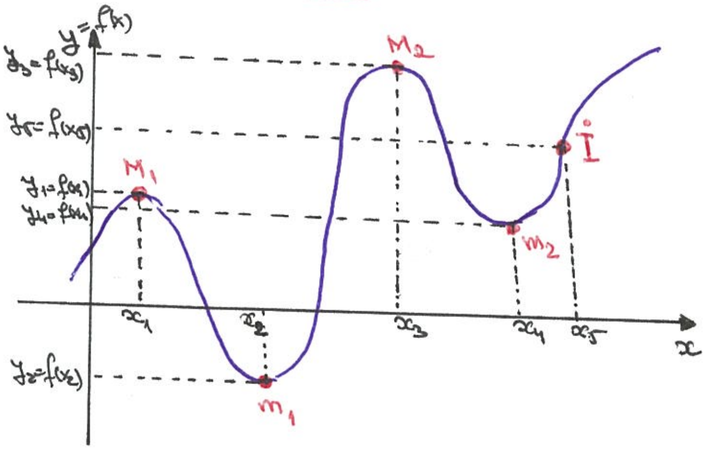
IV.5) Determinarea punctelor de extrem local (necondiționate, libere, fără legături) în cazul funcțiilor de n-variabile

Cazul: $n=1 \Leftrightarrow \mathbb{R}^n = \mathbb{R}$: Fie $\begin{cases} f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f = f(x) \end{cases}$ o funcție de două ori derivabilă pe domeniul de def. D

Vrem să determinăm punctele de extrem local ale funcției „f" $\Leftrightarrow$ punctele de minim / maxim

Algoritmul de lucru (liceu, cl. a XI-a)



a) cu tabelul de variație a funcției

$x \in D$		x_1		x_2		x_3		x_4		x_5	
$f'(x)$	+ +	0	− −	0	+ +	0	− −	0	+ +	0	+ + +
$f(x)$	↗	$f(x_1)$	↘	$f(x_2)$	↗	$f(x_3)$	↘	$f(x_4)$	↗	$f(x_5)$	↗
$f''(x)$		$f''(x_1)$		$f''(x_2)$		$f''(x_3)$		$f''(x_4)$		$f''(x_5)$	

b) cu ajutorul derivatelor de ordinul I și II ale funcției „f(x)":

1) calculăm derivata de ord. I: $f'(x) = ?$

2) rezolvăm ecuația: $f'(x) = 0$ cu soluțiile $\begin{cases} x_1 = ? \\ x_2 = ? \\ \ldots \\ x_k = ? \end{cases}$ → puncte critice (staționare) ale funcției f(x)

3) calculăm derivata de ord. II: $f''(x) = ?$

4) stabilim semnul derivatei de ord. II în fiecare dintre punctele staționare. Dacă:

$\begin{cases} a)\ f''(x_i) > 0 \Rightarrow x_i \text{ punct de minim (local)} \\ b)\ f''(x_i) < 0 \Rightarrow x_i \text{ punct de maxim (local)} \\ c)\ f''(x_i) = 0 \Rightarrow \text{nu se poate stabili natura punctului „}x_i\text{"} \end{cases}$; $i = \overline{1,k}$

b') cu ajutorul diferențialelor de ord. I și II ale funcției „f(x)":

1) calculăm diferențiala de ord. I: $df(x) = f'(x)dx = ?$

2) rezolvăm egalitatea: $df(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x)dx = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 0$ cu soluțiile $\begin{cases} x_1 = ? \\ x_2 = ? \\ \ldots \\ x_k = ? \end{cases}$ → puncte critice (staționare)

3) calculăm diferențiala de ord II: $d^2f(x) = f''(x)dx^2 = ?$

4) stabilim semnul diferențialei de ord II în fiecare dintre punctele staționare. Dacă:

$\begin{cases} a)\ d^2f(x_i) > 0 \Leftrightarrow f''(x_i)\underbrace{dx_i^2}_{>0} > 0 \Leftrightarrow f''(x_i) > 0 \Rightarrow x_i \text{ - punct de minim (local)} \\ b)\ d^2f(x_i) < 0 \Leftrightarrow f''(x_i)\underbrace{dx_i^2}_{>0} < 0 \Leftrightarrow f''(x_i) < 0 \Rightarrow x_i \text{ - punct de maxim (local)} \\ c)\ d^2f(x_i) = 0 \Leftrightarrow f''(x_i)dx_i^2 = 0 \Leftrightarrow f''(x_i) = 0 \Rightarrow \text{nu putem determina natura lui „}x_i\text{"} \end{cases}$; $i = \overline{1,k}$

Obs: funcția $f(x)$ are o singură derivată de ord. I și o singură derivată de ord. II; pe când funcția $f(x_1,\dots,x_n)$ are
- „n" derivate parțiale de ord I $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i};\ i=\overline{1,n}\right)$
- „n^2" derivate parțiale de ord II $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j};\ i,j=\overline{1,n}\right)$

deci a realiza etapele i) – iv) din metoda b) trebuie să folosim diferențialele de ord I și II adaptate acesteia {care sunt unice: $df(x_1,\dots,x_n)$ și $d^2f(x_1,\dots,x_n)$}

Def 1: Fie $\begin{cases} f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \\ f=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\overset{not}{\equiv}f(X)\end{cases}$ o funcție de (cel puțin) două ori derivabilă în raport cu toate necunoscutele $\{f\in C^2(D)\}$ și $X_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in D$. Spunem că:

a) X_0 este punct de minim (local) pentru funcția „f", dacă:

$$(13.1)\ (\exists)\ V(X_0)\equiv S(X_0,r)\subset D \text{ a.î.: } f(X_0)\le f(X)\ ;\ (\forall)\ X\in V(X_0)$$

b) X_0 este punct de maxim (local) pentru funcția „f", dacă:

$$(13.2)\ (\exists)\ V(X_0)\equiv S(X_0,r)\subset D \text{ a.î.: } f(X_0)\ge f(X)\ ;\ (\forall)\ X\in V(X_0)$$

Obs:
(i) X_0 – punct de ~~optim~~ extrem (local) $\iff$ X_0 – pct. de minim sau de maxim
(ii) evident un pct. X_0 nu este punct de ~~optim~~ extrem (local) $\iff (\forall)\ V(X_0)\equiv S(X_0,r)\subset D$, $(\exists)\ X_1,X_2\in V(X_0)$ a.î.: $\begin{cases} f(X_0)<f(X_1) \\ f(X_0)>f(X_2)\end{cases}$

Def 2 Fie $\begin{cases} f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \\ f=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\overset{not}{\equiv}f(X)\end{cases}$ o funcție de clasă $C^1(D)$ $(f\in C^1(D))$ și $X_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in D$.

Atunci X_0 este punct staționar (critic) pentru funcția „f", dacă:

$$(13.3)\ df(X_0)=0 \iff (13.3')\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0)=0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0)=0 \\ \text{-------} \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0)=0 \end{cases}$$

Teorema 1 (de caracterizare a punctelor de extrem local) → condiții suficiente nu și necesare

Fie $f\in C^2(D)$ cu $D\subseteq\mathbb{R}^n$ și $X_0\in D$ un punct staționar (critic) pentru „f". Atunci, dacă:

a) $d^2f(X_0)\underset{(\ge)}{>}0$ (este pozitiv sau semipozitiv definită ca formă pătratică) $\Rightarrow X_0$ este pct. de minim (local)

b) $d^2f(X_0)\underset{(\le)}{<}0$ (este negativ sau seminegativ definită ca formă pătratică) $\Rightarrow X_0$ este pct. de maxim (local)

c) $d^2f(X_0)\gtrless 0$ (este nedefinită ca semn / nu păstrează semn constant) $\Rightarrow X_0$ este punct de inflexiune (șa) (nu este punct de extrem local)

