Seminar 1+2 Rezolvarea probl. de transport echilibrate (PTE)

Să se determine soluția(-ile) optimă(-e) a următoarelor P.T.E.

I)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	$\boxed{2}$	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	15
D_2	$\boxed{1}$	$\boxed{4}$	$\boxed{2}$	15
D_3	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$	$\boxed{2}$	15
	10	15	20	

Obs: deoarece avem:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{3} a_i = 15+15+15 = 45}_{\text{oferta}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{3} b_j = 10+15+20}_{\text{cererea}}$$

avem o P.T.E

I.1) cu metoda diagonalei

① Determinarea $\overline{X}_0$ - S.B.A.I cu metoda diagonalei (a colțului de N-V)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	10 $\boxed{2}$	5 $\boxed{3}$	* $\boxed{4}$	$\cancel{15}, \cancel{5}, 0$
D_2	* $\boxed{4}$	10 $\boxed{4}$	5 $\boxed{2}$	$\cancel{15}, \cancel{5}, 0$
D_3	* $\boxed{3}$	* $\boxed{1}$	15 $\boxed{2}$	$\cancel{15}, 0$
	$\cancel{10}$, 0	$\cancel{15}$, $\cancel{10}$, 0	$\cancel{20}$, $\cancel{15}$, 0	

Obs: ordinea determinării valorilor x_{ij} este: $\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, \overline{x}_{22}, \overline{x}_{23}, \overline{x}_{33}$

$\mapsto \overline{X}_0 \begin{cases} \overline{x}_{11}=10, \overline{x}_{12}=5, \overline{x}_{22}=10, \overline{x}_{23}=5, \overline{x}_{33}=15 \rightarrow \text{variabile bazice (principale) în nr. de } m+n-1 = 3+3-1=5, \text{ toate } \neq 0. \\ \overline{x}_{13}=\overline{x}_{21}=\overline{x}_{31}=\overline{x}_{32}=0 \ (=^{not} *) \rightarrow \text{var. secundare} \end{cases}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \overline{X}_0 = (10,5,0,0,10,5,0,0,15)^T \in \mathbb{R}^9 \rightarrow \text{SBAI nedegenerată} \\ f(\overline{X}_0) = 2\cdot 10 + 3\cdot 5 + 4\cdot 10 + 2\cdot 5 + 2\cdot 15 = 115 \text{ (u.m)} \end{cases}$$

② Aplicăm criteriul de optim (verificăm dacă soluția găsită $\overline{X}_0$ este optimă sau nu)

Determinăm ciclurile celulelor nebazice (secundare, libere) (i,j) și calculăm cantitățile δ_{ij} corespunzătoare acestora:

$$\begin{cases} \delta_{13} = -1+2-4+3 = 0 \\ \delta_{21} = -1+2-3+4 = 2>0 \\ \delta_{31} = -3+2-3+4-2+2 = 0 \\ \delta_{32} = -1+4-2+2 = 3>0 \end{cases} \xrightarrow{(\exists)\ \delta_{ij}>0} \overline{X}_0 \text{ - nu este soluția optimă a P.T.E.}$$

③ Aplicăm criteriul de intrare în bază (determinăm variabila nebazică $x_{kl} = * = 0$ (↓))

Calculăm:

$$\delta_{kl} \overset{def}{=} \max\{\delta_{ij}>0\} = \max\{\underbrace{\delta_{21}}_{=2}, \underbrace{\delta_{32}}_{=3}\} = \delta_{32} \Rightarrow$$ variabila secundară/nebazică „x_{32}" (↓) intră în bază (devine variabilă bazică/principală)

④ Aplicăm criteriul de ieșire din bază (determinăm variabila bazică/principală $x_{ps}>0$ care iese din bază (devine nebazică/secundară)) (⟶)

④.1) Desenăm ciclul celulei „x_{32} ↓"

$$\begin{array}{ccc} 10-\theta & & 5+\theta \\ ② (2,2) & \longrightarrow & (2,3) ③ \\ \uparrow & & \downarrow \\ ① \underline{(3,2)} & \longleftarrow & (3,3) ④ \\ \theta=10 & & 15-\theta \end{array}$$

