u}_B \qquad \text{(2.4.6}$$

Relaţiile (2.4.5) şi (2.4.6) sunt formulele de schimbare a coordonatelor la schimbarea bazei.

Exemplu:

Se consideră vectorii $\mathbf{u}_1 = (1,2,1)^t$, $\mathbf{u}_2 = (2,1,0)^t$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,0)^t$ din $\mathbb{R}^3$:

a) Să se arate că formează o bază în $\mathbb{R}^3$

b) Să se determine coordonatele lui $\mathbf{u} = (1,1,-2)^t$ în această bază.

c) Să se determine coordonatele lui $\mathbf{u}$ în baza formată din

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \;\; \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \;\; \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$$

Soluție:

a) Matricea formată cu componentele vectorilor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ are rangul trei, egal cu dimensiunea lui $\mathbb{R}^3$, aşadar cei trei vectori formează o bază.

b) Vectorul $\mathbf{u}$ se scrie $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3$ care conduce la sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = -2 \end{cases}$$

cu soluția: $\alpha_1 = -2, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_3 = 7$, deci :

$\mathbf{u}_B = (-2, -2, 7)^t, B = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$

c) Matricea de trecere de la B la $B' = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

este :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

iar inversa lui A^t are forma:

$$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 & -1/5 \\ 2/5 & 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Folosind relaţia (2.4.6), obţinem în final:

$$\mathbf{u}_{B'} = (-1, -3, 2)^t.$$

Observaţie. Dacă vectorii noii baze nu sunt exprimaţi de la început prin combinaţii ale vectorilor vechii baze, coordonatele lor (deci elementele matricei de trecere A) trebuie calculate separat. În această situaţie este mai simplu să calculăm direct $\mathbf{u}_{B'}$ folosind definiţia.

În unele cazuri bazele B şi B' diferă printr-un singur vector. Formula de calcul a noilor coordonate va avea evident o formă mai simplă. Să presupunem că în baza B, vectorul $\mathbf{u}_i$ s-a înlocuit printr-un vector $\mathbf{v}_j$ care are coordonatele $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, a_{nj}$, adică:

$$\mathbf{v}_j = a_{1j}\mathbf{u}_1 + a_{2j}\mathbf{u}_2 + \cdots + a_{ij}\mathbf{u}_i + \cdots + a_{nj}\mathbf{u}_n \tag{2.4.7}$$

Ceilalţi vectori ai vechii baze rămânând neschimbaţi, matricea de trecere A devine:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

După determinarea lui $(A^t)^{-1}$ şi aplicarea formulei (2.4.6) deducem noile coordonate:

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{a_{ij}}, \quad \beta_k = \alpha_k - \frac{\alpha_i}{a_{ij}} a_{kj}, \quad (k \neq i) \tag{2.4.8}$$

Formulele (2.4.7), greu de memorat pot fi utilizate prin intermediul unui algoritm de calcul bazat pe transformări elementare ale liniilor matricei coordonatelor vectorilor $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_i, \dots \mathbf{u}_n$ şi $\mathbf{v}_j$. Ilustrăm mai jos modul de organizare a algoritmului. Etapa iniţială are forma :

Baza	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	…	$\mathbf{u}_i$	…	$\mathbf{u}_n$	$\mathbf{v}_j$	$\mathbf{u}_B$
$\mathbf{u}_1$	1	0	…	0	…	0	a_{1j}	α_1
$\mathbf{u}_2$	0	1	…	0	…	0	a_{2j}	α_2
	…	…	…	…	…	…	…	…
$\mathbf{u}_i$	0	0	…	1	…	0	a_{ij}	α_i
	…	…	…	…	…	…	…	…
$\mathbf{u}_n$	0	0	…	0	…	1	a_{nj}	α_n

Coloanele tabelului conţin coordonatele fiecărui vector în baza de pe prima coloană. Ele se presupun cunoscute. Ultima coloană reprezintă coordonatele lui **u** în baza veche B.

Etapa finală are forma:

Baza	$\mathbf{u}_1$	$\mathbf{u}_2$	$\dots$	$\mathbf{v}_j$	$\dots$	$\mathbf{u}_n$	$\mathbf{v}_j$	$\mathbf{u}_{B'}$
$\mathbf{u}_1$	1	0	$\dots$	$-\frac{a_{1j}}{a_{ij}}$	$\dots$	0	0	$\beta_1 = \alpha_1 - a_{1j}\frac{\alpha_i}{a_{ij}}$
$\mathbf{u}_2$	0	1	$\dots$	$-\frac{a_{2j}}{a_{ij}}$	$\dots$	0	0	$\beta_2 = \alpha_2 - a_{2j}\frac{\alpha_i}{a_{ij}}$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\mathbf{v}_j$	0	0	$\dots$	$-\frac{1}{a_{ij}}$	$\dots$	0	1	$\beta_i = \frac{\alpha_i}{a_{ij}}$
	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\mathbf{u}_n$	0	0	$\dots$	$\frac{a_{nj}}{a_{ij}}$	$\dots$	1	0	$\beta_n = \alpha_n - a_{nj}\frac{\alpha_i}{a_{ij}}$

şi conţine coordonatele tuturor vectorilor în noua bază.

Se observă că linia i din ultima fază se obţine prin împărţirea liniei i din prima fază prin a_{ij} (care este nenul, altfel matricea de trecere A nu este nesingulară).

O linie oarecare k a matricei finale se obţine înmulţind linia i cu $-a_{ij}$ după care se adună cu linia k a matricei iniţiale. Ca efect al acestor operaţiuni, pe ultima coloană se obţin coordonatele $\beta_i, \beta_k (k \neq i)$, pe coloana $\mathbf{v}_j$ se obţine coloana "i" a matricei unitate I_n iar coloana lui $\mathbf{v}_j$ se modifică în mod corespunzător.

Algoritmul poate fi aplicat înlocuind cauzele cu efectele şi invers. Astfel, putem să aplicăm transformările elementare de linii în matricea fazei iniţiale pentru a transforma coloana lui $\mathbf{v}_j$ în coloana vectorului $\mathbf{u}_i$ din faza iniţială. Unii numesc această operaţie “Lema substituţiei” şi aplică diverse metode mnemotehnice de utilizare. Noi o considerăm o simplă aplicare a transformărilor elementare şi o folosim succesiv înlocuind toţi vectorii bazei iniţiale B prin vectorii bazei B'.

Exemplu. În baza canonică $B_c = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ se consideră vectorul $\mathbf{u} = (1,1,-1)^t$. Să se determine coordonatele sale în baza $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, e_3\}$ unde $\mathbf{v}_1 = (1,2,3)^t, \mathbf{v}_2 = (1,-1,1)^t, \mathbf{v}_3 = (0,0,1)^t$.

Baza	$\mathbf{e}_1$	$\mathbf{e}_2$	$\mathbf{e}_3$	$\mathbf{v}_1$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{u}$
$\mathbf{e}_1$	1	0	0	1	1	1
$\mathbf{e}_2$	0	1	0	2	–1	1
$\mathbf{e}_3$	0	0	1	3	1	–1
$\mathbf{v}_1$	1	0	0	1	1	1
$\mathbf{e}_2$	-2	1	0	0	–3	–1
$\mathbf{e}_3$	–3	0	1	0	–2	–4
$\mathbf{v}_1$	1/3	1/3	0	1	0	2/3
$\mathbf{v}_2$	2/3	–1/3	0	0	1	1/3
$\mathbf{e}_3$	–5/3	–2/3	1	0	0	–10/3

Operaţiile – extrem de simple – au urmărit crearea matricei unitate pe coloanele vectorilor noii baze $B' = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3\}$.

În prima etapă am completat tabelul cu coordonatele – coincizând cu componentele – tuturor vectorilor în baza canonică B_c. S-au aplicat transformări elementare de linii pentru a obţine pe coloana lui $\mathbf{v}_1$ prima coloană a matricei unitate I_3. În ultima etapă, prin transformări elementare de linii se obţin pe coloana lui $\mathbf{v}_2$ cea de a doua coloană a matricei unitate I_3. Coordonatele lui $\mathbf{u}$ în noua bază sunt înscrise pe ultima coloană şi deci:

$$\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_2 - \frac{10}{3}\mathbf{e}_3.$$

Observaţie. Chiar dacă pare prea complicat în comparaţie cu aplicarea definiţiei în determinarea coordonatelor lui $\mathbf{u}$, algoritmul are avantajul principal că în fiecare etapă coloanele conţin coordonatele în baza curentă. În plus, ca avantaj secundar este posibilitatea de a-l folosi în probleme de programare liniară. El va fi aplicat consecvent în capitolele care urmează.

2.5. FORME PĂTRATICE

Considerăm în continuare spaţiul liniar $\mathbb{R}^n$ definit peste $\mathbb{R}$ precum şi funcţia $Q:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j, \quad \text{cu } a_{ij} = a_{ji} \ (\forall)\ i,j=\overline{1,n}. \qquad (2.5.1)$$

Această funcţie se numeşte **pătratică** şi generalizează funcţiile de gradul al doilea omogene într-o singură variabilă.

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care are elementele a_{ij}, $i,j=\overline{1,n}$ se numeşte matricea formei pătratice. Prin verificare directă se poate arăta că are loc formula:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A\mathbf{x}. \qquad (2.5.2)$$

Exemplu: Să se scrie matricea corespunzătoare formei pătratice $Q:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin:

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Soluţie. Folosim (2.6.3) sau (2.6.2) elementul a_{ij} al matricei A fiind coeficientul lui $x_i x_j$ în expresia acesteia. Cum $x_i x_j = x_j x_i$ şi $a_{ij} = a_{ji}$ în A coeficienţii produselor de variabile diferite se înjumătăţesc. Aşadar:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

şi formula (2.6.3) se poate imediat verifica.

Observaţie. Matricea A este pătratică şi simetrică conform condiţiei $a_{ij} = a_{ji}$ (nu este obligatoriu inversabilă).

Dacă în matricea A numai elementele diagonalei principale pot fi nenule spunem că forma pătratică are expresia canonică. **Expresia canonică** a unei forme pătratice este:

$$Q(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \ldots + \lambda_n x_n^2\ , \quad \lambda_i \in \mathbb{R}. \tag{2.5.3}$$

O formă pătratică Q este **nedegenerată** dacă expresia canonică are exact n termeni. Când numărul lor este mai mic forma se numeşte **degenerată**.

Expresia canonică a unei forme pătratice are o importanţă deosebită în studiul semnului acesteia având în vedere că $Q(x) \in \mathbb{R}$. Există forme pătratice care păstrează acelaşi semn pentru orice argument $x \in \mathbb{R}^n$. Nu este greu de verificat că: $Q(0) = 0$. Următoarele definiţii pot fi relevante:

Definiţie. *Forma pătratică* $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se numeşte* ***pozitiv (negativ)*** *definită dacă:*

$$Q(\mathbf{x}) > 0 \quad (Q(\mathbf{x}) < 0) \quad (\forall)\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \ \mathbf{x} \neq 0. \tag{2.5.4}$$

Definiţie. *Forma pătratică* $Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *se numeşte* ***pozitiv (negativ) semidefinită*** *dacă:*

$$Q(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (Q(\mathbf{x}) \leq 0) \quad (\forall)\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{2.5.5}$$

Orice formă pătratică definită este o formă pătratică semidefinită. Reciproca nu este adevărată. În cazul în care:

$$(\exists) x, y \in \mathbb{R}^n \ \ a.i.\ Q(x) > 0 \ \ si\ \ Q(y) < 0$$

atunci forma pătratică se numeşte **nedefinită ca semn**.

Dacă o formă pătratică este adusă la expresia canonică caracterul de formă pătratică pozitiv (negativ) definită (semidefinită) poate fi mult mai simplu apreciat. Astfel, dacă forma pătratică $Q(\mathbf{x})$ definită de (2.5.1) nu este sub forma (2.5.3), putem obţine expresia canonică a acesteia:

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2\ , \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \tag{2.5.6}$$

unde y_i, $i = \overline{1,n}$ sunt date de relaţiile liniare:

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n \end{cases} ; \ cu\ \ b_{ij} \in \mathbb{R} \tag{2.5.7}$$

Teoremă: Fie forma pătratică Q(x) definită de (2.5.1) a cărei expresie canonică asociată este dată de (2.5.6). Dacă:

a) $\lambda_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ **atunci Q(x) este <u>pozitiv definită</u>;**

b) $\lambda_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$ si $(\exists)$ $\lambda_j = 0$ **atunci Q(x) este <u>pozitiv semidefinită</u>;**

c) $\lambda_i < 0$, $i = \overline{1,n}$ **atunci Q(x) este <u>negativ definită</u>;**

d) $\lambda_i \leq 0$, $i = \overline{1,n}$ si $(\exists)$ $\lambda_j = 0$ **atunci Q(x) este <u>negativ semidefinită</u>;**

e) $(\exists)\lambda_i > 0$ si $(\exists)\lambda_j < 0$ **atunci Q(x) este <u>nedefinită ca semn.</u>**

Vom da în continuare două metode de obţinere a expresiei canonice (2.5.6).

a) Metoda lui Gauss.

Se aplică transformări elementare asupra liniilor matricii A corespunzătoare formei pătratice, pentru a o aduce la forma (numită superior triunghiulară) de mai jos:

$$A = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a'_{3n} \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.5.8}$$

Expresia canonică a formei pătratice este:

$$Q(\mathbf{y}) = \frac{1}{a'_{11}} y_1^2 + \frac{1}{a'_{22}} y_2 + \dots + \frac{1}{a'_{nn}} y_n \tag{2.5.9}$$

unde:

$$\begin{cases} y_1 = a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n \\ y_2 = \qquad\quad a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \qquad\qquad\qquad\quad a'_{nn}x_n \end{cases} \tag{2.5.10}$$

b) Metoda lui Jacobi

Fie $\Delta_1, \Delta_2, \dots\dots, \Delta_n$ lanţul minorilor diagonali ai matricii A corespunzătoare formei pătratice, daţi de relaţiile:

$$\Delta_1 = a_{11} \ , \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots\ldots, \ \Delta_n = \det A \qquad (2.5.11)$$

Dacă toţi $\Delta_i \neq 0$; $i = \overline{1,n}$ atunci expresia canonică este dată de formula:

$$Q(\mathbf{y}) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \ldots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2 \ . \qquad (2.5.12)$$

Observaţii:

1) Expresia canonică a unei forme pătratice **nu este unică** (coeficienţii λ_i pot avea valori diferite). Totuşi în oricare dintre expresiile canonice asociate aceleiaşi forme pătratice **numărul de coeficienţi** λ_i **pozitivi** respectiv **negativi este acelaşi**;

2) Metoda lui Jacobi **nu poate fi aplicată** dacă măcar un minor diagonal al matricei A este nul ($(\exists)\Delta_i = 0$); mai mult prin această metodă nu se pot obţine expresiile variabilelor y_i definite în (2.5.7);

3) Aplicând metoda lui Jacobi de obţinere a expresiei canonice (2.5.12), teorema de caracterizare a semnului unei forme pătratice conduce la următoarele concluzii:

a) Dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots\ldots\ldots, \Delta_n > 0$ **atunci <u>Q(x) este pozitiv definită</u>;**

c) Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \ldots\ldots\ldots$ **atunci <u>Q(x) este negativ definită;</u>**

e) Dacă $\Delta_i \neq 0, \ (\forall)\, i = \overline{1,n}$ **şi în orice altă combinaţie de semne decât cazul a) sau c) atunci <u>Q(x) este nedefinită ca semn</u>;**

Evident cazurile b) respectiv d) de semidefinire nu pot fi caracterizate cu metoda lui Jacobi

Exemplu. Să se găsească expresia canonică a formei pătratice:

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Folosim mai întâi metoda lui Gauss. Obţinem succesiv:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Expresia canonică este aşadar:

$$Q(\mathbf{y}) = y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{7} y_3^2$$

Prin metoda lui Jacobi obţinem:

$$\Delta_1 = 2 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

Expresia canonică astfel obţinută este deci:

$$Q(\mathbf{z}) = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{2}{3} z_2^2 + \frac{3}{7} z_3^2$$

Prin cele două metode am obţinut coeficienţi diferiţi (deci expresii canonice diferite), dar semnele acestora sunt aceleaşi. Forma pătratică este evident pozitiv definită.

CAP. 3. ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ

3.1. PROGRAMARE LINIARĂ

3.1.1. MODELE ECONOMICE CE CONDUC LA O PROBLEMĂ DE PROGRAMARE LINIARĂ

a) Consumul lunar de materii prime

Considerăm un proces de producţie în cursul căruia se realizeză **m** tipuri de produse $\mathrm{P}_i, i=\overline{1,m}$, pentru care se utilizează **n** tipuri de materii prime $\mathrm{M}_j, j=\overline{1,n}$. Dintr-o unitate de materii prime M_j se pot produce a_{ij} unităţi de produs P_i. Se doreşte ca numărul de produse de tipul P_i (realizate zilnic/săptămânal/lunar /etc.) să fie cel puţin în cantităţile b_i. Costul unei unităţi de materie primă M_j este c_j. Se cere să determinăm consumul lunar de materii prime, încât să se realizeze producţia minimă planificată, iar cheltuielile legate de materiile prime să fie minime.

În continuare vom elabora modelul matematic al acestui fenomen economic. Notăm cu $x_j, j=\overline{1,n}$ cantităţile de materie primă M_j ce urmează a fi utilizate. Vom scrie sub formă algebrică restricţiile economice impuse mai sus. Aceste restricţii sunt de trei categorii: restricţii legate de planificarea producţiei, restricţii impuse de sensul economic al variabilelor şi restricţia de minimizare a cheltuielilor. Aşa cum $a_{ij}x_j$ reprezintă cantitatea de produse de tipul P_i ce se obţine dintr-o cantitate x_j de materie primă M_j, deducem că:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \quad ; \quad i=\overline{1,n}$$

reprezintă cantitatea totală de produse de tipul P_i, ce se obţine când materiile prime M_j se utilizează în cantităţile $x_j, j=\overline{1,n}$. Dar această cantitate nu poate fi mai mică decât b_i şi deci obţinem inecuaţiile liniare de forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j b_i \geq b_i, \quad i=\overline{1,m} \tag{3.1.1}$$

Cum x_j reprezintă mărimi economice (cantităţi de materie primă) rezultă obligatoriu impunerea condiţiilor (***de nenegativitate***):

$$x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n} \tag{3.1.2}$$

Cheltuielile totale obţinute ca sumă a cheltuielilor unitare vor fi date de funcţia:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \quad \mathrm{x} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)^T \in \mathbb{R}^n, \tag{3.1.3}$$

care se cere a fi minimizată.

Din punct de vedere matematic problema poate fi formulată astfel: să se găsească în mulţimea soluţiilor sistemului de inecuaţii liniare (3.1.1) care satisfac condiţiile de nenegativitate (3.1.2), o soluţie pentru care funcţia **f** ia valoarea minimă. Problema are sens dacă sistemul (3.1.1) are cel puţin o soluţie. Inecuaţiile (3.1.1) le numim ***restricţiile problemei***, (3.1.2) ***condiţiile de nenegativitate***, iar **f** poartă denumirea de ***funcţie obiectiv***.

b) Folosirea optimă a resurselor

Într-un proces de producţie în care se pot realiza **n** tipuri de articole A_j, $j=\overline{1,n}$ sunt utilizate **m** resurse R_i, $i=\overline{1,m}$, care sunt limitate de cantităţile b_i. Pentru producerea unei unităţi de articol de tipul A_j se consumă o cantitate a_{ij} de resursă de tipul R_i. Profiturile unitare pentru articolele A_j presupunem că sunt c_j, $j=\overline{1,n}$. Să se determine cantitatea x_j de articol A_j, $j=\overline{1,n}$ care urmează a se realiza în procesul de producţie considerat, cu resurse limitate, astfel încât procesul să aibă drept rezultat profit maxim.

Limitările resurselor conduc la inecuaţiile:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i, \quad i=\overline{1,n} \tag{3.1.4}$$

Necunoscutele (cantităţile) $x_j, \ j=\overline{1,n}$, trebuie să satisfacă condiţiile de nenegativitate:

$$x_j \ge 0, \ j=\overline{1,n} \tag{3.1.5}$$

Profitul total este dat de funcţia liniară

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.1.6}$$

care trebuie să ia valoarea maximă.

Ne propunem să găsim (măcar) o soluţie $\mathbf{x_0} = \ x_1, x_2, \ldots, x_n \ ^T \in \mathbb{R}^n$ (numită în cele ce urmează soluţie optimă) a sistemului de restricţii economice (3.1.4) care să aibă componentele nenegative, deci să verifice condiţiile (3.1.5) şi în care funcţia obiectiv (profit) să ia cea mai mare valoare posibilă. Evident, în modelul matematic (corect) al unei probleme economice reale, sistemul de inecuaţii liniare (3.1.4) are o infinitate de soluţii care verifică condiţiile de nenegativitate (3.1.5). Dorim să găsim acea soluţie $\mathbf{x_0}$ pentru care are loc:

$$(\min)\ f(\mathrm{x}) = f\ (\mathbf{x_0})$$

c) Problema amestecului optim

Să presupunem că pentru realizarea unui amestec se pot întrebuinţa **n** materii prime $\mathrm{M}_j, j=\overline{1,n}$, disponibile în candităţi nelimitate, ce conţin **m** substanţe $\mathrm{S}_i, \ i=\overline{1,m}$. O unitate de materie primă $\mathrm{M_j}$, conţine cantitatea a_{ij} din substanţă S_i. Amestecul trebuie să conţină substanţa S_i în exact cantitatea b_i. Costurile unitare ale materiilor prime M_j sunt c_i unităţi băneşti. Să de determine cantităţile $x_j, \ j=\overline{1,n}$ de materie primă M_j necesare realizării amestecului cu compoziţia prescrisă şi la un cost total minim.

