Şi totuşi, de ce 'mama naibii' trebuie să învăţ eu, ditamai studentul la FEAA şi viitorul ultra-, hyper-, mega-specialist în economie, despre *matrici, rangul şi inversa unei matrici, sisteme de ecuaţii liniare, etc.* când singurul lucru pe care trebuie să-l ştiu, ca să ajung bogat ca şi Becali (Bill Gates, Mark Zuckerberg,… pentru pretenţioşi), este să număr banii! Aşa că, daţi-mi naibii mai repede diploma şi lăsaţi-mă cu tâmpenia asta de MATEMATICĂ!!! Mamăăă…, ajutor că mă omoară profii ăştia de mate!

Păi, uite, tocmai de-aia:

1. Modelul lui LEONTIEF: analiza de tip INPUT-OUTPUT în teoria sistemelor economice

1.1 Cine/ce este LEONTIEF?

- **este un 'EL', un economist (***cum veţi ajunge şi voi peste câţiva ani***, să sperăm că nu prea mulţi…);**
- **Wassily W. Leontief s-a născut în 1906 la Sankt-Petersburg (***autorităţile ruse i-au scris pe certificatul de naştere 1905, dar na, se mai întâmplă***) şi a decedat în 1999 la New York (***deci, …93 de ani***);**
- **a studiat la Universitatea de Stat din Moscova şi la cea din Leningrad (1921-1925) (***pe vremea lui se numea Petrograd***), a obţinut titlul de doctor în economie la Universitatea din Berlin (1928) a lucrat în calitate de cercetător la Institutul de Economie Agrară din Kiel (1927-1928) şi a fost profesor la Harvard (1946-1975) respectiv la Universitatea New York (1975-1999) (***băi frate, ăsta nu s-a mai oprit cu învăţatul, nu-i sănătos cu capu…***);**
- **în 1973, devine laureat al premiului Nobel în economie, pe baza teoriei INPUT-OUTPUT dezvoltată de el, teorie care analizează legăturile (interdependenţele) sectoriale din cadrul unui sistem economic (***brrr, ce de cuvinte complicate***);**
- **aplicând această teorie şi analizând mai bine de 500 de sectoare (industrii) ale economiei SUA între anii 1965-1970, a demonstrat (***spre stupefacţia tuturor economiştilor, antreprenorilor şi politicienilor de atunci***) că ţara cea mai bogată în capital (***bani***), şi anume SUA, exportă mărfuri care înglobează mai multă forţă de muncă (***labor***) decât resurse financiare (***capital***). Şi pentru că această descoperire (***foarte neplăcută pentru ceilalţi mari economişti ai epocii***) trebuia să poarte un nume, au numit-o simplu: Paradoxul lui Leontief.**
- **din motive parţial necunoscute, de genul:** *"Bă, ăsta-i chiar şmecher…", "Mamăăă…, ce tare-i tipul, nu înţeleg nimic din ce zice…", "Hai să-i dăm rapid un job, că mai descoperă vreo 2-3 paradoxuri şi ne face pe toţi de cacao!"***:**
    - ✓ **Guvernul Chinei la invitat (1930) să le fie consilier economic la Ministerul Căilor Ferate Chineze;**
    - ✓ **Preşedintele american F.D. Roosevelt la pus şef (1946) la Departamentul de Statistică al SUA;**
    - ✓ **Guvernele Italiei, Norvegiei şi Japoniei l-au rugat să le facă o analiză asupra economiei ţărilor lor şi să le ofere recomandări practice pentru o viitoare creştere economică;**
    - ✓ **Guvernele Spaniei şi Marocului i-au cerut o analiză economică cu privire la cea mai bună soluţie (***economică***) de tranversare a Strâmtorii Gibraltar: *tunel sau pod?***
    - ✓ **din (ne-) fericire, Guvernele României din perioada 1990-1999, nu i-au cerut nimic (*eziztă o ezplicaţie:*** *băi, ce puii mei, ăsta e rus (hai că totuşi nu-i chiar aşa de naşpa), dar e şi american (asta-i nasol tare*, *capitalism, Soroş, democraţie*, *alea-alea…*, *la-s că ştim noi mai bine cum e cu 'economia de piaţă' adică cu 'economia furatului' sau 'furatul economiei' că tot aeea e…***), iar cele de după 1999 probabil ar fi vrut, dar nu aveau (încă) un expert, membru de partid, capabil să traducă ce spun fantomele!**

În concluzie, din păcate LEONTIEF, nu-i nici: *manelist, cocalar de Dorobanţi, piţiponc de Bamboo, nu-i nici rapper, rocker, Beyonce sau Inna, şi nici măcar o marcă de bere sau de parfum!* ***Deci TOTAL INSIGNIFIANT! (***sper că nu v-aţi scrântit limba citind ultimul cuvânt). ***Şi atunci, de ce… LEONTIEF? Păi…, vezi mai jos, …pe paginile următoare!***

P.S.: Trataţi textul de mai sus ca un PAMFLET, dar nu în totalitate! Ce urmează este chiar serios, adică MATEMATICĂ!

1.2 Ce este analiza INPUT-OUTPUT?

Analiza INPUT-OUTPUT este o analiză macro-economică care stabileşte condiţiile de realizare a echilibrului privind cererea şi oferta în cadrul unei economii (naţionale, regionale, locale, etc) formată dintr-un număr oarecare *”n”* de ramuri (industrii, sectoare). Adică dorim să determinăm cantitatea de mărfuri/servicii (ca volum de produse fizice sau în echivalent monetar) care trebuie fabricată/produsă de diferitele ramuri (industrii) ale economiei respective, astfel încât să acopere atât necesarul propriu de consum al acestora (cerere internă) dar şi cererea externă (pentru comerţ, export, stocuri, etc.).

