SEMINAR BAZELE STATISTICII

SEMINAR 11

TESTAREA STATISTICĂ

1. ***Aspecte generale ale testării statistice***
   - Obiectivele testării statistice
   - Demersul testării statistice
   - Teste parametrice versus teste neparametrice

2. ***Testarea ipotezelor asupra unui eşantion***
   - Testarea ipotezelor asupra mediei: testul t, testul Z
   - Testarea ipotezelor asupra proporției: testul t, testul Z

TESTAREA STATISTICĂ

Testarea ipotezelor privind două eşantioane (cazul eşantioanelor independente)

- verificarea egalității mediilor.

Testarea ipotezelor privind 3 şi mai multe eşantioane independente

(Testul Fisher – ANOVA)

Aspecte generale ale testării statistice

Necesitatea testării: adoptarea unei decizii cu privire la o populație plecând de la prelucrarea datelor observate pentru un eșantion.

[redacted] **1. Obiectivele testării statistice**

- verificarea ipotezelor asupra unui parametru al unei populaţii (*de exemplu*: testarea egalității mediei unei populații μ față de o valoare fixă μ_0);
- verificarea ipotezelor privind legea de distribuţie a unei populaţii (*de exemplu*: testarea ipotezei de normalitate a unei distribuții);

Aspecte generale ale testării statistice

- verificarea ipotezelor privind două sau mai multe populații (*de exemplu*: testarea egalității a două sau mai multor medii ale unor populații).

2. Demersul testării statistice

a) Formularea ipotezelor statistice

O ipoteză este o presupunere cu privire la valoarea unui parametru, legea de distribuție a variabilei studiate etc.

- H_0 : egalitatea unui parametru cu o valoare fixă; o presupunere cu privire la legea de repartiţie a unei variabile.

  H_1: este opusul ipotezei nule.

Exemple:

$$H_0: \mu = \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$H_0: \ ipoteza\ de\ normalitate$$
$$H_1: \ distributia\ nu\ urmează\ o\ Lege\ Normală$$

Test bilateral:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

Observație: Valoarea teoretică se alege din tabel pentru un risc $\alpha/2$

Test unilateral la dreapta:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta > \theta_0$$

Observație: Valoarea teoretică se alege din tabel pentru un risc α

Test unilateral la stânga:

$$H_0 : \theta = \theta_0$$
$$H_1 : \theta < \theta_0$$

Observație: Valoarea teoretică se alege din tabel pentru un risc α

b) Alegerea testului statistic

- există două categorii de teste statistice: teste parametrice şi teste neparametrice.

c) Alegerea pragului de semnificație α **al testului şi citirea valorii critice (teoretice)**

- riscul (pragul de semnificație) α reprezintă probabilitatea de a respinge ipoteza nulă, atunci când aceasta este adevărată.

d) Calculul valorii statisticii test, folosind datele observate la nivelul eşantionului.

e) Regiunea de respingere/acceptare a ipotezei nule

Regiunea de respingere – intervalul dintr-o distribuție de probabilitate în care se respinge ipoteza nulă, acest interval este acoperit de probabilitatea α

Regiunea de acceptare (interval de încredere) – intervalul în care nu se respinge ipoteza nulă şi este acoperit de probabilitatea 1- α