Obs: ciclul celulei (3,2)↓ este format din 4 celule, numerotate astfel: ①(3,2) ⟶ ②(2,2) ⟶ ③(2,3) ⟶ ④(3,3)

celule cu nr. impar

celule cu nr. par

(4.2) Determinăm variabila „x_{ij} →” care iese din bază

Determinăm: $\theta \overset{def}{=} \min\{x_{ij} \geq 0 \,/\, x_{ij}$ aflate în celula (i,j) cu nr. par$\}$

$\equiv \min\{\underbrace{x_{22}}_{=10}, \underbrace{x_{33}}_{=15}\} = 10 \Rightarrow$ variabila bazică/principală „$x_{22}=10$” devine variabilă nebazică/secundară $(x_{22}=0\equiv *)$

(5) Determinăm noua soluție $\overline{X}_1$ – SBA, făcând schimbarea de bază:

Desenăm un nou tabel al PTE care va conține valorile x_{ij} ale noii soluții (obținute cf. rel. (2.8) din curs) care se obțin astfel:
- valorile x_{ij} din ciclul celulei „x_{32}” se modifică ca în (4.1)
- restul valorilor x_{ij} din tabel se copie din vechiul tabel

	C_1	C_2	C_3	
D_1	10 [2]	5 [3]	* [4]	15
D_2	* [1]	* [4]	15 [2]	15
D_3	* [3]	10 [1]	5 [2]	15
	10	15	20	

$\longmapsto \begin{cases} \overline{X}_1 = (10,5,0,0,0,15,0,10,5)^T \in \mathbb{R}^9 \text{ – S.B.A. nedegenerată} \\ f(\overline{X}_1) = 2\cdot 10 + 3\cdot 5 + 2\cdot 15 + 1\cdot 10 + 2\cdot 5 = 85\,(u.m) < f(\overline{X}_0) = 115\,(u.m) \end{cases}$

costul total de transport este mai mic (=85) în noua soluție $\overline{X}_1$ decât pt. vechea soluție $\overline{X}_0$

Se reiau etapele 2)–5) până la obținerea soluției optime X_{optim}.

(2) $\begin{cases} \delta_{13} = -1+2-1+3 = \underline{3>0} \\ \delta_{21} = -1+2-3+1-2+2 = -1 \\ \delta_{22} = -4+2-2+1 = -3 \\ \delta_{31} = -3+2-3+1 = -3 \end{cases}$ $\Big| \xRightarrow{(\exists)\delta_{ij}>0}$ $\overline{X}_1$ – nu este S.O. pt. PTE (putem transporta cu mai puțini bani decât 85 u.m)

(3) $\delta_{kl} \overset{def}{=} \max\{\delta_{ij}>0\} \equiv \max\{\underbrace{\delta_{13}}_{=3}\} = \delta_{13} \Rightarrow x_{13} = * = 0\,(\downarrow)$ – intră în bază

(4)
$$\begin{tikzcd} (4)\ \overset{5-\theta}{(1,2)} \arrow[r] & \overset{\theta=5}{(1,3)}\ (1) \arrow[d] \\ (3)\ \underset{10+\theta}{(2,3)} \arrow[u] & \underset{5-\theta}{(3,3)}\ (2) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$\theta \overset{def}{=} \min\{x_{ij}\geq 0 \,/\,$ din celulele cu nr. par$\} \equiv \min\{\underbrace{x_{33}}_{=5}, \underbrace{x_{12}}_{=5}\} = 5 \underset{(1)}{\Rightarrow}$ „x_{12} →” părăsește baza

aleg eu!

(5)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	10 [2]	* [3]	5 [4]	15
D_2	* [1]	* [4]	15 [2]	15
D_3	* [3]	15 [1]	0 [2]	15
	10	15	20	

$\longmapsto \begin{cases} \overline{X}_2 = (10,0,5,0,0,15,0,15,0)^T \in \mathbb{R}^9 \text{ – SBA degenerată} \\ f(\overline{X}_2) = 70\,(u.m) < f(\overline{X}_1) = 85\,(u.m) \end{cases}$

Se reiau etapele (2)–(5):

(2) $\begin{cases} \delta_{12} = -3+4-2+1 = -3 \\ \delta_{21} = -1+2-1+2 = 2>0 \\ \delta_{22} = -4+2-2+1 = -3 \\ \delta_{31} = -3+2-1+2 = 0 \end{cases}$ $\Big| \xRightarrow{(\exists)\delta_{ij}>0}$ $\overline{X}_2$ – nu este S.O (profitul de transport poate să mai scadă)