Exemplu:

“Vom analiza o economie ipotetică cu 3 ramuri/sectoare: industria cărbunelui **(C)**, industria oţelului **(O)** şi industria energetică **(E)**. În tabelul de mai jos, sunt date consumurile specifice unitare necesare pentru consumul propriu (cererea internă) al fiecărei industrii şi cantităţile totale necesare pentru consumul extern (cererea externă sau cererea finală).

Cererea internă	**(C)** ptr. fiecare tonă	**(O)** ptr. fiecare tonă	**(E)** ptr. fiecare Mwh
(C) nr. de tone necesare	0	0,27	0,13
(O) nr. de tone necesare	0,008	0,08	0,02
(E) nr de Mwh necesari	0,1	1,15	0,07

Cererea externă (în milioane)
18,3 (tone)
24,7 (tone)
33,5 (Mwh)

Cu alte cuvinte pentru **a produce**:

- **1 tonă de cărbune**, este nevoie de: 8 Kg de oţel şi de 100 Kwh de energie electrică;

- **1 tonă de oţel**, este nevoie de: 270 Kg de cărbune, 80 Kg de oţel şi 1.150 Kw de energie electrică;

- **1 Mwh de energie electrică**, este nevoie de: 130 Kg de cărbune, 20 Kg de oţel şi 70 Kw de energie electrică.

Necesarul pentru **consumul extern** (alte ramuri industriale care nu sunt cuprinse în model, export, pentru populaţie, etc.) este de: 18,3 milioane tone de cărbune; 24,7 milioane tone de oţel şi 33,5 milioane de megawatt/oră (33.500.000 Mwh) de energie electrică.

Se cere să se stabilească producţia optimă (adică cea care satisface atât consumul intern al celor trei industrii, dar şi cererea externă) de cărbune, oţel şi energie electrică.”

Tabelul de mai sus, al cererii interne, se numeşte **Tabelul Input-Output (TIO)** sau Tabel intersectorial.

Introducem următoarele matrici:

- **matricea Input-Output** (matricea tehnologică, matricea coeficienţilor tehnici):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{31} \\ a_{21} & a_{22} & a_{32} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,27 & 0,13 \\ 0,008 & 0,8 & 0,02 \\ 0,1 & 1,15 & 0,07 \end{pmatrix}$$

- valorile sunt exprimate în (fracţiuni de) tonă sau de Mwh

- **matricea cererii externe** (finale):

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18,3 \\ 24,7 \\ 33,5 \end{pmatrix};$$ valorile fiind exprimate în milioane (de tone, respectiv Mwh)

- **matricea cererii totale** (de producţie):

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ unde

$$\begin{cases} x_1\text{-cantitatea totala (in milioane de tone) de carbune care trebuie produsa de (C);} \\ x_2\text{-cantitatea totala (in milioane de tone) de otel care trebuie produsa de (O);} \\ x_3\text{-cantitatea totala (in milioane de Mwh) de energie care trebuie produsa de (E);} \end{cases}$$

Din datele problemei avem, egalităţile:

$$\begin{cases} [\text{cantitatea totala de carbune care trebuie produsa}]-[\text{cererea interna}]=[\text{cererea externa}] \\ [\text{cantitatea totala de otel care trebuie produsa}]-[\text{cererea interna}]=[\text{cererea externa}] \\ [\text{cantitatea totala de energie care trebuie produsa}]-[\text{cererea interna}]=[\text{cererea externa}] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} [x_1]-[a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3]=[b_1] \\ [x_2]-[a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3]=[b_2] \\ [x_3]-[a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3]=[b_3] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [x_1]-[0\cdot x_1+0,27x_2+0,13x_3]=[18,3] \\ [x_2]-[0,008x_1+0,08x_2+0,02x_3]=[24,7] \\ [x_3]-[0,1x_1+1,15x_2+0,7x_3]=[33,5] \end{cases} \text{ sau scris matricial:}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0,27 & 0,13 \\ 0,008 & 0,08 & 0,02 \\ 0,1 & 1,15 & 0,7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 18,3 \\ 24,7 \\ 33,5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$X-AX=B \Leftrightarrow I_3\cdot X-A\cdot X=B \Leftrightarrow (I_3-A)\cdot X=B \Leftrightarrow X=(I_3-A)^{-1}\cdot B$$

Avem deci:

$$I_3-A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 0,27 & 0,13 \\ 0,008 & 0,08 & 0,02 \\ 0,1 & 1,15 & 0,7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -0,27 & -0,13 \\ -0,008 & 0,92 & -0,02 \\ -0,1 & -1,15 & 0,3 \end{pmatrix} \text{ iar inversa acesteia este:}$$

$$(I_3-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 1,06 & 0,966 & 0,524 \\ 0,019 & 1,2 & 0,88 \\ 0,424 & 4,93 & 3,846 \end{pmatrix} \text{ Atunci solutia problemei X este:}$$

$$X=(I_3-A)^{-1}\cdot B=\begin{pmatrix} 1,06 & 0,966 & 0,524 \\ 0,019 & 1,2 & 0,88 \\ 0,424 & 4,93 & 3,846 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18,3 \\ 24,7 \\ 33,5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 60,8 \\ 33 \\ 258,4 \end{pmatrix}$$

Cu alte cuvinte, pentru a fi onorată cererea externă:

- industria cărbunelui trebuie să producă cantitatea de 60.800.000 tone de cărbune;

- industria oţelului trebuie să producă cantitatea de 33.000.000 tone de oţel;

- industria energetică trebuie să producă cantitatea de 258.400.000 Mwh;

Evident sistemul are soluţie unică dacă există matricea $A' = (I_3 - A)^{-1}$.În plus, soluţia sistemului liniar este compatibilă economic, numai dacă matricea coloană **X** are toate elementele pozitive (**X>0**).

