

Și totuși, de ce ‘mama naibii’ trebuie să învăț eu, ditamai studentul la FEAA și viitorul ultra-, hyper-, mega-specialist în economie, despre *matrici, rangul și inversa unei matrici, sisteme de ecuații liniare, etc. când singurul lucru pe care trebuie să-l știu, ca să ajung bogat ca și Becali (Bill Gates, Mark Zuckerberg,... pentru pretențioși), este să număr banii! Așa că, dați-mi naibii mai repede diploma și lăsați-mă cu tâmpenia asta de MATEMATICĂ!!! Mamăăă..., ajutor că mă omoară profii ăștia de mate!*

Păi, uite, tocmai de-aia:

1. Modelul lui LEONTIEF: analiza de tip INPUT-OUTPUT în teoria sistemelor economice

1.1 Cine/ce este LEONTIEF?

- este un ‘EL’, un **economist** (cum veți ajunge și voi peste câțiva ani, să sperăm că nu prea mulți...);
- Wassily W. Leontief s-a născut în 1906 la Sankt-Petersburg (autoritățile ruse i-au scris pe certificatul de naștere 1905, dar na, se mai întâmplă) și a decedat în 1999 la New York (deci, ...93 de ani);
- a studiat la Universitatea de Stat din Moscova și la cea din Leningrad (1921-1925) (pe vremea lui se numea Petrograd), a obținut titlul de doctor în economie la Universitatea din Berlin (1928) a lucrat în calitate de cercetător la Institutul de Economie Agrară din Kiel (1927-1928) și a fost profesor la Harvard (1946-1975) respectiv la Universitatea New York (1975-1999) (băi frate, ăsta nu s-a mai oprit cu învățatul, nu-i sănătos cu capu...);
- **în 1973, devine laureat al premiului Nobel în economie**, pe baza teoriei INPUT-OUTPUT dezvoltată de el, teorie care analizează legăturile (interdependențele) sectoriale din cadrul unui sistem economic (brrr, ce de cuvinte complicate);
- aplicând această teorie și analizând mai bine de 500 de sectoare (industrii) ale economiei SUA între anii 1965-1970, a demonstrat (spre stupefacția tuturor economiștilor, antreprenorilor și politicienilor de atunci) că țara cea mai bogată în capital (bani), și anume SUA, exportă mărfuri care înglobează mai multă forță de muncă (labor) decât resurse financiare (capital). Și pentru că această descoperire (foarte neplăcută pentru ceilalți mari economiști ai epocii) trebuia să poarte un nume, au numit-o simplu: **Paradoxul lui Leontief**.
- din motive parțial necunoscute, de genul: “Bă, ăsta-i chiar șmecher...”, “Mamăăă..., ce tare-i tipul, nu înțeleg nimic din ce zice...”, “Hai să-i dăm rapid un job, că mai descoperă vreo 2-3 paradoxuri și ne face pe toți de cacao!”:
 - ✓ Guvernul Chinei la invitat (1930) să le fie consilier economic la Ministerul Căilor Ferate Chineze;
 - ✓ Președintele american F.D. Roosevelt la pus șef (1946) la Departamentul de Statistică al SUA;
 - ✓ Guvernele Italiei, Norvegiei și Japoniei l-au rugat să le facă o analiză asupra economiei țărilor lor și să le ofere **recomandări practice** pentru o viitoare creștere economică;
 - ✓ Guvernele Spaniei și Marocului i-au cerut o analiză economică cu privire la cea mai bună soluție (economică) de tranversare a Strâmtoarei Gibraltar: **tunel sau pod?**
 - ✓ **din (ne-) fericire, Guvernele României din perioada 1990-1999, nu i-au cerut nimic (ezită o explicație: băi, ce puii mei, ăsta e rus (hai că totuși nu-i chiar așa de nașpa), dar e și american (asta-i nasol tare, capitalism, Soroș, democrație, alea-alea..., la-s că știm noi mai bine cum e cu ‘economia de piață’ adică cu ‘economia furatului’ sau ‘furatul economiei’ că tot aeea e...), iar cele de după 1999 probabil ar fi vrut, dar nu aveau (încă) un expert, membru de partid, capabil să traducă ce spun fantomele!**

În concluzie, din păcate LEONTIEF, nu-i nici: manelist, cocalar de Dorobanți, pițiponc de Bamboo, nu-i nici rapper, rocker, Beyonce sau Inna, și nici măcar o marcă de bere sau de parfum! **Deci TOTAL INSIGNIFIANT!** (sper că nu v-ați scrântit limba citind ultimul cuvânt). **Și atunci, de ce... LEONTIEF? Păi..., vezi mai jos, ...pe paginile următoare!**

P.S.: Tratați textul de mai sus ca un PAMFLET, dar nu în totalitate! Ce urmează este chiar serios, adică MATEMATICĂ!

1.2 Ce este analiza INPUT-OUTPUT?

Analiza INPUT-OUTPUT este o analiză macro-economică care stabilește condițiile de realizare a echilibrului privind cererea și oferta în cadrul unei economii (naționale, regionale, locale, etc) formată dintr-un număr oarecare "n" de ramuri (industrii, sectoare). Adică dorim să determinăm cantitatea de mărfuri/servicii (ca volum de produse fizice sau în echivalent monetar) care trebuie fabricată/produsă de diferitele ramuri (industrii) ale economiei respective, astfel încât să acopere atât necesarul propriu de consum al acestora (cerere internă) dar și cererea externă (pentru comerț, export, stocuri, etc.).