Restricţiile sunt şi acum de trei feluri: restricţiile de compoziţie a amestecului, restricţiile datorate sensului economic al variabilelor şi restricţia de minimizare a costului total.

Traducerea algebrică a primelor două categorii este:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i=\overline{1,m} \tag{3.1.7}$$

$$x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n} \tag{3.1.8}$$

Costul total al materiilor prime necesare pentru realizarea unei unităţi de amestec este dat de funcţia:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.1.9}$$

care se cere a fi minimizată.

3.1.2. FORMULAREA GENERALĂ A UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ

Se constată că modelele matematice particulare, ataşate problemelor economice prezentate anterior prezintă o serie de asemănări, fapt ce permite înglobarea lor într-un model general. Să considerăm un sistem care poate conţine ecuaţii, inecuaţii de un semn sau altul, adică un sistem de forma:

$$\begin{cases} a_{11}+x_1+a_{12}x_2+\dots a_{1n}x_n & \lesseqgtr b_1 \\ a_{21}+x_1+a_{22}x_2+\dots a_{2n}x_n & \lesseqgtr b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}+x_1+a_{m2}x_2+\dots a_{mn}x_n & \lesseqgtr b_m \end{cases} \tag{3.1.10}$$

numit **sistemul de restricţii** (economice) **al problemei**, care poate fi scris condensat (utilizând indicele de sumare) şi sub forma:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \lesseqgtr b_i, \quad i=\overline{1,m} \tag{3.1.11}$$

(semnul $\lesseqgtr$ înseamnă semnul =, ori $\leq$, ori $\geq$, ori <, ori >). Condiţiile de tipul:

$$x_j \geq 0, \quad j=\overline{1,n} \tag{3.1.12}$$

sunt numite **condiţii de nenegativitate** şi sunt necesare datorită caracterului economic real al variabilelor (d.p.d.v. strict matematic putem rezolva şi problemele în care aceste condiţii nu apar). Funcţia liniară:

$$f(\mathrm{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{3.1.13}$$

care trebuie să o optimizăm (minimizăm sau maximizăm) se numeşte **funcţie obiectiv** (funcţie cost sau funcţie profit conform tipului de problemă studiat).

Problema generală a programării liniare se formulează astfel: în mulţimea soluţiilor sistemului (3.1.11) ce satisfac condiţiile (3.1.12) să se găsească o soluţie (numită *soluţie optimă*) ce dă valoarea minimă sau maximă funcţiei definite de (3.1.13).

3.1.3. FORME ALE UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ

Modelul matematic al unei probleme de programare liniară poate fi scris sub diverse forme potrivit scopurilor particulare urmărite. Aceste forme au doar o semnificaţie strict matematică şi uşurează respectiv simplifică demonstraţiile anumitor rezultate matematice (propoziţii sau teoreme) absolut necesare în fundamentarea modului (algoritmului) de rezolvare a problemelor de programare liniară.

a) <u>Forma matriceală</u>

Considerând matricele: $\mathbf{A}=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \in M_{m,n}$, $\mathbf{x}=(x_1,x_2,.....,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$\mathbf{b}=(b_1,b_2,....,b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ şi $\mathbf{C}=(c_1,c_2,....,c_n) \in \mathbb{R}^n$, putem scrie problema de programare liniară sub forma:

$$\begin{cases} (\min/\max)\ f(x) = C\cdot x \\ \qquad\qquad Ax \lesseqgtr b \\ \qquad\qquad x \geq 0 \end{cases}, \qquad (3.1.14)$$

b) <u>Forma vectorială</u>

Dacă introducem vectorii:

$$P_1 = \left(a_{11},a_{21},\ldots,a_{m1}\right)^T, P_2 = \left(a_{12},a_{22},\ldots,a_{m2}\right)^T, \ldots, P_n = \left(a_{1n},a_{2n},\ldots,a_{mn}\right)^T$$

$P_0 = \mathbf{b}$.

atunci problema poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{cases} (\min/\max)\ f(x) = C\cdot x \\ x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n \lesseqgtr P_0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (3.1.15)$$

c) forma canonică

O problemă de programare liniară este sub formă canonică dacă ea se scrie:

$$\begin{cases} (\min)\ f(x) = Cx \\ \quad Ax \geq b \\ \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad (3.1.16)$$

sau

$$\begin{cases} (\max)\ f(x) = Cx \\ \quad Ax \leq b \\ \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad (3.1.17)$$

d) forma standard

O problemă de programare liniară este sub formă standard dacă restricţiile ei sunt sub formă de egalităţi. O problemă de programare liniară poate fi scrisă sub forma standard matricială sau vectorială, adică:

$$\begin{cases} (\min/\max)\ f(x)=cx \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} (\min/\max)\ f(x) = C\cdot x \\ x_1P_1 + x_2P_2 + \ldots + x_nP_n = P_0 \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad (3.1.18)$$

Observaţie. Formele (3.1.16), (3.1.17), (3.1.18) ale unei probleme de programare liniară sunt echivalente dacă ţinem seama de următoarele:

1. Sensul unei inegalităţi se schimbă prin înmulţirea cu –1;
2. O inecuaţie de forma $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i$, poate fi scrisă ca o ecuaţie $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + x_i^c = b_i$, prin adăugarea a unei noi variabile (variabilă de compensare) $x_i^c \geq 0$;
3. O inecuaţie de forma: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i$, poate fi scrisă ca o ecuaţie $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - x_i^c = b_i$, scăzând o variabilă de compensare $x_i^c \geq 0$;
4. O ecuaţie poate fi scrisă ca două inecuaţii de semn contrar ;
5. Problemele de maxim pentru funcţia $f(x)$ pot fi reduse la o problemă de minim pentru funcţia $f'(x) = -f(x)$; cu alte cuvinte în cazul unei funcţii (forme) liniare de tipul (3.1.13) are loc egalitatea :

$$(\max) f(x) = -(\min)(-f(x)) \equiv -(\min) f^{'}(x) \quad , \textit{pentru} \ (\forall) x \in \mathbb{R}^n$$

Având în vedere cele de mai sus, în continuare ne vom ocupa **numai de probleme aflate sub forma standard cu cerinţa de minim pentru funcţia obiectiv**.

3.1.4. MULŢIMI CONVEXE

Fie spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ şi M o submulţime nevidă a sa ($M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \varnothing$).

Definiţia 3.1.1. *Mulţimea* $M \subset \mathbb{R}^n$ *se numeşte* ***convexă*** *dacă* $(\forall) x_1, x_2 \in M$ *şi* $(\forall)\lambda \in 0,1$ *avem:*

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in M \tag{3.1.19}$$

Definiţia 3.1.2. *Un punct (vector)* $x \in M$ *se numeşte punct* ***extrem*** *sau* ***vârf al mulţimii convexe M****, dacă nu există* $\mathbf{x_1} \neq \mathbf{x_2}$ *din M şi nu există* $\lambda \in (0,1)$ *astfel încât*

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \tag{3.1.20}$$

în caz contrar, punctul se numeşte ***punct interior****.*

Definiţia 3.1.3. *Numim* ***combinaţie liniară convexă*** *a vectorilor* $x_i \in M$, $i = \overline{1,k}$ *o expresie de forma:*

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i \ \text{, cu } \lambda_i \in [0,1] \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \tag{3.1.21}$$

Observaţie. Se poate demonstra (relativ uşor) că orice punct interior se poate scrie (exprima) întotdeauna ca o combinaţie liniară convexă de punctele extreme ale mulţimii convexe; evident, conform definiţiei 3.1.2, un vârf (punct extrem) al unei mulţimi convexe nu poate fi scris ca o combinaţie liniar convexă de puncte interioare mulţimii.

3.1.5. SOLUŢII ALE UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ

Fie o problemă de programare liniară aflată sub forma standard matricială:

$$\begin{cases} (\min)\ f(x)=cx \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{3.1.22}$$

Definiţia 3.1.4. *Un vector* $x \in \mathbb{R}^n$ *ale cărui componente* x_j, $j=\overline{1,n}$ *verifică sistemul de restricţii şi condiţiile de nenegativitate se numeşte* ***soluţia admisibilă*** *a unei probleme de programare liniară.*

Mulţimea soluţiilor admisibile o vom nota cu S_a.

Teorema 3.1.1. Mulţimea soluţiilor admisibile S_a este o mulţime convexă.

Demonstraţie. Fie $x_1 \neq x_2 \in S_a$ două soluţii admisibile.

Atunci avem:

$Ax_1 = b$, $x_1 \geq 0$; $Ax_2 = b$, $x_2 \geq 0$. Să considerăm un vector x de forma:

$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, cu $\lambda \in 0,1$ **.**

Să arătăm că $x \in S_a$. Într-adevăr vom putea scrie:

$Ax = A\ \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\ = \lambda Ax_1 + (1-\lambda)Ax_2 = \lambda b + (1-\lambda)b = b$

şi deci verifică sistemul de restricţii.

Cum $\lambda \in 0,1$ **,** iar $x_1, x_2 \geq 0$, rezultă $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 = x \geq 0$ şi deci x este soluţie admisibilă a problemei de programare liniară.

Definiţia 3.1.5. *O soluţie admisibilă care are cel mult* ***m*** *componente strict pozitive, iar vectorii formaţi cu coloanele matricei A, corespunzătoare acestor componente sunt liniar independenţi, se numeşte* ***soluţie admisibilă de bază***.

Dacă soluţia admisibilă de bază are exact **m** componente strict pozitive, spunem că este ***nedegenerată***, iar dacă are mai puţine, ***degenerată***. Mulţimea soluţiilor admisibile de bază o vom nota cu S_{ab} şi este o mulţime finită (card $S_{ab} \le C_n^m$) deci evident, nu este o mulţime convexă.

Exemplul 3.1.1.

Fie problema de programare:

$$\begin{cases} \text{(min) f(x)} = 2x_1 + x_2 + 2x_4 \\ \qquad x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 2 \\ \qquad 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_j \ge 0,\ j = \overline{1,4} \end{cases}$$

În baza definiţiilor (3.1.4) şi (3.1.5) constatăm că:

$x_1 = (2/3, 1/3, 2/3, 5/3)^T$ este soluţie admisibilă

$x_2 = (0, 1, 0, 5)^T$ este soluţie admisibilă de bază nedegenerată

$x_3 = (0, 0, 2, 0)^T$ este soluţie admisibilă de bază degenerată

$x_4 = (1, 0, 1, 0)^T$ este soluţie admisibilă, dar nu este de bază deoarece (vectorii P_1 şi P_3 nu sunt liniar independenţi)

Teorema 3.1.2. Orice soluţie admisibilă de bază a unei probleme de programare liniară, este un punct extrem al mulţimii soluţiilor admisibile S_a şi reciproc, orice punct extrem al mulţimii soluţiilor admisibile este o soluţie de bază a problemei de programare liniară, cu alte cuvinte are loc:

$$x \in S_{ab} \quad \Leftrightarrow \quad x \in S_a \text{ este punct extrem} \qquad (3.1.23)$$

Definiţia 3.1.6. *O soluţie admisibilă x se numeşte* ***soluţie optimă****, dacă realizează minimul sau maximul funcţiei obiectiv f; mulţimea soluţiilor optime o vom nota cu* S_O

Se poate demonstra că mulţimea soluţiilor optime este o mulţime convexă. Evident, teoretic S_O poate să fie vidă (problema de programare aferentă nu are soluţii optime), să aibă o infinitate de elemente (în acest caz spunem că problema de programare aferentă are o infinitate de soluţii optime). Dar cazul cel mai des întâlnit şi cel care apare în imensa majoritate a problemelor economice reale este cel în care S_O are numai un element (problema de programare aferentă are soluţie optimă unică).

Teorema 3.1.3. Dacă o problemă de programare are o soluţie optimă finită, atunci există un punct extrem al mulţimii soluţiilor admisibile S_a în care funcţia obiectiv ia aceeaşi valoare, adică:

$$(\min) f(x) = f_O \in \mathbb{R}(finit) \Rightarrow (\exists) x \in S_{ab} \; a.i. \; f(x) = f_O \qquad (3.1.24)$$

3.2. METODA SIMPLEX ŞI ALGORITMUL SIMPLEX PRIMAL

3.2.1. PRINCIPIILE METODEI SIMPLEX

Să considerăm problema de programare liniară sub forma standard matricială:

$$\begin{cases} (\min)\ f(x)=cx & (*) \\ Ax = b & (**) \\ x \geq 0 & (***) \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

sau vectorială

$$\begin{cases} (\min)\ f(x) = C \cdot x & (*) \\ x_1 P_1 + x_2 P_2 + \ldots + x_n P_n = P_0 & (**) \\ x \geq 0 & (***) \end{cases} \qquad (3.2.2)$$

Raţionând în mod simplist, pentru a rezolva o problemă de programare liniară (adusă la forma standard), ar trebui să parcurgem următorii paşi:

1. <u>Să determinăm toate soluţiile sistemului</u> liniar compatibil nedeterminat (**), lucru relativ uşor şi cunoscut încă din liceu;
2. <u>Să eliminăm (cum!?) din infinitatea de soluţii</u> a lui (**) acele soluţii (tot o infinitate) care nu verifică condiţiile de nenegativitate (***);

3. Din infinitatea de soluţii admisibile rămase (adică soluţiile sistemului (**) care satisfac condiţiile (***)) să o găsim (cum!?) pe *aceea* sau *acelea* care fac funcţia obiectiv să ia cea mai mică valoare, adică care satisfac(e) şi condiţia (*).

Rezultatele indicate în capitolul precedent ne oferă un mod simplu şi elegant de determinare a soluţiei optime a unei probleme de programare liniară. Astfel, teoremele 3.1.2 şi 3.1.3 ne indică că trebuie să căutăm soluţiile optime ale unei probleme de programare liniară, în mulţimea soluţiilor admisibile de bază (S_{ab} este o mulţime finită având cel mult C_n^m elemente). Cu alte cuvinte, va trebui să parcurgem următorii paşi:

1. Determinăm (eventual folosind transformări elementare) toate soluţiile de bază ale sistemului (**); sunt cel mult C_n^m soluţii de bază, deci un număr finit (şi nu infinit);
2. Eliminând soluţiile cu componente negative (neadmisibile), care nu satisfac condiţiile (***), obţinem mulţimea S_{ab} a soluţiilor de bază admisibile, printre care se află şi soluţi-a/ile optim-ă/e căutat-ă/e;
3. Calculăm valoarea funcţiei obiectiv în toate soluţiile admisibile de bază aflate la pct. 2). Soluţia optimă va fi cea în care funcţia obiectiv $f(x)$ ia valoarea minimă.

Totuşi, chiar şi în cazul problemelor în care numărul restricţiilor (ecuaţiilor)**m** respectiv al variabilelor (necunoscutelor) **n** este relativ mic, numărul de calcule necesar aplicării metodei de mai sus este extrem de mare, ceea ce o face aproape imposibil de aplicat în realitate. De exemplu, pentru **m=10, n=40** numărul de soluţii de bază al sistemului (**), care trebuie determinate, este de $C_{40}^{10} = 846.660.528$ soluţii (!!).

Vom prezenta în continuare o metodă (algoritm) numită metoda (algoritmul) SIMPLEX, elaborată de matematicianul german G.B. Dantzig în anul 1906, algoritm care are avantajul unui volum extrem de redus de calcule şi utilizarea numai a transformărilor elementare ca aparat matematic.

Să presupunem fără a restrânge generalitatea că matricea lărgită a sistemului de restricţii este de forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & \alpha_{1m+1} & \ldots & \alpha_{1n} & \vdots & \beta_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \alpha_{2m+1} & \ldots & \alpha_{2n} & \vdots & \beta_2 \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \alpha_{mm+1} & \ldots & \alpha_{mn} & \vdots & \beta_m \end{bmatrix} \qquad (3.2.3)$$

Vectorii $P_1, P_2, \ldots, P_m$ formaţi cu primele m coloane ale matricei A, fiind liniar independenţi, formează o bază în $\mathbb{R}^m$. În acest caz un vector oarecare P_j, $j=\overline{m+1,n}$ se exprimă în mod unic cu ajutorul vectorilor bazei sub forma:

$$P_j=\alpha_{1j}P_1+\alpha_{2j}P_2+\ldots+\alpha_{mj}P_m=\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}P_i \qquad (3.2.4)$$

Să notăm cu C_B vectorul linie format cu primele m componente ale vectorului C, adică coeficienţii variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ din funcţia obiectiv ce corespund vectorilor care au intrat în bază.

Introducem mărimile:

$$z_j-c_j=z_j-C_BP_j \equiv \sum_{i=1}^{m} c_i\alpha_{ij}\ ;\ j=\overline{1,n} \qquad (3.2.5)$$

Dacă presupunem acum că β_i, $i=\overline{1,m}$ sunt pozitive şi dacă avem în vedere (3.2.3) deducem că vectorul $\overline{x}$ de componente,

$\overline{x}_1=\beta_1, \overline{x}_2=\beta_2, \ldots, \overline{x}_m=\beta_m, \overline{x}_{m+1}=0, \ldots, \overline{x}_n=0$, este o soluţie admisibilă de bază a problemei de programare considerată.

Teorema 3.2.1. ***(Criteriul de optim)*** **Dacă diferenţele $z_j-c_j\le 0$, $j=\overline{m+1,n}$, atunci problema de programare liniară are optim finit şi $\overline{x}$ este soluţia optimă căutată.**

Observaţii:

a) se constată uşor că $z_j-c_j=0$ pentru $j=\overline{1,m}$

b) În problemele de programare, în care avem cerinţa de maxim pentru funcţia obiectiv, criteriul de optimalitate va fi: $z_j-c_j\ge 0$, $j=\overline{m+1,n}$

c) Din demonstraţia teoremei rezultă că în cazul în care există $z_j-c_j>0$ în probleme de minim pentru funcţia obiectiv pot exista soluţii admisibile pentru care funcţia obiectiv să ia o valoare mai mică decât pentru $\overline{x}$, deci $\overline{x}$ nu este optimă.

În cazul în care $\overline{x}$ nu este soluţie optimă vom căta să obţinem din vechea soluţie de bază admisibilă $\overline{x}$ o nouă soluţie de bază admisibilă $\overline{y}$ “mai bună” decât vechea soluţie $\overline{x}$, în sensul că valoarea funcţiei obiectiv $f(x)$ este mai “bună” (adică mai mică) decât în vechea soluţie ($f(\overline{y}) < f(\overline{x})$).

Dantzig demonstrează că, acest lucru se poate obţine înlocuind un vector **P**$_i$ (corespunzător unei variabile principale a soluţiei $\overline{x}$)din bază, cu un vector **P**$_j$ (corespunzător unei variabile secundare a soluţiei $\overline{x}$) din afara bazei. Să notăm cu y_k , $k = 1, 2, \ldots, i-1, j, i+1, \ldots, m$ componenetele noii soluţii de bază $\overline{y}$
.

Din (1.2.5) înlocuind $\overline{b}_k$ cu β_k, $\overline{a}_{ki}$ cu α_{ij}, x_{jk} cu y_k, x_j cu β_j obţinem:

$$\begin{cases} y_k = \beta_k - \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ij}}\alpha_{kj} \;, \quad \alpha_{ij} \neq 0, \quad k = \overline{1,m} \;;\; k \neq i \\ y_j = \dfrac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \;, \; k = i \end{cases} \tag{3.2.6}$$

Vectorul **P**$_i$ (care iese din bază) şi vectorul **P**$_j$ (care va intra în bază) se determină pe baza următoarelor două teoreme:

Teorema 3.2.2.(*Criteriul de ieşire din bază).* Condiţiile necesare pentru înlocuirea vectorului P$_i$ cu vectorul P$_j$ sunt:

$$\theta_i \equiv \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \min\left\{\theta_k \equiv \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}} \;,\; k = \overline{1,m} \;;\; \alpha_{kj} > 0\right\}, \tag{3.2.7}$$

Să vedem acum ce condiţii trebuie să îndeplinească un vector P_j pentru a intra în bază în locul vectorului P_i pentru a obţine o soluţie "mai bună".

Teorema 3.2.3. *(Criteriul de intrare în bază)* Condiţia pe care trebuie să o îndeplinească un vector P$_j$, $j = \overline{m+1, n}$ pentru a intra în bază în locul vectorului P$_i$ în vederea obţinerii unei soluţii "mai bune" este:

$$z_j - c_j \geq 0 \tag{3.2.8}$$

3.2.2. ETAPELE ALGORITMULUI SIMPLEX PRIMAL

Rezultatele enunţate în capitolul anterior se concretizează în următorul mod de lucru, cunoscut în literatura de specialitate sub denumirea de **algoritmul Simplex primal**. Acesta constă dintr-o succesiune de iteraţii, care îmbunătăţesc treptat o soluţie admisibilă de bază iniţială. Pe baza consideraţiilor din aliniatul 3.2.1. putem pune în evidenţă etapele algoritmului care ne vor conduce la soluţia optimă a problemei dacă aceasta există.

