

## Curs 7: II.7) Metoda celor două faze

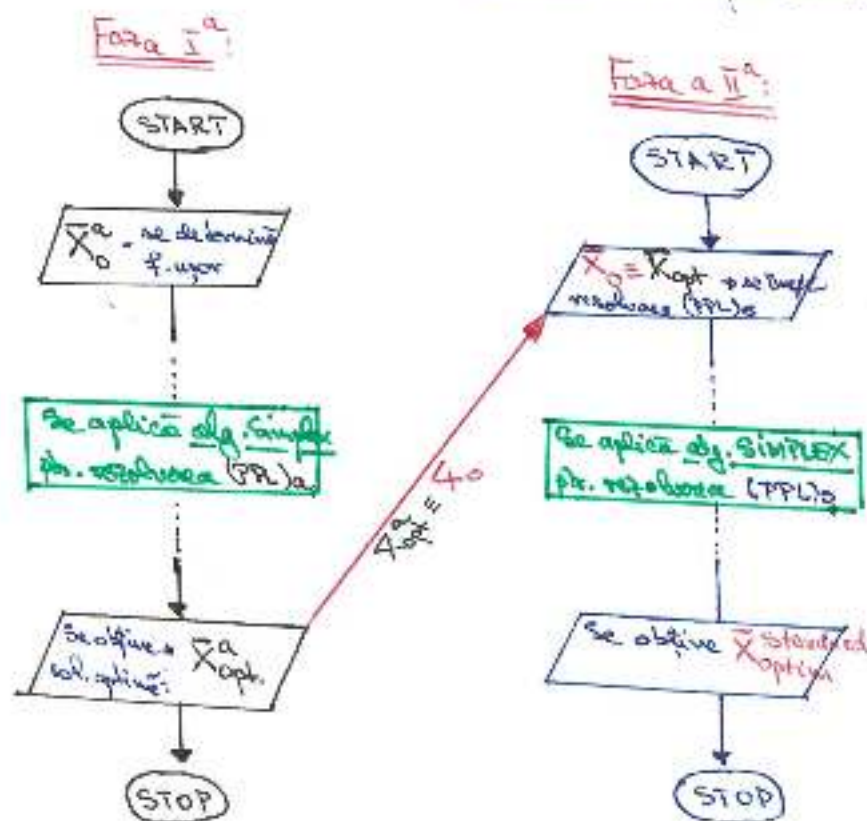
Obs:

i) Pentru a începe aplicarea alg. Simplex, avem nevoie de o S.B.A.  $\bar{X}_0$  a sistemului liniar (2a). Determinarea acesteia cu ajutorul metodei lui Gauss (de rezolvare a sist. liniare) nu este "cea mai bună idee", deoarece este posibil ca să obținem mai multe f.f. multe soluții neadmisibile (zei de mii, sute de mii, milioane, etc.) până determinăm prima soluție admisibilă ( $\neq \bar{X}_0$ ).

ii) Metoda celor două faze elimină acest inconvenient major, astfel:

- 1) En faza I<sup>a</sup>, se atapează (PPL)<sub>0</sub> o nouă problemă (PPL)<sub>0</sub> numită problemă artificială a cărei soluție de bază admisibilă inițială ( $\neq \bar{X}_0$  - S.B.A.) este obținută direct (fără calcul) din forma sistemului liniar (2a). Se aplică alg. Simplex și se rezolvă (PPL)<sub>0</sub> obținându-se soluția optimă a problemei artificiale ( $\neq \bar{X}_0$ ).
- 2) En faza a II<sup>a</sup> se rezolvă (PPL)<sub>0</sub> cu alg. Simplex, având ca S.B.A. tocmai soluția optimă găsită a (PPL)<sub>0</sub>, adică:  $\bar{X}_0 = \bar{X}_{opt}$ .

iii) schematic, metoda celor două faze este reprezentată mai jos:



iii) de ex., dacă din alb.  $C_{40}^0 = 847.660.528$  S.B. a unei (PPL)<sub>0</sub>, pp. ca 500.000.000 mil S.B.N. (neadmisibile), putem fi suficient de "glumiciști" să determinăm mai puțin 100-200-300 de milioane de S.B.N. până obținem pe  $\bar{X}_0$ -S.B.A. Cu metoda celor două faze (PPL)<sub>0</sub> se rezolvă ușor în cel mult 20+50=70 pași și 11 S.B.