Exemplu:

"Vom analiza o economie ipotetică cu 3 ramuri/sectoare: industria cărbunelui **(C)**, industria oțelului **(O)** și industria energetică **(E)**. În tabelul de mai jos, sunt date consumurile specifice unitare necesare pentru consumul propriu (cererea internă) al fiecărei industrii și cantitățile totale necesare pentru consumul extern (cererea externă sau cererea finală).

<u>Cererea internă</u>	(C) ptr. fiecare tonă	(O) ptr. fiecare tonă	(E) ptr. fiecare Mwh
(C) nr. de tone necesare	0	0,27	0,13
(O) nr. de tone necesare	0,008	0,08	0,02
(E) nr de Mwh necesari	0,1	1,15	0,07

<u>Cererea externă</u> <u>(în milioane)</u>
18,3 (tone)
24,7 (tone)
33,5 (Mwh)

Cu alte cuvinte pentru **a produce**:

- **1 tonă de cărbune**, este nevoie de: 8 Kg de oțel și de 100 Kwh de energie electrică;
- **1 tonă de oțel**, este nevoie de: 270 Kg de cărbune, 80 Kg de oțel și 1.150 Kw de energie electrică;
- **1 Mwh de energie electrică**, este nevoie de: 130 Kg de cărbune, 20 Kg de oțel și 70 Kw de energie electrică.

Necesarul pentru consumul extern (alte ramuri industriale care nu sunt cuprinse în model, export, pentru populație, etc.) este de: 18,3 milioane tone de cărbune; 24,7 milioane tone de oțel și 33,5 milioane de megawatt/oră (33.500.000 Mwh) de energie electrică.

Se cere să se stabilească producția optimă (adică cea care satisface atât consumul intern al celor trei industrii, dar și cererea externă) de cărbune, oțel și energie electrică."

Tabelul de mai sus, al cererii interne, se numește **Tabelul Input-Output (TIO)** sau Tabel intersectorial.

Introducem următoarele matrici:

- **matricea Input-Output** (matricea tehnologică, matricea coeficienților tehnici):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,27 & 0,13 \\ 0,008 & 0,8 & 0,02 \\ 0,1 & 1,15 & 0,07 \end{pmatrix}$$

- valorile sunt exprimate în (fracțiuni de) tonă sau de Mwh

- **matricea cererii externe (finale):**

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,3 \\ 24,7 \\ 33,5 \end{pmatrix}; \text{ valorile fiind exprimate în milioane (de tone, respectiv Mwh)}$$

- **matricea cererii totale (de producție):**

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ unde}$$

$$\begin{cases} x_1 - \text{cantitatea totala (in milioane de tone) de carbune care trebuie produsa de (C);} \\ x_2 - \text{cantitatea totala (in milioane de tone) de otel care trebuie produsa de (O);} \\ x_3 - \text{cantitatea totala (in milioane de Mwh) de energie care trebuie produsa de (E);} \end{cases}$$

Din datele problemei avem, egalitățile:

$$\begin{cases} [\text{cantitatea totala de carbune care trebuie produsa}] - [\text{cererea interna}] = [\text{cererea externa}] \\ [\text{cantitatea totala de otel care trebuie produsa}] - [\text{cererea interna}] = [\text{cererea externa}] \\ [\text{cantitatea totala de energie care trebuie produsa}] - [\text{cererea interna}] = [\text{cererea externa}] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} [x_1] - [a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3] = [b_1] \\ [x_2] - [a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3] = [b_2] \\ [x_3] - [a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3] = [b_3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [x_1] - [0 \cdot x_1 + 0,27x_2 + 0,13x_3] = [18,3] \\ [x_2] - [0,008x_1 + 0,08x_2 + 0,02x_3] = [24,7] \\ [x_3] - [0,1x_1 + 1,15x_2 + 0,7x_3] = [33,5] \end{cases} \text{ sau scris matricial:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,27 & 0,13 \\ 0,008 & 0,08 & 0,02 \\ 0,1 & 1,15 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18,3 \\ 24,7 \\ 33,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$X - AX = B \Leftrightarrow I_3 \cdot X - A \cdot X = B \Leftrightarrow (I_3 - A) \cdot X = B \Leftrightarrow X = (I_3 - A)^{-1} \cdot B$$

Avem deci:

$$I_3 - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,27 & 0,13 \\ 0,008 & 0,08 & 0,02 \\ 0,1 & 1,15 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,27 & -0,13 \\ -0,008 & 0,92 & -0,02 \\ -0,1 & -1,15 & 0,3 \end{pmatrix} \text{ iar inversa acesteia este:}$$

$$(I_3 - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,06 & 0,966 & 0,524 \\ 0,019 & 1,2 & 0,88 \\ 0,424 & 4,93 & 3,846 \end{pmatrix} \text{ Atunci solutia problemei X este:}$$

$$X = (I_3 - A)^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1,06 & 0,966 & 0,524 \\ 0,019 & 1,2 & 0,88 \\ 0,424 & 4,93 & 3,846 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 18,3 \\ 24,7 \\ 33,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60,8 \\ 33 \\ 258,4 \end{pmatrix}$$

Cu alte cuvinte, pentru a fi onorată cererea externă:

- industria cărbunelui trebuie să producă cantitatea de **60.800.000 tone de cărbune**;
- industria oțelului trebuie să producă cantitatea de **33.000.000 tone de oțel**;
- industria energetică trebuie să producă cantitatea de **258.400.000 Mwh**;

Evident sistemul are soluție unică dacă există matricea $A' = (I_3 - A)^{-1}$. În plus, soluția sistemului liniar este compatibilă economic, numai dacă matricea coloană **X** are toate elementele pozitive (**X>0**).