f) Regula de decizie

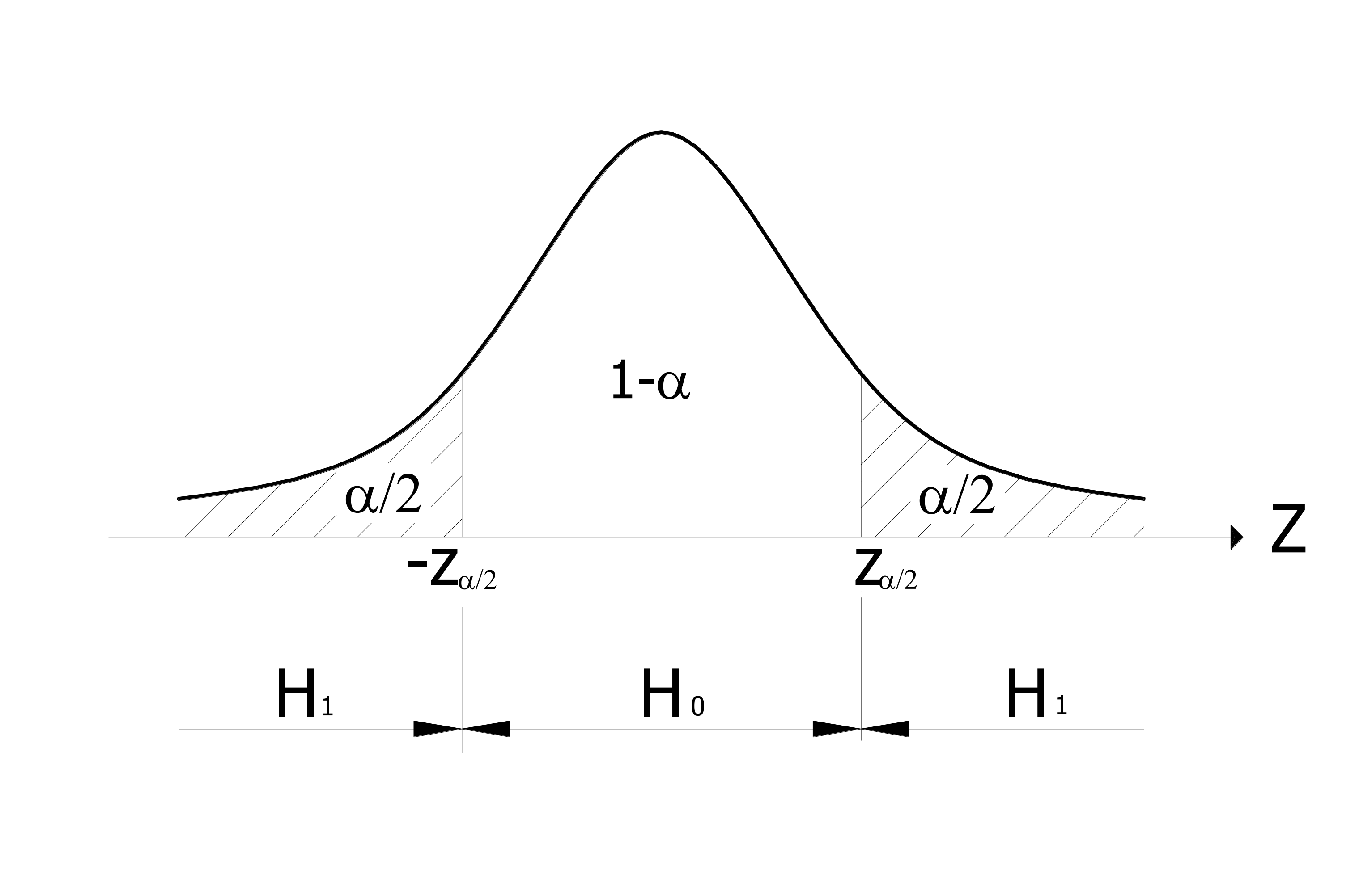


Figura 1. *Regiunea de respingere şi de acceptare a ipotezei H_0 în cazul unui test bilateral*

Regula de decizie în cazul unui test bilateral

- dacă $z_{calculat} < -z_{\alpha/2}$ sau $z_{calculat} > +z_{\alpha/2}$, atunci se respinge ipoteza H_0 cu o probabilitate de α. Altfel spus : ***dacă $|z_{calculat}| > z_{\alpha/2}$, se respinge ipoteza H_0 cu o probabilitate de α.***
- dacă $z_{calculat} \geq -z_{\alpha/2}$ sau $z_{calculat} \leq +z_{\alpha/2}$, atunci nu se respinge ipoteza H_0 cu o probabilitate de (1-α). Altfel spus : ***dacă $|z_{calculat}| \leq z_{\alpha/2}$, nu se respinge ipoteza H_0 cu o probabilitate de (1-α).***