## Modelul matematic al metodei celor două faze:

Fie (PPL)<sub>s</sub> de forma:

$$(PPL)_s \begin{cases} (1s) \text{ (min)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ (2s) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \geq 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \geq 0 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \geq 0 \end{cases} \\ (3s) x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

verificând condițiile (4)  $\begin{cases} m < n \\ r_A = m \\ b_i \geq 0, i = \overline{1, m} \end{cases}$

Obs:

Dacă am aplica metoda lui Gauss, atunci lui (2s)  $\rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n & p_0 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{(111)} \bar{A}_{aug} \Rightarrow \bar{X}_0 = ??$   
 2 meste  
calcul

### Faza I<sup>a</sup>:

1) Atăgăm (PPL)<sub>s</sub>: (1s) - (3s) problema artificială:

$$(PPL)_a \begin{cases} (1a) \text{ (min)} f_a(x_1, x_2, \dots, x_n; x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) \stackrel{\text{def}}{=} x_1^a + x_2^a + \dots + x_m^a \quad (= 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n + x_1^a + x_2^a + \dots + x_m^a) \\ (2a) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n + x_1^a = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n + x_2^a = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n + x_m^a = b_m \end{cases} \\ (3a) x_j \geq 0, j = \overline{1, n}; x_i^a \geq 0, i = \overline{1, m} \end{cases}$$

$$\bar{A}_a = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_n & p_1^a & p_2^a & \dots & p_m^a & p_0 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 & b_m \end{pmatrix}$$

vectori artificiali  $p_i^a, i = \overline{1, m}$

2) Determinăm  $\bar{X}_0$ -săria direct din  $\bar{A}_a$ :

$\bar{X}_0 = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{b_1}_{\bar{x}_1^a}, \underbrace{b_2}_{\bar{x}_2^a}, \dots, \underbrace{b_m}_{\bar{x}_m^a}) \in \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \text{SBA'ia}$

$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  componente secundare  
 $\bar{x}_1^a, \bar{x}_2^a, \dots, \bar{x}_m^a$  componente / variabile principale

3) Rezolvăm (PPL)<sub>a</sub> cu alg. Simplex. La finalul algoritmului putem avea una din următoarele 3 situații:

a)  $(\min) f_a(\bar{X}_{opt}^a) = 0$ , și în baza finală B nu mai există vectori artificiali ( $p_i^a$ ), atunci se trece la faza a 2<sup>a</sup> (utilizând ca  $\bar{X}_0 \equiv \bar{X}_{opt}^a$ )

b)  $(\min) f_a(\bar{X}_{opt}^a) = 0$ , dar în baza finală B mai există vectori artificiali ( $p_i^a$ ), atunci se trece la faza a 2<sup>a</sup> (utilizând ca SBA'ia pe  $\bar{X}_0 \equiv \bar{X}_{opt}^a$ )

c)  $(\min) f_a(\bar{X}_{opt}^a) > 0$ , în acest caz nu există faza a 2<sup>a</sup>, (PPL)<sub>s</sub> nu are soluție (restricțiile sistemului sunt contradictorii sau  $S_{PPL} = \emptyset$  (nici o sol. de fapt sunt inadmisibile)).