Obs: Absolut analog, putem construi un model similar dar utilizând valori monetare. Atunci:

$$\begin{cases} x_i; i=\overline{1,3} - \text{sumele totale de bani (de ex. in milioane Euro) care trebuie produse de cele 3 industrii;} \\ a_{ij}; i,j=\overline{1,3} - \text{cuantumul in bani a materialelor din industria "j" necesar pentru a se produce 1 (Euro) de industria "i";} \\ b_i; i=\overline{1,3} - \text{profitul final al industriei "i" (in milioane Euro), evident dupa scaderea cheltuielilor de productie;} \end{cases}$$

Modelul general este pentru un număr de "**n**" industrii/sectoare economice.

2. Probleme de programare liniară: Algoritmul SIMPLEX

Exemplu:

„O companie produce 3 tipuri de genți pentru laptop (normale, de lux și VIP) să le numim: **P₁**, **P₂**, **P₃**, utilizând 5 tipuri de resurse: **M₁** (piele), **M₂** (fermoare), **M₃** (material textil), **M₄** (capital=bani), **M₅** (ore muncă) în cantitățile din tabelul de mai jos:

	M₁ (piele/m ²)	M₂ (fermoare/buc.)	M₃ (material textil/m ²)	M₄ (capital/Euro)	(ore de muncă/h)
P₁	0.85	4	1.25	32	4
P₂	1.10	6	1.30	38	6
P₃	1.55	5	0.55	52	7

Compania vinde fiecare din cele trei tipuri de genți cu următoarele prețuri: **46 Euro**, **55 Euro** și **72 Euro**.

*Câte genți de fiecare tip ar trebui să producă compania, pentru a avea profit maxim, știind că au la dispoziție: **450 m²** de piele, **1.500** de fermoare, **355 m²** de material textil, **14.500 Euro** capital inițial și **760 ore de muncă?***”

Notăm cu: x_1, x_2, x_3 numărul de genți de fiecare tip care ar trebui produs.

Modelul matematic (este o Problemă de Programare Liniară _PPL):

$$(1) \quad (\max) f(x_1, x_2, x_3) = 46x_1 + 55x_2 + 72x_3$$

$$(2) \quad \begin{cases} 0.85x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 \leq 450 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 1.500 \\ 1.25x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 \leq 355 \\ 32x_1 + 38x_2 + 52x_3 \leq 14.500 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \leq 760 \end{cases}$$

$$(3) \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Pentru a o putea rezolva trebuie să aducem sistemul liniar de inecuații (2) la **forma standard**:

$$(1) \quad (\max) f(x_1, x_2, x_3) = 46x_1 + 55x_2 + 72x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

$$(2) \quad \begin{cases} 0.85x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 + x_4 = 450 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 1.500 \\ 1.25x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 + x_6 = 355 \\ 32x_1 + 38x_2 + 52x_3 + x_7 = 14.500 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + x_8 = 760 \end{cases} \quad - \text{ sistem cu 5 ecuatii si 8 necunoscute (compatibil nedeterminat)}$$

$$(3) \quad x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_8 \geq 0$$

1.1. Ecuații liniare cu n-neunoscut

Def: Numim ecuație liniară (cu coeficienți reali) cu n neunoscut, expresia algebrică de forma:

$$(1.1) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_j x_j + \dots + a_n x_n = b \quad ; \begin{cases} a_j \in \mathbb{R}, j=1, \dots, n, b \in \mathbb{R} \\ (*) \quad a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \neq 0 \quad \left(\sum_{j=1}^n a_j^2 \neq 0 \right) \end{cases}$$

Obs:

- i) neunoscutele (variabilele) sunt: $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- ii) coeficienții neunoscutelor (ai ecuației) sunt constantele reale: a_1, a_2, \dots, a_n
- iii) constanta reală $b \in \mathbb{R}$, se numește termenul liber al ecuației (poate fi $\neq 0$)
- iv) condiția $(*) \sum_{j=1}^n a_j^2 \neq 0$ impune ca măcar unul dintre coeficienții neunoscutelor să fie nenul ($\neq 0$) (adică $(*) \Leftrightarrow (\exists) a_j \neq 0 \text{ pt. } j \in \{1, 2, \dots, n\}$)

Ex: a) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \rightarrow$ ec. lin. cu 3 neunoscut cu: $\begin{cases} a_1=2 \\ a_2=3 \\ a_3=-1 \end{cases} ; b=4$

b) $-3x_1 + x_2 - 2x_4 + x_5 = -7 \rightarrow$ ec. liniară cu 5 neunoscut $(a_1=-3, a_2=1, a_3=0, a_4=-2, a_5=1 ; b=-7)$

c) $2x_2 - x_6 = 0 \rightarrow$ ec. lin. cu 6 neunoscut $(a_1=a_3=a_4=a_5=0, a_2=2, a_6=-1 ; b=0)$

d) $3x_1 + \underbrace{x_2 x_3}_{\text{produs}} - x_4 = 2 \rightarrow$ nu este ec. lin.!

