<u>Caz particular "$\mathbb{R}^n$"</u> (L.D. și L.i a vectorilor din $\mathbb{R}^n$) ①

Fie spațiul liniar $V = \mathbb{R}^n$ și fie vectorii oarecare:
$$(2.1) \begin{cases} u_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})^T \\ u_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})^T \quad \in \mathbb{R}^n \\ \text{---------------} \\ u_m = (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})^T \end{cases}$$
cunoscuți. (componentele lor a_{ij} sunt cunoscute)

Pentru a determina natura vectorilor (dacă sunt L.D. sau L.i.), impunem ca combinația liniară a lor să fie egală cu vectorul nul 0_n, adică:

(↑) $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = 0_n$ (scalarii α_i, $i = \overline{1,m}$ sunt necunoscuți)

Înlocuind expresiile vectorilor din (2.1) în condiția (↑) obținem:

(2) $\alpha_1 (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n})^T + \alpha_2 (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n})^T + \cdots + \alpha_m (a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn})^T = (0, 0, \ldots, 0)^T \Longleftrightarrow$

$\stackrel{?}{=} (2.2) \begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \cdots + \alpha_m a_{m1} = 0 \\ a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + \alpha_m a_{m2} = 0 \\ \text{----------------} \\ a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \cdots + \alpha_m a_{mn} = 0 \end{cases} \rightarrow$ sistem liniar omogen cu $\begin{cases} \text{"n" ecuații} \\ \text{"m" necunoscute} \end{cases}$

<u>Obs:</u> știm că orice sistem liniar omogen (termenii liberi $= 0$) este compatibil (determinat sau nedeterminat), având întotdeauna (măcar) o soluție, soluția banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$

Fie matricea $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,m}}}$ – matricea coeficienților sistemului (2.2), adică:

$(2.3) \ A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m \\ a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R}) \rightarrow$ matricea este formată din componentele vectorilor $u_1, u_2, \ldots, u_m$ <u>scrise pe coloane</u> (cf. 2.1)

$ \downarrow \downarrow \downarrow$
$ u_1 u_2 \cdots u_m$

Cf. teoriei rezolvării sistemelor liniare de la liceu (vezi seminarul 2), dacă:

a) $\underline{r_A} (= r_{\overline{A}}) = \underline{m}$ (nr. de necun.) $\Rightarrow$ sist. (2.2) este compatibil determinat, cu <u>soluția unică</u> soluția banală: $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$

În acest caz din (↑) $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m = 0_n \Rightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0 \Longleftrightarrow$ vectorii $u_1, u_2, \ldots, u_m$ – <u>L.i</u>

b) $\underline{r_A} (= r_{\overline{A}}) < \underline{m}$ (nr. de nec.) $\Rightarrow$ sist. (2.2) este compatibil nedeterminat, deci are o <u>infinitate de soluții</u> $\alpha_i \in \mathbb{R}$ (printre ele și cea banală)

În acest caz, când (↑) $\Rightarrow (\exists) \alpha_i \in \mathbb{R}$, $i=\overline{1,m}$ nu toți nuli $\Longleftrightarrow$ vectorii $u_1, u_2, \ldots, u_m$ – <u>L.D.</u>

<u>Obs:</u> Dacă pentru a determina natura vectorilor $u_1, u_2, \ldots, u_m$ (L.D sau L.i) nu trebuie să rezolvăm efectiv sist. lin. omogen (2.2) ci doar să determinăm natura sa (comp. deter. sau compat. nedeterm.) $\Longleftrightarrow$ stabilirea rangului matricei componentelor A și compararea acestuia cu nr. de vectori "m".