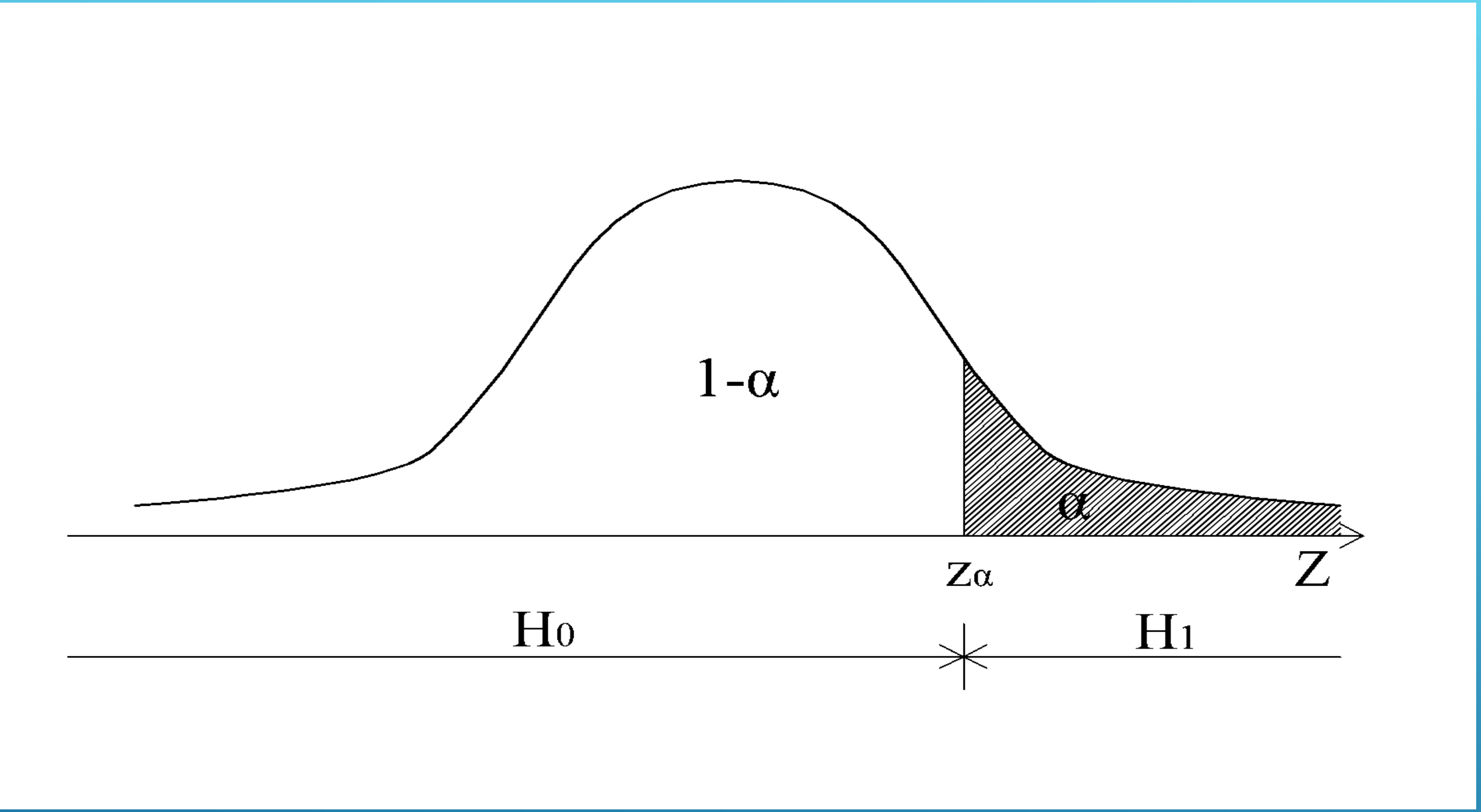


Figura 2. *Regiunea de respingere şi de acceptare a ipotezei H_0 în cazul unui test unilateral la dreapta*

Regula de decizie în cazul unui test unilateral la dreapta:

- dacă $z_{calculat} > +z_{\alpha}$, atunci se respinge ipoteza H_0 cu o probabilitate de α.

- dacă $z_{calculat} \leq + z_{\alpha}$, atunci nu se respinge ipoteza H_0 cu o probabilitate de (1-α).