Def: Numim soluție (particulară) a ecuației liniare (1.1) un ansamblu de "n" numere reale: $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0) \stackrel{\text{not}}{=} (a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_n)$ care verifică ecuația, adică:

$$(1.2) \quad a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0 + \dots + a_n x_n^0 = b \Leftrightarrow (1.2') \quad a_1 a_1 + a_2 a_2 + \dots + a_n a_n = b$$

Ex: Pentru ecuațiile de mai jos, am scris câteva soluții particulare:

a) $2x_1 - x_2 = 4 \rightarrow \begin{cases} (2, 0) ; (3, 2) ; \\ (-1, -6) ; (1, -2) \end{cases}$

b) $x_1 + x_2 + x_3 = -1 \rightarrow \begin{cases} (0, -1, 0) ; (2, 2, -5) ; (1, 0, -2) ; (1, 1, -3) \end{cases}$

c) $2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \rightarrow \begin{cases} (1, 1, 1, 2) ; (2, 0, -1, 1) \\ (0, 3, 2, 5) ; (0, 0, 4, 4) \end{cases}$

Obs: i) se observă că o ec. liniară cu minim 2 neunoscut are mai multe (o infinitate) de soluții particulare

ii) notăm: (1.3) $S = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n / a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b \}$ = mulțimea soluțiilor ec. lin. (1.1)

ii) mulțimea soluțiilor (S) se determină rezolvând ecuația (1.1) în funcție de una dintre necunoscute ($x_j \rightarrow$ variabile principale (independente) cu coef. $a_j \neq 0$) în raport cu altele necunoscute ($x_i, i \neq j \rightarrow$ variabile secundare (dependente))

Ex: a) $x_1 + x_2 = 2$

Dem:

a) alegem variabile principale pe x_1 :

$$x_1 = 2 - x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \beta & \rightarrow \text{variab. principală} \\ x_2 = \beta & \rightarrow \text{variab. secundară} \end{cases} \Leftrightarrow S_1 = \left\{ \left(\overset{\alpha_1}{2-\beta}, \overset{\alpha_2}{\beta} \right) \in \mathbb{R}^2 / \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

a2) alegem variabile principale pe x_2 :

$$x_2 = 2 - x_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \delta & \rightarrow \text{variab. princ.} \\ x_2 = 2 - \delta & \rightarrow \text{variab. sec.} \end{cases} \Leftrightarrow S_2 = \left\{ \left(\overset{\alpha_1}{\delta}, \overset{\alpha_2}{2-\delta} \right) \in \mathbb{R}^2 / \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

Obs: Aparând, mulțimile de soluții S_1 și S_2 sunt diferite, dar nu este adevărat. Ele două mulțimi coincid ($S_1 \equiv S_2$), ordonarea elementelor în fiecare dintre ele este diferită. De exemplu, ptr. $\beta = 0$ se obține soluția particulară $(2, 0) \in S_1$. Aceeași soluție se obține pentru $\delta = 2$, adică $(2, 0) \in S_2$

b) $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8$

Dem: Alegând x_1 variabilă principală și $x_2 = \alpha, x_3 = \beta$ variabile secundare, avem:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow S = \left\{ \left(\underbrace{\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta}_{\alpha_1}, \underbrace{\alpha}_{\alpha_2}, \underbrace{\beta}_{\alpha_3} \right) \in \mathbb{R}^3 / \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

c) $3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$

Dem: Alegând pe x_1 var. princ., obținem soluția generală (de fapt o să vedem că se numește forma explicită a soluției gen.) de forma:

$$\begin{cases} x_4 = -3\alpha + 2\delta \rightarrow \text{v. princ.} \\ x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \delta \end{cases} \text{ v. sec.}$$

deci:

$$S = \left\{ (\alpha, \beta, \delta, -3\alpha + 2\delta) \in \mathbb{R}^4 / \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R} \right\}$$

Obs: pentru a determina o soluție particulară a unei ec. lin. cu „n” necunoscute de tipul (1.1) se dau valori particulare pentru „n-1” dintre necunoscute și se află (rezolvând o ec. de gr. I) valoarea celui de a „n-a” variabile.

Ex: fie ec: $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$

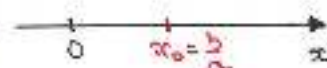
$$\begin{aligned} \text{pt. } \begin{cases} x_1 = 2, x_3 = 3, x_4 = -1 \end{cases} & \Rightarrow 4 + 3x_2 - 3 - 2 = -3 \Rightarrow 3x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \left(2, -\frac{4}{3}, 3, -1 \right) \text{ sol. part.} \\ \begin{cases} x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 1 \end{cases} & \Rightarrow 2x_1 - 1 + 2 = -3 \Rightarrow 2x_1 = -4 \Rightarrow x_1 = -2 \Leftrightarrow (-2, 0, 1, 1) \rightarrow \text{sol. part.} \end{aligned}$$

Cazuri particulare:

(3)

1) Ec. lin. cu o necunoscută (variabilă): (*) $ax = b$; $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$

i) ec. are soluție unică: $x_0 = \frac{b}{a}$

ii) interpretare geometrică: soluția este un punct de pe axa nr. reale Ox : 

Obs.: ec. (*) se mai numește și ec. de gr. I, notându-se sub forma: $ax + b = 0$

- acest caz particular nu-l vom întâlni în aplicațiile pe care le vom studia

- exemplu economic (de fabricare a unei ec.): "un produs oarecare costă cu tot cu T.V.A 100 lei. Cât este prețul produsului fără T.V.A (T.V.A = 13%)"

Dem.: notăm x = prețul produsului fără T.V.A. Atunci:

$$\underbrace{x}_{\text{preț fără T.V.A. produsului}} + 0,13 \underbrace{x}_{\text{valoarea T.V.A. a produsului}} = \underbrace{100}_{\text{preț final (total)}} \Leftrightarrow 1,13x = 100 \Leftrightarrow x = \frac{100}{1,13} = \frac{10.000}{113} \approx \underline{\underline{88,5398 \text{ lei}}}$$