Concluzie:

Pentru a determina natura unui set de vectori $u_1, u_2, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$, cel mai simplu și direct mod de lucru este următorul:

1) scriem matricea $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ (cu "n" linii și "m" coloane) corespunzătoare setului de vectori (componentele vectorilor se scriu pe coloană; un vector = o coloană)

2) determinăm (cu T.E.) rangul matricei A ($\text{rang} A = r_A = r$)

3) dacă:
$\begin{cases} a) \ \text{rang} A = m \ (= \text{nr. de vectori}) \Rightarrow u_1, u_2, \ldots, u_m \ \text{sunt L.i.} \\ b) \ \text{rang} A < m \ (= \text{nr. de vectori}) \Rightarrow u_1, u_2, \ldots, u_m \ \text{sunt L.D.} \end{cases}$

Ex: Stabiliți natura următoarelor mulțimi de vectori:

a) $\begin{cases} u_1 = (1, 0, -1)^T \\ u_2 = (-1, 1, 2)^T \in \mathbb{R}^3 \\ u_3 = (0, -1, -2)^T \end{cases}$
$\xrightarrow[\text{matricea componentelor vectorilor}]{\text{asociem}}$
$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ (cu u_1, u_2, u_3)

Dem:
Determinăm r_A cu T.E.:

$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} = A_{3 \times 3} \Rightarrow r_A = 3 = m, \text{ vect.}$

$\Rightarrow u_1, u_2, u_3 - L.i$

Obs:

Aplicând def. generală pt. a studia natura vectorilor (L.D sau L.i) impunem condiția:

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_3 \Leftrightarrow \alpha_1 (1, 0, -1)^T + \alpha_2 (-1, 1, 2)^T + \alpha_3 (0, -1, -2)^T = (0, 0, 0)^T \Leftrightarrow$

$(*) \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \ /\cdot(-2) \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \xrightarrow{L_3 + L_1} -\alpha_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Big| \Rightarrow \alpha_3 = 0 \quad (1.3) \ \Leftrightarrow u_1, u_2, u_3 - L.i$

matricea sist. (*) este matricea A; deoarece $r_A = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ sist. comp. determinat cu soluția unică $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

b) $\begin{cases} v_1 = (1, -1, -1)^T \\ v_2 = (1, -2, 1)^T \in \mathbb{R}^3 \\ v_3 = (2, -3, 0)^T \end{cases} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{3 \times 3}$

(cu u_1, u_2, u_3)

$r_A = 2 < 3 = \text{nr. vect.}$

$\Downarrow$

$v_1, v_2, v_3 - L.D$

Dem: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_1 (1, -1, -1)^T + \alpha_2 (1, -2, 1)^T + \alpha_3 (2, -3, 0)^T = (0, 0, 0)^T \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ cu $r_A = 2$
$\begin{cases} 2 \text{ ec. princ.} \\ 2 \text{ variab. princ. } (\alpha_1, \alpha_2) \\ \text{sist. comp. nedeterminat (o infinitate de soluții)} \end{cases}$

$\alpha_3 \leq \beta$

$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -2\beta \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 = 3\beta \end{cases} \xrightarrow{L_1 + L_2} -\alpha_2 = \beta \Rightarrow \alpha_2 = -\beta \quad \Big\} \Rightarrow \alpha_1 = -2\beta - \alpha_2 = -2\beta + \beta = -\beta$

$\alpha_1 + \alpha_2 = -2\beta$

Deci mulț. soluțiilor sist. este: $S = \{(-\beta, -\beta, \beta) / \beta \in \mathbb{R}\} \xrightarrow[\beta = 1]{\text{ex}} \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \rightarrow$ soluție particulară

Avem atunci: $-v_1 - v_2 + v_3 = 0_3 \Leftrightarrow v_3 = v_1 + v_2 \rightarrow$ rel. de dependență liniară $\Leftrightarrow v_1, v_2, v_3 - L.D$

I.3) Baze de vectori. Coordonatele unui vector într-o bază

Def: Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar oarecare și $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \subsetneq V$. Spunem că mulțimea A formează un **sistem de generatori** (S.G.) al spațiului liniar V, dacă orice vector $w \in V$ se scrie ca o combinație liniară de vectorii din A, adică:

(2.4) $A = \{u_1, u_2, \ldots u_m\} - S.G. \iff (\forall) w \in V, (\exists) \alpha_i \in \mathbb{R}, \overset{i=\overline{1,m}}{a.î.:} \; w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m$