Obs: Aplicând metoda lui Iacobi de aducere a unei forme pătratice la forma canonică (pentru a-i putea stabili semnul acesteia) teorema 1 poate fi reformulată astfel:

Teorema 2 (de caracterizare a punctelor de extrem local cu metoda lui Iacobi)

Fie $f \in C^2(D)$ cu $D \subseteq \mathbb{R}^n$ și $X_0 \in D$ un punct staționar (critic) pentru funcția „$f(X)$" și

$$d^2f(X_0) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0)}_{\stackrel{not}{=} a_{ij}\ (=a_{ji})} dx_i dx_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, dx_i dx_j$$

, respectiv hessiana atașată funcției „f" în punctul staționar $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$:

$$H(X_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n^S(\mathbb{R})$$

Notând cu: $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_i, \ldots, \Delta_n$ minorii diagonali principali ai matricei $H(X_0)$, adică:

$$(13.4)\ \begin{cases} \Delta_1 = a_{11} \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ \vdots \\ \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \\ \vdots \\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \equiv \det H(X_0) \end{cases}$$

atunci, avem pentru:

a) $\Delta_1 > 0;\ \Delta_2 > 0;\ \ldots;\ \Delta_n > 0$ $(+,+,\ldots,+)$ $\Rightarrow$ X_0 este punct de minim (local) pentru funcția $f(X)$;

b) $\Delta_1 < 0,\ \Delta_2 > 0;\ \Delta_3 < 0, \ldots$ $(-,+,-,+,\ldots)$ $\Rightarrow$ X_0 este punct de maxim (local) pentru funcția $f(X)$;

c) $(\forall)\ \Delta_i \neq 0$, $i = \overline{1,n}$ și în orice altă combinație de semne decât în cazul a) sau b) $\Rightarrow$ X_0 este punct de inflexiune (punct șa) pentru funcția $f(X)$;

d) $(\exists)\ \Delta_i = 0$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ $\Rightarrow$ nu se poate preciza natura punctului X_0 (metoda lui Iacobi nu "funcționează")

Obs:

i) în T_2, forma pătratică: $d^2f(X_0) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, dx_i dx_j$ a fost adusă la forma canonică folosind formula lui Iacobi: $d^2f(X_0) = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} dy_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} dy_2^2 + \cdots + \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} dy_i^2 + \cdots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} dy_n^2$

(am notat cu: $dy_i = b_{i1}dx_1 + b_{i2}dx_2 + \cdots + b_{in}dx_n$, $i = \overline{1,n}$)

ii) evident în cazul d) putem folosi metoda lui Gauss (vom aduce matricea $H(X_0)$ la forma triunghiular superioară cu T.E.)

Din def 1 și 2 respectiv (T1 și) T2 rezultă următorul algoritm de determinare a punctelor de extrem local pentru funcții de „n" variabile:

Algoritm de determinare a punctelor de extrem local (libere / necondiționate / fără legături)

I) cazul general ($\mathbb{R}^n$)

Pentru a determina punctele de extrem local ale unei funcții $\begin{cases} f: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \\ f=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{cases}$, procedăm astfel:

① Calculăm cele „n" derivate parțiale de ord. I ale funcției: $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$

② Determinăm punctele staționare (critice) ale funcției, rezolvând sistemul:

$$(*)\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x_1}=0\\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=0\\ \dots\dots\\ \frac{\partial f}{\partial x_n}=0\end{cases} \quad \text{ale cărui soluții } \begin{cases}P_1(x_1^1,x_2^1,\dots,x_n^1)\\ P_2(x_1^2,x_2^2,\dots,x_n^2)\\ \dots\dots\dots\\ P_k(x_1^k,x_2^k,\dots,x_n^k)\end{cases} \text{ sunt punctele staționare (critice) căutate}$$

③ Calculăm cele „n^2" derivate parțiale de ord II ale funcției: $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$; $i,j=\overline{1,n}$