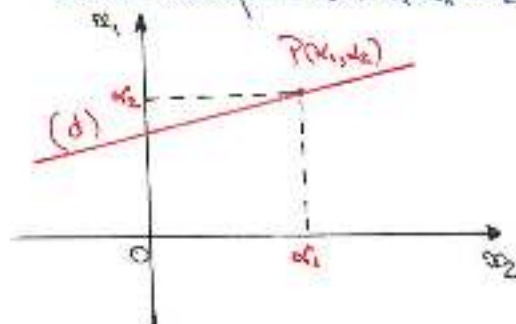
$$\underline{\text{Obs.}}: 13\% = \frac{13}{100} = 0,13$$

2) Ec. lin. cu două necunoscute: (*) $a_1x_1 + a_2x_2 = b$; $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}, a_1^2 + a_2^2 \neq 0$

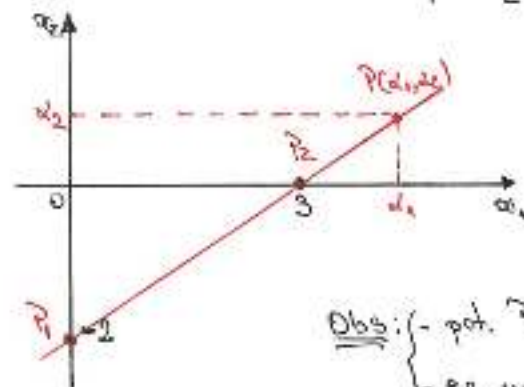
i) (*) $\Leftrightarrow ax + by = c$ sau $ax + by + c = 0$ ($x_1, x_2 \Leftrightarrow x, y$)

ii) ec. are o infinitate de soluții: $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1x_1 + a_2x_2 = b\}$

iii) interpretare geometrică: fiecare soluție particulară (x_1, x_2) este un punct $P(x_1, x_2) \in (d)$ unde dreapta $(d) a_1x_1 + a_2x_2 = b \subset x_1Ox_2 (=xOy)$



$$\underline{\text{Ex.}}: \text{Fie ec. lin. } 2x_1 - 3x_2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \Leftrightarrow P_1(0, -2) \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \Leftrightarrow P_2(3, 0) \end{cases}$$



$$S = \{(\underbrace{3 - \frac{2}{3}x}_=x_1, \underbrace{x}_=x_2) \mid x \in \mathbb{R}\} = \{(\underbrace{3}_=x_1, \underbrace{\frac{2}{3}x - 6}_=x_2) \mid p \in \mathbb{R}\}$$

Obs.: - pot. P_1, P_2, P sunt soluții particulare ale ecuației $2x_1 - 3x_2 = 6$
- ec. unei drepte întregu plan are ec. gen: $ax_1 + bx_2 + c = 0$ ($ax_1 + by + c \neq 0$)

Ex. economic: O brutărie folosește 800g de făină albă pentru o pâine și 850g pentru un cozonac. Societă producătoare de făină nu o satisface nr. de produse, fiindcă consumul zilnic de făină este de 100kg. Reprezentați grafic.

Dem.: not: $\begin{cases} x_1 - \text{nr. de pâini care se fabrică zilnic} \\ x_2 - \text{nr. de cozonaci care se fabrică zilnic} \end{cases}$

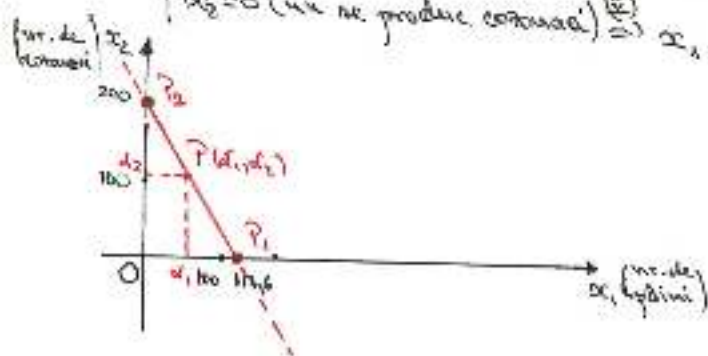
Avem condiția de a se consuma exact 100 kg de făină, de forma:

$$\begin{cases} x \\ \end{cases} 0,5x_1 + 0,85x_2 = 100 \quad (\text{in kg})$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{cant. de făină} \\ \text{pt. 1 pâine} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{nr. de pâini ce} \\ \text{urmează a fi produse} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{cant. de făină} \\ \text{pt. un coronci} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{nr. de coronci ce} \\ \text{urmează a fi produse} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{cant. totală de făină} \\ \text{avută la dispoziție} \end{array} \right)$$

$$\underbrace{0,5 \left(\frac{\text{kg}}{\text{buc.}} \right)}_{\text{in kg}} \cdot \underbrace{x_1 \left(\text{buc.} \right)}_{\text{in kg}} + \underbrace{0,85 \left(\frac{\text{kg}}{\text{buc.}} \right)}_{\text{in kg}} \cdot \underbrace{x_2 \left(\text{buc.} \right)}_{\text{in kg}} = 100 \left(\text{kg} \right)$$

dacă $\begin{cases} x_1 = 0 \text{ (nu se produce pâini)} \\ x_2 = 0 \text{ (nu se produce coronci)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{100}{0,85} \approx 117,65 \text{ (coronci)} \\ x_1 = \frac{100}{0,5} = 200 \text{ (pâini)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1(0; 117,65) \\ P_2(200; 0) \end{cases}$