$\uparrow$
vectorul w este "generat" de vectorii $u_1, u_2, \ldots, u_m$

Obs:

i) un spațiu liniar V are o infinitate de sisteme de generatori (diferite între ele măcar printr-un singur vector);

ii) două sisteme de generatori pot avea $\Big\{$ același număr de vectori / un număr diferit de vectori

Ex: $\begin{cases} A = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} \\ B = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \end{cases} > S.G.$ cu $\begin{cases} m = p \\ \text{sau} \\ m \neq p \end{cases}$

iii) vectorii care formează un S.G. pot fi L.D. sau L.i.

iv) Într-un sistem de generatori fixat, format din vectori L.D., un vector oarecare al spațiului liniar, are o infinitate de descompuneri diferite:

$w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_m u_m = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_m u_m = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \cdots + \delta_m u_m = \cdots\cdots$

cu scalarii $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \ldots \in \mathbb{R}$ și $\alpha_i \neq \beta_i \neq \delta_i \neq \cdots, \; i = \overline{1,m}$

v) dacă $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} - S.G.$, notăm: $[A] = V \rightarrow$ mulț. A generează sp. liniar V

$w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots \alpha_m u_m$ (orice vector $w \in V$ se scrie ca o comb. lin. de vectorii din A)

Def: O mulțime de vectori $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subset (V, +, \cdot)$ se numește **bază** în sp. liniar V (notăm $B \subseteq V$) dacă:

(2.5) $\begin{cases} (i) \; B - L.i. \\ (ii) \; B - S.G. \end{cases} \overset{(2.4)}{\iff} (\forall) w \in V, (\exists) \lambda_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n} \; a.î.: \; (2.6) \; w = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n$

Obs:

i) relația (2.6) se numește: descompunerea vectorului "w" în baza B; scalarii $\lambda_i, i = \overline{1,n}$ din (2.6) se numesc **coordonatele** vectorului "w" în baza B.

ii) relația (2.6) poate fi scrisă și folosind următoarele notații:

(2.6') $\begin{cases} w_B = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n] \\ \text{sau} \\ w = [\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]_B \end{cases}$ $\rightarrow$ coordonatele vectorului "w" în baza B sunt $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (adică w are descompunerea (2.6))

iii) putem da două definiții echivalente ale bazei:

Def 1: $B \leq V \Leftrightarrow B - S.G.$ minimal (mulț. B este o bază a sp. liu $V \Leftrightarrow B$ este un S.G. minimal (cu un nr. minim de vectori)

Obs: condiție ca B să conțină un nr. minim de vectori $\Leftrightarrow B - L.i$

Def 2: $B \leq V \Leftrightarrow B - L.i.$ maximal (mulț. B este bază în sp. liu $V \Leftrightarrow B$ este o mulț. L.i. care conține un nr. maxim posibil de vectori

Obs: cond. ca B să conțină un nr. max de vectori L.i $\Leftrightarrow B$ este S.G.

iv) din orice sistem de generatori A ne putem extrage minim o bază $B \subseteq A$.

Fie $A = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\} - S.G.$ al lui $V \Rightarrow (\exists) B \subseteq A$, $B = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \ldots, u_{i_n}\} \leq V$

$\{ \text{cu } i_1, i_2, \ldots, i_n \in \{1, 2, \ldots, m\} \text{ și } n \leq m \}$

v) într-un sp. liu V există o infinitate de baze; toate bazele dintr-un sp. liu au **același număr de vectori!!**

Ex: $\begin{cases} B_1 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \leq V \\ B_2 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \leq V \\ \vdots \end{cases}$

vi) dacă $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \leq V \Rightarrow B_\alpha = \{\underbrace{\alpha u_1}_{=v_1}, \underbrace{\alpha u_2}_{=v_2}, \ldots, \underbrace{\alpha u_n}_{=v_n}\} \leq V, (\forall) \alpha \in \mathbb{R}^*$

(adică dintr-o bază oarecare, putem obține o infinitate de alte baze înmulțind toți vectorii cu un scalar nenul)

