Să se determine soluţia/le optimă/e a problemei de transport determinând soluţia iniţială $\overline{X}_0$ cu:

- **metoda costurilor minime;**
- **metoda diagonalei (colțul de N-V).**

Nu putem rezolva PTN, fără să le aducem la PTE (similar cu $(PPL)_g \rightarrow (PPL)_s$).Deoarece, "cererea < oferta", echilibrăm problema prin introducerea unui nou centru de desfacere "fictiv", "$\boldsymbol{C_4^f}$", , care va conține cantitatea „fictivă" de marfă "$b_4 = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{3} b_j = 45 - 40 = 5$" și care va avea costurile de transport aferente egale cu zero. Așadar, **tabelul PTE** este următorul:

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	x_{11} [3]	x_{12} [3]	x_{13} [2]	x_{14} [0]	20
D_2	x_{21} [1]	x_{22} [2]	x_{23} [4]	x_{24} [0]	15
D_3	x_{31} [4]	x_{32} [1]	x_{33} [4]	x_{34} [0]	10
	10	20	10	**5**	

Modelul matematic asociat **PTE** este:

$$\begin{cases} (1)(min)f(x_{11},x_{12},x_{13},x_{14},x_{21},x_{22},x_{23},x_{24},x_{31},x_{32},x_{33},x_{34}) = 3x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 0 \cdot x_{14} + x_{21} + 2x_{22} + \\ \qquad +4x_{23} + 0 \cdot x_{24} + 4x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 0 \cdot x_{34} \\ (2) \begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 15 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\ x_{21} + x_{22} + x_{32} = 20 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 10 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 0 \end{cases} \\ (3) x_{ij} \geq 0;\ \ i \in \overline{1,3}\,, j \in \overline{1,4} \end{cases}$$

Numărul total al soluțiilor de bază pentru o PTE este de cel mult: $C_{m \cdot n}^{m+n-1} = C_{3 \cdot 4}^{3+4-1} = C_{12}^{6} = \frac{12!}{6!6!} = 924$

Etapele algoritmului de rezolvare a PTE

1. Se determină $\bar{X}_0 - S.B.A.I.$ cu:

   - metoda diagonalei (a colțului de N-V);
   - metoda costurilor minime.

2. Se aplică criteriul de optim (verificăm dacă soluția $\bar{X}_0$ este sau nu optimă);

3. (Evident, în cazul în care soluția nu este optimă) Se aplică criteriul de intrare în bază (se determină ce variabilă nebazică devine bazică);

4. Se aplică criteriul de ieșire din bază (se determină care dintre variabilele bazice devine nebazică);

5. Se face schimbarea de bază, determinându-se o nouă S.B.A. $\bar{X}_1$ mai "bună" decât vechea soluție $\bar{X}_0$ $(f(\bar{X}_1) \leq f(\bar{X}_0))$ construindu-se un nou tabel al PTE;

6. Se repetă etapele 2.– 5. până la obținerea (unei) soluției optime $\bar{X}_{optimă}$.

Tabelul PTE	metoda diagonalei (a colțului de N-V);	metoda costurilor minime.

Tabelul PTE

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3	3	2	0	20
D_2	1	2	4	0	15
D_3	4	1	4	0	10
	10	20	10	**5**	

Metoda diagonalei (a colțului de N-V)

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3 / 10	3 / 10	2 / ⋆	0 / ⋆	20
D_2	1 / ⋆	2 / 10	4 / 5	0 / ⋆	15
D_3	4 / ⋆	1 / ⋆	4 / 5	0 / 5	10
	10	20	10	**5**	

Metoda costurilor minime

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3 / ⋆	3 / 5	2 / 10	0 / 5	20
D_2	1 / 10	2 / 5	4 / ⋆	0 / ⋆	15
D_3	4 / ⋆	1 / 10	4 / ⋆	0 / ⋆	10
	10	20	10	**5**	

Pasul1: $\overline{X}_0$ – SBAI

Metoda diagonalei:

$$\begin{cases} \overline{X}_0 = (10,10,0,0,0,10,5,0,0,0,5,5) \\ f(\overline{X}_0) = \mathbf{120}\ \text{u.m. (mii dolari)} \end{cases}$$

Metoda costurilor minime:

$$\begin{cases} \overline{X}_0 = (0,5,10,5,10,5,0,0,0,10,0,0) \\ f(\overline{X}_0) = \mathbf{65}\ \text{u.m. (mii dolari)} \end{cases}$$

Atenție, la finalul procedurii, trebuie:

- să avem **m+n-1** componente **bazice**, la noi, 3 (depozite)+4(centre)-1=6;
- restul de **mn-(m+n-1)** sunt componente **nebazice**, la noi, 12-6=6;
- toate cantitățile de marfă rămase în depozite trebuie să fie egale cu 0;
- toate cantitățile solicitate de centre toate îndeplinite (valorile cerute rămase=0);
- să vedem dacă sunt verificate toate ecuațiile din modelul matematic (sumele pe linii și pe coloane).