(3) - - -

q.e.d

I.2) cu metoda costurilor minime

① Determinăm SBAI $\overline{X}_0$ cu metoda costurilor minime:

	C_1	C_2	C_3	
D_1	* [2]	* [3]	15 [1]	15, 0
D_2	10 [1]	* [4]	5 [2]	15, 5, 0
D_3	* [3]	15 [1]	0 [2]	15, 0
	10, 0	15, 0	20, 5, 0	

Obs: deoarece sunt mai multe celule cu același cost minim (=1) am ales următoarea ordine în determinarea componentelor $\overline{x}_{ij}$ a soluției $\overline{X}_0$:
$\overline{x}_{13}, \overline{x}_{21}, \overline{x}_{32}$ (aici am ales $\overline{x}_{33}$ – var. princ.) apoi $\overline{x}_{23}$.

$$\begin{cases} \overline{X}_0 = (0,0,15,10,0,5,0,15,0)^T \in \mathbb{R}^9 \to \text{SBAI degenerată} \\ f(\overline{X}_0) = 50 \text{ (u.m)} \end{cases}$$

② $$\begin{cases} \delta_{11} = -2+1-2+1 = -2 \\ \delta_{12} = -3+1-2+1 = -3 \\ \delta_{22} = -4+2-2+1 = -3 \\ \delta_{31} = -3+1-2+2 = -2 \end{cases} \xRightarrow{(\forall)\,\delta_{ij}<0} \overline{X}_0 \text{ este soluție optimă și } \underline{\text{unică}} (!!!) \text{ (dar și degenerată)}$$

Obs: deci costul total minim de transport este egal cu 50 (u.m) și poate fi atins doar dacă transportul cantităților de marfă se face conform tabelului corespunzător soluției optime și unice $\overline{X}_0$.

q.e.d

II)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	[2]	[1]	[4]	20
D_2	[3]	[2]	[2]	10
D_3	[1]	[3]	[3]	10
D_4	[5]	[1]	[2]	20
	35	12	13	

Obs: i) avem oferta totală (din depozite) egală cu cererea totală (a centrelor de desfacere), deci P.T este echilibrată

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{4} a_i = 20+10+10+20}_{\text{oferta}} = 60 = \underbrace{\sum_{j=1}^{3} b_j = 35+12+13}_{\text{cererea}}$$

ii) $\begin{cases} m=4 \to \text{nr. de depozite} \\ n=3 \to \text{nr. de magazine (centre de desfacere)} \end{cases}$

II.1) Determinăm $\overline{X}_0$ cu metoda diagonalei (a colțului de N-V)

① Determinăm $\overline{X}_0$ – SBAI (cu metoda diagonalei)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	20 [2]	* [1]	* [4]	20, 0
D_2	10 [3]	* [2]	* [2]	10, 0
D_3	5 [1]	5 [3]	* [4]	10, 5, 0
D_4	* [5]	7 [1]	13 [2]	20, 13, 0
	35, 15, 5, 0	12, 7, 0	13, 0	

Obs cf. metodei, ordinea determ. variabilelor este: $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{42}, x_{43}$.

componente (variabile) secundare, egale cu 0 "*"

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{X}_0 = (20,0,0,10,0,0,5,5,0,0,7,13)^T \in \mathbb{R}^{12} \to \text{SBAI nedeg.} \\ \text{componente (variabile) principale, în nr. de } m+n-1 = 4+3-1 = 6 \text{ (toate nenule} \Rightarrow \overline{X}_0 \text{ – nedegenerată)} \\ \underline{f(\overline{X}_0)} = 2\cdot 20 + 3\cdot 10 + 1\cdot 5 + 3\cdot 5 + 1\cdot 7 + 2\cdot 13 = \underline{123} \text{ (u.m)} \end{cases}$$

costul total de transport pt. a transporta marfa cf. lui $\overline{X}_0$

② Aplicăm criteriul de optim

Vom calcula valorile „δ_{ij}" corespunzătoare ciclurilor celulelor nebazice/libere/secundare $(i,j) \to$ „*"