Def. Numim **dimensiunea** spațiului liniar $(V, +, \cdot)$ (not: $\dim V$) numărul de vectori dintr-o bază a lui V, adică:

(2.7) $\dim V \overset{def}{=} card B$

$\{ card B = cardinalul mulțimii B = numărul de elem. din $B \}$

Obs:

i) dacă $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \leq V \Rightarrow \dim V = n$ (dimensiunea sp. liu V este "n" sau V este un sp. liu. n-dimensional)

ii) dacă $B \leq V$ și $card B = +\infty \Rightarrow V$ sp. liu **infinit dimensional**

iii) Fie $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \leq V$ cu $\dim V = n$ $\Rightarrow (\forall) A = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\} \subset V$ cu $\underline{m > n}$ este L.D.
Deoarece $B - $ este L.i maximal

adică:

Fie sp. liu $(V, +, \cdot)$ cu $\underline{\dim V = n}$ și $A \subset V$ cu $card A = m$. Atunci, dacă:

$\begin{cases} (i) \ m > n \Rightarrow A - L.D & (card A > \dim V \Rightarrow A - L.D) \\ (ii) \ m \leq n \Rightarrow A < \begin{matrix} L.D \\ L.i \end{matrix} & (card A \leq \dim V \Rightarrow A < \begin{matrix} L.D. \\ L.i. \end{matrix}) \end{cases}$

Ex. pp. $\dim V = 7$ și $A \subset V$. Dacă:

$\begin{cases} (i) \ card A > 7 \Rightarrow A - L.D \ (dacă A are mai mult de 7 vectori atunci este L.D) \\ (ii) \ card A \leq 7 \Rightarrow A poate fi L.D. sau L.i. (trebuie să verificăm prin calcul) \end{cases}$

T₁: Coordonatele unui vector într-o bază sunt unice

Dem: Fie $(V, +, \cdot)$ sp. liniar. și $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \subseteq V$ $\quad (\dim V = n)$

Pp. că $w \in V$ oarecare are două seturi de coordonate, adică:

$$(\exists) \begin{cases} w_B = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \\ \text{și} \\ w_B = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n] \end{cases} (\Leftrightarrow) \begin{cases} w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n u_n \\ w = \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_n u_n \end{cases}$$

$\underline{\quad\quad\quad\quad}$ "−" $0_v = (\alpha_1 - \beta_1) u_1 + (\alpha_2 - \beta_2) u_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) u_n$ $\Big|$ $\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \beta_1 = 0 \\ \alpha_2 - \beta_2 = 0 \\ \text{---} \\ \alpha_n - \beta_n = 0 \end{cases}$ $(\Leftrightarrow) \begin{cases} \alpha_1 = \beta_1 \\ \alpha_2 = \beta_2 \\ \text{---} \\ \alpha_n = \beta_n \end{cases}$

$\quad\quad$ Deoarece $B \subseteq V \Rightarrow u_1, u_2, \ldots, u_n$ l.i.

$$\underline{q.e.d}$$

T₂: $\dim \mathbb{R}^n = n$ (dimensiunea sp. liniar $\mathbb{R}^n$ este egală cu „n")

Dem: Fie mulțimea: $B_C = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset \mathbb{R}^n$ unde vectorii e_i sunt definiți astfel:

$$(2.8) \begin{cases} e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T \\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0)^T \\ \text{--------} \\ e_n = (0, 0, \ldots, 1)^T \end{cases} \to \text{sunt coloanele matricei unitate } I_n \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Vom demonstra că mulțimea $B_C \subseteq \mathbb{R}^n \;(\Leftrightarrow) \begin{cases} (i) \; B_C - l.i \\ (ii) \; B_C - S.G. \end{cases}$ $\quad (B_C \to$ baza canonică din $\mathbb{R}^n)$

i) $B_C - l.i$

a) cu matricea componentelor (cf. cazului particular al vectorilor din $\mathbb{R}^n$)