Obs: Absolut analog, putem construi un model similar dar utilizând valori monetare. Atunci:

$$\begin{cases} x_i \;;i=\overline{1,3} - \textit{sumele totale de bani (de ex. in milioane Euro) care trebuie produse de cele 3 industrii;} \\ a_{ij} \;;i,j=\overline{1,3} - \textit{cuantumul in bani a materialelor din industria "j" necesar pentru a se produce 1 (Euro) de industria "i";} \\ b_i \;;i=\overline{1,3} - \textit{profitul final al industriei "i" (in milioane Euro), evident dupa scaderea cheltuielilor de productie;} \end{cases}$$

Modelul general este pentru un număr de “***n***” industrii/sectoare economice.

2. Probleme de programare liniară: Algoritmul SIMPLEX

Exemplu:

„O companie produce 3 tipuri de genţi pentru laptop (normale, de lux şi VIP) să le numim: **P_1, P_2, P3**, utilizând 5 tipuri de resurse: **M_1** (piele)**, M_2** (fermoare)**, M_3** (material textil)**, M_4** (capital=bani)**, M_5** (ore muncă) în cantităţile din tabelul de mai jos:

	M_1 (piele/m^2)	**M_2** (fermoare/buc.)	**M_3** (material textil/m^2)	**M_4** (capital/Euro)	(ore de muncă/h)
P_1	0.85	4	1.25	32	4
P_2	1.10	6	1.30	38	6
P_3	1.55	5	0.55	52	7

Compania vinde fiecare din cele trei tipuri de genţi cu următoarele preţuri: **46** Euro, **55** Euro şi **72** Euro.

*Câte genţi de fiecare tip ar trebui să producă compania, pentru a avea profit maxim, ştiind că au la dispoziţie: **450** m^2 de piele, **1.500** de fermoare, **355** m^2 de material textil, **14.500** Euro capital iniţial şi **760** ore de muncă?”*

Notăm cu: x_1, x_2, x_3 numărul de genţi de fiecare tip care ar trebui produs.

Modelul matematic (este o Problemă de Programare Liniară _PPL):

$$(1)\quad (\max) f(x_1, x_2, x_3) = 46x_1 + 55x_2 + 72x_3$$

$$(2)\begin{cases} 0.85x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 \le 450 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 1.500 \\ 1.25x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 \le 355 \\ 32x_1 + 38x_2 + 52x_3 \le 14.500 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 760 \end{cases}$$

$$(3)\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Pentru a o putea rezolva trebuie să aducem sistemul liniar de inecuaţii (2) la **forma standard**:

$$(1)\quad (\max) f(x_1, x_2, x_3) = 46x_1 + 55x_2 + 72x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

$$(2)\begin{cases} 0.85x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 + x_4 = 450 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 1.500 \\ 1.25x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 + x_6 = 355 \\ 32x_1 + 38x_2 + 52x_3 + x_7 = 14.500 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + x_8 = 760 \end{cases}$$ - *sistem cu 5 ecuatii si 8 necunoscute (compatibil nedeterminat)*

$$(3)\quad x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_8 \ge 0$$

Seminar 1 Ecuații liniare, sisteme de ecuații liniare. Matrici atașate

I.1. Ecuații liniare cu n-necunoscute

Def: Numim ecuație liniară (cu coeficienți reali) cu n necunoscute, expresia algebrică de forma:

$$(1.1)\quad a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_jx_j+\dots+a_nx_n=b \qquad ; \begin{cases} a_j\in\mathbb{R},\ j=\overline{1,n},\ b\in\mathbb{R} \\ (*)\ a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2\neq 0 \ \left(\sum_{j=1}^{n}a_j^2\neq 0\right)\end{cases}$$

Obs:

i) necunoscutele (variabilele) sunt: $x_1,x_2,\dots,x_n\in\mathbb{R}$

ii) coeficienții necunoscutelor (ai ecuației) sunt constantele reale: $a_1,a_2,\dots,a_n$

iii) constanta reală $b\in\mathbb{R}$, se numește termenul liber al ecuației (poate fi și $=0$)

iv) condiția $(*)$ $\sum_{j=1}^{n}a_j^2\neq 0$ impune ca măcar unul dintre coeficienții necunoscutelor să fie nenul ($\neq 0$) (adică $(*)\Leftrightarrow(\exists)\,a_j\neq 0$ ptr. $j\in\{1,2,\dots,n\}$)

Ex: a) $2x_1+3x_2-x_3=4$ → ec. lin. cu 3 necunoscute cu: $\begin{cases}a_1=2\\a_2=3\\a_3=-1\end{cases}$; $b=4$

b) $-3x_1+x_2-2x_4+x_5=-7$ → ec. liniară cu 5 necunoscute ($a_1=-3,\ a_2=1,\ a_3=0,\ a_4=-2$, $a_5=1$; $b=-7$)

c) $2x_2-x_6=0$ → ec. lin. cu 6 necunoscute ($a_1=a_3=a_4=a_5=0,\ a_2=2,\ a_6=-1$; $b=0$)

d) $3x_1+\underbrace{x_2x_3}_{!}-x_4=2$ → nu este ec. lin!