④ Scriem hessiana atașată funcției „f":

$$H(x_1,x_2,\dots,x_n)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}$$

⑤ Calculăm hessiana în punctul staționar (critic) $P_1(x_1^1,\dots,x_n^1)$:

$$H(P_1)=\begin{array}{c} \Delta_1 \quad \Delta_2 \dots \Delta_n \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}\end{array}$$

⑥ Calculăm minorii diagonali principali ai lui $H(P_1)$:

$$(**)\begin{cases}\Delta_1=a_{11}\\ \Delta_2=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\\ \dots\dots\\ \Delta_n=\begin{vmatrix}a_{11}&\dots&a_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1}&\dots&a_{nn}\end{vmatrix}\equiv \det H(P_1)\end{cases}$$

⑦ Dacă:

a) $\Delta_1>0, \Delta_2>0, \dots, \Delta_n>0$ $(+,+,\dots,+)$ $\Rightarrow P_1$ - pct. de minim (local)

b) $\Delta_1<0, \Delta_2>0, \Delta_3<0, \dots$ $(-,+,-,+,\dots)$ $\Rightarrow P_1$ - pct. de maxim (local)

c) $(\forall)\, \Delta_i\neq 0, i=\overline{1,n}$ și în altă combinație de semne decât a) sau b) $\Rightarrow P_1$ - punct de inflexiune (punct şa)

d) $(\exists)\, \Delta_i=0$ ptr. $i\in\{1,2,\dots,n\}$ $\Rightarrow$ nu putem preciza natura (pct de minim/maxim/inflexiune) pct. P_1

⑧ Repetăm etapele ⑤ - ⑦ pentru toate celelalte puncte staționare (critice): $P_2, P_3, \dots, P_k$

II) cazul particular ($n=2 \Leftrightarrow \mathbb{R}^2$)

Pentru a determina punctele de extrem local ale unei funcții $\begin{cases} f: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f = f(x,y) \end{cases}$ procedăm astfel:

① Calculăm derivatele parțiale de ord I: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$;

② Determinăm punctele staționare (critice) ale funcției $f(x,y)$ rezolvând sistemul:

$(*)\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$ ale cărui soluții: $\begin{cases} P_1(x_1,y_1) \\ P_2(x_2,y_2) \\ ------ \\ P_k(x_k,y_k) \end{cases}$ sunt punctele staționare (critice) căutate;

③ Calculăm derivatele parțiale de ord II ale fct. $f(x,y)$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

④ Scriem hessiana atașată funcției $f(x,y)$: $H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$

⑤ Calculăm hessiana în primul punct critic $P_1(x_1,y_1)$: $H(P_1) \equiv H(x_1,y_1) = \begin{array}{cc} \Delta_1 & \Delta_2 \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

⑥ Calculăm minorii diagonali principali Δ_1, Δ_2 ai lui $H(P_1)$: $(**)\begin{cases} \Delta_1 = a_{11} \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \equiv \det H(P_1) \end{cases}$

⑦ Dacă:
- a) $\Delta_1 > 0$; $\Delta_2 > 0$ $(+,+) \Rightarrow P_1$ - pct. de minim (local)
- b) $\Delta_1 < 0$; $\Delta > 0$ $(-,+) \Rightarrow P_1$ - pct. de maxim (local)
- c) $\begin{cases} \Delta_1 > 0;\ \Delta_2 < 0\ (+,-) \\ \text{sau} \\ \Delta_1 < 0;\ \Delta_2 < 0\ (-,-) \end{cases} \Rightarrow P_1$ - pct. de inflexiune (punct șa)
- d) $\Delta_1 = 0$ sau $\Delta_2 = 0 \Rightarrow$ nu putem preciza natura punctului critic P_1

⑧ Repetăm etapele ⑤ - ⑦ pentru celelalte puncte critice: $P_2, P_3, \ldots, P_k$

Ex: Să se determine toate punctele de extrem local ale funcției: $\begin{cases} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f(x,y) = (x+1)(y+1)(x+y) \end{cases}$

Dem:

① $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = (y+1)(2x+y+1) \\ \frac{\partial f}{\partial y} = (x+1)(x+2y+1) \end{cases}$

Obs derivăm funcția ca un produs, folosind relațiile $\begin{cases} (\lambda f)' = \lambda f' \\ (fg)' = f'g + fg' \end{cases}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = [(x+1)(y+1)(x+y)]'_x = \underbrace{(y+1)}_{\text{constantă la derivarea în raport cu „x"}}[(x+1)(x+y)]'_x = (y+1)[(x+y)+(x+1)] = (y+1)(2x+y+1)$

② $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y+1)(2x+y+1) = 0 \\ (x+1)(x+2y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+1=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(-1,-1) \\ \begin{cases} y+1=0 \\ x+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow P_2(1,-1) \\ \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow P_3(-1,1) \\ \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+2y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow P_4\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right) \end{array} \right.$

Obs: i) $\begin{cases} a \cdot b = 0 \\ c \cdot d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ c=0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} a=0 \\ d=0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} b=0 \\ c=0 \end{cases}$ sau $\begin{cases} b=0 \\ d=0 \end{cases}$

ii) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ sau $b = 0$

③ $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2(y+1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2(x+1) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2(x+y+1) \end{cases}$

Obs: se derivează din nou ca un produs: $\frac{\partial f}{\partial x}$ și $\frac{\partial f}{\partial y}$, funcție de x respectiv y

④ $H(x,y) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \overset{③}{=} \begin{pmatrix} 2(y+1) & 2(x+y+1) \\ 2(x+y+1) & 2(x+1) \end{pmatrix}$

⑤ i) $H(P_1) = H(-1,-1) \overset{④}{=} \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \overset{⑥}{\Longrightarrow} \begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -4 \end{cases} \xrightarrow[(0,-)]{7d)}$ nu putem preciza natura lui P_1

ii) $H(P_2) = H(1,-1) \overset{④}{=} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{⑥}{\Longrightarrow} \begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -4 \end{cases} \xrightarrow[(0,-)]{7d)}$ nu putem preciza natura lui P_2

iii) $H(P_3) = H(-1,1) \overset{④}{=} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{⑥}{\Longrightarrow} \begin{cases} \Delta_1 = 4 \\ \Delta_2 = -4 \end{cases} \xrightarrow[(+,-)]{7c)}$ P_3 punct de inflexiune (şa)

iv) $H(P_4) = H(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}) \overset{④}{=} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix} \overset{⑥}{\Longrightarrow} \begin{cases} \Delta_1 = \frac{4}{3} \\ \Delta_2 = \frac{4}{3} \end{cases} \xrightarrow[(+,+)]{7a)}$ P_4 este punct de minim local

III cazul particular $n=3$ ($\mathbb{R}^3$)

Pentru a determina punctele de extrem local ale funcției: $\begin{cases} f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ f = f(x,y,z) \end{cases}$ procedăm astfel:

① Calculăm derivatele parțiale de ord. I: $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$

② Rezolvăm sistemul: $(*) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases}$ ale cărui soluții: $\begin{cases} P_1(x_1,y_1,z_1) \\ P_2(x_2,y_2,z_2) \\ --- \\ P_k(x_k,y_k,z_k) \end{cases}$ sunt punctele staționare (critice) căutate

③ Calculăm derivatele parțiale de ord. II: $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}; \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \end{cases}$

④ Scriem hessiana atașată fct. $f(x,y,z)$:

$$H(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

⑤ Calculăm hessiana în primul punct critic $P_1(x_1,y_1,z_1)$: $H(P_1) = \begin{array}{c} \quad \Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \end{array}$

6. Calculăm minorii diagonali principali: $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ corespunzători lui $H(P_1)$:

$$(**)\begin{cases} \Delta_1 = a_{11} \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \equiv \det H(P_1) \end{cases}$$