Obs:

i) Notăm:  $f_a(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) = f_a(x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a)$  deoarece variabilele  $x_j, j = \overline{1, n}$  nu apar efectiv în expresia funcției artificiale (au coeficienți egali cu 0)

ii) deoarece:  $f_a(x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) = \underbrace{x_1^a}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^a}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{x_m^a}_{\geq 0} \geq 0$ , deci  $f_a$  are doar coef.  $\begin{cases} = 0 \text{ (pt. variab. inf + componente)} \\ = 1 \text{ (pt. variab. artificiale)} \end{cases}$



## Faza a II<sup>a</sup>:

Correspondențele celor 3 situații din Faza I<sup>a</sup>, vom avea 3 cazuri în Faza a II<sup>a</sup> și anume:

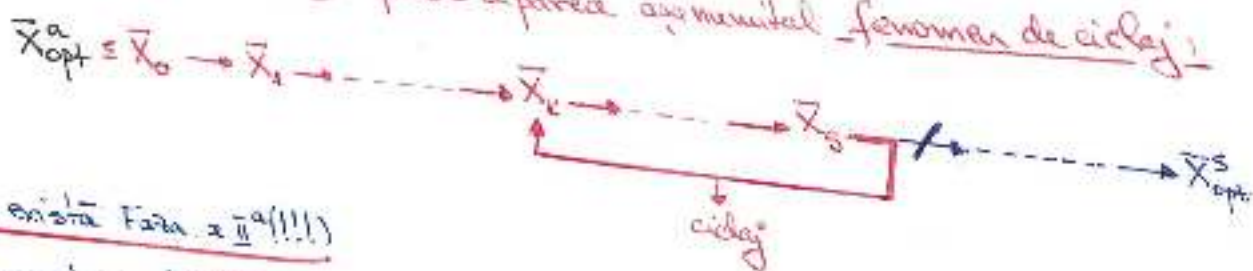
a) ultimul tabel Simplex al Fazei I<sup>a</sup> (corespunzător soluției optime  $\bar{X}_{opt}^a$  a  $(P1)_a$ ) se copie și devine primul tabel Simplex al Fazei a II<sup>a</sup> se următoarele modificări:

- se elimină cele  $m$  coloane corespunzătoare vectorilor artificiali  $P_i^a, i=1, \dots, m$ ;
- se înlocuiesc coeficienții neamplaselor funcției artificiale „ $f_a$ ” (din obiectiv  $C_0$  și de deasupra vectorilor  $P_j$ ) cu coeficienții funcției inițiale din  $(f_0)$ ;
- se elimină <sup>valori</sup> diferențele  $z_j - \bar{c}_j$  din ultima linie a tabelului și se calculează noile diferențe  $z_j - \bar{c}_j$  corespunzătoare noilor coeficienți ai funcției „ $f$ ”.

Se aplică alg. Simplex și se obține  $\bar{X}_{opt}^s \rightarrow \bar{X}_{opt}^s$  inițial = general.

b) se procedează analog cu cazul a) dar în acest caz se păstrează în primul tabel Simplex al Fazei a II<sup>a</sup> coloanele a celor vectori artificiali  $P_i^a$  care nu au fost eliminați din baza finală a Fazei I<sup>a</sup> (cea care corespunde sol. optime a Fazei I:  $\bar{X}_{opt}^a$ )

Olos: În această situație (care în economie reală nu este întâlnită decât extrem de rar), în Faza a II<sup>a</sup> poate apărea fenomenul fenomen de ciclaș:



c) nu există Faza a II<sup>a</sup>!!!

↑ în acest caz  $(PPL)_3$  nu are:

- soluții ( $S = \emptyset$ ) ( $\Leftrightarrow$  mîd.  $(2_s)$  este incompatibil ( $\Leftrightarrow$  restricțiile econ. inițiale sunt contradictorii);
- soluții de bază admisibile ( $S_{AB} = \emptyset$ ) ( $\Leftrightarrow$  toate sol. de bază sunt inadmisibile (au comp. negative))

Ex: determinați soluțiile optime ale următoarei (P.P.L.):

$$(PPL)_2 \begin{cases} (1_s) \max f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ (2_s) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 8 \end{cases} \\ (3_s) x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (PPL)_3 \begin{cases} (1_s) \min f(x_1, x_2, x_3, x_4^a, x_5^a) = -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 0x_4^a + 0x_5^a \\ (2_s) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4^a = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_5^a = 8 \end{cases} \\ (3_s) x_1, x_2, x_3, x_4^a, x_5^a \geq 0 \end{cases} \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 8 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \bar{A}_{eq} \Rightarrow \bar{X}_0 = ?$$