Def: Numim soluție (particulară) a ecuației liniare (1.1) un ansamblu de „n" numere reale: $(x_1^0,x_2^0,\dots,x_j^0,\dots,x_n^0)\overset{not}{\equiv}(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)$ care verifică ecuația, adică:

$$(1.2)\quad a_1x_1^0+a_2x_2^0+\dots+a_nx_n^0=b \iff (1.2')\ a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_n\alpha_n=b$$

Ex: Pentru ecuațiile de mai jos, am scris câteva soluții particulare:

a) $2x_1-x_2=4$ → $\begin{cases}(2,0);\ (3,2);\\ (-1,-6);\ (1,-2)\end{cases}$

b) $x_1+x_2+x_3=-1$ → $\{(0,-1,0);\ (2,2,-5);\ (1,0,-2);\ (1,1,-3)$

c) $2x_1-x_2+x_3-x_4=0$ → $\begin{cases}(1,1,1,2);\ (2,0,-1,1)\\ (0,-3,2,5);\ (0,0,4,4)\end{cases}$

Obs: i) se observă că o ec. liniară cu minim 2 necunoscute are mai multe (o infinitate) de soluții particulare

ii) notăm: $(1.3)\ S=\{(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{R}^n \,/\, a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\dots+a_n\alpha_n=b\}$ → mulțimea soluțiilor ec. lin. (1.1)

iii) mulțimea soluțiilor (S) se determină rezolvând ecuația (1.1) în funcție de una dintre necunoscute (x_j → variabilă principală (independentă) cu coef. $a_j \neq 0$) în raport cu celelalte necunoscute (x_i, $i=\overline{1,n}$, $i \neq j$ → variabile secundare (dependente))

Ex: a) $x_1 + x_2 = 2$

Dem:

a) alegem variabilă principală pe „x_1":

$$x_1 = 2 - x_2 \overset{not\ x_2=\beta}{\iff} \begin{cases} x_1 = 2-\beta & \to \text{variab. principală} \\ x_2 = \beta & \to \text{variab. secundară} \end{cases} \iff S_1 = \{(\underbrace{2-\beta}_{\overset{not}{=}\alpha_1}, \underbrace{\beta}_{\overset{not}{=}\alpha_2}) \in \mathbb{R}^2 \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

a2) alegem variabilă principală pe „x_2":

$$x_2 = 2 - x_1 \iff \begin{cases} x_1 = \delta & \to \text{variab. princ.} \\ x_2 = 2-\delta & \to \text{variab. sec.} \end{cases} \iff S_2 = \{(\underbrace{\delta}_{\alpha_1}, \underbrace{2-\delta}_{\alpha_2}) \in \mathbb{R}^2 \mid \delta \in \mathbb{R}\}$$

Obs: Aparent, mulțimile de soluții S_1 și S_2 sunt diferite, dar nu este adevărat. Cele două mulțimi coincid ($S_1 \equiv S_2$), ordinea elementelor în fiecare dintre ele este diferi... De exemplu, ptr. $\beta = 0$ se obține soluția particulară $(2,0) \in S_1$. Aceeași soluție se obține pentru $\delta = 2$, adică $(2,0) \in S_2$

b) $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 5$

Dem: Alegând x_1 variabilă principală și $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ variabile secundare, avem:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\beta \\ \left.\begin{aligned} x_2 &= \alpha \\ x_3 &= \beta \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R} \end{cases} \iff S = \{(\underbrace{\tfrac{5}{2} + \tfrac{1}{2}\alpha - \tfrac{3}{2}\beta}_{=\alpha_1}, \underbrace{\alpha}_{=\alpha_2}, \underbrace{\beta}_{=\alpha_3}) \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

c) $3x_1 - 2x_3 + x_4 = 0$

Dem: Alegând pe x_4 var. princ., obținem soluția generală (de fapt o să vedem că se numește forma explicită a soluției gen.) de forma:

$$\begin{cases} x_4 = -3\alpha + 2\delta & \to \text{v. princ.} \\ \left.\begin{aligned} x_1 &= \alpha \\ x_2 &= \beta \\ x_3 &= \delta \end{aligned}\right\} \text{v. sec.} \end{cases}$$

deci:

$$S = \{(\alpha, \beta, \delta, -3\alpha + 2\delta) \in \mathbb{R}^4 \mid \alpha, \beta, \delta \in \mathbb{R}\}$$

Obs: pentru a determina o soluție particulară a unei ec. lin. cu „n" necunoscute de tipul (1.1) se dau valori particulare pentru „n-1" dintre necunoscute și se află (rezolvând o ec. de gr. I) valoarea celei de a „n-a" variabile.

Ex: Fie ec: $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -3$

ptr. $\begin{cases} x_1 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = -1 & \Rightarrow 4 + 3x_2 - 3 - 2 = -3 \iff 3x_2 = -4 \Rightarrow x_2 = -\frac{4}{3} \iff (2, -\frac{4}{3}, 3, -1) \text{ sol. part.} \\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 1 & \Rightarrow 2x_1 - 1 + 2 = -3 \iff 2x_1 = -4 \iff x_1 = -2 \iff (-2, 0, 1, 1) \to \text{sol. part.} \end{cases}$

Cazuri particulare:

1) **Ec. lin. cu o necunoscută (variabilă)**: (*) $ax = b$; $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

i) ec. are soluție unică: $x_0 = \frac{b}{a}$

ii) interpretare geometrică: soluția este un punct de pe axa nr. reale Ox: $\quad 0 \quad x_0 = \frac{b}{a} \quad x$

Obs: - ec. (*) se mai numește și ec. de gr. I, întâlnită sub forma: $ax + b = 0$
- acest caz particular îl vom întâlni în aplicațiile pe care le vom studia
- exemple economice (de folosire a acestei ec.): "un produs oarecare costă cu tot cu T.V.A 100 lei. Cât este prețul produsului fără TVA (TVA = 19%)"

Dem: notăm x = prețul produsului fără T.V.A. Atunci:

$$\underbrace{x}_{\text{preț fără TVA a produsului}} + \underbrace{0{,}19x}_{\text{valoarea T.V.A a produsului}} = \underbrace{100}_{\text{preț final (total)}} \Leftrightarrow 1{,}19x = 100 \Leftrightarrow x = \frac{100}{1{,}19} = \frac{10.000}{119} \approx 84{,}0336 \text{ lei}$$