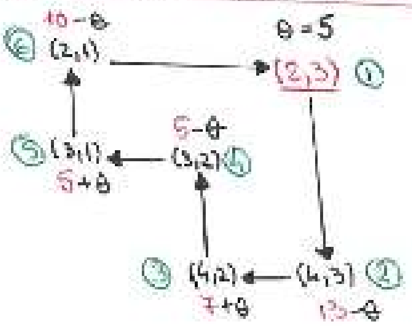
$$\begin{cases} \delta_{12} = -1+3-1+2 = 3 > 0 \\ \delta_{13} = -4+2-1+3-1+2 = 1 > 0 \\ \delta_{22} = -2+3-1+2 = 3 > 0 \\ \delta_{23} = -3+2-1+3-1+3 = 4 > 0 \\ \delta_{33} = -4+2-1+3 = 0 \\ \delta_{41} = -5+1-3+1 = -6 \end{cases} \xrightarrow{(\exists)\,\delta_{ij} > 0} \overline{X}_0 \text{ nu este soluție optimă.}$$

③ Aplicăm criteriul de intrare (în bază)

$$\delta_{kl} \overset{def}{=} \max\{\delta_{ij} > 0\} = \max\{\underbrace{\delta_{12}}_{=3}, \underbrace{\delta_{13}}_{=1}, \underbrace{\delta_{22}}_{=3}, \underbrace{\delta_{23}}_{=4}\} = \delta_{23} \Rightarrow x_{23} = \text{"*"} = 0\ (\downarrow) \text{ intră în bază}$$

④ Aplicăm criteriul de ieșire (din bază)

④.1 Determinăm ciclul celulei „$x_{23}(\downarrow)$"



④.2 Determinăm variabila „$x_{pq}(\leftrightarrow)$" (determinăm θ)

$$\theta \overset{def}{=} \min\{x_{ij} > 0 \,/\, x_{ij} \text{ aflate în celulele } (i,j) \text{ cu nr. par din ciclul celulei } x_{23}(\downarrow)\} =$$

$$= \min\{\underbrace{\overset{②}{x_{43}}}_{=13}, \underbrace{\overset{④}{x_{32}}}_{=5}, \underbrace{\overset{⑥}{x_{21}}}_{=10}\} = 5 \Rightarrow \text{„}x_{32}(\leftrightarrow)\text{" părăsește baza} \quad \left(x_{32} = 5 \xrightarrow{\text{va deveni}} x_{32} = 0 = \text{"*"}\right)$$

⑤ Determinăm noua soluție $\overline{X}_1$ - SBA (facem schimbarea de bază)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	20 [2]	* [1]	* [4]	20
D_2	5 [3]	* [2]	5 [2]	10
D_3	10 [1]	* [3]	* [4]	10
D_4	* [5]	12 [1]	8 [2]	20
	35	12	13	

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{X}_1 = (20,0,0,5,0,5,10,0,0,0,12,8)^T \in \mathbb{R}^{12} \to \text{SBA nedegenerată} \\ f(\overline{X}_1) = 2\cdot 20 + 3\cdot 5 + 2\cdot 5 + 1\cdot 10 + 1\cdot 12 + 2\cdot 8 = 103 < 123 = f(\overline{X}_0) \end{cases}$$

noul cost total de transport af. modului de transport definit de soluția $\overline{X}_1$

Obs: reluăm etapele ② - ⑤ ale algoritmului de rezolvare a P.T.E.

(c) Crit. de optim

Calculăm „δ_{ij}":
$$\begin{cases} \delta_{12} = -1+1-2+2-3+2 = -1 \\ \delta_{13} = -4+2-3+2 = -3 \\ \delta_{22} = -2+2-2+1 = -1 \\ \delta_{32} = -3+1-2+2-3+1 = -4 \\ \delta_{33} = -4+1-3+2 = -4 \\ \delta_{43} = -3+3-2+2 = 0 \end{cases}$$

$(\forall)\delta_{ij} \leq 0 \xrightarrow[\text{cf. crit. de optim}]{}$ sol. $\overline{X}_1$ este S.O dar nu este unică ($(\exists)\delta_{ij}=0$) $\Leftrightarrow$ $(\exists)$ o „∞" de sol. optime cu aceeași valoare minimă a costului total de transport.

q.e.d

II.2) Determinăm soluția inițială $\overline{X}_0$ cu metoda costului minim

Rezolvați voi singuri aceasta!!!