$$\Rightarrow (PPL)_a \begin{cases} (1_a) \min f_a(x_1, x_2, x_3, x_4^a, x_5^a, x_6^a, x_7^a) = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4^a + 0x_5^a + x_6^a + x_7^a = x_6^a + x_7^a \\ (2_a) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4^a + x_6^a = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_5^a + x_7^a = 8 \end{cases} \\ (3_a) x_1, x_2, x_3, x_4^a, x_5^a, x_6^a, x_7^a \geq 0 \end{cases} \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{X}_0^a = (0, 0, 0, 0, 0, 6, 8) \in \mathbb{R}^8_{+} \text{ admisibil}$$

var. nebazice = 0      Variabile  
(boundare)      în exces (surplus)



Constructing tableau Simplex stage (PPL)<sub>2</sub> corresponding S.E.A.i:  $\bar{x}_0^a$  (Phase I):  
 cost function:  $f_a$  min (1a)

B	C <sub>B</sub>	P <sub>0</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>7</sub>	θ
P <sub>2</sub>	1	6	2	1	-1	0	1	0		1/2
P <sub>1</sub>	1	8	1	-2	0	-1	0	1		8
		14	3	-1	3	-1	0	0		
P <sub>1</sub>	0	3	1	1	1/2	-1/2	0	1/2	0	3
P <sub>4</sub>	1	5	0	-4	3/2	1/2	-1	-1/2	1	5/3
		5	0	-4	3/2	1/2	-1	-3/2	0	
P <sub>1</sub>	0	4/3	1	7/3	0	-2/3	1/3	2/3	-1/3	
P <sub>3</sub>	0	10/3	0	-8/3	1	1/3	-2/3	-1/3	2/3	
		0	0	0	0	0	-1	-1		

calc P<sub>0</sub>  $\bar{x}_0^a = (0, 0, 0, 0, 0, 6, 8)^T \in \mathbb{R}^7$   
 $f_a(\bar{x}_0^a) = 14$

calc P<sub>0</sub>  $\bar{x}_1^a = (3, 0, 0, 0, 0, 0, 5)^T \in \mathbb{R}^7$   
 $f_a(\bar{x}_1^a) = 5$

calc P<sub>0</sub>  $\bar{x}_2^a = (4/3, 0, 10/3, 0, 0, 0, 0)^T$  (not optimal!!)  
 $f_a(\bar{x}_2^a) = 0$

$\bar{x}_{opt} = (4/3, 0, 10/3, 0, 0, 0, 0)^T \rightarrow$  waste units!!  
 (min)  $f_a = 0$

→ solution optimal = (PPL)<sub>2</sub>

Constructing second tableau Simplex stage (PPL)<sub>3</sub> corresponding S.E.A.i:  $\bar{x}_0 = \bar{x}_{opt}^a$  (Phase II):  
 cost function:  $f_a$  min (1a)

B	C <sub>B</sub>	P <sub>0</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	θ
P <sub>1</sub>	-3	4/3	1	7/3	0	-2/3	1/3		
P <sub>3</sub>	-2	10/3	0	-8/3	1	1/3	-2/3		1/3, 1/2
		-24	0	-8/3	0	4/3	4/3		
P <sub>1</sub>	-3	8	1	-3	2	0	-1		
P <sub>4</sub>	0	10	0	-8	3	1	-2		
		-24	0	8	-4	0	2		

calc P<sub>0</sub>  $\bar{x}_0 = (4/3, 0, 10/3, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^5$   
 $-f(\bar{x}_0) = -\frac{32}{3} \approx -10$

$\bar{x}_1 = (8, 0, 0, 10, 0)^T \in \mathbb{R}^5$   
 $-f(\bar{x}_1) = -24$

min  $(-f) = -\infty \Leftrightarrow$  (max)  $f = +\infty$  (PPL)<sub>3</sub> are optimum infinite (PPL)<sub>3</sub> are optimum infinite  
 g.e.d