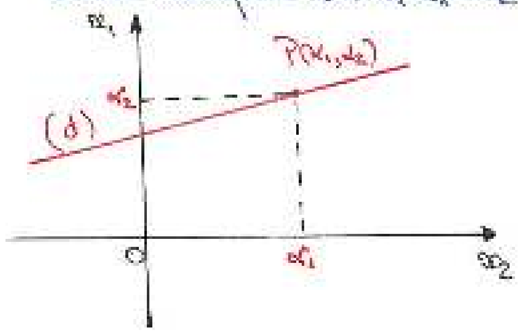
Obs: $19\% = \frac{19}{100} = 0{,}19$

2) **Ec. lin. cu două necunoscute**: (**) $a_1x_1 + a_2x_2 = b$; $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$

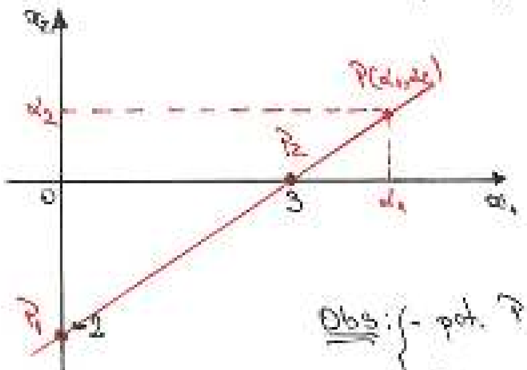
i) (**) $\Leftrightarrow ax + by = c$ sau $ax + by + c = 0$ $\quad (x_1, x_2 \leftrightarrow x, y)$

ii) ec are o infinitate (simplă) de soluții: $S = \{(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \mid a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 = b\}$

iii) interpretare geometrică: fiecare soluție particulară (α_1, α_2) este un punct $P(\alpha_1, \alpha_2) \in (d)$ unde dreapta $(d)\ a_1x_1 + a_2x_2 = b \subset x_1Ox_2$ $(\equiv xOy)$



Ex: Fie ec. lin.: $2x_1 - 3x_2 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow x_2 = -2 \Leftrightarrow P_1(0, -2) \\ x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \Leftrightarrow P_2(3, 0) \end{cases}$



$$S = \{(\overbrace{3 - \tfrac{3}{2}\alpha}^{=\alpha_1}, \overbrace{\alpha}^{=\alpha_2}) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\overbrace{\beta}^{\alpha_1}, \overbrace{\tfrac{2}{3}\beta - 6}^{\alpha_2}) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

Obs: $\begin{cases} \text{- pct. } P_1, P_2, P \text{ sunt soluții particulare ale ecuației } 2x_1 - 3x_2 = 6 \\ \text{- ec. unei drepte într-un plan are ec. gen.: } ax_1 + bx_2 + c = 0 \quad (ax + by + c = 0) \end{cases}$

Ex (economic): O brutărie folosește 600 g de făină albă pentru o pâine și 850 g pentru un cozonac. Scrieți restricția (condiția) pe care trebuie să o satisfacă nr. de produse, știind că consumul zilnic de făină este de 100 kg. Reprezentați grafic.

Dem: not. $\begin{cases} x_1 \text{ - nr. de pâini care se fabrică zilnic} \\ x_2 \text{ - nr. de cozonaci care se fabrică zilnic} \end{cases}$

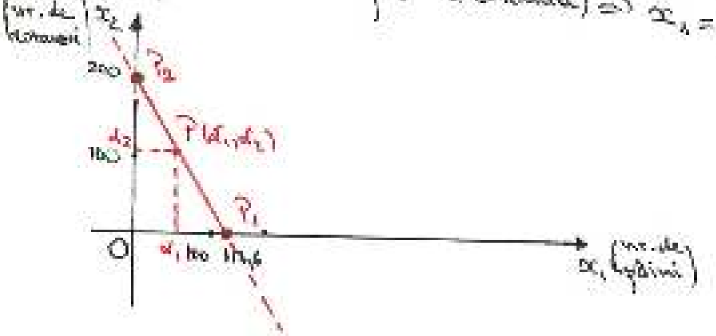
Avem condiția de a se consuma zilnic, <u>exact</u> 100 de kg de făină, de forma:

$$(*)\ 0,5x_1 + 0,85x_2 = 100 \quad (\text{în kg})$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{cant. de făină}\\ \text{pt. 1 pâine}\end{pmatrix}}_{0,5(kg/buc)} \times \underbrace{\begin{pmatrix}\text{nr. de pâini ce}\\ \text{urmează a fi produse}\end{pmatrix}}_{x_1(buc)} + \begin{pmatrix}\text{cant. de făină}\\ \text{pt. un covrig}\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}\text{nr. de covrigi care}\\ \text{urmează a fi produși}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cant. totală de făină}\\ \text{avută la dispoziție}\end{pmatrix}$$

$$\underbrace{0,5(kg/buc)\cdot x_1(buc)}_{\text{în „kg"}} + \underbrace{0,85(kg/buc)\cdot x_2(buc)}_{\text{în „kg"}} = 100(kg)$$

Dacă $\begin{cases} x_1=0 \text{ (nu se produc pâini)} \overset{(*)}{\Rightarrow} x_2 = \dfrac{100}{0,85} \approx 117,65 \text{ (covrigi)} \Rightarrow P_1(0;117,65) \\ x_2=0 \text{ (nu se produc covrigi)} \overset{(*)}{\Rightarrow} x_1 = \dfrac{100}{0,5} = 200 \text{ (pâini)} \Rightarrow P_2(200;0) \end{cases}$