1. Se determină o soluţie admisibilă de bază, fie aceasta $\overline{x}$ (oare e atât de simplu!?);
2. Se construieşte tabelul Simplex corespunzător acestei soluţii (este redat mai jos);
3. Se calculează diferenţele $z_j - c_j$, $j = \overline{1,n}$ aflate pe ultima linie a tabelului iniţial. Aplicăm *criteriul de optim*. Putem avea următoarele patru situaţii:
   a) dacă $z_j - c_j < 0$, $j = \overline{m+1,n}$ atunci soluţia admisibilă de bază $\overline{x}$ este **optimă (şi unică!);**
   b) dacă $z_j - c_j \le 0$, $j = \overline{m+1,n}$ şi $(\exists) z_j - c_j = 0$ iar vectorul P_j corespunzător are şi componente strict pozitive, atunci soluţia admisibilă de bază $\overline{x}$ este **optimă** (dar **nu este unică**; problema admite **o infinitate de soluţii optime** cu aceeaşi valoare a funcţiei obiectiv);
   c) Dacă există indici j, $j = \overline{m+1,n}$ pentru care $z_j - c_j \ge 0$, iar toate componentele vectorului P_j corespunzător sunt mai mici sau egale cu zero $(\alpha_{ij} \le 0)$, atunci problema de programare are **optim infinit**;
   d) Dacă $(\exists)\, j$; $j = \overline{m+1,n}$ pentru care $z_j - c_j > 0$ şi nu toţi $\alpha_{ij} \le 0$, atunci se trece la etapa următoare (soluţia nu este optimă).
4. Se aplică *criteriul de intrare*, determinând vectorul P_j care intră în bază ca fiind acel vector pentru care:

$$z_j - c_j = \max_{z_k - c_k \geq 0} (z_k - c_k)$$

5. Se aplică *criteriul de ieşire*. Părăseşte baza vectorul P_i pentru care

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \min_{\alpha_{kj} > 0} \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}} \quad \Leftrightarrow \quad \theta_i = \min\{\theta_k > 0\}$$

6. Se face schimbarea de bază obţinând o nouă soluţie admisibilă de bază $\overline{y}$, pentru care etapele algoritmului se reiau.

Datele problemei de programare liniară şi elementele ce au intervenit în teoremele 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 respectiv în algoritmul prezentat mai sus, le sintetizăm în următorul **tabel Simplex**:

B	C_B	P_0	c_1	c_2	...	c_i	...	c_m	...	c_j	...	c_n	
			P_1	P_2	.....	P_i	....	P_m	....	P_j	...	P_n	$\theta_k = \frac{P_O}{P_j}$
P_1	c_1	β_1	1	0	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	α_{1j}	...	α_{1n}	θ_1
P_2	c_2	β_2	0	1	$\cdots$	0	$\cdots$	0	$\cdots$	α_{2j}	...	α_{2n}	θ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
P_i	c_i	β_i	0	0	$\cdots$	1	$\cdots$	0	$\cdots$	α_{ij}	...	α_{in}	θ_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	
P_m	c_m	β_m	0	0	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	α_{mj}	...	α_{mn}	θ_m
z_j-c_j	-	$f(\overline{x})$	0	0	...	0	$\cdots$	0	...	z_j-c_j	...	z_n-c_n	

Observaţii:

a) Valoarea funcţiei obiectiv pentru soluţia admisibilă de bază este dată de:

$$f(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i \beta_i = C_B P_0$$

b) Diferenţele $z_j - c_j$ se calculează cu relaţiile:

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} c_i \alpha_{ij} - c_j$$

i) Dacă soluţia nu este optimă (există $z_j - c_j \geq 0$) alegem diferenţa pozitivă care este cea mai mare, determinând în felul acesta vectorul P_j care intră în bază.

ii) Dacă există mai multe astfel de diferenţe, atunci poate intra în bază oricare dintre vectorii ce corespund acestora.

iii) Dacă pe coloana vectorului P_j care trebuie să intre în bază toate elementele sunt mai mici sau egale cu zero, atunci problema admite optim infinit.

iv) Dacă există şi elemente strict mai mari ca zero considerăm toate rapoartele dintre componentele lui P_0 şi componentele strict pozitive ale vectorului P_j, rapoarte de forma $\theta_i = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \frac{componentele\ lui\ P_O}{componentele\ lui\ P_j} > 0$ cu $\alpha_{ij} > 0$. Cel mai mic raport $\theta_i > 0$ va indica vectorul care părăseşte baza. Dacă vectorul P_i părăseşte baza atunci noua soluţie admisibilă de bază se obţine cu ajutorul unui pivotaj cu elementul pivot α_{ij}.

Exemplu 3.2.1. Pentru fabricarea a 3 tipuri de produse P_j, $j=\overline{1,3}$ se utilizează 2 tipuri de resurse R_1 şi R_2. Consumurile specifice, cantităţile de resurse şi profiturile unitare sunt date în tabelul:

P / R	P_1	P_2	P_3	Limitări resurse
R_1	1	1	2	30
R_2	2	3	1	57
Profit	4	1	5	

Să se determine cantităţile de produse P_j, $j=\overline{1,3}$ ce urmează a fi realizate pentru a obţine un profit maxim.

Soluţie. Notăm cu x_1, x_2, x_3 cantităţile de produse de tipul P_1, P_2, P_3 ce urmează a fi realizate. Modelul matematic al problemei este:

$$\begin{cases}(\max)\ f(x)=4x_1+x_2+5x_3\\ x_1+\ x_2+2x_3\le 30\\ 2x_1+3x_2+\ x_3\le 57\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3}\end{cases}$$

Aducem problema la forma standard folosind variabile de compensare x_4^c şi x_5^c şi considerăm problema de minim pentru funcţia –f .

Vom avea problema:

$$\begin{cases}(\min)\ (-f(x))=-4x_1-x_2-5x_3\\ x_1+\ x_2+2x_3+x_4^c=30\\ 2x_1+3x_2+\ x_3+x_5^c=57\\ x_j\ge 0,\ j=\overline{1,3},\ x_4^c\ge 0,\ x_5^c\ge 0\end{cases}$$

O soluţie admisibilă de bază este $x = (0, 0, 0, 30, 57)^T$.

Tabelul simplex se prezintă astfel:

B	C_B	P_0	-4	-1	-5	0	0	
			P_1	P_2	P_3	P_4^c	P_5^c	θ_i
P_4^c	0	30	1	1	2	1	0	$\theta_1=\frac{30}{2}=15$
P_5^c	0	57	2	3	1	0	1	$\theta_2=\frac{57}{1}=57$
z_j-c_j	–	0	4	1	5	0	0	
P_3	– 5	15	1/2	1/2	1	1/2	0	30
P_5^c	0	42	3/2	5/2	0	– 1/2	1	28
z_j-c_j	–	–75	3/2	– 3/2	0	– 5/2	0	
P_3	– 5	1	0	– 1/3	1	2/3	–1/3	-
P_1	– 4	28	1	5/3	0	–1/3	2/3	-
z_j-c_j	–	–117	0	–1	0	–2	–1	-

În prima etapă au intrat în bază vectorii x_4^c şi x_5^c. Pe linia diferenţelor $z_j - c_j$ observăm că există diferenţe strict pozitive, deci conform cazului 3)$_d$ de la criteriul de optim soluţia iniţială nu este optimă. Cea mai mare diferenţă pozitivă este z_3-$c_3=5$, şi conform criteriului de intrare, vectorul P_3 va intra în bază. Avem rapoartele $\theta_4=\frac{\beta_4}{\alpha_{43}}=\frac{30}{2}=15,\quad \theta_5=\frac{\beta_5}{\alpha_{53}}=\frac{57}{1}=57$. Cel mai mic raport este $\theta_4=15$, ceea ce înseamnă (conform criteriului de ieşire)că vectorul P_4^c părăseşte baza fiind înlocuit de vectorul P_3 . Un pivotaj cu element pivot 2 (încercuit) conduce la o nouă soluţie admisibilă de bază $x=(0, 0, 15, 0, 42)^T$ care nu este optimă (există diferenţe $z_j-c_j>0$ în tabelul corespunzător noii soluţii găsite). Continuând cu o nouă iteraţie cu elementul pivot 3/2 (încercuit), obţinem soluţia admisibilă de bază $x=(28, 0, 1, 0, 0)^T$ care este optimă şi unică.

Lăsând la o parte variabilele de compensare introduse, obţinem soluţia optimă a problemei iniţiale: $x=(28, 0, 1)^T$. D.p.d.v. economic aceasta înseamnă realizarea a 28 unităţi de produs P_1 şi a unei unităţi de produs P_3 , profitul maxim posibil de realizat fiind de 117 (u.m.).

Exemplul 3.2.2 Să se determine soluţiile optime ale problemei:

$$\begin{cases}(\min)\ f(x)=-3x_1-2x_2-4x_3\\ x_1+2x_2-x_3+x_4=7,\\ x_1-4x_2+x_3+x_5=1\\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,5}\end{cases}$$

O soluţie admisibilă de bază iniţială este $x=(0, 0, 0, 7, 1)^T$. Tabelul Simplex corespunzător este:

B	C_B	P_0	-3	-2	-4	0	0	
			P_1	P_2	P_3	P_4^c	P_5^c	θ_i
P_4	0	7	1	2	-1	1	0	$\theta_4<0$
P_5	0	1	1	-4	1	0	1	$\theta_5=1$
z_j-c_j	–	0	3	2	4	0	0	
P_4	0	8	2	-2	0	1	1	$\theta_4<0$
P_3	-4	1	1	-4	1	0	1	$\theta_3<0$
z_j-c_j	–	-4	-1	18	0	0	-4	

Algoritmul se opreşte, chiar dacă soluţia admisibilă de bază găsită $x = 0, 0, 1, 8, 0^{\mathrm{T}}$ nu este optimă (diferenţa $z_2 - c_2 = 18 > 0$), deoarece vectorul P_2 care ar trebui să intre în bază are toate componentele negative. Problema de programare liniară considerată admite optim infinit conform cazului $3)_c$.

3.2.3. METODA CELOR DOUĂ FAZE

Algoritmul Simplex este un algoritm rapid convergent la soluţia optimă. Astfel, plecând de la o soluţie de bază admisibilă iniţială a sistemului în formă standard, cu **m** ecuaţii şi **n** necunoscute, după cel mult **m+n** iteraţii obţinem soluţia optimă. De exemplu, în cazul unui sistem cu 10 ecuaţii şi 40 de necunoscute, plecând de la o soluţie admisibilă iniţială, în cel mult 10+40=50 de paşi (iteraţii) se ajunge la soluţia optimă (dacă există).

Determinarea (eventual prin transformări elementare) a unei soluţii de bază pentru un sistem liniar, chiar de dimensiuni mari, este extrem de simplă. Problema care apare, este admisibilitatea acesteia. De exemplu, în cazul sistemului prezentat anterior cu $C_{40}^{10} = 846.660.528$ soluţii de bază, se poate întâmpla ca foarte multe dintre acestea, sau chiar toate, să fie neadmisibile. Am putea astfel calcula un număr imens (sute de milioane) de soluţii neadmisibile (deci inutile), până obţinem acea soluţie admisibilă iniţială. După găsirea acesteia, aplicând algoritmul Simplex vom obţine soluţia optimă foarte rapid, în cel mult 50 de iteraţii.

Vom indica o metodă mai lesne de aplicat în practică pentru a obţine o soluţie admisibilă de bază iniţială: **metoda celor două faze**.

Să considerăm că problema de programare liniară (3.2.1) este sub formă standard, termenii liberi sunt pozitivi şi că matricea A a sistemului de restricţii nu conţine nici o coloană a matricei unitate. Vom adăuga la fiecare restricţie o variabilă nenegativă, numită <u>*variabilă artificială*</u>. Fiind **m** restricţii vom adăuga **m** variabile artificiale x_k^m, $k=\overline{n+1, n+m}$, şi considerăm o nouă problemă de programare liniară, numită **problema artificială** ataşată problemei iniţiale, de forma:

$$\begin{cases}(\min)\ g(x^a) = \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k^a \\ Ax + I_m x^a = b \\ x \geq 0, x^a \geq 0\end{cases} \qquad (3.2.9)$$

Aici I_m este matricea unitate de ordinul **m** şi $x^a = \left(x_{n+1}^a, x_{n+2}^a, ...x_{n+m}^a\right)^T$ vectorul variabilelor artificiale. Se constată că orice soluţie admisibilă a problemei (3.2.9) în care variabilele artificiale sunt nule, devine după înlăturarea acestora o soluţie admisibilă de bază a problemei (3.2.1).

Metoda celor două faze constă în:

Faza întâi. Se determină soluţia optimă a problemei (3.2.9) folosind algoritmul Simplex. Soluţia de bază admisibilă iniţială artificială, se determină direct din sistemul artificial, considerând variabile principale pe cele artificiale.

Aplicând problemei (3.2.19) algoritmul Simplex primal, ajungem la una din situaţiile:

a) $(\min)\ g(x^a)=0$ şi nici un vector corespunzător variabilelor artificiale nu este în bază.
b) $(\min)\ g(x^a)=0$ şi în bază rămân şi vectori corespunzători variabilelor artificiale.
c) $(\min)\ g(x^a) \neq 0$.

Faza a doua. În situaţia a) soluţia optimă a problemei (3.2.9), după înlăturarea variabilelor artificiale, reprezintă o soluţie de bază admisibilă, iniţială, nedegenerată pentru problema (3.2.1). Cu această soluţie iniţială, se aplică algoritmul Simplex primal în vederea găsirii soluţiei optime a problemei iniţiale. Din tabelul final al fazei întâi se elimină elementele ce ţin de variabilele artificiale (coloanele vectorilor artficiali), se modifică coeficienţii funcţiei obiectiv şi se calculează noile diferenţe $z_j - c_j$, obţinându-se primul tabel Simplex al fazei a doua. .

Situaţia b) conduce la o soluţie admisibilă de bază degenerată pentru problema iniţială. Consideraţiile anterioare rămân valabile, însă nu vor fi eliminate coloanele corespunzătoare variabilelor artificiale, pentru care vectorii artificiali corespunzători au rămas în bază.

În situaţia c) problema iniţială nu admite soluţii admisibile.

Exemplul 3.2.3. Să se determine soluţiile optime ale problemei de programare liniară:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3 \geq 3, \\ 3x_1+3x_2+\ \ x_3 \geq 4 \\ \qquad x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3} \\ (\min)\ f(x)=3x_1-4x_2+2x_3 \end{cases}$$

Aducem problema la forma standard, ea devenind:

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-x_4^c=3, \\ 3x_1+3x_2+\ \ x_3-x_5^c=4, \\ x_j \geq 0,\ j=\overline{1,3},\ x_4^c \geq 0,\ x_5^c \geq 0 \\ (\min)\ f(x)\ =3x_1-4x_2+2x_3 \end{cases}$$

Vom întrebuinţa metoda celor două faze.

În prima fază căutăm soluţia optimă a problemei (artificiale):

$$\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3-x_4^c+x_6^a=3, \\ 3x_1+3x_2+\ \ x_3-x_5^c+x_7^a=4, \\ x_j \geq 0,\ x_4^c,\ x_5^c,\ x_6^a,\ x_7^a \geq 0 \\ (\min)\ g(x^a)\ =x_6^a+x_7^a \end{cases}$$

Soluţia admisibilă de bază de pornire este $x=\ 0, 0, 0, 0, 0, 3, 4\ ^{T}$**.**

Tabelul simplex are forma:

B	C_B	P_0	0	0	0	0	0	1	1
			P_1	P_2	P_3	P_4^c	P_5^c	P_6^a	P_7^a
P_6^a	1	3	1	3	2	–1	0	1	0
P_7^a	1	4	3	3	1	0	–1	0	1
z_j-c_j	–	7	4	6	3	–1	–1	0	0
P_2	0	1	1/3	1	2/3	–1/3	0	1/3	0
P_7^a	1	1	2	0	–1	1	–1	–1	1
z_j-c_j	–	1	2	0	–1	1	–1	–1	0
P_2	0	5/6	0	1	5/6	–1/2	1/6	1/2	–1/6
P_1	0	1/2	1	0	–1/2	1/2	–1/2	–1/2	1/2
z_j-c_j	–	0	0	0	0	0	0	–1	–1

Am găsit soluţia optimă $x = (1/2, 5/6, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ a problemei artificiale. Soluţia admisibilă de bază pentru problema iniţială va fi: $x = (1/2, 5/6, 0, 0, 0)^T$, iar sistemul de restricţii cel ce rezultă din ultima etapă a algoritmului simplex pentru problema artificială.

Tabelul Simplex corespunzător fazei a doua are forma:

B	C_B	P_0	3	– 4	2	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4^c	P_5^c
P_2	–4	5/6	0	1	5/6	–1/2	1/6
P_1	3	1/2	1	0	–1/2	1/2	–1/2
z_j-c_j	–	–11/6	0	0	–41/6	7/2	–13/6
P_2	–4	4/3	1	1	1/3	0	–1/3
P_4^c	0	1	2	0	–1	1	–1
z_j-c_j	–	16/3	–7	0	–10/3	0	4/3

Problema admite optim infinit deoarece vectorul P_5^c nu are şi coordonate strict pozitive.

Exemplul 3.2.4. Să se determine soluţiile optime ale problemei de programare liniară:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 4 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 - 8x_6 = 3 \\ \ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 3x_6 = 2 \\ xj \geq 0, j = \overline{1,6} \\ (\min)f(x) = -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 8x_6 \end{cases}$$

Prima şi a treia coloană a matricei A sunt coloane ale matricei unitate de ordinul trei şi atunci vom adăuga la restricţia a doua o variabilă artificială x_7^a.

Vom căuta în prima fază soluţia optimă a problemei:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 4, \\ 3x_2 - x_4 + x_5 - 8x_6 + x_7^a = 3, \\ \ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 3x_6 = 2. \\ x_j \geq 0, j = \overline{1,6}\ , \quad x_7^a \geq 0 \\ (\min)g(x^a) = \ x_7^a \end{cases}$$

O soluţie admisibilă de bază pentru această problemă este:

$x = (4, 0, 2, 0, 0, 0, 3)^T$

Tabelul simplex are forma:

B	C_B	P_0	0	0	0	0	0	0	1
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7^a
P_1	0	4	1	0	0	–2	1	2	0
P_7^a	1	3	0	3	0	–1	1	–8	1
P_3	0	2	0	1	1	1	–1	–3	0
z_j-c_j	–	3	0	3	0	–1	1	–8	0
P_1	0	4	1	0	0	–2	1	2	1
P_2	0	1	0	1	0	–1/3	1/3	–8/3	1/3
P_3	0	1	0	0	1	4/3	–4/3	–1/3	–1/3
z_j-c_j	–	0	0	0	0	0	0	0	-1

Soluţia admisibilă de bază pentru problema iniţială va fi $x = (4, 1, 1, 0, 0, 0)^T$.

Tabelul simplex pentru problema iniţială (faza a doua) are forma:

B	C_B	P_0	–2	–3	–1	4	5	8
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	–2	4	1	0	0	–2	1	2
P_2	–3	1	0	1	0	–1/3	1/3	–8/3
P_3	–1	1	0	0	1	4/3	–4/3	–1/3
z_j-c_j	–	–12	0	0	0	–1/3	–20/3	–11/3

Soluţia optimă a problemei este $x_{opt} = (4,1,1,0,0,0)^T$, (min)f(x) = –12.

3.3. PROBLEMA TRANSPORTURILOR

Să considerăm că un anumit produs este stocat în **m** depozite D_i în cantităţile a_i, $i = \overline{1,m}$. Produsul este solicitat de **n** centre de consum C_i în cantităţile b_j, $j = \overline{1,n}$. Costul transportului unei unităţi de produs de la depozitul D_i la centrul C_j este a_{ij} u.m. Se cere a se determina cantităţile x_{ij} de produs care urmează a fi transportate de la depozite la centrele de consum astfel ca disponibilul a fie epuizat, în fiecare depozit, cererea să fie satisfăcută exact, în fiecare centru de consum, iar costul total al transportului produsului să fie minim. Se presupune că $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{\alpha=1}^{n} b_j$, adică disponibilul din depozite este egal cu cererea totală a centrelor de consum. O astfel de problemă este denumită **problema de transport echilibrată**.

Restricţiile problemei sunt din nou de trei tipuri: restricţii asupra disponibilului şi cererii, restricţiile datorate sensului economic al variabilelor şi restricţia minimizare a costului.

Datele modelului economic le prezentăm într-un tabel de forma:

D \ C	C_1	C_2	…	C_j	…	C_n	a_i
D_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
D_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2j} x_{2j}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
D_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}	a_i
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
D_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	…	b_i	…	b_n	Σa_i \ Σb_j

Traducerea algebrică a celor trei tipuri de restricţii conduce la:

$$\begin{cases} (\min)f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}, \quad x= \left(x_{11},x_{12},\ldots,x_{mn}\right)^T \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_{i,} \quad i=\overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j, \quad j=\overline{1,n} \\ x_{ij}\geq 0, \quad i=\overline{1,m}\,;\, j=\overline{1,n} \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Observaţie. Dacă disponibilul este mai mic decât cererea sau mai mare, pentru a echilibra problema se introduce un depozit fictiv sau un centru fictiv cu cantitatea (fictivă) existentă sau cerută astfel încât problema să devină echilibrată. Costurile unitare de transport pentru depozitul fictiv sau centrul fictiv se consideră nule.