### III) Probleme de transport (P.T)

- i) (P.T.) sunt utilizate nu doar în analiza planurilor de investiții respectiv analiza costurilor ci și în probleme privind transportul bunurilor (pe: pământ, apă, aer, etc.). De fapt una din primele aplicații ale (P.T.) a fost eficientizarea transporturilor navale între S.U.A și Europa, Rusia, Africa de Nord, etc. în timpul celui de-al doilea război mondial (WWII)
- ii) (P.T.) apar în contextul planificării și/sau determinării rutelor optime (!?) de transport, deseori utilizându-se și elem. de teoria grafurilor, respectiv a determinării locațiilor optime ale unor centre de depozitare pentru a face transportul produselor către consumatori cât mai "ieftin" posibil.
- iii) Deoarece (P.T.) sunt cazuri particulare de (PPL) <sup>matrice</sup> pot fi rezolvate cu alg. simplex; dar în practică nr. de depozite respectiv centre de desfacere (magazine) care apar în aplicațiile reale este ff. mare ceea ce determină ca aplicarea acestuia să fie ineficientă.
- iv) Deoarece (P.T.) sunt cazuri particulare de (PPL), toate rezultatele valabile pentru cazul general al (PPL) rămân valabile și pentru (P.T.) (!!!)

#### III.1) Modelul economic și al matematic pentru o (P.T.)

"O firmă de transport trebuie să ducă o cantitate de marfă aflată în depozitele  $D_i, i=1, \overline{m}$  în care se află cantitățile de marfă  $a_i > 0, i=1, \overline{m}$  către centre de desfacere (magazinele)  $C_j, j=1, \overline{n}$  care solicită cantitățile de marfă  $b_j > 0, j=1, \overline{n}$ . Știind costurile unitare de transport  $c_{ij} > 0, i=1, \overline{m}, j=1, \overline{n}$  de la depozitul  $D_i$  la centrul  $C_j$ , determinați un plan optim de transport (c) și cantități de marfă se iau din fiecare depozit și la ce centre de desfacere se livrează a.ș. costul total al transportului să fie minim.

→ Tabloul atașat unei (P.T.)

Not: " $x_{ij}; i=1, \overline{m}, j=1, \overline{n}$ " → cantitate de marfă care urmează a fi livrată din depozitul " $D_i$ " și transportată la centrul " $C_j$ " (cu costul unitar " $c_{ij}$ ").

	$C_1$	$C_2$	...	$C_j$	...	$C_n$	
$D_1$	$x_{11}$	$x_{12}$	...	$x_{1j}$	...	$x_{1n}$	$a_1$
$D_2$	$x_{21}$	$x_{22}$	...	$x_{2j}$	...	$x_{2n}$	$a_2$
...	...	...	...	...	...	...	...
$D_i$	$x_{i1}$	$x_{i2}$	...	$x_{ij}$	...	$x_{in}$	$a_i$
...	...	...	...	...	...	...	...
$D_m$	$x_{m1}$	$x_{m2}$	...	$x_{mj}$	...	$x_{mn}$	$a_m$
	$b_1$	$b_2$	...	$b_j$	...	$b_n$	



## Modelul matematic al P.T.

12

$$\begin{cases} (1) (\min) f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn}) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{ij}x_{ij} + \dots + c_{mn}x_{mn} \equiv \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \\ (2) \begin{cases} \left( \sum_{j=1}^n x_{ij} \right) x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{in} \leq a_i & ; i = \overline{1, m} \\ \left( \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{mj} \leq b_j & ; j = \overline{1, n} \end{cases} \\ (3) x_{11}, x_{12}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn} \geq 0 \end{cases}$$

sau (scriis condensat):

$$\begin{cases} (1) (\min) f(x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij} \rightarrow \text{funcția obiectiv (liniară)} = \text{costul total al transportului} \\ (2) \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i & ; i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} \leq b_j & ; j = \overline{1, n} \end{cases} \rightarrow \text{restul liniar cu „} m+n \text{” inecuații și „} m \times n \text{” necunoscute (restricții economice de transport)} \\ (3) x_{ij} \geq 0 & ; i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \rightarrow \text{condiții de nenegativitate} \end{cases}$$