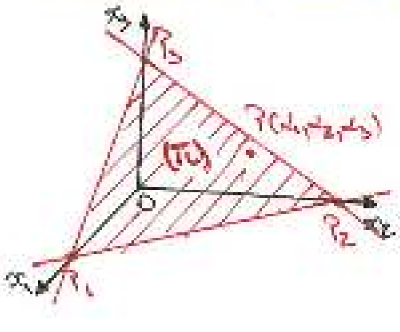
Obs: $\Rightarrow$ i) evident are sens economic, doar porțiunea din dreaptă aflată în cadranul I ($x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$)
ii) soluțiile reale econ. (nu strict matem.) nu-s doar acele pt. care $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}$ (valorile sunt nr. întregi (naturale) nu nr. reale)

3) <u>Ec. lin. cu trei necunoscute</u>: $(**)\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$; $\begin{cases} a_i \in \mathbb{R}, i=\overline{1,3} \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$; $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \neq 0$

i) $(**) \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by+cz=d \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}$

ii) ec. are o infinitate (dublă) de soluții ; $S = \{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in \mathbb{R} \mid a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + a_3\alpha_3 = b\}$

iii) <u>interpretare geometrică</u>: fiecare soluție particulară $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ este reprezentată de un punct $P(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3) \in (\pi)$ unde planul $(\pi)\ a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b \subset Ox_1x_2x_3\ (\equiv Oxyz)$

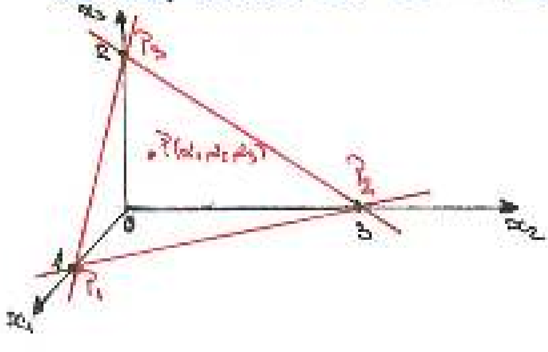


Obs: i) punctele P_1, P_2, P_3, P sunt sol. particulare ale ec. $(**)$
ii) ec. gen. a unui plan în spațiu este de forma:

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0 \quad (\text{sau: } ax+by+cz+d=0)$$

Ex: Reprezentați grafic ec. lin.: $(*)\ 6x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6 \Rightarrow \begin{cases} x_2=x_3=0 \Rightarrow x_1=1 \Leftrightarrow P_1(1,0,0) \\ x_1=x_3=0 \Rightarrow x_2=3 \Leftrightarrow P_2(0,3,0) \\ x_1=x_2=0 \Rightarrow x_3=2 \Leftrightarrow P_3(0,0,2) \end{cases}$

Obs: un plan este unic determinat de 3 puncte (necoliniare); am ales cele 3 puncte, intersecțiile planului cu cele 3 axe de coordonate



Obs: i) În problemele cu caracter economic, unde apare și condiția $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. În această situație soluțiile ec. $(**)$ sunt coordonatele punctelor $P(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ aflate pe laturile ΔABC și în interiorul acestuia
ii) de multe ori $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$ deci ne vor interesa doar acele puncte $P(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ unde $\alpha_i \in \mathbb{N}$, $i=\overline{1,3}$

Soluția generală a ec. ($\overset{*}{xiv}$) poate fi scrisă sub una din următoarele trei forme:

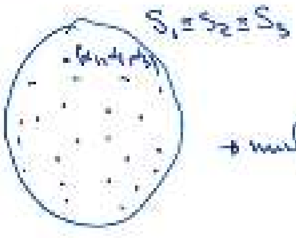
i) $\begin{cases} x_1 \to \text{var. princip.} \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \delta \end{cases} \in \mathbb{R} \to$ var. sec. $\Rightarrow S_1 = \left\{ \left(\overbrace{1 - \tfrac{1}{3}\beta - \tfrac{1}{2}\delta}^{=\alpha_1}, \overbrace{\beta}^{=\alpha_2}, \overbrace{\delta}^{=\alpha_3} \right) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \beta, \delta \in \mathbb{R} \right\}$

ii) $\begin{cases} x_2 \to \text{var. princ.} \\ x_1 = \alpha \\ x_3 = \delta \end{cases}$ v. sec. $\Rightarrow S_2 = \left\{ \left(\overbrace{\alpha}^{=\alpha_1}, \overbrace{3 - 3\alpha - \tfrac{3}{2}\delta}^{=\alpha_2}, \overbrace{\delta}^{=\alpha_3} \right) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha, \delta \in \mathbb{R} \right\}$

iii) $\begin{cases} x_3 - \text{var. princ.} \\ x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \end{cases}$ v. sec. $\Rightarrow S_3 = \left\{ \left(\overbrace{\alpha}^{=\alpha_1}, \overbrace{\beta}^{=\alpha_2}, \overbrace{2 - 2\alpha - \tfrac{2}{3}\beta}^{=\alpha_3} \right) \in \mathbb{R}^3 \,/\, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

Obs: i) aparent S_1, S_2, S_3 sunt diferite dar de fapt coincid $S_1 \equiv S_2 \equiv S_3$ (diferă doar ordinea elem. în fiecare mulțime)

ii) într-adevăr pt. $\begin{cases} \beta = \delta = 0 \overset{S_1}{\Longrightarrow} (1,0,0) \in S_1 \\ \alpha = 1;\ \delta = 0 \overset{S_2}{\Longrightarrow} (1,0,0) \in S_2 \\ \alpha = 1;\ \beta = 0 \overset{S_3}{\Longrightarrow} (1,0,0) \in S_3 \end{cases}$



→ mulț. soluțiilor ec. ($\overset{*}{xiv}$)

I.2) Sisteme de „m" ecuații liniare cu „n" necunoscute ($m, n \in \mathbb{N}^*$). Matrici atașate.