Matricea asociată vectorilor $e_1, e_2, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^n$ este:

$$\begin{matrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{matrix}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \equiv I_n$$

Atunci $r_A = r_{I_n} = n = \text{nr. vectorilor} \;(\Leftrightarrow) \; \underline{B_C - l.i}$

sau:

b) cu definiția generală

Din condiția: $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0_n \;(\Leftrightarrow) \; \alpha_1 (1, 0, \ldots, 0)^T + \alpha_2 (0, 1, \ldots, 0)^T + \cdots + \alpha_n (0, 0, \ldots, 1)^T = (0, 0, \ldots, 0)^T$

$(\Leftrightarrow) (\alpha_1, 0, \ldots, 0)^T + (0, \alpha_2, \ldots, 0)^T + \cdots + (0, 0, \ldots, \alpha_n)^T = (0, 0, \ldots, 0)^T \;(\Leftrightarrow) (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T = (0, 0, \ldots, 0)^T \;(\Leftrightarrow) \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

ii) $B_C - S.G.$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ ↓ (1.3)
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad B_C - l.i$

cf. def (2.4): $B_C - S.G. \;(\Leftrightarrow)(\forall) \; w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T \in \mathbb{R}^n, \;(\exists) \lambda_i \in \mathbb{R}, \text{ i=}\overline{1,n} \text{ a.î.: } (1) \; w = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_n e_n$

Dar $w = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T = (w_1, 0, \ldots, 0)^T + (0, w_2, \ldots, 0)^T + \cdots + (0, 0, \ldots, w_n)^T =$

$\quad\quad = w_1 \underbrace{(1, 0, \ldots, 0)^T}_{=e_1} + w_2 \underbrace{(0, 1, \ldots, 0)^T}_{=e_2} + \cdots + w_n \underbrace{(0, 0, \ldots, 1)^T}_{=e_n} =$

$\quad\quad = w_1 e_1 + w_2 e_2 + \cdots + w_n e_n \quad (2)$ $\quad\quad\quad\quad\quad$ coordonatele lui w în B_C

Cf. rel. (2), rezultă că rel. (1) este satisfăcută, deci $\underline{B_C - S.G.}$; mai mult: $\underline{\lambda_i = w_i} \;(3), \; i = \overline{1,n}$

Din i) + ii) $\Rightarrow B_C \subseteq \mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{\dim \mathbb{R}^n = \text{card } B_C = n}$ $\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ componentele lui w

$$\underline{q.e.d}$$

i)(!!!) conform demonstrației de mai sus: "coordonatele unui vector din $\mathbb{R}^n$ în baza canonică B_c, coincid cu componentele vectorului", adică:

(2.9) $(\forall)\ v=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$, avem: $v_{B_c}=[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \iff v=\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$

Ex a) $B_c=\{e_1, e_2\} \subseteq \mathbb{R}^2$ cu $\begin{cases} e_1=(1,0)^T \\ e_2=(0,1)^T \end{cases}$ → baza canonică din $\mathbb{R}^2$

Fie $v=(3,-4)^T \iff v=3e_1-4e_2 \iff v_{B_c}=[3,-4]$

Într-adevăr: $(3,-4)^T = (3,0)^T + (0,-4)^T = 3(1,0)^T - 4(0,1)^T = 3e_1-4e_2 \iff v_{B_c}=[3,-4]$

ii) Într-un sp. liu. oarecare $(V, +, \cdot)$, dacă cunoaștem apriori (dinainte) dimensiunea acestuia putem folosi următoarea definiție (echivalentă) a bazei:

(2.10) $B \leq V \iff \begin{cases} (i)\ \text{card } B = \dim V\ (\text{adică nr. de vect. Li este maximal}) \\ (ii)\ B-Li. \end{cases}$

iii) cf. T_2, deoarece $\dim \mathbb{R}^n = n$, vom folosi (echivalent) următoarea definiție pentru a dem. că o mulțime de vectori (mst. B) este (formează) o bază în $\mathbb{R}^n$:

(2.11) $B \leq \mathbb{R}^n \iff \begin{cases} (i)\ \text{card } B = n\ (=\dim \mathbb{R}^n) & → \text{nr. de vectori Li să fie maxim posibil.} \\ (ii)\ B-Li\ (\iff r_A=n=\text{nr. vect.}) & → \text{cf. cazului partic. de Li în } \mathbb{R}^n \end{cases}$

iv) deoarece $\dim \mathbb{R}^n = n$, atunci o mulțime (mst) de vectori $A=\{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ este:

$\begin{cases} a)\ \text{dacă } k>n \Rightarrow A-LD\ (\text{nefiind necesară o altă demonstrație}) \\ b)\ \text{dacă } k \leq n \Rightarrow A \begin{cases} L.D \\ L.i \end{cases} (\text{deci trebuie verificată prin calcul natura vectorilor} \end{cases}$

Ex: a) Fie $A=\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^2 \Rightarrow A-LD$ deoarece nr. vectorilor din A (card $A=3$) este strict mai mare decât $\dim \mathbb{R}^2 = 2$ (nr. maxim posibil de vectori Li din $\mathbb{R}^2$ este doi)

b) Fie $A: \begin{cases} u_1=(1,0,1)^T \\ u_2=(1,-1,2)^T \\ u_3=(-2,1,3)^T \\ u_4=(3,-2,1)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3$; deoarece card $A=4 > \dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow A-LD$

c) Fie $A: \begin{cases} v_1=(1,-1,-1)^T \\ v_2=(0,1,-1)^T \\ v_3=(-1,-1,2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3$; deoarece card $A=3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow A=? \begin{cases} L.D \\ L.i \end{cases}$
$\begin{cases} \text{prin calcul, rangul matricii componentelor} = 3 = \text{nr. vect.} \\ \Rightarrow A-Li. \end{cases}$

d) Fie $A: \begin{cases} w_1=(1,2,0,-3)^T \\ w_2=(-3,1,2,-1)^T \\ w_3=(-1,5,2,-7)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^4$; deoarece card $A=3 < 4 = \dim \mathbb{R}^4 \Rightarrow A=? \begin{cases} L.D \\ L.i \end{cases}$
$\begin{cases} \text{rang } A=2 < 3 = \text{nr. vectorilor} \Rightarrow A-LD; \\ \text{obs. că: } w_3=2w_1+w_2 → \text{rel. de dependență liniară} \end{cases}$

Baze canonice în spații liniare particulare

a) $\vec{V}_2 \overset{def}{=} \{ \vec{v} = \vec{AB} \mid A, B \in \mathbb{R}^2 \}$ → sp. liniar **2-dimensional** al vectorilor liberi

$B_c = \{ \vec{i}, \vec{j} \} \overset{not}{\equiv} \{ \vec{e_1}, \vec{e_2} \}$ – baza canonică din $\vec{V}_2$ $\Rightarrow$ $\dim \vec{V}_2 = 2$ ($= \text{card } B_c$)
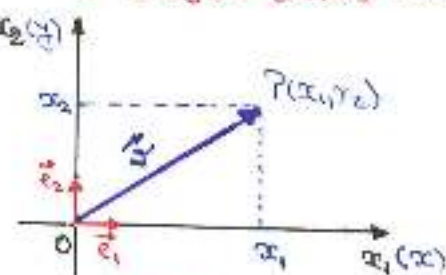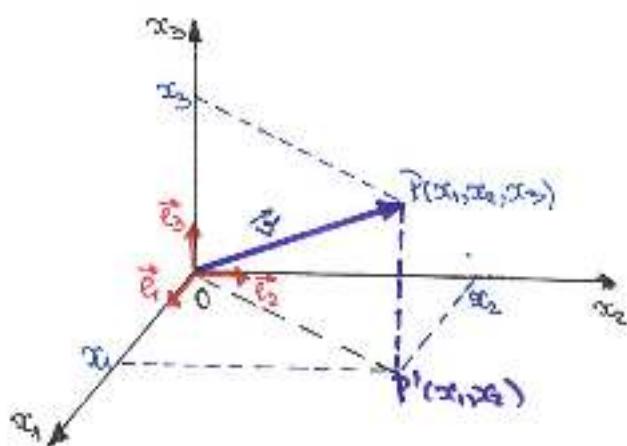