Obs:

i) este evident că o P.T. este un caz particular de P.P.L; o P.T este întotdeauna o problemă de minim;

ii) dacă:

$$\begin{cases} a) \sum_{i=1}^m a_i (\equiv a_1 + a_2 + \dots + a_m) \neq \sum_{j=1}^n b_j (\equiv b_1 + b_2 + \dots + b_n) \text{ (oferta } \neq \text{ cererea) } \rightarrow \text{nu mi problema} \\ \text{Probleme de Transport Neechilibrate (PTN)} \\ b) \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \text{ (oferta = cererea) } \rightarrow \text{mi problema} \\ \text{Probleme de Transport Echilibrate (PTE)} \end{cases}$$

iii) (PTN) nu pot fi rezolvate (direct), dar (PTE) pot fi rezolvate cu ajutorul unui algoritim similar alg. Simplex (derivat din acesta)

iv) usual, problemele reale de transport sunt neechilibrate (!!).

v) vom arăta cum orice (PTN) poate fi transformată într-o (PTE) cu o metodă foarte simplă.

## III.2) Probleme de transport echilibrate (PTE)

### III.2.1) Considerații generale

Vom presupune că avem satisfăcută relația:

$$(*) \sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (\text{oferta} = \text{cererea})$$

Datorită condiției (\*) sistemul de inecuații liniare (2) a unei (P.T) generale devine un sistem de ecuații liniare în cazul (PTE), deci modelul matematic al acesteia va fi:

$$\left\{ \begin{array}{l} (1) (\min) f(x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ (2) \begin{cases} \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i & ; i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j & ; j = \overline{1, n} \end{cases} \rightarrow \text{sistem linear (omogen) cu } m+n \text{ ecuații și } m \times n \text{ necunoscute} \\ (3) x_{ij} \geq 0 \quad ; i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{array} \right.$$

Obs: i) condiția de echilibru (\*) conduce la obținerea formei standard a unei PTE (privită ca și caz particular de PPL) fără a fi nevoie de introducerea unor noi variabile (de compensare) ca în cazul (general) al PPL;

ii) primele „m” ecuații din (2) reprezintă: „cantitatea totală de marfă luată dintr-un depozit trebuie să fie egală cu cantitatea existentă în acel depozit”, iar celelalte „n” ecuații din (2) reprezintă: „cantitatea totală de marfă luată din toate depozitele și transportată la un centru de desfacere trebuie să fie egală cu cantitatea cerută de acel centru”;

iii) condiția (\*) implică că din cele „m+n” ecuații ale sist. (2) doar „m+n-1” sunt independente (principale), una dintre ele (oricare) este dependentă de celelalte (este secundară).

$$\text{Dacă: } \left\{ \begin{array}{l} \text{af. (2)}_1 \text{ avem: } \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i \xrightarrow{\sum_{i=1}^m} \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n x_{ij} \right) = \sum_{i=1}^m a_i \\ \text{cf. (2)}_2 \text{ avem: } \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j \xrightarrow{\sum_{j=1}^n} \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n b_j \end{array} \right. \xrightarrow{(*)} \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=1}^n x_{ij} \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m x_{ij} \right)$$

sau:

$$\begin{array}{l} E_1 + E_2 + \dots + E_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m \\ E'_1 + E'_2 + \dots + E'_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n \end{array} \xrightarrow{(*)} E_1 + E_2 + \dots + E_m = E'_1 + E'_2 + \dots + E'_n \Leftrightarrow$$

g.e.d.  $E_1 = (E'_1 + E'_2 + \dots + E'_n) - (E_2 + E_3 + \dots + E_m)$



**Teorema 1** Orice soluție de bază a unei (P.T.E):  $\bar{X} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$  are  $m+n-1$  componente principale (bazice), restul de  $m \cdot n - (m+n-1)$  fiind componente secundare (nebazice) egale cu 0.