Def: Numim sistem liniar de ecuații (cu coeficienți reali) un set finit de ecuații liniare fiecare ecuație având aceleași necunoscute adică de forma:

$$(1.4)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (\text{ec.}1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (\text{ec.}2) \\ \cdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i & (\text{ec.}„i") \\ \cdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (\text{ec.}„m") \end{cases} ;\ a_{ij}, b_i \in \mathbb{R} \text{ pt. } \begin{cases} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

→ sistem de „m" ecuații liniare cu „n" necunoscute (pe scurt: sistem liniar)

Obs: $\begin{cases} \text{i) numerele (constantele) reale „}a_{ij}\text{" se numesc coeficienții necunoscutelor (variabilelor)} \\ \text{ii) numerele (constantele) reale „}b_i\text{" se numesc termenii liberi ai sistemului} \\ \text{iii) o parte dintre „}a_{ij}\text{" sau (toți) „}b_i\text{" pot fi egali cu zero (nuli)} \end{cases}$

Sistemului (1.4) i se asociază următoarele matrici (matrice):

$$(1.5)\quad A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \equiv \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \to \text{matricea coeficienților sistemului}$$

$$(1.6)\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}) \to \text{matricea termenilor liberi}$$

$$(1.7)\quad \bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \end{array} \in \mathcal{M}_{m,n+1}(\mathbb{R}) \to \text{matricea extinsă a sistemului}$$

Obs: i) matricea extinsă $\bar{A}$ poate fi scrisă (ca blocuri de matrici) astfel: $\bar{A} = (A \mid B)$ (1.7')

ii) sistemul liniar (1.4) mai poate fi scris și sub următoarele forme:

$$\begin{cases} (1.4')\quad A \cdot X = B & \to \text{forma matricială} \\ (1.4'')\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ ; \ i = \overline{1,m} & \to \text{forma condensată} \end{cases}$$

Def: Numim soluție a sistemului de ec. liniare (1.4) un ansamblu de „n" numere reale $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ care este soluție comună (verifică) a fiecăreia dintre cele „m" ecuații. (deci înlocuind necunoscutele x_i cu constantele α_i, $i = \overline{1,n}$ în fiecare ec. acestea sunt verificate $\Leftrightarrow$ egalitățile sunt adevărate $\Leftrightarrow a_{i1}\alpha_1 + a_{i2}\alpha_2 + \dots + a_{in}\alpha_n = b_i$, $\forall i$)

Obs: Un sistem de ecuații liniare (sistem liniar) de forma (1.4) poate să:

a) aibă o unică soluție $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$, sistemul numindu-se compatibil determinat (compatibil = are soluție, determinat = este unică)

b) aibă mai multe soluții (o infinitate) $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, sistemul numindu-se compatibil nedeterminat (compatibil = are soluție ; nedeterminat = nu este unică, sunt mai multe)

c) nu aibă soluție ($S = \emptyset \to$ mulțimea vidă), sistemul numindu-se incompatibil (= nu are soluție)

Obs: dacă un sist. este incompatibil, înseamnă că nu există ($\nexists$) o soluție comună tuturor celor „m" ec. liniare (atenție, fiecare ec. lin. are o infinitate de soluții așa cum am văzut anterior, dar nu există o soluție (aceeași) pentru fiecare în parte)

Pentru a se vedea câte soluții are/nu are un sistem liniar (ce tip de sistem este) se folosește noțiunea de rang al unei matrici. Astfel, dacă:

a) $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A} \Rightarrow$ sist. (1.4) este compatibil

a$_1$) $r_A = r_{\bar{A}} = n$ (nr. de necun.) $\Rightarrow$ sist. (1.4) este compatibil determinat (sol. unică)

a$_2$) $r_A = r_{\bar{A}} < n$ (nr. de necun.) $\Rightarrow$ sist. (1.4) este compatibil nedeterminat (are o ∞ de soluții)

b) $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang} \bar{A} \Rightarrow$ sist. (1.4) este incompatibil (nu are soluție)

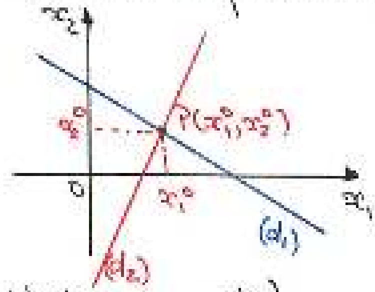
Obs: not: $\operatorname{rang} A = r_A \to$ rangul matricei A

Interpretare geometrică (pt $n=2$ → două necunoscute, $m=2$ → două ecuații)

Fie sistemul liniar (1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 & (d_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 & (d_2) \end{cases}$

Fiecare din cele două ec. lin. cu două necun. are mulțimea soluțiilor o dreaptă din planul x_1Ox_2. Sunt posibile următoarele 3 situații:

a) sistem. comp. deter. (sol. unică)

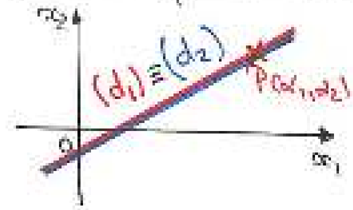


(drepte concurente)

soluția unică este (x_1^0, x_2^0), punctul P aflându-se pe ambele drepte $\begin{cases} (P \in d_1 \Rightarrow (x_1^0, x_2^0) \text{ soluție a primei ec. lin}) \\ (P \in d_2 \Rightarrow (x_1^0, x_2^0) \text{ soluție a celei de a doua ec. lin}) \end{cases}$

Obs: (i) sist.(1) are soluție unică ⇔ dreptele se intersectează într-un (singur) punct
(ii) aici $r_A = r_{\bar{A}} = 2$ cu $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right)$

b) sist. compat. nedeterminat (o infinitate de soluții)

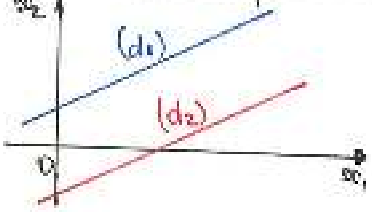


(drepte care coincid)