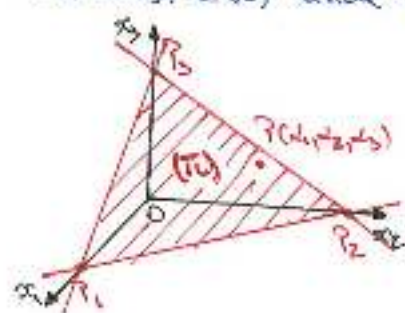
Obs: i) evident are sans economic, doar porțiune din dreapta aflate în cadranul I ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$)
ii) soluțiile reale econ. (nu strict matemat.) au doar cele pt. care $a_1, a_2 \in \mathbb{N}$ (valabile num. întregi (naturale) nu nr. reale)

3) Ec. lin. cu trei variabile: $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \\ \end{cases}$; $\begin{cases} a_i \in \mathbb{R}, i=1,2,3 \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$; $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$

i) $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

ii) ec. are o infinitate (dublă) de soluții: $S = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \}$

iii) interpretare geometrică: fiecare soluție particulară (x_1, x_2, x_3) este reprezentată de un punct $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ unde planul $(\pi) a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \subset O x_1 x_2 x_3 (\equiv Oxyz)$



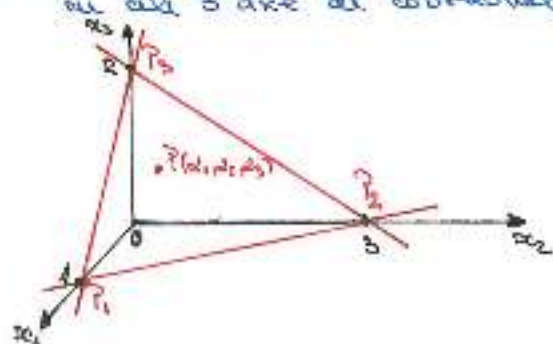
Obs: i) punctele P_1, P_2, P_3 sunt sol. part. ale ec. $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \end{cases}$

ii) ec. unui plan în spațiu este de forma:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \quad (\text{sau: } ax_1 + by + cz + d = 0)$$

Ex: Reprezentați grafic ec. lin. $\begin{cases} 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow P_1(1, 0, 0) \\ x_1 = x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = 3 \Rightarrow P_2(0, 3, 0) \\ x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 2 \Rightarrow P_3(0, 0, 2) \end{cases}$

Obs: un plan este unic determinat de 3 puncte (neliniare); am ales ale 3 puncte, intersecțiile planul cu ale 3 axe de coordonate



Obs: În problemele cu caracter economic, unde apare și condiția $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. În aceste situații soluțiile ec. $\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \end{cases}$ sunt coordonatele punctelor $P(x_1, x_2, x_3)$ aflate pe laturile ATC și în interiorul acestuia
ii) de multe ori $a_1, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ deci ne vor interesa doar acele puncte $P(x_1, x_2, x_3)$ unde $a_i \in \mathbb{N}, i=1,2,3$

Soluția generală a ec. (1.4) poate fi scrisă sub una din următoarele trei forme:

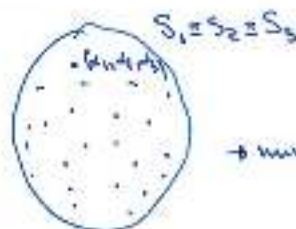
i) $\begin{cases} x_1 = \text{var. princip.} \\ x_2 = p \in \mathbb{R} \rightarrow \text{var. sec.} \\ x_3 = s \end{cases} \Rightarrow S_1 = \left\{ \left(1 - \frac{1}{3}p - \frac{1}{2}s, p, s \right) \in \mathbb{R}^3 \mid p, s \in \mathbb{R} \right\}$

ii) $\begin{cases} x_2 = \text{var. princip.} \\ x_1 = \alpha \in \mathbb{R} \rightarrow \text{var. sec.} \\ x_3 = s \end{cases} \Rightarrow S_2 = \left\{ \left(\alpha, 3 - 3\alpha - \frac{3}{2}s, s \right) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, s \in \mathbb{R} \right\}$

iii) $\begin{cases} x_3 = \text{var. princip.} \\ x_4 = p \in \mathbb{R} \rightarrow \text{var. sec.} \\ x_2 = s \end{cases} \Rightarrow S_3 = \left\{ \left(\alpha, p, 2 - 2\alpha - \frac{2}{3}p \right) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, p \in \mathbb{R} \right\}$

Obs: i) aparent S_1, S_2, S_3 sunt diferite dar de fapt coincid $S_1 = S_2 = S_3$ (diferă doar ordinele elem. în fiecare mulțime)

ii) Intersecții pt. $\begin{cases} p=s=0 \Rightarrow (1,0,0) \in S_1 \\ \alpha=1, s=0 \Rightarrow (1,0,0) \in S_2 \\ \alpha=1, p=0 \Rightarrow (1,0,0) \in S_3 \end{cases}$



\rightarrow mult. soluțiilor ec. (1.4)

1.2) Sisteme de „m” ecuații liniare cu „n” necunoscute ($m, n \in \mathbb{N}^*$). Matricei asociate.