$(\forall) \vec{v} = \vec{OP} \in \vec{V}_2$, cu $P(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, admite descompunerea unică în B_c:

(1) $\vec{v} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2}$ (sau: $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$)

coord. lui $\vec{v}$ în baza B_c

$B_c = \{ \vec{e_1}, \vec{e_2} \}$

a₂) $\vec{V}_3 \overset{def}{=} \{ \vec{v} = \vec{AB} \mid A, B \in \mathbb{R}^3 \}$ – sp. liniar 3-dimensional al vectorilor liberi

$B_c = \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \} \overset{not}{\equiv} \{ \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \}$ – baza canonică din $\vec{V}_3$ $\Rightarrow$ $\dim \vec{V}_3 = 3$ ($= \text{card } B_c$)

$(\forall) \vec{v} = \vec{OP}$, cu $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, are descompunerea unică în B_c:

(1') $\vec{v} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + x_3 \vec{e_3}$ (sau $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$)

Obs. vectorii $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ se numesc și **versori** ai axelor de coordonate, deoarece: $\begin{cases} \vec{e_1} \perp \vec{e_2} \perp \vec{e_3} \\ \|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1 \end{cases}$

x_1, x_2, x_3 sunt coord. vect. $\vec{v}$ în B_c

b) $\mathcal{P}_n(X) = \{ P(X) \mid \text{gradul } P(X) \leq n \}$ → spațiul liniar al polinoamelor de grad cel mult n

$B_c = \{ E_0(X), E_1(X), E_2(X), \ldots, E_n(X) \}$ – baza canonică din $\mathcal{P}_n(X)$ $\Rightarrow$ $\dim \mathcal{P}_n(X) = n+1$ ($= \text{card } B_c$)

unde: $\begin{cases} E_0(X) = X^0 = 1 \quad \text{(polinomul constant 1)} \\ E_1(X) = X^1 = X \\ E_2(X) = X^2 \\ \text{-----} \\ E_n(X) = X^n \end{cases}$ → polinoame elementare

$(\forall) P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0 \in \mathcal{P}_n(X)$ are o descompunere unică în B_c, de forma:

$P(X) = a_n E_n(X) + a_{n-1} E_{n-1}(X) + \ldots + a_2 E_2(X) + a_1 E_1(X) + a_0 E_0(X)$

coeficienții polinomului $P(X)$ sunt coordonatele vectorului (polin.) $P(X)$ în baza canonică B_c

c) $M_{m,n}(\mathbb{R}) = \{A \mid A \text{ matrice cu "m" linii și "n" coloane}\}$ -sp. lin. al matricelor de tip (m,n).

$B_C = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{ij}, \dots, E_{mn}\}$ -baza canonică din $M_{m,n}(\mathbb{R}) \Rightarrow \dim M_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n \, (= \text{card } B_C)$

Matricile E_{ij} se numesc matrice elementare și sunt de forma:

Ex: au toate elementele egale cu "0", cu excepția unui elem. egal cu "1" aflat la intersecția liniei "i" cu coloana "j".

$E_{ij} = \begin{pmatrix} & & j & & n \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \vdots & & 0 \\ i & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & & \vdots & & \\ m & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

1) Fie mulțimea $B = \{u_1, u_2\}$ cu $\begin{cases} u_1 = (1,-2)^T \in \mathbb{R}^2 \\ u_2 = (-2,3)^T \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$. Se cere:

   a) arătați că (B) este bază în $\mathbb{R}^2$ $(B \leq \mathbb{R}^2)$;
   b) fie $v = (4,5)^T \in \mathbb{R}^2$. Determinați coordonatele lui v în (B_C) $(v_{B_C} = ?)$ și în baza (B) $(v_B = ?)$