7. Dacă:

a) $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ $(+,+,+) \Longrightarrow P_1$ - pct. de minim local

b) $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$ $(-,+,-) \Longrightarrow P_1$ - pct. de maxim local

c) $(\forall)\ \Delta_i \neq 0,\ i = \overline{1,3}$ și în altă combinație de semne decât a) sau b) $\Longrightarrow P_1$ - pct. de inflexiune ($\not\exists$ a)

d) $(\exists)\ \Delta_i = 0,\ i \in \{1,2,3\} \Longrightarrow$ nu putem preciza natura punctului critic P_1

8. Se repetă etapele 5 – 7 pentru celelalte puncte critice: $P_2, P_3, \dots, P_k$

Ex: Determinați punctele de extrem local ale funcției: $\begin{cases} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ f(x,y,z) = -2x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 4x - 6y + 3 \end{cases}$

Dem:

1. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -4x + 4 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 6y - 6 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = -8z \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4 = 0 \\ 6y - 6 = 0 \\ -8z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow P(1,1,0)$ - pct. staționar (critic) - unic

3. $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -8 \end{cases}$ și $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = 0 \end{cases}$

4. $H(x,y,z) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \overset{3}{=} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$

5. $H(P) \equiv H(1,1,0) \overset{4}{=} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \overset{6}{\Longrightarrow} \begin{cases} \Delta_1 = -4 \\ \Delta_2 = -24 \\ \Delta_3 = 192 \end{cases} \xrightarrow[(-,-,+)]{7c)}$ P este punct de inflexiune ($\not\exists$ a)

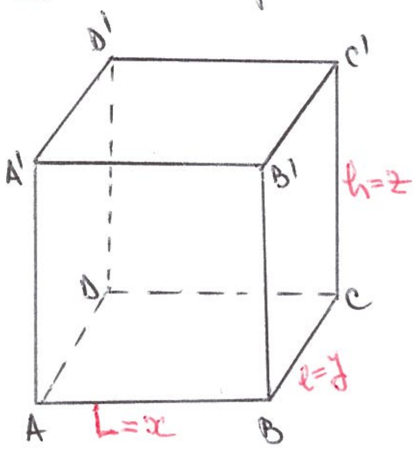
Aplicație economică

„Datorită deselor întreruperi în furnizarea apei industriale, societatea S.C. Antibiotice S.A decide să-și asigure o rezervă (suficientă pt. desfășurarea activității timp de o săptămână) construind un bazin descoperit, de forma unui paralelipiped dreptunghic (prismă patrulateră dreaptă) cu capacitatea (volumul) de 1.000 m^3. Știind că prețul (fix) de construcție este de 500 Euro/m^2 să se determine soluția constructivă optimă"

Rez:

soluție constructivă optimă $\Rightarrow$ costul total de construcție să fie minim

Obs costul depinde de cât se construiește (suprafața construită trebuie să fie minimă)



not $\begin{cases} x - \text{lungimea bazinului (a dreptunghiului de la bază)} \\ y = \text{lățimea bazinului (—"—)} \\ z = \text{înălțimea bazinului} \end{cases}$

$\begin{cases} A_t = xy + 2xz + 2yz \text{ (este fără "capac")} \to \text{vrem să fie minimă} \\ V = xyz = 1.000\ (m^3) \to \text{constant} \end{cases}$

Model matematic

$\begin{cases} g : \mathbb{R}_+^{*3} \to \mathbb{R} \text{ (min)} \\ g(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \end{cases}$ cu condiția (legătura): $xyz = 1000$

Este o problemă de determinare a pct. de extrem cu legături (legate / condiționate) care se rezolvă cu: metoda multiplicatorilor lui Lagrange (nu am făcut-o)

Din fericire, putem să o aducem la cazul studiat (fără legături, extreme libere) astfel

$\to$ din $xyz = 1000 \Rightarrow z = \frac{1000}{xy}$ (*) și vom înlocui pe „z" în expresia funcției $g(x,y,z)$

obținând o (nouă) funcție care depinde doar de x, y și nu are legături / restricții:

$\begin{cases} f : \mathbb{R}_+^{*2} \to \mathbb{R} \\ f(x,y) = xy + \frac{2000}{x} + \frac{2000}{y} \end{cases}$

Vrem să determinăm valorile lui $\begin{cases} x = ? \\ y = ? \end{cases}$ a.î. $f(x,y)$ să aibă valoarea minimă (= să determinăm punctul (punctele) de minim al funcției „f")

Aplicăm alg. de determinare a punctelor de extrem local funcției $f(x,y)$:

① $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{2000}{x^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{2000}{y^2} \end{cases}$

Obs: $\begin{cases} \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\ \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3} \end{cases}$

② $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-\frac{2000}{x^2}=0 \;/\cdot x^2>0 \\ x-\frac{2000}{y^2}=0 \;/\cdot y^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2y=2000 \\ xy^2=2000 \end{cases}$

$"-" \quad \underbrace{xy}_{>0}(x-y)=0 \Leftrightarrow x=y$

$\left.\begin{matrix} x=y \\ x^2y=2000 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^3-2000=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3-(10\sqrt[3]{2})^3=0 \Leftrightarrow (x-10\sqrt[3]{2})(x^2+10\sqrt[3]{2}x+100\sqrt[3]{4})=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=10\sqrt[3]{2} \; (=y) \\ x^2+10\sqrt[3]{2}x+100\sqrt[3]{4}=0 \Rightarrow x_{1,2}\in\mathbb{C} \end{cases} \Leftrightarrow$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$(\Delta=-300\sqrt[3]{4}<0)$

$\Leftrightarrow P(10\sqrt[3]{2}, 10\sqrt[3]{2})$ - punct critic (staționar) unic

Obs: verificăm în continuare dacă P este pct. de minim local pt. „f"

③ $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{4000}{x^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{4000}{y^3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=1 \end{cases}$

④ $H(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{4000}{x^3} & 1 \\ 1 & \frac{4000}{y^3} \end{pmatrix}$

⑤ $H(P_0)=H(10\sqrt[3]{2},10\sqrt[3]{2})=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

⑥ $\begin{cases} \Delta_1=2 \\ \Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=\det H(P_0)=3 \end{cases} \xrightarrow[(+,+)]{7a)} P(10\sqrt[3]{2},10\sqrt[3]{2})$ este pct de minim global (deoarece este singurul) pt. funcția $f(x,y)$

Concluzie

funcția $f(x,y)$ își atinge valoarea minimă în punctul $P(10\sqrt[3]{2}, 10\sqrt[3]{2})$

Concluzie economică

Soluția constructivă optimă (cu cel mai mic cost) este dată de:

$\begin{cases} x=10\sqrt[3]{2}\text{ m} \\ y=10\sqrt[3]{2}\text{ m} \\ z=5\sqrt[3]{2}\text{ m} \end{cases}$ | baza bazinului este un pătrat; → înălțimea bazinului este jumătate din latura pătratului de la bază

Obs $z=\frac{1000}{xy}=\frac{1000^{\,10\sqrt[3]{2}}}{100\sqrt[3]{4}}=\frac{5\,10\sqrt[3]{2}}{2}=5\sqrt[3]{2}\text{(m)}$

$A_t^{min}=f(P)=xy+2xz+2yz=100\sqrt[3]{4}+100\sqrt[3]{4}+100\sqrt[3]{4}=300\sqrt[3]{4}\,(m^2)\simeq 476\text{ m}^2$

$C_t^{min}=500\,E/m^2\cdot A_t(m^2)\simeq 500\times476=$ 238.000 Euro (costul total minim de construcție al bazinului)

Obs - dacă construiam bazinul ca un cub cu latura de 10 m, volumul acestuia ar fi fost de 1.000 m³, dar suprafața construită ar fi fost de 5 fețe x 100 m² = 500 m², deci costul total ar fi fost de 250.000 Euro (mai mare cu 12.000 Euro!!!) aceasta este efectul unui calcul matematic de ≃ 7 minute.