Toate cele 7 ecuații sunt verificate de cele 12 numere, deci este o soluție:

- de bază, căci variabilele secundare sunt 0,
- admisibilă, căci toate componentele sunt ≥ 0,
- nedegenerată, căci toate cele 6 componente principale sunt ≠ 0.

Tabelul PTE	Metoda diagonalei (a colțului de N-V)	Metoda costurilor minime

Tabelul PTE

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3	3	2	0	20
D_2	1	2	4	0	15
D_3	4	1	4	0	10
	10	20	10	5	

Metoda diagonalei (a colțului de N-V)

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3 10	3 10	2 ★	0 ★	20
D_2	1 ★	2 10	4 5	0 ★	15
D_3	4 ★	1 ★	4 5	0 5	10
	10	20	10	5	

Metoda costurilor minime

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3 ★	3 5	2 10	0 5	20
D_2	1 10	2 5	4 ★	0 ★	15
D_3	4 ★	1 10	4 ★	0 ★	10
	10	20	10	5	

Pasul1: $\bar{X}_0$ — SBAI

Metoda diagonalei:

$$\begin{cases}\bar{X}_0 = (10,10,0,0,0,10,5,0,0,0,5,5) \in \mathbb{R}^{12}\\ f(\bar{X}_0) = 120 \text{ u.m. (mii dolari)}\end{cases}$$

Metoda costurilor minime:

$$\begin{cases}\bar{X}_0 = (0,5,10,5,10,5,0,0,0,10,0,0) \in \mathbb{R}^{12}\\ f(\bar{X}_0) = 65 \text{ u.m. (mii dolari)}\end{cases}$$

Pasul2: Criteriul de optim

– aplicare –

$\forall\, \delta_{ij} \le 0$, pentru "★"

Metoda diagonalei:

$\delta_{13} = -2+4-2+3 = 3 > 0$

$\delta_{14} = -0+0-4+4-2+3 = 1 > 0$

$\delta_{21} = -1+3-3+2 = 1 > 0$

$\delta_{24} = -0+4-4+0 = 0 \le 0$

$\delta_{31} = -4+3-3+2-4+4 = -2 < 0$

$\delta_{32} = -1+2-4+4 = 1 > 0$

Metoda costurilor minime:

$\delta_{11} = -3+3-2+1 = -1 < 0$

$\delta_{23} = -4+2-3+2 = -3 < 0$

$\delta_{24} = -0+0-3+2 = -1 < 0$

$\delta_{31} = -4+1-2+1 = -4 < 0$

$\delta_{33} = -4+1-3+2 = -3 < 0$

$\delta_{34} = -0+1-3+0 = -2 < 0$

– concluzie –

Metoda diagonalei:

$\exists\, \delta_{ij} > 0 \Rightarrow \bar{X}_0 \not\equiv \bar{X}_{optimă}$

Metoda costurilor minime:

Toți $\delta_{ij} < 0 \Rightarrow \bar{X}_0 \equiv \bar{X}^{PTE}_{optimă}$ (unică) $\xRightarrow{\text{eliminăm } c_4^f}$

$$\begin{cases}\bar{X}^{PTN}_{optimă} = (0,5,10,10,5,0,0,10,0) \in \mathbb{R}^9\\ f\left(\bar{X}^{PTN}_{optimă}\right) = \mathbf{65} \text{ u.m. } (\textbf{mii dolari})\end{cases}$$

Pasul3: Criteriul de intrare

$\delta_{kl} = max\{\delta_{ij} > 0/(i,j) \text{ celulă nebazică}\} \Rightarrow x_{kl}\,(\downarrow)$

$\delta_{kl} = max\{\boldsymbol{\delta_{13}}, \boldsymbol{\delta_{14}}, \boldsymbol{\delta_{21}}, \boldsymbol{\delta_{32}}\} = \boldsymbol{\delta_{13}} \Rightarrow \boldsymbol{x_{13}}(\downarrow)$

Pasul4: Criteriul de ieșire

$\theta \stackrel{\text{def}}{=} min\{\bar{x}_{ij} \geq 0/ \; cu \; x_{ij} \text{ aflate aflate în celulele cu număr par din ciclul celulei } (k,l)\}$

Desenăm ciclul celulei $\boldsymbol{x_{13}}(\downarrow)$

$$\begin{array}{cccccc}
(4) & \overbrace{(1,2)}^{10-\theta=5} & \longrightarrow & \overbrace{(1,3)}^{+\theta=5} & (1) \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
(3) & \underbrace{(2,2)}_{10+\theta=15} & \longrightarrow & \underbrace{(2,3)}_{5-\theta=\star} & (2)
\end{array}$$

$$\theta = \min\left\{\underbrace{x_{23}}_{=5}, \underbrace{x_{14}}_{=10}\right\} \Rightarrow \theta = 5 \Rightarrow (\boldsymbol{x_{23}} \rightarrow)$$

Pasul5: Schimbarea de bază

Vechea bază:

	C_1	C_2	C_3	$\boldsymbol{C_4^f}$	
D_1	3 / 10	3 / 10	2 / ⋆	0 / ⋆	20
D_2	1 / ⋆	2 / 10	4 / 5	0 / ⋆	15
D_3	4 / ⋆	1 / ⋆	4 / 5	0 / 5	10
	10	20	10	**5**	