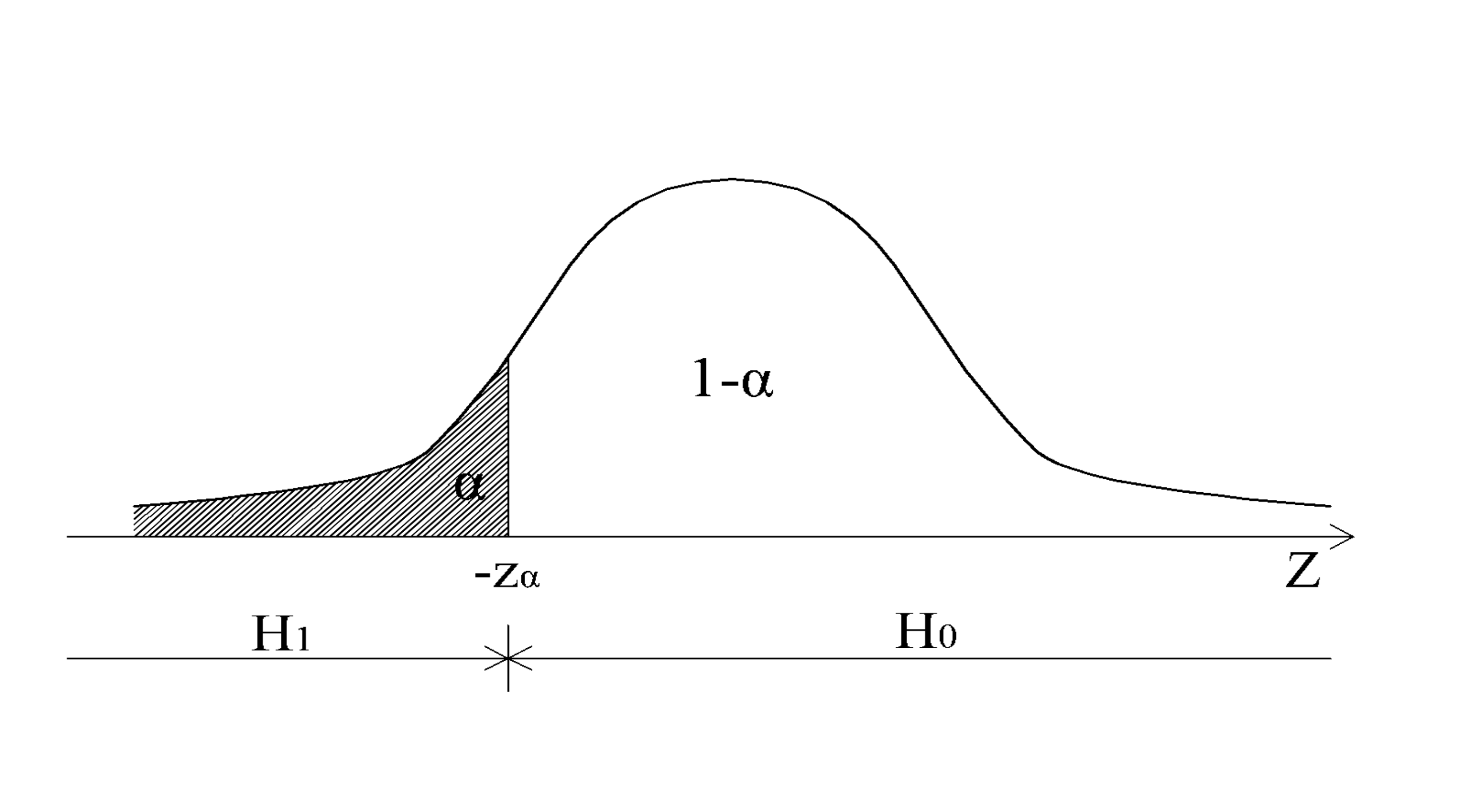
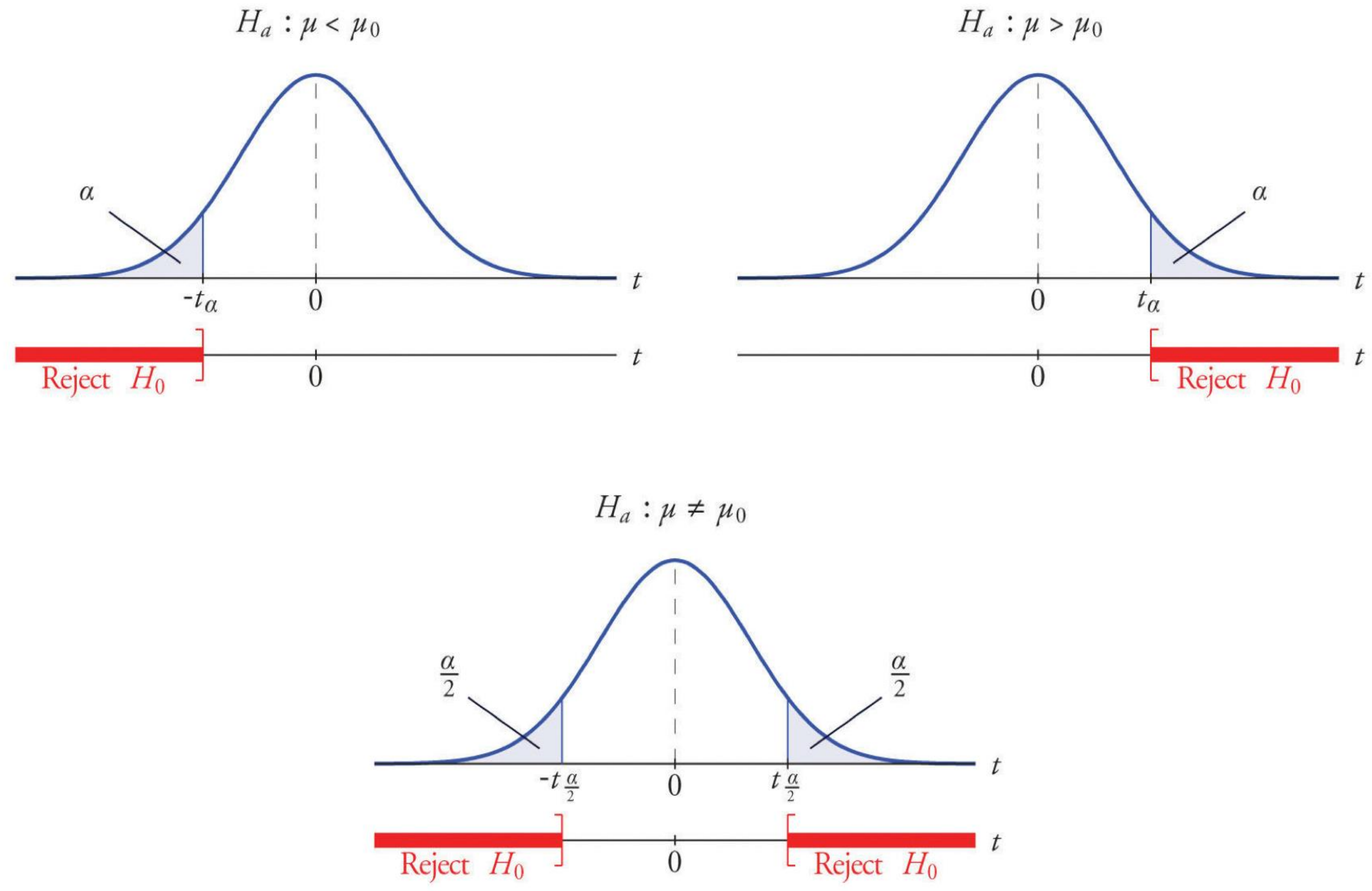


Figura 3. *Regiunea de respingere şi de acceptare a ipotezei H_0 în cazul unui test unilateral la stânga*

Regula de decizie în cazul unui test unilateral la stânga:

- dacă $z_{calculat} < -z_{\alpha}$, atunci se respinge ipoteza H_0 cu o probabilitate de α.

- dacă $z_{calculat} \geq -z_{\alpha}$, atunci nu se respinge ipoteza H_0 cu o probabilitate de $(1-\alpha)$.



$H_a : \mu < \mu_0$
α
$-t_\alpha$
0
t
Reject H_0
$H_a : \mu > \mu_0$
α
0
t_α
t
Reject H_0
$H_a : \mu \neq \mu_0$
$\frac{\alpha}{2}$
$\frac{\alpha}{2}$
$-t_{\frac{\alpha}{2}}$
0
$t_{\frac{\alpha}{2}}$
t
Reject H_0
Reject H_0

Erori de testare

Decizia testului se ia cu o anumită eroare, care poate fi:

- eroare de tip I (eroare de primă speță, notată α).

Este eroarea de a decide să se respingă H_0 când în realitate aceasta este adevărată.

- eroare de tip II (eroare de a doua speță, notată β).

Este eroarea de a accepta H_0 când aceasta este falsă.

- $1-\alpha$ măsoară nivelul de siguranță al testului (siguranța statistică)
- $1-\beta$ măsoară puterea testului.

TESTE PARAMETRICE ŞI TESTE NEPARAMETRICE

Teste parametrice:

- ✓ presupun ipoteza de normalitate a distribuției populației;
- ✓ variabila analizată este măsurată pe o scală interval sau raport;
- ✓ mărimea eşantionului trebuie să fie suficient de mare *(ex. n>30)*.

Teste neparametrice:

- ✓ puține ipoteze restrictive privind legea de distribuție a populației;
- ✓ se folosesc pentru variabile calitative.

TESTAREA IPOTEZELOR ASUPRA UNUI EŞANTION

Testarea ipotezelor asupra mediei unei populații

a) *Formularea ipotezelor*

$$H_0 : \mu = \mu_0$$
$$H_1 : \mu \neq \mu_0$$

b) *Alegerea testului statistic*

- dacă se cunoaşte σ^2 se foloseşte statistica Z, $Z \sim N(0,1)$

$$Z = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}}$$

- dacă nu se cunoaşte σ^2, se foloseşte statistica t, $t \sim t(n-1)$

$$t = \frac{\hat{\mu} - \mu_0}{\hat{\sigma}' / \sqrt{n}}$$

TESTAREA IPOTEZELOR ASUPRA MEDIEI UNEI POPULAȚII

c) *Alegerea pragului de semnificație* şi citirea din tabel a valorii critice (teoretice) a statisticii test.

- de regulă, se alege α = 0,05, α = 0,01 , α = 0,1

d) *Calculul valorii statisticii test* pe baza datelor eşantionului

$$z_{calculat} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \qquad t_{calculat} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s' / \sqrt{n}}$$

TESTAREA IPOTEZELOR ASUPRA MEDIEI UNEI POPULAȚII

e) Regula de decizie

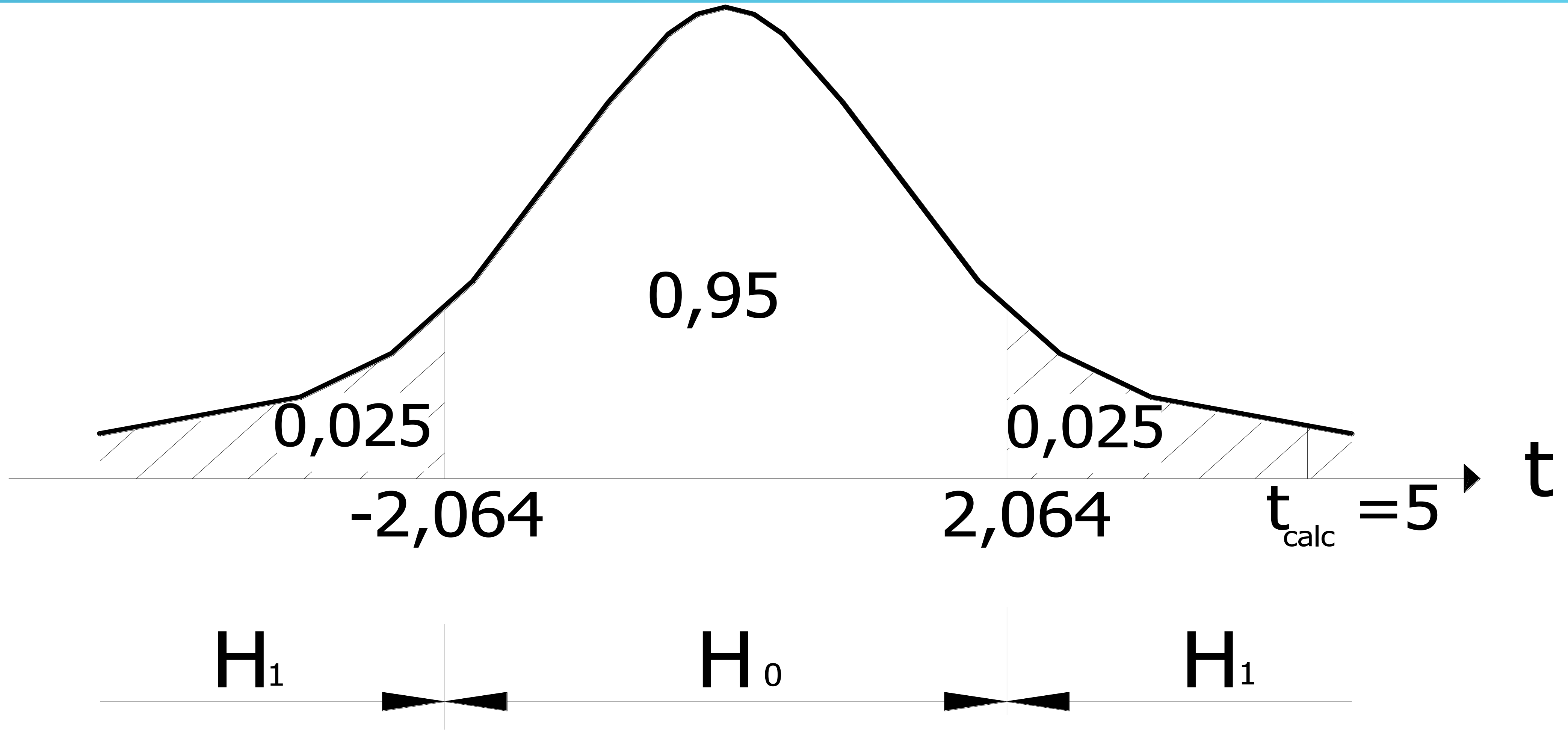
- dacă $\left|t_{calculat}\right| > t_{\alpha/2}$, se respinge ipoteza nulă, pentru un risc α

- dacă $\left|t_{calculat}\right| \le t_{\alpha/2}$, nu se respinge ipoteza nulă.

f) Compararea valorii calculate a statisticii testului cu valoarea critică (teoretică)

1. Pentru un eșantion format din 25 de persoane, se înregistrează salariul lunar obţinut şi se obţin următoarele rezultate: $\bar{x}$ = 15 sute lei și s'= 2 sute lei. Se cere să se testeze *dacă există diferenţe semnificative* între salariul mediu al întregii populaţii din care a fost extras eşantionul (μ) şi salariul mediu pe economie, de 13 sute lei. Se consideră un risc de 0,05.

APLICATII



0,95
0,025
0,025
t
-2,064
2,064
t calc =5
H 1
H 0
H 1

2. Pentru un eșantion format din 100 de persoane, se obțin următoarele rezultate privind nota obținută la un test: media este 7 și varianța corectată (modificată) este 4. Să se testeze dacă există diferențe semnificative între nota medie obținută de ansamblul studenților din care a fost extras eșantionul și nota medie obținută în anul anterior, de 8. Riscul asumat este de 0,10.

APLICATII

3. În urma prelucrării datelor privind valoarea vânzărilor anuale (mil. lei) înregistrate pentru un eșantion de firme, s-au obținut următoarele rezultate:

Să se testeze dacă există diferențe semnificative între valoarea vânzărilor anuale pentru ansamblul firmelor din care a fost extras eșantionul și vânzările medii înregistrate în anul anterior, de 14 mil. lei, considerând un risc de 5%.