Teorema 3.3.1. Problema echilibrată de transport echilibrată (3.3.1.) admite cel puţin o soluţie admisibilă, iar o soluţie de bază admisibilă de bază are cel mult $m+n-1$ componente diferite de zero.

Demonstraţie: Cum $\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j=S$, considerând $x_{ij}=\dfrac{a_i b_j}{S}$ avem:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=\sum_{j=1}^{n}\frac{a_i b_j}{S}=\frac{a_i}{S}\sum_{j=1}^{n} b_j=\frac{a_i}{S}S=a_i\ , \ i=\overline{1,m}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\frac{a_i b_i}{S}=\frac{b_j}{S}\sum_{i=1}^{m} a_i=\frac{b_j}{S}S=b_j\ , \ j=\overline{1,n}$$

şi cum $x_{ij}\geq 0$, ajungem la concluzia că $X(x_{ij})$ verifică sistemul de restricţii şi condiţiile nenegativitate, fiind deci soluţie admisibilă a problemei de transport. Putem observa că din cele $m+n$ restricţii doar $m+n-1$ sunt independente. Este suficient pentru aceasta, de exemplu, ca din suma primelor m restricţii, să scădem suma următoarelor $n-1$ şi vom obţine atunci ultima restricţie. Pe de altă parte ştim că numărul componentelor nenule ale unei soluţii de bază admisibile de bază este cel mult egal cu numărul restricţiilor independente şi în felul acesta teorema este demonstrată.

3.3.1. SOLUŢII ADMISIBILE DE BAZĂ PENTRU O PROBLEMĂ DE TRANSPORT

Soluţiile optime pentru o problemă de transport vor fi căutate în mulţimea soluţiilor admisibile de bază şi din acest motiv vom pune în evidenţă două metode prin care putem găsi aceste soluţii.

a) Metoda diagonalei. Se începe cu determinarea componentei corespunzătoare căsuţei din stânga sus a tabelului deci x_{11}

Vom lua $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ şi vom atribui valoarea zero tuturor variabilelor de pe aceiaşi linie sau coloană cu x_{11} în funcţie de următoarele situaţii:

1. dacă $a_1 < b_1$, vom lua $x_{11} = a_1$, $x_{1j} = 0$, $j = \overline{2,n}$

2. dacă $a_1 > b_1$, vom lua $x_{11} = b_1$, $x_{i1} = 0$, $i = \overline{2,m}$

3. dacă $a_1 = b_1$, vom lua $x_{11} = a_1 = b_1$, iar x_{12} sau $x_{21} = 0$,

şi restul componentelor de pe linia şi coloana lui x_{11} egale cu zero. În ultima situaţie obţinem soluţii degenerate.

Modificăm apoi a_1 şi b_1 înlocuindu-i cu $a_1' = a_{11} - x_{11}$, $b_1' = b_{11} - x_{11}$. Procedeul se repetă la pasul următor pentru calculele rămase necompletate care formează un tablou cu m – 1 linii şi n coloane ; m linii şi $n-1$ coloane ; sau $m-1$ linii şi $n-1$ coloane după cum primul pas s-a desfăşurat în situaţiile 1), 2), respectiv 3).

Prima componentă ce va fi determinată acum va ocupa aceeaşi poziţie (colţul stânga – sus), în noul tabel. Procesul se termină în cel mult $m+n-1$ paşi, la fiecare pas determinându-se complet o linie (situaţia 1), o coloană (situaţia 2), sau o linie şi o coloană situaţia 3. La fiecare pas se determină o singură componentă nenulă. Componentele nebazice nu se completează în tabel, căsuţele corespunzătoare rămânând libere pentru a nu se confunda componentele nebazice cu eventualele componente bazice nule.

b) Metoda costului minim. Această metodă este întru-totul similară celei a diagonalei, cu singura diferenţă că se va determina mai întâi componenta x_{ij} pentru care $c_{ij} = \min c_{kl}$, luând . $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$.

Exemplul 3.3.1. Să se determine o soluţie admisibilă de bază pentru problema de transport

C / D	C_1	C_2	C_3	C_4	a_i
D_1	4	2	2	3	35
D_2	2	2	4	5	40
D_3	3	4	2	3	20
b_j	50	10	25	10	95 / 95

a) Metoda diagonalei. Problema este echilibrată. Vom căuta o soluţie cu $m+n-1=3+4-1=6$

4 35	2	2	3	35, 0
2 15	2 10	4 15	5 5	40,25, 15, 0
3	4	2 10	3 10	20, 10, 0
50 15 0	10 0	25 10 0	10 0	

Pasul întâi: deoarece $\min(a_1,b_1)=a=35$, punem conform situaţiei 1) $x_{11}=35,\quad x_{12}=x_{13}=x_{14}=0$. Modificăm pe a_1 şi b_1 înlocuindu-i cu $a_1'=a_1-x_{11}=0,\ b_1'=b_1-x_{11}=15$.

Pasul al doilea: se pleacă de la tabelul format prin înlăturarea primei linii,: deoarece $\min(a_2,b_1')=b_1'=15$, punem (conform 2)) $x_{21}=15,\ x_{31}=0$ (x_{31} componentă nebazică). Modificăm pe a_2 şi b_1' înlocuind cu $a_2'=a_2-x_{21}=25,\ b_1''=b_1'-x_{21}=0$.

Pasul al treilea: a rămas de completat tabelul format din liniile a doua, a treia şi ultimile trei coloane. Cum $\min(a_2,b_2)=b_2=10$ punem $x_{22}=10,\ x_{32}=0$

(x_{32} componentă nebazică) înlocuindu-i cu $a_2'' = a_2' - x_{22} = 15$, $b_2' = b_2 - x_{22} = 0$.

Pasul al patrulea: a rămas de completat tabelul format din ultimile două linii şi coloane. Cum $\min(a_2'', b_3) = a'' = 15$, punem (conform 1)) $x_{23} = 15$, $x_4 = 0$ (x_{24} componentă nebazică). Modificăm pe a_{23}'' şi b_3 înlocuindu-i cu

$a_2''' = a_2'' - x_{23} = 0$,

$b_3' = b_3 - x_{23} = 10$.

Pasul al cincilea: a rămas de completat tabelul format din ultima linie şi ultimile două coloane. Cum $\min(a_3, b_3') = 10$ punem $x_{33} = 10$. Modificăm pe a_3 şi b_3' înlocuindu-i cu $a_3' = a_3 - x_{33} = 10$, $b_3'' = b_3' - x_{33} = 0$.

Pasul al şaselea: obligatoriu vom pune $x_{34} = 10$.

S-a obţinut o soluţie admisibilă de bază:

$$x_{11} = 35, x_{12} = 0, x_{13} = 0, x_{14} = 0, x_{21} = 15, x_{22} = 10, x_{23} = 15, x_{24} = 0, x_{31} = 0, x_{32} = 0,$$
$$x_{33} = 10, x_{34} = 10$$

costul total al transportului fiind 300 u.m.

b) Metoda costului minim. Vom considera din nou tabelul simplificat:

4	2	2 25	3 10	35, 10, 0
2 30	2 10	4	5	40, 30, 0,
3 20	4	2	3	20, 0
50 20 0	10 0	25 0	10 0	

Pasul întâi: $\min c_{ij} = c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{22} = c_{33} = 2$. Putem determina ori care dintre componentele x_{12}, $x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{33}$. Luăm $x_{22} = \min(a_2, b_2) = 10$, $x_{12} = x_{32} = 0$ (componente nebazice). Înlocuim pe a_2 şi b_2 cu $a_2' = a_2 - x_{22} = 30$, $b_3' = b_2 - x_{22} = 0$.

Pasul al doilea: $\min c_{ij} = c_{13} = c_{21} = c_{33} = 2$. Luăm $x_{21} = \min(a_2', b_1) = 30$, $x_{23} = x_{24} = 0$ (componente nebazice). Înlocuim pe a_2' şi b_2 cu $a_2'' = a_2' - x_{21} = 0,\ b_1' = b_1 - x_{21} = 20$.

Pasul al treilea: $\min c_{ij} = c_{13} = c_{33} = 2$.

Luăm $x_{13} = \min(a_1, b_3) = 25,\ x_{33} = 0$ (componentă nebazică). Înlocuim a_1 şi b_3 cu $a_1' = a_1 - x_{13} = 10,\ b_3' = b_3 - x_{13} = 0$.

Pasul al patrulea: $\min c_{ij} = c_{14} = c_{31} = c_{33} = 3$.

Luăm $x_{31} = \min(a_3, b_1') = 20,\ x_{11} = 0$ (componentă bazică), $x_{34} = 0$ (componentă nebazică). Înlocuim a_3 şi b_1' cu $a_3'' = a_3 - x_{31} = 0$, $b_1'' = b_1' - x_{31} = 0$.

Pasul al cincilea: obligatoriu $x_{14} = 10$. Am obţinut pentru problemă o soluţie admisibilă de bază degenerată ($x_{11} = 0$ componentă bazică). Ea este indicată în tabelul de mai sus.Costul unui asemenea transport este 220 u.m. *Metoda costului minim ne conduce de cele mai multe ori la o soluţie admisibilă de bază mai bună decât metoda diagonalei, în sensul că realizează o valoare a cheltuielilor de transport mai mică.*

3.3.2. SOLUŢII OPTIME PENTRU O PROBLEMĂ DE TRANSPORT

Soluţiile optime (soluţii admisibile ce realizează minimul funcţiei obiectiv) ale unei probleme de transport le vom căuta în mulţimea soluţiilor admisibile de bază nedegenerate. Să considerăm că am determinat pentru problemă o soluţie admisibilă de bază nedegenerată: $x = (x_{ij})^T$. Pornind de la aceasta să vedem cum putem obţine o soluţie admisibilă.

Convenim ca o pereche de indici (i, j) să o numim **celulă**. Când vom spune celulă liberă înţelegem că ea se referă la o componentă nebazică (secundară), adică nu se găseşte printre cele $m+n-1$. Celule ocupate vor fi cele care se referă la componentele bazice (principale). Să considerăm o celulă liberă (i, j).

Definiţia 3.3.1: **Un şir de celule care începe cu celula liberă $(\mathrm{i, j})$ şi se termină cu aceasta, conţinând în rest numai celule ocupate şi anume câte două din aceiaşi linie şi coloană se numeşte ciclul celulei libere $(\mathrm{i, j})$.**

Cel mai simplu ciclu al unei celule libere $(\mathrm{i, j})$ se prezintă sub forma de mai jos unde în dreptul celulelor am scris şi componentele corespunzătoare ale soluţiei.

$$
\begin{tikzcd}
 & x_{ij_1} \\
(\mathrm{i, j}) \arrow[r] & (\mathrm{i_1 j_1}) \arrow[d] \\
(\mathrm{i_1, j}) \arrow[u] & (\mathrm{i_1, j_1}) \arrow[l] \\
x_{i_1 j} & x_{i_1 j_1}
\end{tikzcd}
$$

Să atribuim componentei $\mathrm{x_{ij}}$ (componenta nebazică), o valoare $\theta > 0$ .Vom obţine atunci un vector care are $\mathrm{m + n}$ componente diferite de zero, acesta trebuind să verifice sistemul de restricţii.

Acestea sunt verificate dacă vom scădea şi aduna succesiv valoarea θ la componentele care au intrat în ciclul celulei libere $(\mathrm{i, j})$. Indicăm pe acelaşi ciclul acest lucru.

$$
\begin{tikzcd}
\theta & x_{ij_1} - \theta \\
(\mathrm{i, j}) \arrow[r] & (\mathrm{i_1 j_1}) \arrow[d] \\
(\mathrm{i_1, j}) \arrow[u] & (\mathrm{i_1, j_1}) \arrow[l] \\
x_{i_1 j} - \theta & x_{i_1 j_1} + \theta
\end{tikzcd}
$$

Pentru a fi verificate condiţiile de nenegativitate va trebui ca θ să fie luat astfel încât $x_{ij_1} - \theta \geq 0$ şi $x_{i_1 j} - \theta \geq 0$.

Odată îndeplinite aceste condiţii putem spune că am obţinut o nouă soluţie admisibilă $\overline{x}(x_{ij})$ unde:

$$\begin{cases} \overline{x}_{ij} = \theta,\ \overline{x}_{ij} = x_{ij_1} - \theta,\ \overline{x}_{i_1 j_1} = x_{i_1 j_1} + \theta \\ \overline{x}_{i_1 j} = x_{i_1 j} - \theta,\ \overline{x}_{ke} = x_{ke} \text{ pentru } k \neq i, i_1;\ j \neq j, j_1 \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Dorind acuma ca noua soluţie admisibilă să fie şi admisibilă de bază este suficient să considerăm:

$$\theta = \min(x_{ij_1}, x_{i_1 j}) \tag{3.3.3}$$

În acest fel se determină care componentă bazică devine nebazică. Relaţia (3.3.3) reprezintă forma criteriului de ieşire din algoritmul pentru găsirea soluţiilor optime a unei probleme de transport.

Să vedem acum care sunt condiţiile ca soluţia admisibilă de bază x să fie soluţie optimă. Să evaluăm diferenţa $f(x) - f(\overline{x})$. Vom avea:

$$f(x) - f(\overline{x}) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{e=1}^{n} c_{ke}(x_{ke} - \overline{x}_{ke}) = -c_{ij}\theta + c_{ij_1}\theta - c_{i_1 j_1}\theta + c_{i_1 j}\theta$$

sau

$$f(x) - f(\overline{x}) = \theta \delta_{ij} \tag{3.3.4}$$

unde

$$\delta_{ij} = -c_{ij} + c_{ij_1} - c_{i_1 j_1} + c_{i_1 j} \tag{3.3.5}$$

care reprezintă suma algebrică cu semn alternat a costurilor celulelor corespunzătoare ce au intrat în ciclu şi care începe cu $-c_{ij}$.

Din (3.3.5) se observă că dacă pentru toate celulele libere (i, j) vom avea $\delta_{ij} \leq 0$, şi aşa cum $\theta > 0$, soluţia admisibilă de bază $x(x_{ij})$ considerată reprezintă soluţia optimă a problemei de transport. Rezultă în felul acesta că criteriul de optimalitate este

$$\delta_{ij} \leq 0 \tag{3.3.6}$$

pentru toate celule libere (i, j).

Tot din (3.3.4) se constată că dacă există $\delta_{ij} \geq 0$, soluţia x poate fi îmbunătăţită. Pentru aceasta fie:

$$\delta_{ij} = \max_{\delta_{ke} \geq 0} \delta_{ke} \tag{3.3.7}$$

Atunci componentei nebazice x_{ij} îi vom atribui o valoare $\theta > 0$. Relaţia (3.3.7) reprezintă forma criteriului de intrare în algoritm. Mărimile δ_{ij} joacă rolul diferenţelor $z_j - c_j$ din problemele de programare de care ne-am ocupat.

Sintetizând cele de mai sus în practică procedăm în felul următor:

a) Se determină o soluţie admisibilă de bază nedegenerată prin una din cele două metode prezentate.

b) Pentru toate celulele libere se calculează cantităţile δ_{ij}.

- dacă toate cantităţile δ_{ij} sunt mai mici sau egale cu zero, atunci soluţia este optimă;
- dacă există $\delta_{ij} > 0$ se trece la etapa următoare.

c) Se aplică criteriul de intrare. Vom atribui o valoare $\theta > 0$ componentei x_{ij} (nebazică) cea pentru care avem îndeplinită relaţia (3.3.7).

d) Se consideră ciclul celulei x_{ij}, se introduce θ în ciclu şi se aplică criteriul de ieşire. Se determină valoarea lui θ după relaţia (3.3.3) indicându-se deci care componentă bazică devine nebazică.

e) Etapele algoritmului se reiau până se găseşte soluţia optimă a problemei.

Observaţii:

a) Prezenţa semnului de egal în criteriul de optim şi de intrare în bază, indică existenţa mai multor soluţii optime ;

b) Pe parcursul aplicării algoritmului pot să apară soluţii admisibile degenerate care pot conduce la un fenomen numit fenomen de ciclaj. Pentru evitarea apariţiei soluţiilor admisibile degenerate se întrebuinţează aşa-numita **metodă a perturbării**. Aceasta constă în înlocuirea cantităţilor a_i cu $a_i + \varepsilon$, şi cantităţii b_n cu $b_n + m\varepsilon$ (unde ε reprezintă o cantitate foarte mică, strict pozitivă). La finalul algoritmului, după determinarea soluţiei optime a problemei peturbate, se face $\varepsilon = 0$, obţinându-se soluţia optimă a problemei iniţiale.

c) Dacă la aplicarea criteriului de intrare sunt mai multe mărimi δ_{ij} pozitive maxime egale putem lua oricare dintre acestea.

Exemplul 3.3.2. Să se determine soluţiile optime ale problemei de transport din exemplul 3.3

Pentru a fi siguri că nu apar soluţii admisibile de bază degenerate aplicăm de la început metoda perturbării, adică considerăm:

$$a_1=35+\varepsilon,\ a_2=40+\varepsilon,\ a_3=20+\varepsilon,\ b_1=50,\ b_2=10\ b_3=25,\ b_4=10,+3\varepsilon$$

O soluţie admisibilă de bază determinată prin metoda costului minim din tabel este dată în tabelul:

D \ C	C_1	C_2	C_3	C_4	a_i
D_1	4	2 10	2 25	3 ε	$35+\varepsilon$
D_2	2 $40+\varepsilon$	2	3	5	$40+\varepsilon$
D_3	3 $10-\varepsilon$	4	2	3 $10+2\varepsilon$	$20+\varepsilon$
b_j	50	10	25	$10+3\varepsilon$	$95+3\varepsilon$ \ $95+3\varepsilon$

Să găsim cantităţile δ_{ij} pentru celulele libere. Considerăm ciclul celulei libere $(1,1)$ şi în dreptul celulelor scriem costurile.

$$\begin{tikzcd} \overset{4}{(1,1)} \arrow[r] & \overset{3}{(1,4)} \arrow[d] \\ \underset{3}{(3,1)} \arrow[u] & \underset{3}{(3,4)} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Vom avea: $\delta_{11}=-4+3-3+3=-1$

Analog:

$$\delta_{22}=-2+2-3+3-3+2=-1$$
$$\delta_{23}=-4+2-3+3-3+2=-3$$
$$\delta_{24}=-5+3-3+2=-3$$
$$\delta_{32}=-4+2-3+3=-2$$
$$\delta_{33}=-2+2-3+3=0$$

Deoarece toate cantităţile δ_{ij} sunt mai mici sau egale cu zero am găsit soluţia optimă a problemei. Făcând $\varepsilon=0$ găsim:

$x_{11}=0,\ x_{12}=10,\ x_{1}=25,\ x_{14}=0,\ x_{21}=40,\ x_{22}=0,\ x_{23}=0,\ x_{24}=0$

$x_{31}=10,\ x_{32}=0,\ x_{33}=0,\ x_{34}=0,\quad (\min)f(x)=210$ u.b.

Deoarece $\delta_{33}=0$, algoritmul poate continua atribuind componentei x_{33} (nebazică), o valoare $\theta>0$. Considerăm ciclul celulei (3,3) şi introducem pe θ în ciclu pentru a satisface restricţiile.

$$\begin{tikzcd}
\overset{25-\theta}{(1,3)} \arrow[r] & \overset{\varepsilon+\theta}{(1,4)} \arrow[d] \\
\underset{\theta}{(3,3)} \arrow[u] & \underset{10+2\varepsilon-\theta}{(3,4)} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Aplicăm criteriul de ieşire luând $\theta=\min(25,\ \ 10+2\varepsilon)=10+2\varepsilon$.

Componentele noii soluţii sunt date în tabelul:

D \ c	C_1	C_2	C_3	C_4	a_i
D_1	4	2 10	2 $15-2\varepsilon$	3 $10+3\varepsilon$	$35+\varepsilon$
D_2	2 $40+\varepsilon$	2	4	5	$40+\varepsilon$
D_3	3 $10-\varepsilon$	4	2 $10+2\varepsilon$	3	$20+\varepsilon$
b_j	50	10	25	$10+3\varepsilon$	$95+3\varepsilon$ / $95+3\varepsilon$

Făcând $\varepsilon=0$ găsim soluţia optimă.

$x_{11}=0,\ x_{12}=10,\ x_{13}=15,\ x_{14}=10,\ x_{21}=40,\ x_{22}=0,\ x_{23}=0,\ x_{24}=0$

$x_{31} = 10,\ x_{32} = 0,\ x_{33} = 10,\ x_{34} = 0,\quad (\min)f(x) = 210$ u.b.