Def: Numim sistem liniar de ecuații (cu coeficienți reali) un set finit de ecuații liniare fiecare ecuație având aceleași necunoscute, adică de forma:

(1.4) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \text{ (ec. 1)} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \text{ (ec. 2)} \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \text{ (ec. i)} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \text{ (ec. m)} \end{cases}; a_{ij}, b_i \in \mathbb{R} \text{ pt. } \begin{cases} i=1, m \\ j=1, n \end{cases}$

\rightarrow sistem de „m” ecuații liniare cu „n” necunoscute (pe scurt: sistem liniar)

Obs: i) numerele (constantele) reale „ a_{ij} ” se numesc coeficienții necunoscutelor (variabile)
 ii) numerele (constantele) reale „ b_i ” se numesc termenii liberi ai sistemului
 iii) o parte dintr-un „ a_{ij} ” sau (btf) „ b_i ” pot fi egali cu zero (nuli)

Sistemului (1.4) i se asociază următoarele matrice (matrice):

(1.5) $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, m \\ j=1, n}} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \rightarrow$ matricea coeficienților sistemului

(1.6) $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m,1}(\mathbb{R}) \rightarrow$ matricea termenilor liberi

$$(1.3) \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \in \mathbb{M}_{m,n+1}^{(\mathbb{R})} \rightarrow \text{matricea extinsă a sistemului}$$

Obs: i) matricea extinsă \bar{A} poate fi scrisă (ca blocuri de matrice) astfel: $\bar{A} = (A|B)$ (1.4')

ii) sistemul liniar (1.4) mai poate fi scris și sub următoarele forme:

$$\begin{cases} (1.4') & A \cdot X = B \rightarrow \text{forma matricială} \\ (1.4'') & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i ; i = \overline{1, m} \rightarrow \text{forma condensată} \end{cases}$$

Def: Numim soluție a sistemului de ec. liniare (1.4) un ansamblu de „n” numere reale $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ care este soluție (verifică) a fiecărei dintre cele „m” ecuații. (Deci înlocuind necunoscutele x_i cu constantele $\alpha_i, i = \overline{1, n}$ în fiecare ec. acestea sunt verificate \Leftrightarrow egalitățile sunt adevărate $\Leftrightarrow a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = b_i, i = \overline{1, m}$)

Obs: Un sistem de ecuații liniare (sistem liniar) de forma (1.4) poate să :

- a) aibă o unică soluție $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, sistemul numindu-se compatibil determinat (compatibil = are soluție, determinat = este unică)
- b) aibă mai multe soluții (o infinitate) $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, sistemul numindu-se compatibil nedeterminat (compatibil = are soluție; nedeterminat = nu este unică, ci mai multe)
- c) nu aibă soluție ($S = \emptyset$ - mulțime vidă), sistemul numindu-se incompatibil (nu are soluție)

Obs: dacă un sist. este incompatibil, înseamnă că nu există (\nexists) o soluție comună tuturor celor „m” ec. liniare (atunci, fiecare ec. lin. are o infinitate de soluții și p. un anumit valor, dar nu există o soluție (aceeași) pentru fiecare în parte)

Pentru a se vedea dacă soluții are/nu are un sistem liniar (ce tip de sistem este) se folosește noțiunea de rang al unei matrici. Astfel, dacă:

- a) $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} \Rightarrow$ sist. (1.4) este compatibil
 - a₁) $r_A = r_{\bar{A}} = n$ (nr. de necun.) \Rightarrow sist. (1.4) este compatibil determinat (sol. unică)
 - a₂) $r_A = r_{\bar{A}} < n$ (nr. de necun.) \Rightarrow sist. (1.4) este compatibil nedeterminat (are o ∞ de soluții)
- b) $\text{rang } A < \text{rang } \bar{A} \Rightarrow$ sist. (1.4) este incompatibil (nu are soluție)

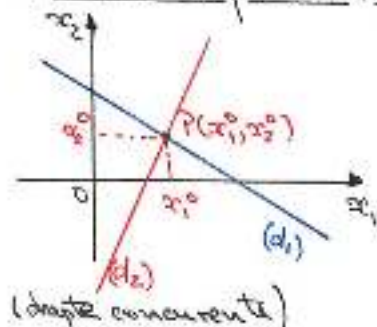
Obs: not: $\text{rang } A = r_A \rightarrow$ rangul matricii A

interpretare geometrică (ptr $n=2 \rightarrow$ două ecuații) (4)
 $n=2 \rightarrow$ două ecuații

Fie sistemul liniar (1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (d_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (d_2) \end{cases}$

Fiecare din cele două ec. lin. cu două nec. are mulțimea soluțiilor o dreaptă din planul x_1, x_2 . Sunt posibile următoarele 3 situații:

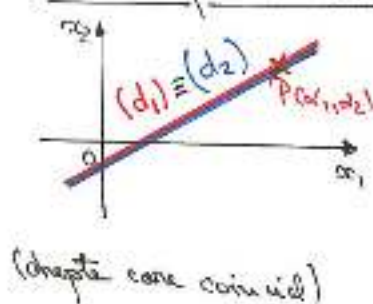
a) sistem comp. deter. (sol. unică)



soluția unică este (x_1^0, x_2^0) , punctul P aflându-se pe ambele drepte $\begin{cases} (P \in d_1 \Rightarrow (x_1^0, x_2^0) \text{ soluție a primei ec. lin}) \\ (P \in d_2 \Rightarrow (x_1^0, x_2^0) \text{ soluție a celei de-a doua ec. lin}) \end{cases}$

Obs: (i) soluție unică \Leftrightarrow dreptele se intersectează într-un (singur) punct
 (ii) aici $r_A = r_{\tilde{A}} = 2$ cu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{pmatrix}$

b) sistem comp. nedeterminat (o infinitate de soluții)

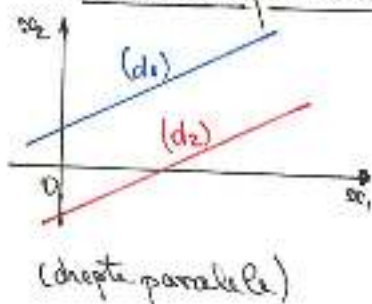


Coordonatele (x_1, x_2) ale oricărui punct $P(x_1, x_2)$ de pe cele două drepte (care coincid) sunt soluții ale sist. (1)