Obs:

- a) conform obs. (ii) deoarece sist. (2) are doar  $m+n-1$  ecuații principale (independente)  
(nr. de necunoscute/componente principale = nr. de ecuații principale)
- b) o soluție de bază (S.B) a sistemului de ecuații (2) este de forma:

$$\bar{X} = (0, 0, \dots, 0, \bar{x}_{i_1 j_1}, 0, \dots, 0, \bar{x}_{i_2 j_2}, 0, \dots, 0, \bar{x}_{i_{m+n-1} j_{m+n-1}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$$

componente bazice (principale) în nr. de „ $m+n-1$ ”;

componente nebazice (secundare) în nr. de „ $m \cdot n - (m+n-1)$ ”;

nr. total de componente este de „ $m \cdot n$ ”

b<sub>1</sub>) dacă cele „ $m+n-1$ ” componente bazice (principale) sunt „ $> 0$ ” soluție de bază este admisibilă și red degenerată ( $\bar{X}$ -S.B.A.N)

b<sub>2</sub>) dacă cele „ $m+n-1$ ” componente bazice (principale) sunt „ $\geq 0$ ” (al puțin una este = 0) soluția de bază este admisibilă și degenerată ( $\bar{X}$ -S.B.A.D)

Obs: în această situație este foarte posibil să apară fenomenul de ciclaș

b<sub>3</sub>) dacă măcar una din cele „ $m+n-1$ ” componente bazice este „ $< 0$ ”, sol. de bază este neadmisibilă (aceste soluții nu verifică condițiile de nenegativitate (3) deci nu se sunt de folos)

c) nr. total de S.B a unei P.T.E cu „ $m$ ” depozite și „ $n$ ” centre de distribuție este:  $C_{mn}^{m+n-1} = \frac{(mn)!}{(m+n-1)! (mn-m-n+1)!}$  (!!!)  $\rightarrow$  f.f. mare.

Ex:  $m=10$   
 $n=40$   $\Rightarrow$  nr. S.B este  $C_{400}^{49} = 2426.76642.033.193.4504.11963.925.328.6563.724.0653271293$   
 $151.79.73.79.44.56.000 \rightarrow$  are 64 de cifre !!!

una (sau mai multe) dintre aceste S.B.A. va fi soluția optimă căutată !!!



### III. 2.2) Etapele algoritmului de rezolvare a P.T.E

Deoarece o PTE este un caz particular de PPL (în formă standard) etapele de rezolvare a acesteia vor fi aceleași cu cele enunțate pînă la Alg. Simplex, adică:

- ① Se determină  $\bar{X}_0$ -SBAi cu:  $\begin{cases} \text{a) metoda diagonalei (a soluției de N-V)} \\ \text{b) metoda costurilor minime} \end{cases}$
- ② Se aplică criteriul de optim (verificăm dacă soluția  $\bar{X}_0$  este sau nu optimă);
- ③ (Evident în cazul în care soluția nu este optimă) Se aplică criteriul de intrare în bază (se determină ce variabilă nebasică devine basică);
- ④ Se aplică criteriul de ieșire din bază (se determină care dintre variabilele basice devine nebasică);
- ⑤ Se face schimbarea de bază, determinându-se o nouă SBA:  $\bar{X}_1$  mai "bună" decât vechea soluție  $\bar{X}_0$  ( $f(\bar{X}_1) \leq f(\bar{X}_0)$ ) construindu-se un nou tabel al PTE;
- ⑥ Se repetă etapele 2)-5) pînă la obținerea (unei) soluției optime  $\bar{X}_{opt}$

Obs: Atenție!!!

- a) o P.T. are intotdeauna optim finit ( $\min f(\bar{X}_{opt}) = m$  cu  $m \in (0, +\infty)$ )
- b) o P.T. are soluție optimă unică sau nu (în multe cazuri P.T. are o infinitate de S.O. finite cu aceeași valoare pt. funcția obiectiv  $\rightarrow$  evident deoarece mulțimea soluțiilor optime ( $S_0$ ) este mulțime convexă!!  $\rightarrow$  vezi P.P.L)
- c) în cazul în care soluția inițială ( $\bar{X}_0$ ) este degenerată, sau pe parcurs se obține o SBA ( $\bar{X}_k$ ) degenerată putem intra (extrem de rar) în fenomenul de ciclaaj:

