BAZELE STATISTICII

6. Testarea statistică

6.1. Aspecte generale ale testării statistice

6.1.1. Obiectivele testării statistice

6.1.2. Demersul testării statistice

6.1.3. Teste parametrice şi teste neparametrice

6.2. Testarea ipotezelor asupra unui eşantion

6.2.1 Testarea ipotezelor asupra mediei: testul t, testul Z

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporţiei

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporţiei

Demersul testării:

a) *Formularea ipotezelor statistice*

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

$$H_1 : \pi \neq \pi_0$$

π - *parametrul proporție*

π_0 - *valoarea considerată în testare*

- sau $H_0 : \pi = 0.5$
  $H_1 : \pi \neq 0.5$

(*cele două categorii ale variabilei au şanse egale să apară)*

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporţiei

b) *Alegerea pragului de semnificaţie* α

c) *Testul statistic*

$$t_{calculat} = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{p(1-p)} / \sqrt{n}}$$

d) *Regula de decizie*

Dacă $\left| t_{calculat} \right| > t_{\alpha/2;n-1}$ se respinge ipoteza nulă, pentru un risc α și se acceptă ipoteza alternativă.

Dacă $\left| t_{calculat} \right| \leq t_{\alpha/2;n-1}$ ipoteza nulă nu se respinge.

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporţiei

Problemă

O firmă dorește să evalueze procentul de produse defecte de pe o linie de producție. Pentru aceasta, se cunoaște că aceste produse au reprezentat în ultimii ani 2 % din totalul produselor fabricate. Pentru linia de producție curentă, se extrage un eșantion format din 500 unități și se găsesc 21 produse defecte.

Să se testeze ipoteza potrivit căreia calitatea produselor a rămas aceeași, pentru un risc de 5%.

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporţiei

1. Formularea ipotezelor

$$H_0: \pi = \pi_0 \qquad\qquad H_0: \pi = 0{,}02$$
$$H_1: \pi \neq \pi_0 \quad \text{sau} \quad H_1: \pi \neq 0{,}02$$

2. Alegerea pragului de semnificație

$$\alpha = 0{,}05$$

3. Alegerea și calcularea statisticii test

$$p = \frac{n_A}{n} = \frac{21}{500} = 0{,}042$$

$$t_{calc} = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{p(1-p)}/\sqrt{n}} = \frac{0{,}042 - 0{,}02}{\frac{\sqrt{0{,}042(1-0{,}042)}}{\sqrt{500}}} \qquad t_{calc} = \frac{0{,}022}{\frac{0{,}20589}{22{,}36068}} = \frac{0{,}022}{0{,}009207} = 2{,}389$$

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporţiei

Atenție: În aceste calcule, numărul de zecimale luat în considerare, poate determina obținerea unor rezultate diferite. Luați în considerare cât mai multe zecimale posibile (dat totuși, nu mai mult de 6).

4. Regula de decizie

Dacă $|t_{calc}| \leq t_{\alpha/2;n-1}$ nu se respinge ipoteza H_0.

Dacă $|t_{calc}| > t_{\alpha/2;n-1}$ cu un risc asumat α se respinge ipoteza nulă și se acceptă ipoteza alternativă.

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporţiei

5. Decizia statistică

Deoarece $\left(\left|t_{calc}\right| = 2,389\right) > \left(t_{0,025;499} = 1,96\right)$

cu un risc de 0,05 se respinge ipoteza nulă și se acceptă ipoteza alternativă. Deci, calitatea produselor nu a rămas aceeași. Procentul actual al rebuturilor este diferit de procentul rebuturilor cunoscut anterior.

6.3. Testarea diferenţei dintre două medii

- În cazul eşantioanelor independente, statistica test folosită în testarea ipotezelor statistice este statistica *Z* sau *t*.
- *Ipoteze statistice*

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

- Aplicarea testului presupune testarea egalităţii varianţelor populaţiilor din care au fost extrase eşantioanele (testul Levene).

6.3. Testarea diferenţei dintre două medii

- atunci când $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, statistica test este:

$$t_{calculat} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s'^2_1}{n_1} + \frac{s'^2_2}{n_2}}}$$

- atunci când $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, statistica test este:

$$t_{calculat} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s'_{p.} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

6.3. Testarea diferenţei dintre două medii

- unde:

$$s'_p = \sqrt{\frac{s'^2_1(n_1-1)+s'^2_2(n_2-1)}{n_1+n_2-2}}$$

Regula de decizie:

Dacă $\left|t_{calc}\right| > t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}$ cu un risc α respingem ipoteza H_0 și acceptăm ipoteza H_1.

Dacă $\left|t_{calc}\right| \le t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}$ nu se respinge ipoteza H_0.

6.3. Testarea diferenţei dintre două medii

Exemplu

- Pentru două eșantioane extrase aleator simplu de volum $n_1=n_2=625$ persoane s-a înregistrat vârsta și s-au obținut următoarele rezultate:

  $\bar{x}_1 = 35\ ani, \bar{x}_2 = 32\ ani$;

  $s'_1 = 2\ ani, s'_2 = 4\ ani$
- Să se testeze ipoteza potrivit căreia între vârstele medii ale celor două populații din care au fost extrase eșantioanele observate există diferențe semnificative. Varianțele populațiilor diferă între ele. Se consideră un risc de 0,05.