Dem: $(B_C) \begin{cases} e_1 = (1,0)^T \\ e_2 = (0,1)^T \end{cases} \leq \mathbb{R}^2$

a) cf. (2.11): $B \leq \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} i) \text{ card } B = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \text{ (Adevărat)} \\ ii) B - \text{L.i.} \Leftrightarrow r_A = 2 (= \text{nr. vect.}), \text{ unde } \end{cases}$

$\overset{u_1 \ u_2}{A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}} \overset{\cdot 2}{\underset{+}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \overset{\cdot(-1)}{\underset{(-2)}{\cdot}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_A = 2$

b) b_1) evident coord. lui "v" în baza canonică, coincid cu componentele acestuia, adică:

$\underline{v_{B_C} = [4,5]} \Leftrightarrow v = 4e_1 + 5e_2 \left(= 4(1,0)^T + 5(0,1)^T = (4,0)^T + (0,5)^T = (4,5)^T\right)$

b_2) notăm coord. lui "v" în baza (B) cu α_1, α_2, adică $v_B = [\alpha_1, \alpha_2]$, deci:

$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Leftrightarrow (4,5)^T = \alpha_1 (1,-2)^T + \alpha_2 (-2,3)^T \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 4 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 5 \end{cases} \overset{\text{rezolv.}}{\underset{\text{Gauss}}{\longrightarrow}} \overset{\alpha_1 \ \alpha_2}{\bar{A} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}} \sim$

$\sim \overset{\alpha_1 \ \alpha_2}{\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 13 \end{pmatrix}} \overset{+}{\underset{\cdot(-1) \cdot(-2)}{\cdot}} \sim \overset{\alpha_1 \ \alpha_2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -22 \\ 0 & 1 & -13 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -22 \\ \alpha_2 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{v = -22u_1 - 13u_2} \Leftrightarrow \underline{v_B = [-22,-13]}$

$\left(\text{Verificare calcul: } v = -22u_1 - 13u_2 = -22(1,-2)^T - 13(-2,3)^T = (-22,44)^T + (26,-39)^T = (4,5)^T \rightarrow \text{corect.}\right)$

2) Fie $(B) \begin{cases} u_1 = (1,-1,0)^T \\ u_2 = (0,1,-1)^T \in \mathbb{R}^3 \\ u_3 = (1,-1,4)^T \end{cases}$. Arătați: $\begin{cases} a) B \leq \mathbb{R}^3 \ (B \to \text{bază în sp. lin. } \mathbb{R}^3) \\ b) v = (2,-3,4)^T \Rightarrow v_B = ? \\ c) w_B = [1,-2,3] \Rightarrow w = ? \ (\Leftrightarrow w_{B_C} = ?) \end{cases}$

Dem:

a) $B \leq \mathbb{R}^3$ cu $\begin{cases} i) \text{ card } B = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \ (A) \\ ii) B - \text{L.i.} \Leftrightarrow r_A = 3 \ (=\text{nr. vect.}) \end{cases}$, cu $\overset{u_1 \ u_2 \ u_3}{A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{4} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$

b) Fie $v_B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \Leftrightarrow v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \Leftrightarrow (2,-3,4)^T = \alpha_1(1,-1,0)^T + \alpha_2(0,1,-1)^T + \alpha_3(1,-1,1)^T$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = -3 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 4 \end{cases} \overset{\text{met.}}{\underset{\text{Gauss}}{\longrightarrow}} \overset{\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3}{\bar{A} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \underline{v = -u_1 - u_2 + 3u_3} \Leftrightarrow \underline{v_B = [-1,-1,3]}$ $\left(\text{Verif: } v = -(1,-1,0)^T - (0,1,-1)^T + 3(1,-1,1)^T = (2,-3,4)^T \rightarrow (A)\right)$

c) $w_B = [1,-2,3] \Leftrightarrow w = u_1 - 2u_2 + 3u_3 = (1,-1,0)^T - 2(0,1,-1)^T + 3(1,-1,1)^T = (4,-6,5)^T \Leftrightarrow \underline{w_{B_C} = [4,-6,5]}$ q.e.d.