Obs: (i) o infinitate de soluții \Leftrightarrow dreptele coincid
 (ii) $r_A = r_{\tilde{A}} = 1 < 2$ (nec.)
 (iii) dreptele coincid dacă toți coeficienții lor sunt proporționali;

adică: $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} = \alpha$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ex: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases} \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \end{array} \right.$

c) sistem incompatibil (nu are soluție)



dreptele fiind paralele \Leftrightarrow nu au nici un punct comun \Leftrightarrow nu există o soluție comună a celor 2 ecuații \Leftrightarrow sist. nu are soluții

Obs: (i) nu are soluție \Leftrightarrow dreptele sunt \parallel
 (ii) $r_A = 1 \neq r_{\tilde{A}} = 2$
 (iii) dreptele sunt paralele, dacă coeficienții nec. sunt proporționali dar nu și termenii liberi; adică:

$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \alpha \neq \frac{b_1}{b_2}$; $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ex: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \\ \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{4} \end{array} \right.$

Obs: dacă sistemul (1) ar avea 3, 4, ..., n ec. lin. cu 2 nec., atunci analiza poziției relative ale 3, 4, ..., n dreptelor din planul x_1, x_2 (dreptele: $(d_1), (d_2), \dots, (d_n)$) va deveni puțin mai complicată.

Ex (economic/reel/practic)

a) Mihai este rugat de mama sa sa cumpere niste fructe de la magazinul de la partenerul blocului vecin, deoarece ti va in vizita niste prieteni. Văzând că întarzie, o trimite și pe sora lui, Ioana, pentru a face aceleași cumpărături, Ioana se întoarce repede și îi spune mamei că a cumpărat 1 kg de caise și 2 kg de zmeură care au costat 19 Lei. După un timp se întoarce și Mihai (faciune un fotbal scurt cu prietenii) care cumpărase 2 kg de caise (și plăseau tare) și 1 kg de zmeură pe care plătiese 17 Lei. Copiii fiind mici nu au știut să-i spună mamei cât a costat fiecare fel de fruct. Afleți voi!

Deau: not cu: $\begin{cases} x_1 - \text{costul unui kg de caise (in lei)} \\ x_2 - \text{costul unui kg de zmeură (in lei)} \end{cases}$

Atunci, avem:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 & / \cdot (-2) \\ 2x_1 + x_2 = 17 & \leftarrow + \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 & \leftarrow + \\ -3x_2 = -21 & / \cdot (-\frac{1}{3}) \end{cases} \leftarrow \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 2 & 19 \\ 2 & 1 & 17 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 2 & 19 \\ 0 & -3 & -21 \end{array} \right) \xrightarrow{(-\frac{1}{3})} \leftarrow \cdot \frac{2}{3}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

transformare elementare (!)

Deci $\begin{cases} x_1 = 5 \text{ (lei)} \rightarrow \text{costul unui kg de caise} \\ x_2 = 7 \text{ (lei)} \rightarrow \text{costul unui kg de zmeură} \end{cases}$

Sist. are soluție unică \Rightarrow este complet determinat

Obs $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow r_A = 2 = r_{\bar{A}} = \text{nr. de nec.} \Rightarrow$ sist. este comp. det. (sol. unică)

b) aceluși enunț, dar Mihai cumpără două kg de caise și 4 kg de zmeură pe care plătește 38 de Lei

Deau: sist. lin. devine:
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 & / \cdot (-2) \\ 2x_1 + 4x_2 = 38 & \leftarrow + \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

sistemul se reduce la 0
înseamnă ecuație cu 2 nec.
care are (boretic) o infinitate
de soluții (comp. nedet.)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 2 & 19 \\ 2 & 4 & 38 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} x_1 & x_2 & \\ \hline 1 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 19 - 2x_2 \\ x_2 = x_2 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (||, x_2 > 0, x_2 \leq 19)$$

$\Rightarrow S = \{ (19 - 2x_2, x_2) / x_2 \in \mathbb{R} \}$

corect $x_2 \in (0, 19)$
economic

Deci mama nu poate stabili cât costă fiecare tip de fruct (nu are suficiente informații independente!)

Obs: $\det A (\equiv |A|) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{rang } A = 1$

$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 2 & 4 & 38 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 20 \\ 2 & 4 & 38 \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{cc|c} 1 & 19 \\ 2 & 38 \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{cc|c} 2 & 19 \\ 4 & 38 \end{array} \right| = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{rang } \bar{A} = 1$

$\Rightarrow r_A = r_{\bar{A}} = 1 < 2 = \text{nr. nec.}$

\Downarrow
sist. comp. nedeterminat

c) același enunț, dar Mihai cumpără 2 kg. de caise și 4 kg. de zmeură pe oarecure ca a plătit 40 de Lei (pentru a ascunde că a luat și o înghețată pe care a dat 2 Lei)

Solu: Sist. lin. devine: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 & (1) \\ 2x_1 + 4x_2 = 40 & (2) \end{cases}$

(1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 \\ 0 = 2 (F) \end{cases}$

\downarrow
niciunul are o egalitate
care este imposibilă \Rightarrow este incompatibil
nu are soluții

$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 2 & 4 & 40 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 - 2R_1} N$

$N = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \Leftrightarrow 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 2 (F)$

Evident, mama își dă seama că ceva este "pețit" (ori copiii au mintit, ori au fost înșelați de vânzătoare)