6.3. Testarea diferenţei dintre două medii

1. Formularea ipotezelor

$$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

sau

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \qquad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

2. Alegerea pragului de semnificație

α =0,05

3. Alegerea și calcularea statisticii test

$$t_{calculat} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s'^2_1}{n_1} + \frac{s'^2_2}{n_2}}}$$

$$t_{calc} = \frac{35-32}{\sqrt{\frac{4}{625} + \frac{16}{625}}} = 16,77$$

6.3. Testarea diferenţei dintre două medii

4. Regula de decizie

Dacă $\left|t_{calc}\right| > t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}$ cu un risc α respingem ipoteza H_0 și acceptăm ipoteza H_1.

Dacă $\left|t_{calc}\right| \leq t_{\alpha/2;n_1+n_2-2}$ nu se respinge ipoteza H_0.

6.3. Testarea diferenţei dintre două medii

5. Decizia statistică

Deoarece $\left(\left|t_{calc}\right| = 16,77\right) > \left(t_{0,025;1248} = 1,96\right)$ cu un risc de 0,05 respingem ipoteza H_0 și acceptăm ipoteza H_1. Există diferențe semnificative d.p.d.v. statistic între vârstele medii ale celor două populații.

Exemplu

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
									95% Confidence Interval of the Difference	
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	Lower	Upper
venit	Equal variances assumed	17.482	.002	-4.929	10	.001	-6.50000	1.31867	-9.43818	-3.56182
	Equal variances not assumed			-4.929	5.572	.003	-6.50000	1.31867	-9.78764	-3.21236

6.4 Testarea egalităţii a trei sau mai multe medii (ANOVA)

a) Obiectiv

- procedeu de analiză a variaţiei în funcţie de sursa acesteia;
- ANOVA unifactorială / Anova bi- şi multifactorială;
- permite compararea mediilor a 3 sau mai multe grupe sau populaţii cu scopul de a verifica dacă există diferenţe semnificative între acestea.

b) Condiţii de aplicare

- Condiţia de independenţă
- Condiţia de normalitate
- Condiţia de homoscedasticitate

6.4 Testarea egalităţii a trei sau mai multe medii (ANOVA)

Se bazează pe descompunerea variaţiei totale pe componente:

- variaţia explicată sau intergrupe (variaţia sub influenţa factorilor esenţiali);
- variaţia reziduală sau intragrupe (variaţia sub influenţa factorilor întâmplători).

$$V_T = V_E + V_R$$

- La nivelul unui eşantion: *TSS*=*ESS*+*RSS*.

6.4 Testarea egalităţii a trei sau mai multe medii (ANOVA)

V_T , respectiv TSS reprezintă variaţia totală, $TSS = \sum_{i}^{n} (x_i - \bar{x})^2$

V_E , respectiv ESS - variaţia variabilei explicată $ESS = \sum_{i=1}^{n} (\bar{x}_j - \bar{x})^2$

V_R , respectiv RSS – variaţia reziduală

$$RSS = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^{k} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$$

c). Ipoteze statistice:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_k$$

$$H_1 : mediile\ a\ cel\ putin\ doua\ populatii\ sunt\ diferite$$

6.4 Testarea egalităţii a trei sau mai multe medii (ANOVA)

d. Statistica test Fisher

$$F = \frac{\hat{V}_E / k-1}{\hat{V}_R / n-k} = \frac{\hat{V}_E}{\hat{V}_R} \cdot \frac{n-k}{k-1}$$

unde: k – numărul grupelor

6.4 Testarea egalităţii a trei sau mai multe medii (ANOVA)

e. Se alege pragul de semnificaţie α şi se citeşte v**aloarea critică a testul F** din tabelul repartiţiei Fisher, pentru riscul α admis, şi $v_1 = k-1,\ v_2 = n-k$ grade de libertate, $F_{\alpha,\,v_1,v_2}$.

6.4 Testarea egalităţii a trei sau mai multe medii (ANOVA)

f. Valoarea statisticii F se calculează astfel:

$$F_{calculat} = \frac{ESS / k - 1}{RSS / n - k} = \frac{ESS}{RSS} \cdot \frac{n - k}{k - 1}$$

6.4 Testarea egalităţii a trei sau mai multe medii (ANOVA)

g. Regula de decizie:

- $F_{calculat} > F_{\alpha, v_1, v_2}$ sau $Sig < \alpha$ se respinge ipoteza nulă H_0 pentru riscul α admis

- $F_{calculat} \leq F_{\alpha, v_1, v_2}$ sau $Sig \geq \alpha$ nu se respinge ipoteza nulă H_0

6.4 Testarea egalităţii a trei sau mai multe medii (ANOVA)

ANOVA

venit

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Between Groups	ESS 149.400	k-1 2	$\frac{ESS}{k-1}$ 74.700	$\frac{\frac{ESS}{k-1}}{\frac{RSS}{n-k}}$ 19.597	.000
Within Groups	RSS 64.800	n-k 17	$\frac{RSS}{n-k}$ 3.812		
Total	TSS 214.200	n-1 19			