Noua bază:

	C_1	C_2	C_3	$\boldsymbol{C_4^f}$	
D_1	3 / 10	3 / 5	2 / 5	0 / ⋆	20
D_2	1 / ⋆	2 / 15	4 / ⋆	0 / ⋆	15
D_3	4 / ⋆	1 / ⋆	4 / 5	0 / 5	10
	10	20	10	**5**	

În soluția veche:

$$\begin{cases} \text{variabila nebazică "} \boldsymbol{x_{13}} = 0 = \star \text{ "} \\ \text{variabila bazică "} \boldsymbol{x_{23}} = 5 \text{"} \end{cases}$$

În soluția nouă:

$$\begin{cases} \text{variabila bazică "} \boldsymbol{x_{13}} = 5(=\theta) \text{"} \\ \text{variabila bazică "} \boldsymbol{x_{23}} = 5 \text{"} \end{cases}$$

S-a făcut un nou tabel al PT→atenție la **verificări**!

Pasul1’: $\bar{X}_1$— **SBA**		$\begin{cases} \bar{X}_1 = (10,5,5,0,0,15,0,0,0,0,5,5) \in \mathbb{R}^{12} \\ f(\bar{X}_1) = 105 < f(\bar{X}_0) = 120 \text{ u. m. (mii dolari)} \end{cases}$
Pasul2’: Criteriul de optim	– aplicare – $\forall\ \delta_{ij} \leq 0$, pentru “⋆ “	$\delta_{14} = -0+0-4+2=-2<0$ $\delta_{21} = -1+3-3+2=1>0$ $\delta_{23} = -4+2-3+2=-3<0$ $\delta_{24} = -0+2-3+0=-1<0$ $\delta_{31} = -4+3-2+4=1>0$ $\delta_{32} = -1+3-2+4=4>0$
	– concluzie –	$\exists\ \delta_{ij} > 0 \Rightarrow \bar{X}_0 \not\equiv \bar{X}_{optim\breve{a}}$

Reluând pașii de la 2 la 5 de cinci ori am ajuns la SO a PT

Pasul5’’’’: Schimbarea de bază

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3 5	3 ⋆	2 10	0 5	20
D_2	1 5	2 10	4 ⋆	0 ⋆	15
D_3	4 ⋆	1 10	4 ⋆	0 ⋆	10
	10	20	10	5	

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3 ⋆	3 5	2 10	0 5	20
D_2	1 10	2 5	4 ⋆	0 ⋆	15
D_3	4 ⋆	1 10	4 ⋆	0 ⋆	10
	10	20	10	5	

Pasul1’’’’’: $\bar{X}_5$— **SBA**	$\begin{cases} \bar{X}_5 = (0,5,10,5,10,5,0,0,0,10,0,0) \in \mathbb{R}^{12} \\ f(\bar{X}_5) = 65 < f(\bar{X}_4) = 70 \text{ u. m. (mii dolari)} \end{cases}$

Pasul2'''':
Criteriul de optim

– aplicare –

$\forall\ \delta_{ij} \leq 0$, pentru "⋆"

$$\delta_{11} = -3 + 3 - 2 + 1 = -1 < 0$$
$$\delta_{23} = -4 + 2 - 3 + 2 = -3 < 0$$
$$\delta_{24} = -0 + 0 - 3 + 2 = -1 < 0$$
$$\delta_{31} = -4 + 1 - 2 + 1 = -4 < 0$$
$$\delta_{33} = -4 + 1 - 3 + 2 = -3 < 0$$
$$\delta_{34} = -0 + 1 - 3 + 0 = -2 < 0$$

– concluzie –

Toți $\delta_{ij} < 0 \Rightarrow \bar{X}_0 \equiv \bar{X}^{PTE}_{optim\breve{a}}$ (unică) $\xRightarrow{\text{eliminăm } c_4^f}$

$$\begin{cases} \bar{X}^{PTN}_{optim\breve{a}} = (0,5,10,10,5,0,0,10,0) \in \mathbb{R}^9 \\ f\left(\bar{X}^{PTN}_{optim\breve{a}}\right) = \mathbf{65}\ \text{u. m.}\ (\textbf{mii dolari}) \end{cases}$$

(soluție optimă unică pentru PTN)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	3 / ⋆	3 / 5	2 / 10	20
D_2	1 / 10	2 / 5	4 / ⋆	15
D_3	4 / ⋆	1 / 10	4 / ⋆	10
	10	20	10	

Reținem: "**Schema de rezolvare**" a PTN:

$$\boldsymbol{PTN} \xrightarrow[\text{problema}]{\text{echilibrăm}} \boldsymbol{PTE} \xrightarrow[\text{rezolvare a PTE}]{\text{aplicăm alg.de}} \bar{\boldsymbol{X}}^{PTE}_{optim\breve{a}} \xrightarrow{\text{eliminăm componentele depozitului fictiv / centrului fictiv}} \bar{\boldsymbol{X}}^{PTN}_{optim\breve{a}}$$