Exemplul 3.3.3 Să se determine soluţiile optime ale problemei de transport:

D \ c	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1	2	3	50
D_2	3	4	1	25
b_j	40	20	30	75 / 90

Problema nu este echilibrată. Vom adăuga un depozit cu costuri zero.
Vom avea deci:

D \ c	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1	2	3	50
D_2	3	4	1	25
D_3	0	0	0	15
b_j	40	10	25	90 / 90

O soluţie admisibilă de bază determinată prin metoda costului minim din tabel este prezentată în:

D \ c	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1 25	2 20	3 5	50
D_2	3	4	1 25	25
D_3	0 15	0	0	15
b_j	40	20	30	90 / 90

Componentele soluţiei au fost determinate în ordinea:

$x_{31} = 15,\ x_{11} = 25,\ x_{21} = 25,\ x_{12} = 20,$

$x_{13} = 5,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 0,\ x_{32} = 0,\ x_{33} = 0$

Pentru celulele libere calculăm cantităţile δ_{ij}.

$$\begin{aligned}
\delta_{21} &= -3+1-3+1 = -4 \\
\delta_{22} &= -4+2-3+1 = -4 \\
\delta_{32} &= -0+2-1+0 = 1 \\
\delta_{33} &= -0+3-1+0 = 2
\end{aligned}$$

Soluţia nu este optimă. Avem că $\delta_{33} = \max\limits_{\delta_{ij} \geq 0} \delta_{ij} = 2$. Considerăm ciclul celulei (3,3) componentei x_{33} (nebazică) îi atribuim o valoare $\theta > 0$ şi introducând pe θ în circuit avem:

$$\begin{tikzcd}
\overset{25+\theta(30)}{(1,1)} \arrow[r] & \overset{5-\theta(0)}{(1,3)} \arrow[d] \\
\underset{15-\theta(10)}{(3,1)} \arrow[u] & \underset{\theta(5)}{(3,3)} \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

După criteriul de ieşire luăm $\theta = \min(1,15) = 5$. Noua soluţie este prezentată în tabelul:

D \ C	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1 30	2 20	3	50
D_2	3	4	1 25	25
D_3	0 10	0	0 5	15
b_j	40	20	30	90 \ 90

Pentru celulele libere vom avea:

$$\begin{aligned}
\delta_{13} &= -3+1-0+0 = -2 \\
\delta_{21} &= -3+1-0+0 = -2 \\
\delta_{22} &= -4+2-1+0-0+1 = -2 \\
\delta_{32} &= -0+2-1+0 = 1
\end{aligned}$$

Soluţia nu este optimă. Atribuim componentei x_{32} o valoare $\theta > 0$.

$$\begin{tikzcd}
30+\theta(40) & 20-\theta(10) \\
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[d] \\
(3,1) \arrow[u] & (3,2) \arrow[l] \\
10-\theta(0) & \theta(10)
\end{tikzcd}$$

Noua soluţie este prezentată în tabelul:

D \ c	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1 40	2 10	3	50
D_2	3	4	1 25	25
D_3	0	0 10	0 5	15
b_j	40	20	30	90 \ 90

Această soluţie este optimă deoarece avem:

$\delta_{13} = -1, \delta_{21} = -3, \delta_{22} = -3, \delta_{31} = -1$.

Soluţia problemei iniţiale va fi:

$x_{11} = 40,\ x_{12} = 10,\ x_{13} = 0,\ x_{21} = 0,\ x_{22} = 0,\ x_{23} = 25$. (min)f(x) = 85u.b.

Se observă că cerinţele centrelor C_2 şi C_3 nu vor fi satisfăcute în totalitate.

Cap. 4 SERII NUMERICE.
SERII DE PUTERI.

Este bine cunoscut faptul că, în prezent, fenomenele economice devin din ce în ce mai complexe şi interdependente; mai nou, tendinţa de globalizare a economiei (şi nu numai) duce la o concurenţă acerbă pe mai toate pieţele şi în mai toate domeniile de activitate economică, fenomen care se simte din ce în ce mai pregnant şi în economia românească.

Aceste situaţii, cer din partea specialiştilor în economie, cunoştinţe cât mai precise în vederea observării, înţelegerii, modelării şi rezolvării pe baze riguros ştiinţifice a problemelor complexe cu care se confruntă. Această abordare nu mai este astăzi posibilă, fără recurgerea la un aparat matematic cât mai adecvat.

Modul mai puţin riguros, chiar empiric, de luare a deciziilor economice doar pe baza unei simple experienţe, este total depăşit, astfel încât cei care nu se vor adapta noilor condiţii şi cerinţe economice, vor fi eliminaţi încet, încet de pe piaţă.

În acest capitol se prezintă, într-o manieră accesibilă studenţilor economişti, câteva elemente de bază din teoria seriilor numerice şi a seriilor de funcţii (cazul particular al seriilor de puteri). Aplicaţiile practice ale acestei teorii se întâlnesc în multe domenii de cercetare din matematică, fizică, chimie, biologie etc. În particular, aplicaţiile cu caracter economic ale teoriei seriilor sunt multiple şi permit modelarea şi rezolvarea unor probleme economice cu caracter atât determinist cât şi aleator (probabilistic).

Elemente şi aplicaţii ale teoriei seriilor sunt regăsite în Teoria probabilităţilor şi Statistica economică, Micro- şi Macroeconomie, Gestiunea stocurilor şi a fenomenelor de aşteptare etc.

Pentru parcurgerea şi înţelegerea noţiunilor prezentate în acest capitol sunt necesare noţiuni de teoria limitelor şi a şirurilor studiate la Analiza Matematică din clasa a XI-a.

4.1. SERII NUMERICE

4.1.1. ŞIRURI DE NUMERE REALE

Definiţia 4.1.1: *Numim **şir de numere reale**, o aplicaţie:*

$$f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$$
$$f(n)=a_n\in\mathbb{R}$$

Vom nota şirul cu simbolul: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$; a_n se numeşte ***termenul general*** al şirului.

Definiţia 4.1.2: *Spunem că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este **convergent** către un număr $\mathbf{a}\in\mathbb{R}$, dacă, orice vecinătate a lui **a** conţine toţi termenii şirului cu excepţia unui număr finit de termeni.*

Vom nota cu $a_n\to a$ sau $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$.

Numărul "a" se numeşte limita şirului şi dacă există este unică. Dacă şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este convergent, atunci acesta se numeşte **şir divergent**. Un şir divergent sau nu are limită sau limita sa este $+\infty$ sau $-\infty$.

Exemple:

a) $a_n=\dfrac{n}{n^2+1}$; $b_n=\dfrac{n^2}{2n^2+3}$; $c_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ sunt şiruri convergente (cu limitele 0, $\dfrac{1}{2}$ respectiv e=2,71…;

b) $a_n=\sqrt{n}$; $b_n=\dfrac{n^2+1}{3n}$; $c_n=\sqrt[3]{1-n^2}$ sunt şiruri divergente cu limitele $+\infty$, $+\infty$, respectiv $-\infty$;

c) $a_n=(-1)^n$, $b_n=(-1)^n\ln(n^2+n+1)$, $c_n=\sin(n+1)$ sunt şiruri divergente care nu au limită.

Teorema 4.1.1 ***(de caracterizare a şirurilor convergente)***

Şirul $a_n \to a$ dacă şi numai dacă: $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n - a| < \varepsilon$, pentru $(\forall)n \geq n_\varepsilon$.

Teorema 4.1.2. ***(Cauchy)***

Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este convergent dacă şi numai dacă: $(\forall)\varepsilon > 0$, $(\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât : $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$, pentru $(\forall)n \geq n_\varepsilon$ şi $(\forall)k \in \mathbb{N}^*$.

Observaţii:

i) Cele două teoreme, ca şi definiţia, nu sunt folosite în mod curent în aplicaţii practice; cu ajutorul lor se pot demonstra rezultate a căror aplicare este mult mai simplă (de exemplu, teorema de convergenţă a şirurilor monotone şi mărginite, teorema cleştelui etc.).

ii) Aşa cum se observă, aplicarea teoremei 4.1.2. nu presupune cunoaşterea apriorică a limitei **a**, în enunţul acesteia intervenind numai termenul general a_n respectiv a_{n+k}; acest lucru este deosebit de util în aplicaţiile care conţin şiruri recurente sau în care limita şirului este dificil de determinat.

4.1.2 NOŢIUNEA DE SERIE NUMERICĂ. CONVERGENŢĂ. PROPRIETĂŢI GENERALE ALE SERIILOR.

După cum se ştie, oricărei mulţimi finite $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ de numere reale i se poate asocia un număr real $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ numit suma acestora. Se pune întrebarea firească: dacă mulţimea conţine o infinitate de numere reale $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ (cu alte cuvinte un şir de numere reale $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$) i-am putea asocia un număr $S \in \mathbb{R}$ care să generalizeze conceptul de sumă finită?

Fie şirul : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$

Vom asocia acestuia, un nou şir de numere reale, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} : S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ definit astfel:

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_1 = a_0 + a_1 \\ S_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \end{cases} \tag{4.1.1}$$

pe care îl vom numi **şirul sumelor parţiale** ataşat şirului $(a_n)_{n\in N}$.

Definiţia 4.1.3. *Numim **serie numerică, de termen general*** $\mathbf{a_n}$, *expresia*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overset{def}{=} \lim_{n\to\infty} S_n \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_n + \ldots \tag{4.1.2}$$

Observaţie: În unele cazuri numerotarea termenilor seriei poate începe de la $n = 1\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n\right)$ sau de la $n = n_0$ oarecare fixat $\left(\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n\right)$ (vezi şi proprietăţile seriilor numerice).

Definiţia 4.1.4.: Spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ este o serie:

a) **convergentă (C)**, dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir convergent;

b) **divergentă (D)** , dacă şirul $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şir divergent.

Cu alte cuvinte problema convergenţei unei serii numerice este echivalentă cu problema convergenţei unui şir de numere reale şi anume, şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observaţii:

i) Dacă $S_n \to S$, vom spune că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (C)$ şi are **suma** S (notăm: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = S$);

ii) Dacă $S_n \to \pm\infty$, spunem că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (D)$ şi are **suma** $\pm\infty$ notăm $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$);

iii) Dacă $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu are limită, spunem că $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(D)$ şi nu are sumă.

În studiul seriilor numerice, trebuie cercetat (ca şi în cazul şirurilor) două aspecte:

- **natura seriei** (dacă este convergentă sau divergentă)
- **suma seriei** (în caz de convergenţă)

Dacă pentru şiruri stabilirea convergenţei şi determinarea limitei acestora este în cele mai multe cazuri una şi aceeaşi chestiune, în cazul seriilor situaţia se schimbă radical; de cele mai multe ori este relativ uşor să stabileşti convergenţa seriei, dar foarte greu, ba câte odată chiar imposibil de determinat suma acesteia.

De obicei, cu metodele specifice analizei numerice, se determină o aproximaţie S' a sumei S a seriei ($S' \simeq S$).

Pentru a se cerceta natura unei serii, nu se poate folosi întotdeauna definiţia, ci adesea se utilizează condiţii echivalente cu aceasta sau numai condiţii suficiente de convergenţă numite "**criterii de convergenţă**". Vom prezenta unul dintre aceste criterii în cele ce urmează.

Teorema 4.1.3. ***(criteriul general de convergenţă a lui Cauchy)***

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{a_n}$ este (C) dacă şi numai dacă: $(\forall)\varepsilon > \mathbf{0}, (\exists)\mathbf{n}_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât: $|\mathbf{a}_{\mathbf{n}+1} + \mathbf{a}_{\mathbf{n}+2} + \ldots + \mathbf{a}_{\mathbf{n}+\mathbf{k}}| < \varepsilon$, pentru $(\forall)\mathbf{n} \geq \mathbf{n}_\varepsilon$, $(\forall)\mathbf{k} \in \mathbb{N}$.

Această teoremă se obţine ca o consecinţă a Teoremei 4.1.2, considerând în loc de şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Într-adevăr, conform (4.1.1) avem:

$$|S_{n+k} - S_n| = |(a_1 + \ldots a_n + a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}) - (a_1 + \ldots + a_n)| =$$
$$= |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}|$$

4.1.3. EXEMPLE REMARCABILE DE SERII

1) Seria geometrică $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n;\ \text{cu } a,q \in \mathbb{R}\right)$

Termenul general al acestei serii are forma $a_n = aq^n$ (*) şi depinde de doi parametri (constante reale) a, q. Evident, este logic ca natura seriei şi suma acesteia în caz de convergenţă să depindă de aceşti parametri. Astfel, dacă:

i) $\underline{a = 0}$, atunci $a_n = 0$, $(\forall)\ q \in \mathbb{R}$, deci seria este convergentă şi are suma $S = 0$.

ii) $\underline{a \neq 0}$, avem:

$$S_n \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \ldots a_n \overset{(*)}{=} a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n$$
$$= a(1 + q + q^2 + \ldots + q^n)$$

deci S_n reprezintă suma unei progresii aritmetice cu raţia q (de aici şi numele seriei) şi conform rezultatelor de la acest capitol (vezi manualul de Algebră, clasa a X-a) vom avea:

$$S_n = \begin{cases} a\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}; & q \neq 1 \\ a(n+1); & q=1 \end{cases}$$

Trecând la limită în relaţia de mai sus, obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}\ ; & q \in (-1,1) \\ \pm\infty\ ; & q \in [1,\infty) \qquad \text{(depinde de semnul lui a)} \\ (\nexists)\ ; & q \in (-\infty,-1] \end{cases}$$

cu alte cuvinte, pentru:

$$\begin{cases} q \in\ -1,1\ \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n = \dfrac{a}{1-q} & \left(\text{seria converge cu suma } S = \dfrac{a}{1-q}\right) \\ q \in (-\infty,1] \cup [1,\infty) \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} aq^n\,(D) & \text{cu suma } S = \pm\infty \text{ sau nu există} \end{cases} \tag{4.1.3}$$

Observaţie: De fapt, această serie cuprinde o infinitate de serii particulare (pentru a, q având valori fixate) a căror natură o cunoaştem; foarte important este că, în caz de convergenţă, ştim şi suma seriei.

Exemple:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, este serie geometrică cu $a=1,\ q=\frac{1}{2}$ şi conform (4.1.3) rezultă că:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=2\ (C)$$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{9^n}} \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$, este serie geometrică cu $a=1$ şi $q=-\frac{1}{3}$ şi conform (4.1.3) rezultă că:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{9^n}}=1-\frac{1}{\sqrt{9}}+\frac{1}{\sqrt{81}}-\ldots+\frac{(-1)^n}{\sqrt{9^n}}+\ldots=\frac{3}{4}\ \ (C)$$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{2^{2n}} \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty}5\cdot\left(\frac{5}{4}\right)^n$, este serie geometrică cu $a=5,\ q=\frac{5}{4}$ şi conform (4.1.3) seria diverge $\left(\text{în acest caz } \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^{n+1}}{2^{2n}}=+\infty\right)$.

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\ \sqrt{2}^{\ n} \equiv \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)\ -\sqrt{2}^{\ n}$ este serie geometrică cu $a=-1,\ q=-\sqrt{2}$ şi deci seria este divergentă; mai mult suma nu există.

2) Seria armonică generalizată $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}};\alpha\in R\right)$

Evident, ca şi în şirul seriei geometrice, natura (şi în caz de convergenţă suma) seriei armonice generalizate, va depinde de valoarea parametrului α. Aplicând, Teorema 4.2 se poate arăta că, seria:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}\right)\begin{cases}(C) & ;\ \alpha>1\\ (D) & ;\ \alpha\le 1\end{cases}\qquad(4.1.4)$$

Observaţii:

i) În caz de convergenţă $(\alpha > 1)$, nu există o formulă generală de stabilire a sumei S în funcţie de parametrul α, asa cum s-a stabilit în cazul seriei geometrice;

ii) Evident, în cazul în care seria diverge $(\alpha \le 1)$, suma seriei este $S = +\infty$ (ca serie cu termeni pozitivi).

Exemple:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D) ,deoarece

$$\alpha = 1 \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = +\infty) \right)$$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (C) ,doarece $\alpha = 2 > 1$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = S \right)$$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ (D) , deoarece $\alpha = \frac{2}{3} \le 1$

Seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se numeşte **seria armonică (simplă)** sau **seria lui Riemann**, deoarece termenul general a_n este media armonică a vecinilor săi, adică satisface relaţia $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$.

3) Seria telescopică $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right)$

Această serie este convergentă. Într-adevăr scriind termenul general $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ sub forma (*) $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, obţinem termenul general al şirului sumelor parţiale $(S_n)_{n \in N}$ de forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$\overset{(*)}{=} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \text{(după simplificări)}$$

$= 1 - \frac{1}{n+1}$.

Atunci $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$, deci $\sum\limits_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (C)

Dacă notăm cu $\alpha_n = \frac{1}{n}$, atunci termenul general al seriei $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, se poate scrie sub forma:

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} \tag{4.1.5}$$

Seriile numerice a căror termen general a_n au forma de mai sus, se numesc **serii telescopice** şi se poate observa uşor ca seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C) $\Leftrightarrow (\alpha_n)_{n\in N}$ (C).

Mai mult seria va avea suma $S = \alpha_1 - \alpha$, unde α_1 este primul termen al şirului $(\alpha_n)_{n\in N}$, iar $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

Vom enunţa în continuare câteva din proprietăţile generale ale seriilor numerice, care se pot demonstra relativ uşor, ţinând cont de definiţia seriei şi a operaţiilor cu şiruri convergente.

4.1.4. PROPRIETĂŢI GENERALE ALE SERIILOR NUMERICE

(P_1) Dacă unei serii $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, i se adaugă sau i se suprimă un număr finit de termeni, natura acesteia nu se schimbă.

Observaţie. Evident, în caz de convergenţă, suma S a unei serii se modifică corespunzător prin adăugarea (sau scăderea) a sumei termenilor finiţi care se adaugă (sau se suprimă).

(P_2) Sacă unei serii convergente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, i se asociază termeni în grupe finite, cu păstrarea ordinii lor, atunci se obţine tot o serie convergentă şi cu aceeaşi sumă.

Observaţii:

i) Proprietatea de mai sus, poate fi scrisă şi sub forma:

(P_2') *Dacă* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = S$, *atunci şi:*

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \ldots + a_{n_3}) + \ldots = S$$

ii) Asociind termenii unei serii divergente, în grupe finite cu păstrarea ordinii se pot obţine serii convergente.

Exemplu:

Fie seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + (-1)^n + \ldots$ (termenul general fiind $a_n = (-1)^n$)

Atunci:

$$S_0 = 1,\ S_1 = 1 - 1 = 0,\ S_2 = 1 - 1 + 1 = 1,\ S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \ldots$$

deci: $S_{2n} = 1$ şi $S_{2n+1} = 0$; evident şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n \in N}$ diverge deoarece are două subşiruri care converg la limite diferite. Rezultă că seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ (D) şi nu are sumă.

Dacă asociem termenii în grupe de câte doi (sau de câte patru, şase, etc.) obţinem:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots (1 - 1) + \ldots = 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots = 0$$

deci noua serie obţinută converge şi are suma S = 0.

(P_3) Dacă seriile $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *sunt convergente cu sumele S_1 respectiv S_2, atunci seria* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *converge şi are suma $S_1 + S_2$.*

Cu alte cuvinte dacă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2 \ \Rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S_1 + S_2 \qquad (4.1.6)$$

(P_4) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}^*$, *atunci seriile* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ *au aceeaşi natură; mai mult în caz de convergenţă, dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ *atunci* $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda S$.

Teorema 4.1.4. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **(C), atunci** $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Demonstraţie:

Fie $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, (\forall) n \in N^*$. Deoarece seria converge, avem:

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$ (1)

Dar $a_n = S_n - S_{n-1}$; trecând la limită în această relaţie obţinem:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} \overset{(1)}{=} S - S = 0$$

q.e.d.

Observaţie: Condiţia din teorema de mai sus $(a_n \to 0)$ este o condiţie necesară dar nu şi suficientă pentru convergenţa unei serii; deci, dacă termenul general $a_n \to 0$ acest lucru nu implică obligatoriu că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C). Ca exemple se pot da cazurile particulare ale seriei armonice. Astfel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D) chiar dacă $a_n = \frac{1}{n} \to 0$.

O formulare echivalentă a teoremei 4.1.4. des folosită în aplicaţii practice, este:

Teorema 4.1.5. Criteriul general de divergenţă (C.G.D)

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$**,** $a_n \in \mathbb{R}$**. Dacă** $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ **atunci seria** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **(D).**

Exemple:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ (D), deoarece $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ (D), deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71\ldots \neq 0$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n-n^2}{2n}$ (D) , deoarece $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1+n-n^2}{2n} = -\infty \neq 0$

În concluzie, dacă:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D)

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ poate fi (C) sau (D) (trebuie făcută o analiză suplimentară în acest caz)

4.2 SERII CU TERMENI POZITIVI

Definiţia 4.2.1. *Numim* ***serie cu termeni pozitivi*** *, o serie de forma:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \textit{ cu } a_n \geq 0, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 4.2.1. ***(de caracterizare a convergenţei seriilor cu termeni pozitivi)***

Seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ converge dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit.

Demonstraţie:

Avem

$S_{n+1} - S_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n+1}) = a_{n+1} \geq 0$ deci $S_{n+1} \geq S_n$, adică şirul $(S_n)_{n\in N}$ este monoton crescător.

Dacă $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este şi marginit (superior), rezultă că este convergent (conform teoremei de convergenţă a şirurilor monotone şi mărginite) deci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C).

Reciproc, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C) $\Rightarrow$ $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (C). Dar un şir convergent este obligatoriu mărginit, deci teorema este demonstrată.

q.e.d.

Observaţie: În aplicaţiile practice, Teorema 4.2.1. nu este folosită foarte des deoarece, în general, este relativ complicat a se demonstra mărginirea şirului $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$; întradevăr, trebuie demonstrată relaţia:

$|S_n| = |a_1 + a_2 + \ldots + a_n| < M, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ cu $M > 0$ constantă care nu depinde de $n \in \mathbb{N}^*$.

Mult mai utile sunt următoarele rezultate (numite criterii de convergenţă), care pot fi clasificate în două categorii: *criterii de comparaţie* şi *criterii cu limită*.

I) <u>Criteriul de comparaţie de specia I (cu inegalităţi simple)</u>

Fie seriile: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **şi** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **care satisfac relaţiile** $0 \le a_n \le b_n, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

Atunci:

$$\begin{cases} \textbf{i) Dacă } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \textbf{(C)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textbf{(C)} \\ \textbf{ii) Dacă } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \textbf{(D)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \textbf{(D)} \end{cases}$$

Exemplu: Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Termenul general $a_n = \frac{n!}{n^n}$ satisface:

$$0 \le a_n = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{n\cdot n\cdot n\cdot\ldots\cdot n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{3}{n}\cdot\ldots\cdot\frac{n}{n} \le \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} = \frac{2}{n^2} \overset{not}{=} b_n$$

Dar:

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (C) (ca serie armonică generalizată $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ cu $\alpha = 2 > 1$)

Atunci conform punctului i) din criteriu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (C).

II) <u>Criteriul de comparaţie de specia a III-a (cu limită)</u>

Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **şi** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **cu** $a_n,\ b_n \geq 0$**. Dacă există:**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0,\infty) \tag{4.2.1}$$

atunci seriile au aceeaşi natură.

Exemplu: Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$ cu $a_n = \frac{1}{2n+3} \geq 0$

Luăm ca serie de comparaţie, seria armonică (simplă) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, despre care ştim că diverge. Deoarece:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \in (0,\infty)$$ deci

conform criteriului, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, deci diverge.

Observaţii:

i) Criteriul de comparaţie la limită, tratează şi cazurile când k=0 sau $k = +\infty$, dar s-a renunţat la prezentarea lor pentru simplificarea expunerii.

ii) Aplicarea criteriilor de comparaţie, nu este în general foarte simplă, deoarece trebuie satisfăcute simultan următoarele două condiţii:

a) alegerea seriei de comparaţie (de exemplu, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$), funcţie de seria dată (de exemplu, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a cărei convergenţă vrem să o stabilim);

b) trebuie cunoscută aprioric natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (convergentă sau divergentă

Prima condiţie este influenţată foarte mult de abilităţile matematice ale rezolvitorului, iar cea de a doua de "experienţa" sa. Pentru această din urmă condiţie, seriile geometrică şi armonică pot furniza o infinitate de serii particulare (a căror natură o cunoaştem) posibil de folosit ca serii de comparaţie.

iii) În schimb, următoarele criterii (numite criterii cu limită) se aplică mult mai uşor, formularea acestora depinzând exclusiv de termenul general a_n al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a cărei natură vrem să o determinăm.

III. <u>Criteriul raportului (D`Alembert)</u>

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ şi: $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \in 0,\infty$. Atunci, dacă:

$$\begin{cases} i)\ \lambda < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n (C) \\ ii)\lambda > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n (D) \\ iii)\lambda = 1\ ; \quad \text{caz de nedeterminare (nu se poate preciza natura seriei)} \end{cases}$$

Exemple:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; cu $a_n = \frac{n!}{n^n}$ respectiv $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot(n+1)}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

(după simplificări) $= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$, deci seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ converge.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}$; cu $a_n = \frac{2^n}{n^2+1}$ şi $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}$.

Atunci:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot 2}{n^2+2n+2} \cdot \frac{n^2+1}{2^n} = 2 \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = 2\cdot 1 = 2 > 1$$

deci, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}$, diverge.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; cu $a_n = \frac{1}{n}$ şi $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Avem:

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, deci conform acestui criteriu nu putem preciza

natura seriei armonice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (despre care ştim însă că este divergentă,

vezi formula (4.1.4)).

IV. <u>Criteriul rădăcinii (Cauchy)</u>

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ **şi** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda \in [0,\infty]$**. Atunci, dacă:**

$$\begin{cases} \text{i) } \lambda < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (C)} \\ \text{ii) } \lambda > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (D)} \\ \text{iii) } \lambda = 1 \Rightarrow \textbf{caz de nedeterminare (nu se poate preciza natura seriei)} \end{cases}$$

Exemple:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$; cu $a_n = \frac{n^2}{2^n} \geq 0$. Atunci:

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1$ deci, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2n}$

converge.

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$; cu $a_n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} \geq 0$. Atunci:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e > 1$$

deci seria diverge.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; cu $a_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$. Atunci:

$\lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^2} = \frac{1}{1} = 1$, deci nu putem preciza cu acest criteriu, natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (despre care ştim că este convergentă, ca seria armonică generalizată, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ cu $\alpha = 2 > 1$).

Observaţii:

i) În unele din exemplele de mai sus am folosit limitele fundamentale:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1 \qquad (4.2.2)$$

unde: $P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \ldots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ polinom de grad k cu coeficienţi reali şi $a_k > 0$

ii) Se observă că aplicarea acestor criterii, constă doar în calculul unei limite; totuşi dacă termenul general al seriei a_n, are o formă mai complicată determinarea lui λ poate fi o problemă deloc uşoară. Se poate apela în aceste cazuri la criteriile de comparaţie sau la alte criterii de o formă mai complicată care nu sunt prezentate aici (se poate consulta în acest scop, orice curs de analiză matematică care tratează convergenţa seriilor numerice).

iii) Datorită relaţiei:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \qquad (4.2.3)$$

rezultă că dacă un criteriu ne conduce la cazul de excepţie $\lambda = 1$, nu se încearcă aplicarea celuilalt criteriu, deoarece se va obţine aceeaşi concluzie; obişnuit aplicarea criteriului raportului sau rădăcinii se face ţinând cont de forma termenului general a_n (astfel încât calculul limitei să fie cât mai simplu).

iv) Se observă, că există situaţii – chiar pentru serii foarte simple – în care aceste criterii nu pot preciza natura seriilor $(\lambda = 1)$. De obicei în aceste cazuri se aplică criteriile de comparaţie respectiv criteriul general de divergenţă (C.G.D), sau următorul criteriu (a lui Raabe-Duhamel).

V) <u>Criteriul lui Raabe – Duhamel</u>

Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ **şi** $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\mu\in\mathbb{R}$ **. Atunci, dacă:**

$$\begin{cases} \text{i) } \mu>1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (C) \\ \text{ii) } \mu<1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (D) \\ \text{iii) } \mu=1 \ ; \ \textbf{caz de nedeterminare (nu se poate preciza natura seriei)} \end{cases}$$

Exemple:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; cu $a_n=\frac{1}{n^2} \geq 0$. Am văzut cum criteriul rădăcinii ne conduce la cazul de nedeterminare $\lambda=1$. Vom aplica criteriul lui Raabe – Duhamel pentru a "scăpa" din această situaţie.

Avem:

$$\mu=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\cdot\left(\frac{(n^2+2n+1)-n^2}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2>1\text{, deci seria converge.}$$

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$; cu $a_n=\frac{1}{2n+1} \geq 0$. Se verifică imediat că atât criteriul raportului cât şi cel al rădăcinii ne conduc la cazul $\lambda=1$. Dacă aplicăm criteriul lui Raabe – Duhamel obţinem:

$$\mu=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+3}{2n+1}-1\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)=1$$

deci (în acest caz) nici criteriul lui Raabe – Duhamel nu ne "scoate" din cazul de nedeterminare.

Dacă aplicăm în schimb criteriul de comparaţie la limită, considerând seria armonică : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (D), obţinem $k=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$.

Deci cele două serii au aceeaşi natură, cu alte cuvinte seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$ (D).

Obeservaţii:

i) Criteriul lui Raabe – Duhamel nu se aplică (în mod obişnuit) decât atunci când criteriul raportului sau rădăcinii ne conduc la cazul de nedeterminare $\lambda = 1$. În cele mai multe dintre situaţii, acest criteriu ne scoate din cazul de nedeterminare; în caz contrar se va încerca aplicarea criteriilor de comparaţie.

ii) Totuşi, există situaţii unde datorită formei termenului general al seriei aplicarea directă a criteriului lui Raabe – Duhamel aduce o simplificare a modului de calcul a limitei.

4.3 SERII ALTERNATE

Definiţia 4.3.1. *O serie* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \mathbb{R}$ *se numeşte* ***serie alternată*** *(cu termeni alternaţi) dacă, termenii săi satisfac relaţiile:*

$$u_n \cdot u_{n+1} < 0 \ , \ (\forall) n \in \mathbb{N}^* \tag{4.3.1}$$

Observaţii:

i) Din (4.3.1) rezultă că termenii seriei alternează ca semn; atunci termenul general u_n poate fi scris sub una din următoarele forme:

$u_n = (-1)^{n+1} a_n, \ \ a_n > 0$ (dacă primul termen al seriei este pozitiv)

respectiv:

$u_n = (-1)^n a_n \ , \ a_n > 0$ (dacă primul termen al seriei este negativ)

ii) Deci orice serie alternată poate avea una din următoarele două forme:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \ldots + (-1)^n \ a_n \ + \ldots \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Exemple:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}+\ldots$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n=-1+2-3+4-\ldots+(-1)^n\cdot n+\ldots$

În studiul convergenţei seriilor alternate **nu pot** fi folosite criteriile de la serii cu termeni pozitivi. Vom prezenta aici un singur criteriu specific seriilor cu termeni alternanţi.

Criteriul lui Leibniz:

Fie seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ cu $a_n>0$. **Dacă şirul** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **satisface condiţiile:**

$$\begin{cases} \text{i) } a_n \to 0 \\ \text{ii) } (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \textbf{ este monoton descrescător } (a_n \ge a_{n+1},\ (\forall)n\in\mathbb{N}^*) \end{cases}$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ **converge.**

Observaţii:

i) Criteriul lui Leibniz oferă **numai** condiţii suficiente de convergenţă **nu** şi necesare; cu alte cuvinte dacă condiţiile nu sunt satisfăcute nu rezultă că seria diverge, ci doar faptul că criteriul nu poate fi aplicat.

ii) **Totuşi**, dacă $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ (D), dar datorită aplicării criteriului general de divergenţă $\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\ a_n\ne 0$.

iii) În cazul în care $a_n\to 0$, dar şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este monoton descrescător criteriul lui Leibniz nu este satisfăcut, şi nu putem afirma nimic despre natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

Exemple:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}+\ldots$ (seria armonică alternată)

Avem şirul $a_n = \frac{1}{n} \to 0$ şi este monoton descrescător, deci conform criteriului lui Leibniz seria converge.

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n+1}$; cu $a_n = \frac{n}{3n+1} \to \frac{1}{3}$ deci prima condiţie a criteriului lui Leibniz nu este satisfăcută, acesta neputând fi aplicat. Totuşi, deoarece: $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n}{3n+1}$ nu există, rezultă conform C.G.D. că seria diverge.

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}$, cu $a_n = \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} > 0$

Deoarece $0 \le \sin^2 n \le 1 \Rightarrow 0 \le a_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}$. Trecând la limită (teorema cleştelui) obţinem $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, deci prima condiţie din criteriul lui Leibniz este satisfăcută. Se poate arăta relativ uşor că şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nu este monoton, deci condiţia a doua nu este satisfăcută şi criteriul lui Leibniz nu poate fi aplicat.

Pentru a putea totuşi preciza natura acestei serii, se pot aplica criterii de la serii cu termeni oarecare (neprezentate aici) sau folosi noţiunile din următorul subcapitol.

4.4 SERII ABSOLUT CONVERGENTE. SERII SEMI – CONVERGENTE.

Evident, în cazul seriilor cu termeni oarecare $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \in \mathbb{R} \right)$, nu se pot aplica în studiul naturii acestora, criteriile formulate pentru seriile cu termeni pozitivi sau pentru seriile cu termeni altenanţi, enunţate în secţiunile precedente 4.2 respectiv 4.3.

Totuşi, în secţiunea 4.1 au fost enunţate două rezultate care pot fi aplicate tuturor seriilor numerice, şi anume: Criteriul general de convergenţă a lui Cauchy (Teorema 4.1.3) respectiv Criteriul general de divergenţă (Teorema

4.1.5). Aplicarea lor, în special pentru stabilirea convergenţei seriilor, este aşa cum am mai spus, de cele mai multe ori extrem de dificilă. De aceea, matematicienii au căutat şi au stabilit, noi criterii, mai simple de aplicat în practică, cum ar fi: Criteriul lui Abel, Criteriul lui Dirichlet, etc.

Chiar şi aşa, aplicarea lor necesită abilităţi matematice mai deosebite, precum şi o oarecare practică în lucrul cu serii. Deoarece lucrarea de faţă se adresează în mod special studenţilor economişti, s-a considerat utilă renunţarea prezentării acestor noi criterii; vom arăta totuşi că, în anumite situaţii, studiul convergenţei / divergenţei seriilor cu termeni oarecare se reduce la studiul convergenţei / divergenţei seriilor cu termeni pozitivi.

Definiţia 4.4.1. *Fie seria cu termeni oarecare* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \in \mathbb{R}$. *Spunem că:*

a) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *este* ***absolut convergentă (A.C.)****, dacă seria moduleleor* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *este convergentă (ca serie cu termeni pozitivi).*

b) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *este* ***semi - convergentă (S.C.)****, dacă* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C) *dar* , $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (D).

Teorema 4.4.1. **Dacă seria** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \in \mathbb{R}$ **este absolut convergentă, atunci şi seria** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **este convergentă.**

Demonstraţie. Deoarece, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A.C.) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (C). Aplicând Teorema 4.1.3. seriei modulelor, obţinem:

$$(\forall)\varepsilon > 0, \ (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î.} \left\| a_{n+1} \right| + \ldots + \left| a_{n+k} \right\| \equiv \left| a_{n+1} \right| + \ldots + \left| a_{n+k} \right| < \varepsilon, \ (\forall)n \geq n_\varepsilon$$

şi $(\forall)k \in \mathbb{N}^*$ (*)

Din proprietăţile funcţiei modul, rezultă că:

$$\left|a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}\right| \le \left|a_{n+1}\right| + \ldots + \left|a_{n+k}\right| \ (^{**})$$

Din (*) +(**) rezultă că $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C), conform criteriului general de convergenţă a lui Cauchy.

q.e.d.

Observaţie:

Reciproca teoremei de mai sus nu este adevărată; cu alte cuvinte, convergenţa seriei simple nu implică convergenţa seriei modulelor $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (C) \not\Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| (C)\right)$.

Exemplu: Fie seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. Evident este o serie alternată şi converge deoarece satisface criteriul lui Leibniz. Totuşi, seria modulelor, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverge ca serie armonică simplă.

1. Întrucât seria valorilor absolute, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, este o serie cu termeni pozitivi, pentru studiul naturii acesteia se vor folosi criteriile enunţate în secţiunea 4.3
2. În cazul în care seria modulelor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (D), am văzut că despre seria simplă $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, nu se poate afirma nimic. Totuşi, se demonstrează că *în cazul în care divergenţa seriei modulelor* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *a fost stabilită cu Criteriul raportului sau cu Criteriul rădăcinii, atunci şi seria (simplă)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

3. Pentru seriile cu termeni pozitivi $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \geq 0\right)$, noţiunile de convergenţă şi convergenţă absolută coincid (deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$).

4. În anumite situaţii, este utilă şi următoarea formulare echivalentă a Teoremei 4.4.1. "Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \in \mathbb{R}$ diverge, atunci şi seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge".

În concluzie, în studiul naturii seriilor cu termeni oarecare, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \in \mathbb{R}$, se poate aplica următorul:

Mod de lucru:

i) Se ataşează seriei cu termeni oarecare, seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (care este serie cu termeni pozitivi);

ii) Se studiază natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ folosind criteriile enunţate pentru serii cu termeni pozitivi;

iii) Dacă:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (C) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n (C)$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (D) (divergenţa fiind stabilită cu Criteriul raportului sau Criteriul rădăcinii $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D)

c) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (D) (divergenţa fiind stabilită cu alte criterii) $\Rightarrow$ despre natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nu se poate spune nimic. În acest caz trebuie folosite alte criterii (Abel, Dirichlet etc.).

Exemple:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n\cdot\sin^n\alpha}{\sqrt{n}}$, cu $\alpha\in 0,2\pi$ parametru real.

Evident seria este o serie cu termeni oarecare (datorită lui $\sin^n\alpha$) şi nu cu termeni alternanţi.

Ataşăm seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n\cdot|\sin^n\alpha|}{\sqrt{n}}$ şi aplicăm criteriul raportului. Atunci, obţinem:

$$\lambda\equiv\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot|\sin^{n+1}\alpha|}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{2^n\cdot|\sin^n\alpha|}=\lim_{n\to\infty}2\sqrt{\frac{n}{n+1}}\cdot|\sin\alpha|$$

şi deci:

$$\lambda=2|\sin\alpha|$$

Atunci, pentru:

i) $\lambda\equiv 2|\sin\alpha|<1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ (C) $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (C) (conf.T.4.1.1)

ii) $\lambda\equiv 2|\sin\alpha|>1$, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ (D) $\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ (D) (conf.Obs.3)

iii) $\lambda\equiv 2|\sin\alpha|=1$, nu putem preciza natura seriei $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ şi deci a seriei iniţiale $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Rezovând inecuaţiile trigonometrice de mai sus, avem:

i) pentru $\alpha\in\left[0,\dfrac{\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{7\pi}{6}\right)\cup\left(\dfrac{11\pi}{6},2\pi\right]\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n\cdot\sin^n\alpha}{\sqrt{n}}$ (A.C.)

ii) pentru $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right)\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n\cdot\sin^n\alpha}{\sqrt{n}}$ (D)

iii) pentru $\alpha\in\left\{\dfrac{\pi}{6},\dfrac{2\pi}{3}\dfrac{7\pi}{6},\dfrac{11\pi}{6}\right\}\Rightarrow$ nu putem preciza natura seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

Dar, în cazul iii) cele două serii (simplă şi a modulelor) au expresiile:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (C), ca serie alternantă care satisface criteriul lui Leibniz (şirul $\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$, monoton descrescător).

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ (D), (ca serie armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ cu $\alpha = \frac{1}{2} < 1$)

Deci, în acest caz, seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \cdot \sin^n \alpha}{\sqrt{n}}$ este (S.C.)

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{1-a}{1-2a}\right)^n$, cu $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ parametrul real.

Ataşăm seria modulelor: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left|\frac{1-a}{1-2a}\right|^n$ şi aplicăm criteriul rădăcinii:

$$\lambda \equiv \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left|\frac{1-a}{1-2a}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left|\frac{1-a}{1-2a}\right| = \left|\frac{1-a}{1-2a}\right|$$

Atunci, pentru:

i) $\lambda = \left|\frac{1-a}{1-2a}\right| < 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (C) ,deci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (C) (conf. T.4.4.1)

ii) $\lambda = \left|\frac{1-a}{1-2a}\right| > 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (D) , deci şi seria $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (D) (conf. Obs.3)

iii) $\lambda = \left|\frac{1-a}{1-2a}\right| = 1 \Rightarrow$ nu putem preciza natura seriilor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Atunci, rezolvând inecuaţiile de mai sus, concluzionăm că:

i) pentru $\lambda \in -\infty, 0 \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{1-a}{1-2a}\right)^n$ este (A.C.);

ii) pentru $\lambda \in \left(0, \frac{2}{3}\right) \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \left(\frac{1-a}{1-2a}\right)^n$ este (D);

iii) pentru $\lambda \in \left\{0, \frac{2}{3}\right\} \Rightarrow$ nu putem preciza natura seriei.

Dar, pentru:

a) $\underline{\lambda = 0} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$, care (D) conform C.G.D.

Într-adevăr

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$$

b) $\underline{\lambda = \frac{2}{3}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$,

care (D) conform C.G.D., deoarece $a_n \not\to 0$.

4.5. SERII DE PUTERI.

Aşa cum s-a observat din secţiunile precedente, noţiunea de "**serie numerică**" apare ca o generalizare (extindere) firească a noţiunii de "**şir numeric**".

În mod natural, aceste două noţiuni au căpătat în Analiza matematică noi extinderi, din ce în ce mai complexe, lucru de altfel deseori întâlnit nu numai în matematică ci şi în multe alte domenii ale ştiinţei.

Astfel, pornind de la noţiunea de şir numeric:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots \qquad (*)$$

se introduce noţiunea de "**şir de funcţii**":

$$f_n(x)\ _{n\in\mathbb{N}} : f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots \qquad (**)$$

unde funcţiile $f_n(x)$ sunt definite pe acelaşi domeniu $D \subset \mathbb{R}$.

Exemple:

a) $f_n(x)\ _{n\in\mathbb{N}^*}$, cu termenul general: $\begin{cases} f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f_n(x) = nx^{2n} \sin nx \end{cases}$

adică, şirul de funcţii are forma:

$x \sin x,\ 2x^4 \sin 2x,\ 3x^6 \sin 3x, \ldots, nx^{2n} \sin nx, \ldots$

b) $f_n(x)\ _{n\in\mathbb{N}^*}$, unde termenul general este: $\begin{cases} f_n : (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ f_n(x) = (n^2+1)\ln(nx) \end{cases}$

deci, şirul de funcţii are forma:

$$2\ln x,\ 5\ln 2x,\ 10\ln 3x, \ldots, (n^2+1)\ln(nx)\ldots$$

Ţinând seama că noţiunea de “**funcţie** “ este mult mai complexă decât cea de “**număr**”, este evident că noţiuni precum *convergenţă* sau *divergenţă* au căpătat pentru şirurile de funcţii valenţe noi. Astfel, un şir de funcţii $f_n(x)_{n\in\mathbb{N}}$ poate fi: **simplu (punctual) convergent, uniform convergent, slab convergent, tare convergent** etc.

Este natural ca în caz de convergentă, şirul de funcţii să aibă limita o funcţie $f(x)$ şi nu un număr. De asemenea, ţinând cont că termenii şirului sunt funcţii, care pot avea diverse proprietăţi (funcţie continue, derivabile, integrabile etc.), este natural să cercetăm în ce condiţii acestea se “transferă” la funcţia limită $f(x)$.

În mod cu totul analog noţiunea de “**serie numerică**”:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (***)$$

capătă o primă generalizare şi anume cea de “**serie de funcţii**”:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (****)$$

unde termenii seriei sunt funcţii definite pe acelaşi domeniu $D \subset \mathbb{R}$.

Exemple:

a) $$\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+1)\operatorname{arctg}(x^n+1) = \operatorname{arctg}1 + 2\operatorname{arctg}(x+1) + 5\operatorname{arctg}(x^2+1) + \ldots$$

unde termenul general al seriei este: $\begin{cases} f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f_n(x) = (n^2+1)\operatorname{arctg}(x^n+1) \end{cases}$

b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1+x^n} = \frac{1!}{1+x} + \frac{2!}{1+x^2} + \frac{3!}{1+x^3} + \ldots$$

unde termenul general are forma: $\begin{cases} f_n :\ 0,1 \to \mathbb{R} \\ f_n(x) = \dfrac{n!}{1+x^n} \end{cases}$

Analog, în caz de convergenţă (simplă, uniformă, etc.) seria va converge la o “**funcţie sumă**” s(x). Din nou este interesant şi important de studiat, în ce condiţii proprietăţile termenilor seriei de funcţii (integrabilitate, derivabilitate, continuitate etc.) se transferă asupra funcţiei sumă s(x).

4.5.1. SERII DE PUTERI

Un caz particular de serii de funcţii, dar foarte important şi des intâlnit în aplicaţiile economice, este cel al seriilor de puteri, unde termenii seriei sunt funcţii putere. Astfel, avem:

Definiţia 4.5.1: *Numim **serie de puteri centrată în** x_0, o serie de funcţii de forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots \qquad (4.5.1)$$

unde $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un şir numeric (Numerele $a_n \in \mathbb{R}$ se numesc *coeficienţii* seriei de puteri).

Observaţii:

i) un caz particular, dar foarte des întâlnit în aplicaţii, este cel al seriilor de puteri centrate în 0 (pe scurt, serii de puteri) deci când $x_0 = 0$. Vom obţine atunci seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (4.5.2)$$

ii) Deoarece prin substituţia:

$$y = x - x_0 \qquad (4.5.3)$$

o serie de puteri centrată în x_0 (şi variabila x) se reduce întotdeauna la o serie de puteri centrată în 0 (şi variabila y), adică avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \qquad (4.5.4)$$

ne vom ocupa numai în continuare numai de seriile de puteri centrate în 0, deci de forma (4.5.2).

Definiţia 4.5.2: *Spunem că, seria de puteri* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *este:*

a) ***convergentă (punctual)*** în $x = \overline{x}_0 \in \mathbb{R}$, *dacă seria numerică ataşată,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{x}_0^n$ *este convergentă;*

b) ***convergentă (punctual) pe domeniul*** $D_0 \subset \mathbb{R}$, *dacă converge în orice punct* $x \in D_0$ *(*D_0 *se numeşte mulţime de convergenţă a seriei).*

Teorema 4.5.1. Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$**, este întotdeauna nevidă.**

Demonstraţie. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un şir de numere reale oarecare şi D_0 mulţimea sa de convergenţă.

Pentru $x = 0$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0$, deci converge şi are suma $S = a_0$. Rezultă că $0 \in D_0$, deci $D_0 \neq \phi$.

q.e.d.

Teorema 4.5.2. (*lui Abel*)

Fie seria de puteri, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$**,** $a_n \in \mathbb{R}$**. Atunci,** $(\exists!) r \in 0,\infty$ **("r" se numeşte rază de convergenţă), astfel încât:**

$$\begin{cases} \text{i) } \textbf{pentru } x \in (-r, r) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \textbf{ converge } (C) \\ \text{ii) } \textbf{pentru } x \in (-\infty, -r) \cup (r, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \textbf{ diverge } (D) \end{cases} \qquad (4.5.5)$$

Observaţii:

i) Teorema lui Abel nu precizează natura seriei în capetele intervalului de convergenţă: $(\mathbf{-r, r})$. În exemplele concrete, se studiază separat natura seriei în cele două capete, adică seriile numerice:

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{r}^n$ şi $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (-\mathbf{r})^n$.

ii) Dacă raza de convergenţă $\mathbf{r} = 0$, atunci evident seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge numai în $x = 0$ şi diverge în rest (pentru $x \in \mathbb{R}^*$).

iii) Dacă raza de convergenţă $\mathbf{r} = +\infty$, atunci mulţimea de convergenţă a seriei $D_0 = \mathbb{R}$, deci seria nu diverge pentru nici o valoare reală.

iv) Aşadar, folosind teorema lui Abel, dacă aflăm raza de convergenţă **r**, ştim mulţimile pe care seria $\sum\limits_{r=0}^{\infty} a_n x^n$ converge sau diverge (evident cu excepţia valorilor $x = \pm\mathbf{r}$). Următoarele două teoreme ne oferă două formule pentru aflarea razei de convergenţă **r**.

Teoremă 4.5.3 ***(Teorema raportului).***

Fie seria de puteri, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **cu** $a_n \in \mathbb{R}$ **şi** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho \in 0, \infty$ **.**

Atunci raza de convergenţă r , este dată de relaţiile:

$$r = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & ;\rho \in (0,\infty) \\ +\infty & ;\rho = 0 \\ 0 & ;\rho = +\infty \end{cases} \tag{4.5.6}$$

Teorema 4.5.4 ***(Teorema rădăcinii)***

Fie seria de puteri, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu $a_n \in \mathbb{R}$, şi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \in [0,\infty]$.

Atunci, raza de convergenţă r, este dată de relaţiile:

$$r = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & ;\rho \in (0,\infty) \\ +\infty & ;\rho = 0 \\ 0 & ;\rho = +\infty \end{cases} \tag{4.5.7}$$

Observaţie: Din rezultatele enunţate anterior, se observă că în determinarea mulţimii (intervalului) de convergenţă respectiv a mulţimii (reuniune de intervale) de divergenţă pentru seria de puteri $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trebuie aplicat următorul:

Algoritm de lucru:

1) Se calculează valoarea "ρ" aplicând una din formulele:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ sau } \rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

2) Să determină raza de convergenţă "**r**" cu relaţiile (4.5.6) sau (4.5.7) (care de fapt coincid);

3) Se scriu intervalele de convergenţă / divergenţă ale seriei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$;

4) Se studiază natura seriei în cele două capete $x = \pm r$.

Observaţie: În cazul în care seria este centrată în $x_0 \left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)$ se reduce la seria centrată în 0 $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n y^n \right)$ folosind substituţia (4.5.3) şi apoi se aplică algoritm de lucru, obţinându-se mulţimea de (C)/(D) pentru variabila y. Folosind aceeaşi substituţie se scriu mulţimile de (C)/(D) în variabila x.

Exemple:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$; Avem: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, deci $|a_n| = \frac{1}{n}$.

Folosind teorema rădăcinii, obţinem:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

(am folosit aici limita fundamentală: $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

deci conform (4.5.7), avem: $\mathbf{r} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1}$ deci $\mathbf{r} = 1$. Atunci, conform Teoremei 4.5.2. (Abel) obţinem:

i) pentru $x \in (1,-1) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ (C)

ii) pentru $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty) \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ (D)

iii) pentru $x = \pm 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ nu-i putem preciza natura.

Dar, pentru:

$\underline{x=1}$ obţinem: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ (C) (conform Criteriului lui Leibniz de la serii alternante)

iar, pentru:

$\underline{x=-1}$, obţinem: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n \equiv \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D) (ca serie armonică $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ cu α=1)

În concluzie, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ → (C), dacă $x \in (-1,1]$; → (D), dacă $x \in (-\infty,-1] \cup (1,+\infty)$

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!}$; avem $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$, deci $|a_n| = \frac{1}{n!}$

Folosind teorema raportului, obţinem:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

şi deci conform (4.6.6) avem $r=+\infty$. Deci, seria $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}$ (C) pentru $(\forall)\ x\in\mathbb{R}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot 2^n}(x+1)^n$, este o serie de puteri centrată în $x_0=-1$.

Notăm $y=x+1$ şi obţinem $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot 2^n}y^n$ cu $a_n=\frac{n+1}{n\cdot 2^n}=|a_n|$

Atunci:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{(n+1)2^{n+1}}\cdot\frac{n2^n}{n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}=\frac{1}{2}$$

Atunci raza de convergenţă $\mathbf{r}=\frac{1}{\rho}=2$, şi avem:

i) pentru $y\in(-2,2)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n2^n}y^n$ (C)

ii) pentru $y\in(-\infty,-2)\bigcup(2,\infty)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n2^n}$ (D)

iii) pentru $y=\pm2\Rightarrow ?$ (nu putem preciza natura seriei)

Revenind la variabila $x(x=y-1)$, avem:

i) pentru $x\in(-3,1)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot 2^n}(x+1)^n$ (C)

ii) pentru $x\in(-\infty,-3)\bigcup(1,\infty)\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n\cdot 2^n}(x+1)^n$ (D)

iii) pentru $x=-3,\ x=1\Rightarrow ?$ (nu putem preciza natura seriei)

Dar, pentru:

$\underline{x=-3,}$ obţinem $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n\equiv\sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{n+1}{n}$ (D) (conform C.G.D, deoarece termenul general $(-1)^n\frac{n+1}{n}\not\to 0$)

iar pentru:

$\underline{x = 1}$, obţinem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ (D) (conform C.G.D, deoarece termenul general $\frac{n+1}{n} \to 1 \neq 0$).

Cap. 5. FUNCŢII REALE DE n VARIABILE REALE

Fenomenele vieţii reale sunt descrise cel mai adesea de funcţii care depind nu de o singură variabilă ci de mai multe variabile independente. Acest lucru este valabil şi în viaţa economică.

În acest capitol se introduc elementele de bază ale teoriei acestui tip de funcţii. Pentru a depăşi dificultăţile extinderii conceptelor fundamentale (continuitate, limită, derivabilitate etc.) de la funcţii de o variabilă la o funcţie de mai multe variabile am abordat numai cazul funcţiilor de două variabile, dezvoltarea ulterioară făcându-se în aceeaşi manieră.

5.1. ŞIRURI DE PUNCTE ÎN $\mathbb{R}^n$

Să considerăm spaţiul vectorial $\mathbb{R}^n$ şi să considerăm un vector oarecare $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^t$ al său. Pentru a simplifica scrierea vom renunţa la simbolul de transpunere şi în cele ce urmează vom scrie pur şi simplu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Acestui element al spaţiului $\mathbb{R}^n$ îi asociem un punct P care are coordonatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tot aşa cum unui vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ din $\mathbb{R}^2$ îi asociem un punct P cu coordonatele x_1, x_2 într-un sistem de axe ortogonale.

Asociem unei perechi de astfel de puncte P, P_0 $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ un număr nenegativ numit distanţă şi definit prin:

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots (x_n - x_n^0)^2}\,. \qquad (5.1.1)$$

Evident, distanţa este nulă dacă şi numai dacă P şi P_0 coincid. Convenim că însuşi vectorul $\mathbf{x}$ să se numească punct din $\mathbb{R}^n$. În acest mod, distanţa d se asociază unei perechi de vectori din $\mathbb{R}^n$.

Definiţia 5.1.1. Se numeşte şir de puncte din $\mathbb{R}^n$ funcţia care asociază oricărui număr natural k un punct unic $\mathbf{x}^k$ din $\mathbb{R}^n$.

$$k \to \mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \ldots, x_n^k)$$

Şirurile $(x_1^k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(x_2^k)_{k\in\mathbb{N}}, \ldots, (x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ se numesc şiruri de coordonate.

Definiţia 5.1.2. Şirul $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge la punctul $\mathbf{x}^0$ dacă:

$$\lim_{k\to\infty} d(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^0) = 0 \qquad (5.1.2)$$

În spiritul definiţiei cunoscute a limitei unui şir de numere reale aceasta înseamnă:

$$(\forall)\ \varepsilon > 0, \exists\ k(\varepsilon)\ \text{a.î.}(\forall)k > k(\varepsilon)\ d(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^0) < \varepsilon \qquad (5.1.3)$$

Folosind (5.1.1) deducem că:

$$\sqrt{(x_1^k - x_1^0)^2 + (x_2^k - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n^k - x_n^0)^2} < \varepsilon$$

pentru $k > k(\varepsilon)$ adică

$$\left|x_i^k - x_i^0\right| < \varepsilon\ (\forall)\ k > k(\varepsilon),\ (\forall)\ i = \overline{1,n} \qquad (5.1.4)$$

sântem conduşi astfel la:

Teorema 5.1.1. Şirul x^k este convergent la x^0 dacă şirurile de coordonate x_i^k sunt convergente la x_i^0 pentru orice $i=\overline{1,n}$.

Exemplu. Considerăm în $\mathbb{R}^2$ şirul $\mathbf{x}^k=\left(\frac{2k+1}{k^2},\frac{k-2}{3k}\right)$. Şirurile de coordonate sunt $x_1^k=\frac{2k+1}{k^2}$, $x_2^k=\frac{k-2}{3k}$ şi pentru $k\to\infty$ au limitele 0 şi respectiv $\frac{1}{3}$. Aceasta înseamnă că x^k are limita $x^0=\left(0,\frac{1}{3}\right)$.

5.2. FUNCŢII DE DOUĂ VARIABILE

În cele ce urmează vom considera spaţiul $\mathbb{R}^2$ ale cărui puncte x au doar două coordonate $\mathbf{x}=(x_1,x_2)$. Pentru ca scrierea să fie mai simplă vom înlocui perechea de coordonate (x_1,x_2) prin perechea (x,y).

Fie D o mulţime de puncte (x,y) din $\mathbb{R}^2$ şi I o mulţime din $\mathbb{R}$.

Definiţia 5.2.1. Se numeşte funcţie de două variabile tripleta formată din D,I şi o lege de corespondenţă care asociază oricărui punct $(x,y)\in D$, un singur element $z\in I$.

Exprimăm această corespondenţă prin $z=f(x,y)$.

Observaţie. Când D este din $\mathbb{R}^n$ iar $I\subset\mathbb{R}$ în mod similar se defineşte o funcţie de n variabile.

Dacă luăm un sistem cartezian de coordonate Oxyz şi reprezentăm mulţimea punctelor P(x,y,z) unde $z = f(x, y)$ obţinem imaginea geometrică a funcţiei sau graficul său. De data aceasta graficul e o porţiune dintr-o suprafaţă.

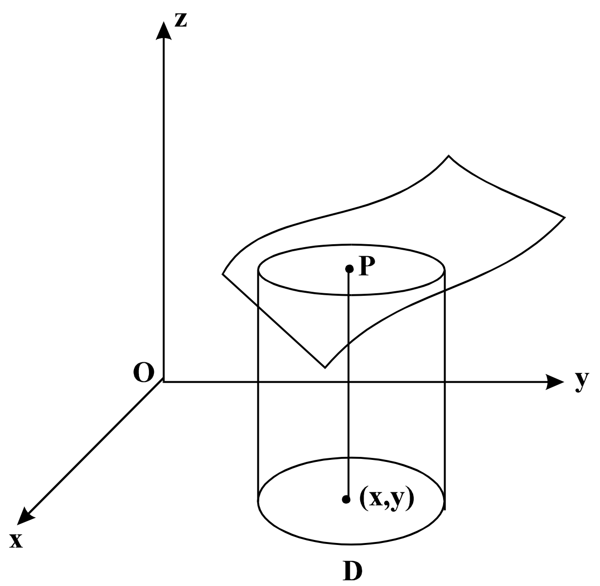


Fig. 5.1.

Exemplu: Să se reprezinte graficul funcţiei $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soluţie. Ridicăm la pătrat egalitatea şi obţinem $z^2 = x^2 + y^2$. Dacă facem aici x = 0 (intersectăm graficul cu planul yOz obţinem $z = \pm y$ adică două drepte în acest plan. În mod similar intersectăm graficul cu planul xOz şi obţinem dreptele $x = \pm z$.

Graficul este un con infinit cu vârful în originea sistemului de coordonate.

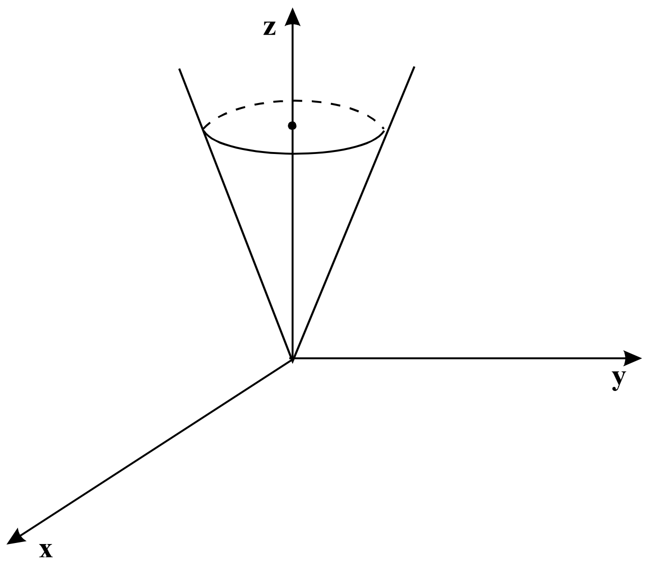


Fig. 5.2

5.3. LIMITĂ ŞI CONTINUITATE

Să considerăm o funcţie $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ şi (x_0,y_0) un punct de acumulare al lui D. Aceasta înseamnă că există cel puţin un şir de puncte $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ din D care converge la (x_0,y_0).

Definiţia 5.3.1. *Funcţia f(x,y) are în* (x_0,y_0) *limita* ℓ*, dacă oricare ar fi şirul* $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}\in D$, $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}\to(x_0,y_0)$, $(x_k,y_k)\neq(x_0,y_0)$ *rezultă că* $f(x_k,y_k)\to\ell$.

Vom scrie: $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ sau $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = \ell$.

Această limită se numeşte limită globală deoarece x şi y tind simultan şi independent către x_0 respectiv y_0. Dacă x_0 şi y tind succesiv la x_0 respectiv y_0 adică dacă $\ell_1 = \lim\limits_{x\to x_0}(\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y))$, $\ell_2 = \lim\limits_{y\to y_0}(\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y))$, , se obţin limitele iterate sau parţiale. Are loc:

Teorema 5.3.1. Dacă limita globală există atunci şi limitele parţiale există şi are loc egalitatea:

$$\ell = \ell_1 = \ell_2 \tag{5.3.1}$$

Reciproca nu este adevărată.

Demonstraţie. Pentru a justifica rezultatul este suficient să considerăm mai întâi şiruri generale $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}} \to (x_0, y_0)$ şi apoi să le particularizăm în şiruri de formă particulară $(x_k, y_0)_{k\in\mathbb{N}} \to (x_0, y_0)$ şi $(x_0, y_k)_{k\in\mathbb{N}} \to (x_0, y_0)$. Ceea ce e adevărat pentru general se păstrează şi pentru particular.

Faptul că reciproca e falsă se poate proba prin următorul exemplu.

Să se calculeze limitele iterate ale funcţiei $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$ în punctul (0,0).

$$\ell_1 = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{x} = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\ell_2 = \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y}{y} = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

Cele două limite nefiind egale nu există limita globală a funcţiei în origine.

Observaţii:

1^0. Dacă $\ell_1 = \ell_2$ nu rezultă că limita globală ℓ există ci doar că dacă aceasta există este egală cu valoarea lor comună.

2^0. S-ar putea ca în punctul (x_0,y_0) funcţia f să nu fie definită adică să nu se poată calcula $f(x_0,y_0)$ cum este în exemplul precedent.

Definiţia 5.3.2. Funcţia f (x,y) este continuă în (x_0,y_0) dacă:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Ca şi în cazul limitei globale acest tip de continuitate se numeşte continuitatea globală. Se poate şi aici pune problema continuităţii în raport cu fiecare argument când celălalt este fixat, adică continuitatea parţială.

Exemplu. Să se studieze continuitatea globală şi cea parţială pentru funcţia:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, (x, y) \neq (0,0), \\ 0 \qquad\quad , (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

Calculăm limitele parţiale:

$$\ell_1 = \lim_{x \to 0} f(x, 0) = \lim_{x \to 0} 0 = 0$$

$$\ell_2 = \lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0$$

Se observă că $\ell_1 = f(0,0) = \ell_2 = 0$, deci funcţia este continuă în raport cu fiecare argument.

Limita globală nu există pentru că luând şiruri $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}} \to (0,0)$ în care $y_k = mx_k$, $m \neq 0$ obţinem:

$$f(x_k, y_k) = \frac{x_k \cdot mx_k}{x_k^2 \cdot m^2 x_k^2} = \frac{m}{1 + m^2},$$

deci $\quad f(x_k, y_k) = \dfrac{m}{1 + m^2}$ care depinde de m.

Aşadar continuitatea globală nu există.

5.4. DERIVATE PARŢIALE ŞI DIFERENŢIALE

5.4.1. DERIVATE PARŢIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

Să considerăm funcţia $f : D \to \mathbb{R}$ şi (x_0, y_0) un punct din interiorul mulţimii D. Considerăm de asemenea un punct (x, y) din D diferit de (x_0, y_0).

Definiţia 5.4.1.1. Se numeşte derivată parţială a funcţiei f în raport cu variabila x în punctul (x_0, y_0).

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \tag{5.4.1}$$

dacă limita există. Dacă aceasta este şi finită, spunem că funcţia este derivabilă parţial în raport cu x în punctul considerat.

Notăm valoarea limitei cu $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ sau $f'_x(x_0, y_0)$. În mod similar se introduce derivata parţială şi derivabilitatea parţială în raport cu y în (x_0, y_0):

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Observaţie. Derivata parţială nu aduce nici o noutate faţă de cazul funcţiilor de o singură variabilă. Practic, când se derivează parţial o funcţie de n variabile în raport cu una, toate celelelte variabile se consideră constante (parametri).

Dacă f (x, y) este derivabilă parţial în raport cu x sau/şi y în toate punctele unei submulţimi D_1 a a lui D, spunem că f este derivabilă parţial pe D_1.

În acest caz pentru orice punct $(x_0, y_0) \in D_1$ stabilim corespondenţele $(x_0, y_0) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ care definesc două funcţii noi numite derivatele parţiale ale lui f în raport cu x respectiv y în D_1. Ele se vor nota:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ sau } f'_x(x, y) \text{ respectiv } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ sau } f'_y(x, y).$$

Observaţie. Calculul derivatelor parţiale $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ se face folosind regulile obişnuite de calcul pentru derivata sumei, produsului, câtului, funcţiilor compuse etc.

Exemplu. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ dacă $f(x, y) = xy\, e^{xy}$.

Soluţii. Calculăm $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ considerându-l pe y parametru constant.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (xy)'_x e^{xy} + (xy)(e^{xy})'_x = ye^{xy} + xy(ye^{xy}) = (y + xy^2)e^{xy}$$

Calculăm $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ considerându-l pe x parametrul constant:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (xy)'_y e^{xy} + (xy)(e^{xy})'_y = xe^{xy} + (xy)(xe^{xy}) = (x + x^2y)e^{xy}$$

Observaţii :

1^0. În exemplul de mai sus, simetria în raport cu variabilele x şi y permitea calculul celei de-a doua derivate parţiale schimbând între ele variabilele x cu y în $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.

2^0. Toate consideraţiile anterioare se pot extinde de la funcţii de două variabile la funcţii de n variabile fără nici un fel de dificultate.

5.4.2. DERIVATE PARŢIALE DE ORDIN SUPERIOR

Să considerăm din nou $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, derivabilă parţial în raport cu x şi y pe D. Cele două derivate parţiale $f'_x(x,y) = g_1(x,y)$ şi $f'_y(x,y) = g_2(x,y)$ pot fi la rândul lor derivabile pe o submulţime D_1 a lui D. Apare natural să considerăm derivatele lor parţiale drept derivate parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei f:

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = f''_{xx}(x,y),$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = f''_{xy}(x,y),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = f''_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = f''_{yy}(x,y).$$

Pentru funcţia de două variabile f(x,y) obţinem astfel patru derivate de ordinul al doilea. Dintre acestea se remarcă $f''_{xy}(x,y)$ şi $f''_{yx}(x,y)$ numite derivate parţiale mixte de ordinul al doilea.

Natural se pune întrebarea dacă între cele două derivate există legături. Exemplul următor sugerează că răspunsul este afirmativ.

Exemplu. Să se determine derivatele parţiale de ordinul al doilea ale funcţiei $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2y+2xy+1$.

Soluţie. Obţinem succesiv:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2xy+2y\ ;\ \frac{\partial f}{\partial x}=x^2+2x\ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=2y\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=2x+2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=2x+2\ ;\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=0\,.$$

Se observă că cele două derivate parţiale mixte f''_{xy}, f''_{yx} sunt egale. Nu orice funcţie f (x,y) are această proprietate. Fără demonstraţie enunţăm următoarea teoremă:

Teorema 5.4.2*(Criteriul lui Schwarz)*

Dacă în domeniul $D_1\subset D$ funcţia f (x,y) satisface condiţiile:

a) are derivatele $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$,

b) derivatele mixte de ordinul al doilea $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ sunt continue global, atunci derivatele parţiale mixte de ordinul al doilea sunt egale.

Observaţie. Funcţia f (x,y) din exemplul anterior satisface condiţiile criteriului lui Schwarz.

Fiecare derivată parţială de ordinul al doilea poate fi la rândul său derivată parţial în raport cu cele două variabile. Se obţin astfel derivate parţiale de ordinul al treilea şi procesul poate continua.

5.4.3. DERIVATELE PARŢIALE ALE

FUNCŢIILOR COMPUSE

Să luăm funcţia $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi să presupunem că la rândul lor, argumentele x şi y ale lui f sunt funcţii de variabilele u,v,w:

$$f(x, y) = f(x(u, v, w), y(u, v, w)) = \varphi(u, v, w) \qquad (5.4.2)$$

Ne interesează derivatele parţiale ale funcţiei φ în raport cu cele trei variabile u,v,w. Un calcul nu foarte complicat care foloseşte definiţia derivatei parţiale conduce la formula de calcul a celor trei derivate parţiale:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial w} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial w}.$$

Exemplu. Să se afle derivatele parţiale ale funcţiei $f(x, y) = xy^2 + x^2y$, cunoscând că x = u + v, y = u - v.

Soluţie. Notăm $\varphi(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = (y^2 + 2xy) \cdot 1 + (2xy + x^2) \cdot 1 = y^2 + 4xy + y^2,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = (y^2 + 2xy) \cdot 1 + (2xy + x^2) \cdot 1 = y^2 - x^2.$$

Observaţie. Formula (5.4.3.1) se poate generaliza când f are n variabile iar fiecare este funcţie de m variabile. Evident aplicarea formulei este posibilă când toate funcţiile implicate sunt derivabile parţial.

5.4.4. DIFERENŢIALELE FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

Fie $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, (x_0,y_0) şi (x,y) două puncte din D. Să notăm h = x - x_0,

$k = y - y_0$. Numim creşterea totală a funcţiei în punctul (x_0,y_0) cantitatea $\Delta f(x_0, y_0)$ definită prin:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \tag{5.4.3}$$

Definiţia 5.4.2 *Funcţia f este* ***diferenţiabilă*** *în (x_0,y_0) dacă există două constante A şi B independente de h şi k şi două funcţii $\alpha(x_0, y_0, h, k), \beta(x_0, y_0, h, k)$ astfel încât:*

$$\alpha(x_0, y_0, 0,0) = 0 \ , \ \beta(x_0, y_0, 0,0) = 0, \ \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \alpha(x_0, y_0, h, k) = \lim_{\substack{h\to 0\\ k\to 0}} \beta(x_0, y_0, h, k) = 0$$

$$\Delta f(x_0, y_0) = Ah + Bh + h\alpha(x_0, y_0, h, k) + k \cdot \beta(x_0, y_0, h, k) \tag{5.4.4}$$

Se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 5.4.3 Dacă f (x,y) este diferenţiabilă în (x_0,y_0) atunci ea este derivabilă parţial în raport cu x şi y în acest punct şi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B$.

Definiţia 5.4.3 *Expresia Ah +Bk se numeşte* ***diferenţiala funcţiei f în punctul (x_0,y_0)*** *şi se notează:*

$$df(x_0,y_0) = Ah + Bk. \tag{5.4.5}$$

Dacă funcţia f (x,y) este diferenţiabilă în (x_0,y_0) atunci diferenţiala sa $df(x_0,y_0)$ e dată de

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \tag{5.4.6}$$

Cum dx = h, dy = k obţinem *diferenţiala de ordinul întâi* a funcţiei f (x,y) în forma finală:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

Exemplu. Să se determine diferenţiala de ordinul întâi a funcţiei $f(x, y) = xy^2 + 2x^3y$ în punctul (1,1).

Soluţie: $f'_x(x, y) = y^2 + 6x^2y \quad f'_x(1,1) = 7$

$f'_y(x,y) = 2xy + 2x^3 \qquad f'_y(1,1) = 4$

Obţinem: $df(1,1) = 7dx + 4dy$.

Observaţie. Diferenţiala de ordinul întâi ale funcţiei f (x,y) serveşte la aproximarea creşterii totale a funcţiei $f, \Delta f(x_0, y_0)$ conform formulei (5.4.3).

Dacă f (x,y) este diferenţiabilă în toate punctele (x_0, y_0) unui domeniu $D_1 \subset D$, putem defini o corespondenţă:

$(x_0, y_0) \to df(x_0, y_0) \quad (\forall)\ (x_0, y_0) \in D_1$.

Care se numeşte diferenţiala lui f şi se scrie $df(x,y)$.

Ea poate fi la rândul său diferenţiabilă. Diferenţiala sa se numeşte diferenţiala de ordinul al doilea a lui f şi se notează $d^2f(x,y)$. Un calcul elementar conduce la formula $d^2f(x,y)$.

$$d^2f(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\cdot k^2$$

Exemplu. Să se determine $d^2f(1,1)$ pentru funcţia:

$$f(x,y) = xy + 2x^2y^3$$

Soluţie.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 4xy^3 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 6x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y^3 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + 12xy^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^2y$$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 13 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 12$ şi în final

$d^2f(1,1) = 4h^2 + 26hk + 12k^2$.

Observaţii:

1^0. Procesul poate continua obţinând diferenţiale de ordin superior lui 2.

2^0. Diferenţiala de ordinul al doilea este după cum se poate vedea din exemplul de mai sus o formă pătratică de variabile h,k. Când variabilele sunt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ această diferenţială devine o formă pătratică de n variabile. Ea joacă rolul derivatei a doua la funcţii de o singură variabilă adică serveşte studiul convexităţii unei funcţii de n variabile.

5.5. EXTREMELE FUNCŢIILOR DE MAI MULTE VARIABILE

5.5.1. FORMULA LUI TAYLOR PENTRU FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE

Se cunoaşte formula lui Taylor pentru funcţii de o variabilă care are derivate până la ordinul k+1 într-o vecinătate a punctului x_0.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{x-x_0}{1!}f'(x_0)+\frac{(x-x_0)^2}{2!}f''(x_0)+\dots$$
$$\dots+\frac{(x-x_0)k}{k!}f^{(k)}(x_0)+\frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\theta)$$

θ fiind un punct intermediar lui x_0 şi x.

Această formulă permite aproximarea valorii f în x cu ajutorul valorilor acesteia şi a primelor sale k derivate în punctul x_0, dacă ultimul termen (restul de ordin k) este neglijat.

Căutăm o exitindere a formulei la cazul funcţiilor de două variabile după care, natural, extinderea se poate face la n variabile.

Fie aşadar, $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ şi (x_0,y_0) un punct interior din D.
Presupunem că (x,y) este un punct oarecare din D şi notăm $h=x-x_0,\ k=y-y_0$.

Teorema 5.5.1. Dacă f (x,y) are toate derivatele parţiale până la ordinul m în (x_0,y_0) iar derivatele parţiale de ordin m+1 există într-o vecinătate V a lui (x_0,y_0) atunci oricare ar fi punctul $(x,y)\in V$, are loc formula:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k\right] + \\
&+ \frac{1}{2!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial}{\partial y}(x_0,y_0)k\right]^{(2)} f + \ldots + \\
&\ldots + \frac{1}{m!}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial}{\partial y}(x_0,y_0)k\right]^{(m+1)} f + R_m
\end{aligned}
\tag{5.5.1}
$$

unde :

$\left[\frac{\partial}{\partial x}(x_0,y_0)h + \frac{\partial}{\partial x}(x_0,y_0)k\right]^{(i)} f$ reprezintă puterea formală "i" a expresiei diferenţiale din paranteză aplicată funcţiei f iar R_m numit restul de ordin m în formula lui Taylor este exprimat prin:

$$
R_m = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)h + \frac{\partial}{\partial y}(x_0+\theta h, y_0+\theta k)k\right]^{(m+1)} f;\ \ \theta \in (0,1) \tag{5.5.2}
$$

5.5.2. TEOREMA LUI FERMAT PENTRU FUNCŢII DE MAI MULTE VARIABILE

În teoria diferenţială a funcţiilor de o variabilă, teorema lui Fermat afirmă că într-un punct de extrem local din interiorul domeniului de derivabilitate al funcţiei, $D_{f'}$, derivata f' se anulează. Încercăm aici o extindere la funcţii de două variabile care se poate apoi transpune la funcţii de n variabile.

Să considerăm $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ şi $(x_0,y_0) \in D$.

Definiţia 5.5.1 Punctul (x_0,y_0) **se numeşte maxim (minim) local pentru** $f(x,y)$ **dacă există o vecinătate V a acestuia astfel încât** $(\forall)\ (x,y) \in V$ **are loc:**

$$
f(x,y) \le f(x_0,y_0)\ \ (f(x,y) \ge f(x_0,y_0)) \tag{5.5.3}
$$

Teorema lui Fermat poate constitui o metodă prin care se determină punctele de extrem sau posibilele puncte de extrem.

Teorema 5.5.2 Dacă $f(x,y)$ are derivate parţiale finite în raport cu x şi y în punctul de extrem local (x_0,y_0) din interiorul lui D, atunci:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0 \qquad (5.5.4)$$

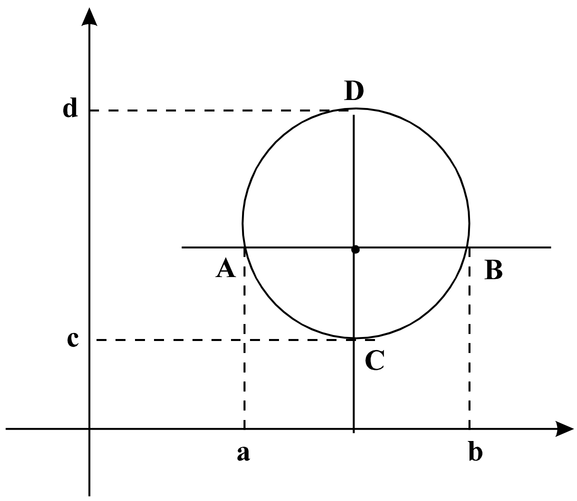
Demonstraţie. Considerăm $\varphi(x)=f(x,y_0)$ şi $\psi(y)=f(x_0,y)$. Cum (x_0,y_0) este în interiorul lui D, (vezi fig. 5.3) x_0 se află în interiorul lui (a,b) iar y_0 în interiorul lui (c,d). Se poate aplica teorema lui Fermat pentru $\varphi(x)$ cu x_0 punct de extrem local şi $\psi(y)$ cu y_0 punct de extrem local.

Obţinem:

$$\frac{d\varphi}{dx}(x_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=0,\quad \frac{d\psi}{dy}(y_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$$

ceea ce demonstrează teorema.

Fig. 5.3



Soluţiile sistemului (5.5.4) se numesc puncte critice sau puncte staţionare. Reciproca nefiind adevărată, punctele critice rămân posibile puncte de extrem. Condiţiile (5.5.4) pentru punctele (x_0,y_0) sunt doar condiţii necesare de extrem.

Exemplu. Să se determine posibilele puncte de extrem ale funcţiei:

$$f(x,y)=x^3+y^2-3xy+15$$

Soluţie: Calculăm $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3x$$

Rezolvăm sistemul $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$$\begin{aligned} &3x^2 - 3y = 0 \\ &2y - 3x = 0 \end{aligned}$$

Obţinem soluţiile (0,0) şi $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$ care sunt posibile puncte de extrem.

5.5.3. CONDIŢII SUFICIENTE DE EXTREM (DETERMINAREA EXTREMELOR)

Am văzut în cele de mai sus că un punct de extrem este punct staţionar dar din teorema lui Fermat nu putem obţine şi reciproca. Căutăm aşadar condiţii suficiente de extrem prin care să putem aprecia dacă un punct staţionar este sau nu este punct de extrem.

Să remarcăm mai întâi că formula lui Taylor (5.5.1.2) se poate scrie şi sub forma:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f + \ldots \frac{1}{m!} d^m f(x_0, y_0) + R_m \quad (5.5.5)$$

Dacă m = 2 atunci

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} df + \frac{1}{2!} d^2 f + R_2 \quad (5.5.6)$$

Să presupunem acum că (x_0, y_0) este un extrem local. În virtutea condiţiilor (5.5.2.2) rezultă că :

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) k = 0.$$

În plus dacă $x - x_0 = h$ şi $y - y_0 = k$ sunt suficient de mici, R_2 poate fi neglijat (acolo h şi k apar la puterea a treia). Rezultă că pentru (x,y) într-o vecinătate suficient de mică a lui (x_0, y_0):

$$\operatorname{sgn} \, f(x, y) - f(x_0, y_0) = \operatorname{sgn} d^2 f(x_0, y_0)$$

obţinem, astfel:

Teorema 5.5.3. Dacă forma pătratică $d^2f(x_0, y_0)$ este pozitiv definită în punctul critic (x_0, y_0) atunci acest punct este minim local. Dacă în acelaşi punct $d^2f(x_0, y_0)$ este negativ definită, punctul este maxim local.

Condiţiile în care o formă pătratică este pozitiv (negativ) definită au fost prezentate anterior. Pentru prezenta formă pătratică, matricea este:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \qquad (5.5.7)$$

care se numeşte **matrice hessiana** şi se poate generaliza la funcţii de n variabile. Suntem conduşi astfel la următoarea teoremă:

Teorema 5.5.4 Fie $P(x_0, y_0)$ **punct critic pentru funcţia** $f(x, y)$ **şi** Δ_1, Δ_2 **minorii diagonali ai matricii Hessiene în acesta. Atunci:**

1. **Dacă** $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ **atunci P este** **<u>punct de minim local</u>** **pentru** $f(x, y)$**;**
2. **Dacă** $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ **atunci P este** **<u>punct de maxim local</u>** **pentru** $f(x, y)$**;**
3. **Dacă** $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ *sau* $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$ **atunci P nu este** **<u>punct de extrem local</u>** **pentru** $f(x, y)$**;**
4. **Dacă** $\Delta_1 = 0$ *sau* $\Delta_2 = 0$ **atunci nu putem preciza natura punctului critic P.**

Exemple :

1⁰. Să se determine extremele funcţiei:

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3xy + 15$$

Soluţie. Determinăm punctele de extrem local printre punctele critice adică printre soluţiile sistemului:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Am văzut anterior că sunt două puncte critice $(0,0)$, $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$. Fiecare poate să fie sau nu punct de extrem.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Matricea hessiană:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

O calculăm în fiecare punct critic:

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ şi } \Delta_1 = 0, \ \Delta_2 = -9$$

Punctul (0,0) nu este punct de extrem.

$$H\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right) = \begin{pmatrix} \frac{27}{2} & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ şi } \Delta_1 = \frac{27}{2}, \ \Delta_2 = 18$$

Punctul $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$ este un *punct de minim*.

2^0. Să se determine extremele funcţiei:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_3$$

Punctele staţionare (critice) sunt soluţii ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - x_3 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - x_1 = 0$$

Obţinem un singur punct critic (0,0,0). Acesta este şi singurul posibil punct de extrem.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$$

Matricea hessiana devine:

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

şi are lanţul minorilor principali:

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 4, \quad \Delta_3 = 6$$

Rezultă că (0,0,0) este un punct de *minim local*.

Bibliografie:

1. **Allen, R.G.D.,** *„Analiză matematică pentru economişti”*, Ed. Şt., Bucureşti, 1971;
2. **Dantzig, G.,** *„Application et prologements de la programmation lineaire”*, Dunod, Paris, 1966;
3. **Diaconiţa, V., Manolachi, A., Rusu, G.,** *„Matematici aplicate în economie”*, Ed. Chemarea, Iaşi, 1993;
4. **Diaconiţa, V., Rusu, G.,** *„Optimizări liniare”*, Ed. Sedcom Libris, Iaşi, 2001;
5. **Diaconiţa, V.,** *„Matematici aplicate în economie”*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2003;
6. **Diaconiţa, V., Rusu, G., Spînu, T. M.,** *„Matematici aplicate în economie”*, Ed. Sedcom Libris, Iaşi, 2004;
7. **Drăgan, I.,** *„Tehnici de bază în programarea liniară”* , Ed. Tehnică, Bucureşti, 1976;
8. **Mihoc, G., Ştefănescu, A.,** *„Programarea matematică”*, Ed. Did. şi Ped., Bucureşti, 1973;
9. **Tamaş, V.,** *„Matematică pentru studenţii economişti”*, Ed. Junimea, Iaşi, 2001.