APLICATII

Column1	
Mean	12.15
Median	12
Mode	10
Standard Deviation	1.8994
Sample Variance	3.6079
Kurtosis	-1.31
Skewness	0.4274
Count	20

s' – Standard Deviation

n - Count

$\bar{x}$ *– Mean*

4. O firmă dorește să introducă un nou procedeu de fabricație. Pentru vechiul procedeu, se cunosc durata medie de viață a produselor de 1200 ore și abaterea standard de 300 de ore. Pentru a testa noul procedeu, se extrage un eșantion format din 100 de produse și se obține o durată medie de viață de 1265 de ore. Pentru un risc de 0,05, se cere:

a) să se testeze dacă noul procedeu de fabricație este mai bun.

b) să se afle probabilitatea asociată statisticii test (z) calculate.

APLICATII

- Această probabilitate poartă denumirea de *p-value* sau *Sig.* (*Significance level*, în SPSS).
- Decizia corectă poate fi adoptată și comparând această probabilitate cu riscul α:

- **dacă p-value sau Sig.** $< \alpha$, **atunci se respinge ipoteza** H_0, **pentru un risc** α.
- **dacă p-value sau Sig.** $\geq \alpha$, **atunci nu se respinge ipoteza** H_0, **pentru o probabilitate** $(1-\alpha)$.

5. În testarea semnificației mediei unei populații față de o valoare fixă μ_0, s-a obținut o valoare calculată a statisticii test z=1,98. Dacă valoarea teoretică este z=1,64, să se afle riscul asumat de a respinge pe nedrept ipoteza H_0, considerând un test bilateral.

APLICATII

TESTAREA IPOTEZELOR ASUPRA PROPORȚIEI

Demersul testării:

a) *Formularea ipotezelor statistice*

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

$$H_1 : \pi \neq \pi_0$$

TESTAREA IPOTEZELOR ASUPRA PROPORȚIEI

b) *Alegerea pragului de semnificație* α

c) *Testul statistic*

$$t_{calculat} = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{p(1-p)} / \sqrt{n}}$$

d) *Regula de decizie*

- *este similară cu regula definită la testarea mediei unei populații.*

- $|t_{calculat}| > t_{\frac{\alpha}{2};n_1-1}$ → Se respinge ipoteza H_0 cu o probabilitate de α;
- $|t_{calculat}| \leq t_{\frac{\alpha}{2};n_1-1}$ → Nu se respinge ipoteza H_0 cu o probabilitate de (1-α).

6. La nivelul unui eşantion de volum n=25 de persoane, se observă că ponderea persoanelor care votează pentru candidatul A este de 49%. Se cere să se testeze dacă există diferențe semnificative între proporția persoanelor care votează pentru candidatul A la nivelul întregii populații şi proporția persoanelor care au votat pentru acest candidat la alegerile anterioare, de 51%. Se consideră un risc de 5%.

APLICATII

TESTAREA IPOTEZELOR PRIVIND DOUĂ EŞANTIOANE (CAZUL EŞANTIOANELOR INDEPENDENTE)

- În cazul eşantioanelor independente, statistica test folosită în testarea ipotezelor statistice este statistica *Z* sau *t*.
- *Ipoteze statistice*

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

- Aplicarea testului presupune testarea egalității varianțelor populațiilor din care au fost extrase eşantioanele (testul Levene).

TESTAREA IPOTEZELOR PRIVIND DOUĂ EŞANTIOANE

- atunci când $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, statistica test este:

$$t_{calculat} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s'^2_1}{n_1} + \frac{s'^2_2}{n_2}}}$$

Observație: Valoarea teoretică a statisticii test se alege pentru

(n_1+n_2-2) grade de libertate.

TESTAREA IPOTEZELOR PRIVIND 3 ŞI MAI MULTE EŞANTIOANE INDEPENDENTE (ANOVA)

a) Obiectiv

- procedeu de analiză a variației în funcție de sursa acesteia;
- permite compararea mediilor a 3 sau mai multe grupe sau populații cu scopul de a verifica dacă există diferențe semnificative între acestea.

b) Condiții de aplicare

- Condiția de independență
- Condiția de normalitate
- Condiția de homoscedasticitate (omogenitate)

Se bazează pe descompunerea variației totale pe componente:

- variația explicată sau intergrupe (V_E) (variația sub influența factorilor esențiali sau de grupare);
- variația reziduală sau intragrupe (V_R) (variația sub influența factorilor aleatori sau întâmplători).

$$V_T = V_E + V_R$$

- La nivelul unui eşantion: *TSS=ESS+RSS.*

(ESS este *Explained (Between) sum of squares; RSS* este *residual sum of squares)*

TESTAREA IPOTEZELOR PRIVIND 3 ŞI MAI MULTE EŞANTIOANE INDEPENDENTE (ANOVA)

- Variația totală $$TSS = \sum_{i}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$
- Variația explicată $$ESS = \sum_{i=1}^{n}(\bar{x}_j - \bar{x})^2$$
- Variația reziduală $$RSS = \sum_{i=1}^{n_j}\sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

TESTAREA IPOTEZELOR PRIVIND 3 ŞI MAI MULTE EŞANTIOANE INDEPENDENTE (ANOVA)

c) Ipoteze statistice:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$

$$H_1 : mediile\ a\ cel\ \ putin\ doua\ \ populatii\ sunt\ diferite$$

d) Statistica test Fisher

$$F = \frac{\hat{V}_E / k - 1}{\hat{V}_R / n - k}$$

unde: k – numărul grupelor.

e) Se alege pragul de semnificație α şi se citeşte v**aloarea critică (teoretică) a testului F** din tabelul repartiției Fisher, pentru riscul α admis, şi $v_1 = k-1,\ v_2 = n-k$ grade de libertate, F_{α, v_1, v_2} .

f) **Calculul statisticii F:**

$$F_{calculat} = \frac{ESS / k-1}{RSS / n-k} = \frac{ESS}{RSS} \cdot \frac{n-k}{k-1}$$

g) Regula de decizie:

- $F_{calculat} > F_{\alpha, v_1, v_2}$ $sau\ Sig < \alpha$ se respinge ipoteza nulă H_0 pentru riscul α admis

- $F_{calculat} \leq F_{\alpha, v_1, v_2}$ $sau\ Sig \geq \alpha$ nu se respinge ipoteza nulă H_0 , pentru o probabilitate de (1- α)

TABELUL DE SINTEZĂ ANOVA

Sursa variației	Variația	Grade de libertate	Estimatori ai varianței	F	Sig.
Intergrupe (Explicată)	ESS	k-1	ESS/k-1	$F_{calc} = \frac{\frac{ESS}{k-1}}{\frac{RSS}{n-k}}$	
Intragrupe (Reziduală)	RSS	n-k	RSS/n-k		
Totală	TSS	n-1	TSS/n-1		

APLICATII

1. Pentru două eșantioane extrase aleator simplu de volum $n_1=n_2=625$ persoane s-a înregistrat vârsta și s-au obținut următoarele rezultate:

$$\bar{x}_1 = 35\ ani, \bar{x}_2 = 32\ ani$$

$$s'_1 = 2\ ani\ ,\ s'_2 = 4\ ani$$

Să se testeze ipoteza potrivit căreia între vârstele medii ale celor două populații din care au fost extrase eșantioanele observate există diferențe semnificative. Se consideră un risc de 0,05.

2. Se înregistrează salariile lunare (mii euro) pentru două eșantioane formate din 10 persoane de sex masculin și 5 persoane de sex feminin și se obțin următoarele rezultate: $\overline{x_M} = 16;\ s'_M = 3{,}43;\ \overline{x_F} = 11,\ s'_F = 3{,}16$. Se cere:

a) să se precizeze numărul gradelor de libertate asociate statisticii test teoretice;

b) să se testeze dacă există diferențe semnificative între salariile medii ale întregii populații din care au fost extrase eșantioanele, considerând un risc de 0,10.

APLICATII

n\p	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
…	…	…	…	…	…
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
…	…	…	…	…	…

3. Se înregistrează veniturile pentru regiunile unei țări și se obțin următoarele rezultate:

Să se testeze dacă există diferențe semnificative între veniturile medii pe regiuni, la nivelul populațiilor din care au fost extrase eșantioanele, considerând un risc de 0,05.

ANOVA

venit

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	149.400	2	74.700	19.597	.000
Within Groups	64.800	17	3.812		
Total	214.200	19			

APLICATII

ANOVA

venit

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	149.400	2	74.700	19.597	.000
Within Groups	64.800	17	3.812		
Total	214.200	19			

Intergrupe - explicata

ESS

k-1

Intragrupe - reziduala

TOTALA

RSS

TSS

n-k

n-1

n2/n1	1	2	3	4	5	6	7
1	161,448	199,500	215,707	224,583	230,162	233,986	236,768
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,014	8,941	8,887
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094
…	…	…	…	…	…	…	…
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577
…	…	…	…	…	…	…	…

4. Se cunosc următoarele rezultate privind câștigurile salariale ale angajaților din diferite domenii de activitate:

Sursa variației	*Variația*	*Grade de libertate*
Intergrupe	*300*	*3*
Intragrupe	*100*	*22*

Se cere:

a) Să se precizeze volumul eșantionului;

b) Să se precizeze numărul de grupe ale factorului de grupare (*Domeniul de activitate*);

c) Să se precizeze numărul gradelor de libertate asociate variației totale;

d) Să se testeze dacă factorul de grupare, *Domeniul de activitate*, are o influență semnificativă asupra câștigurilor salariale (α=5%).

APLICATII

Sursa variației	***Variația***	***Grade de libertate***
Intergrupe	$300 \rightarrow ESS$	$3 \rightarrow k\text{-}1$
Intragrupe	$100 \rightarrow RSS$	$22 \rightarrow n\text{-}k$
Totala	$\mathbf{400 \rightarrow TSS}$	$\mathbf{25 \rightarrow n\text{-}1}$