Coordonatele (α_1, α_2) ale oricărui punct $P(\alpha_1, \alpha_2)$ de pe cele două drepte (care coincid) sunt soluții ale sist. (1)

Obs: (i) sist.(1) are o infinitate de soluții ⇔ dreptele coincid
(ii) $r_A = r_{\bar{A}} = 1 < 2$ (nr. nec.)
(iii) dreptele coincid dacă toți coeficienții lor sunt proporționali, adică: $\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2} = \alpha$ $\left(\text{Ex: } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases} \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} \right)$

c) sist. incompatibil (nu are soluție)



(drepte paralele)

Dreptele fiind paralele ⇔ nu au nici un punct comun ⇔ nu există o soluție comună a celor 2 ecuații ⇔ sist. nu are soluții

Obs: (i) sist.(1) nu are soluție ⇔ dreptele sunt ∥
(ii) $r_A = 1 \neq r_{\bar{A}} = 2$
(iii) dreptele sunt paralele, dacă coeficienții necun. sunt propor. dar nu și termenii liberi, adică:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \alpha \neq \frac{b_1}{b_2}; \quad \left(\text{Ex } \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 4x_2 = 4 \end{cases} \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{4} \neq \frac{3}{4} \right)$$

Obs: dacă sistemul (1) ar avea $3, 4, \dots, m$ ec. lin. cu 2 nec., atunci analizăm pozițiile relative ale $3, 4, \dots, m$ drepte din planul x_1Ox_2 (dreptele: $(d_1), (d_2), \dots, (d_m)$) ceea ce devine „puțin" cam complicat.

Ex (economic/real/practic)

a) Mihai este rugat de mama sa să cumpere niște fructe de la magazinul de la parterul blocului vecin, deoarece îi vin în vizită niște prietene. Văzând că întârzie, o trimite și pe sora lui, Ioana, pentru a face aceleași cumpărături. Ioana se întoarce repede și îi spune mamei că a cumpărat 1 kg de caise și 2 kg de zmeură care au costat 19 lei. După un timp se întoarce și Mihai (făcuse un fotbal scurt cu prietenii) care cumpărase 2 kg de caise (îi plăceau tare) și 1 kg de zmeură pe care plătise 17 lei. Copiii fiind mici nu au știut să-i spună mamei cât a costat fiecare fel de fruct. Aflați voi!

Dem: not cu: $\begin{cases} x_1 - \text{costul unui kg de caise (în lei)} \\ x_2 - \text{costul unui kg de zmeură (în lei)} \end{cases}$

Atunci avem: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 & / \cdot(-2) \\ 2x_1 + x_2 = 17 & + \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 & + \\ \quad -3x_2 = -21 & / \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \Big| \cdot \frac{2}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \end{cases}$

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 19 \\ 2 & 1 & 17 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} / \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 0 & \boxed{-3} & -21 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} + \\ / \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \Big| \cdot\left(\frac{2}{3}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 7 \end{cases}$$

transformări elementare (!)

Deci $\begin{cases} x_1 = 5 \text{ (lei)} \to \text{costul unui kg de caise} \\ x_2 = 7 \text{ (lei)} \to \text{costul unui kg de zmeură} \end{cases}$

Sist. are soluție unică $\Rightarrow$ este compatibil determinat

Obs: $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 4 = -3 \neq 0 \Rightarrow r_A = 2 = r_{\bar{A}} = $ nr. de nec. $\Leftrightarrow$ sist este comp. det. (sol. unică)

---

b) același enunț, dar Mihai cumpără două kg de caise și 4 kg de zmeură pe care plătește 38 de lei

Dem: sist. lin. devine: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 & / \cdot(-2) \\ 2x_1 + 4x_2 = 38 & + \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 \\ \underbrace{0 = 0}_{\Downarrow} \end{cases}$

sistemul se reduce la o singură ecuație cu 2 nec. care are (teoretic) o infinitate de soluții (comp. nedet.)

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 19 \\ 2 & 4 & 38 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} / \cdot(-2) \\ + \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 19 - 2\alpha \\ x_2 = \alpha \in \mathbb{R} \ (!!, \alpha > 0, \alpha < 19 \end{cases}$$

necunosc. princ. nec. sec.

$S = \{(\underbrace{19 - 2\alpha}_{= x_1}, \underbrace{\alpha}_{= x_2}) / \alpha \in \mathbb{R}\}$

constr. economice $\alpha \in (0, 19)$

Deci mama nu poate stabili cât costă fiecare tip de fructe (nu are suficiente informații independente!)

Obs: $\det A \left(\overset{not}{=} |A|\right) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4-4=0 \Rightarrow \underline{\operatorname{rang} A = 1}$

$\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 2 & 4 & 38 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 1 & 19 \\ 2 & 38 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 4 & 38 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{rang} \bar{A} = 1$

$\Rightarrow r_A = r_{\bar{A}} = 1 < 2 = \text{nr. nec.}$

$\Downarrow$

<u>sist. comp. nedeterminat</u>

c) același enunț, dar Mihai cumpără 2 kg de caise și 4 kg de zmeură pe care spune că a plătit 40 de lei (pentru a ascunde că a luat și o înghețată pe care a dat 2 lei)

Dem: Sist. lin. devine: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 & \mid \cdot(-2) \\ 2x_1 + 4x_2 = 40 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 19 \\ 0 = 2 \ (F) \end{cases}$

$\Downarrow$

sistemul are o egalitate care este imposibilă $\Rightarrow$ este <u>incompatibil</u> (nu are soluții)

$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 2 & 4 & 40 \end{array}\right) \end{array} \sim$

$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 19 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right) \end{array} \Leftrightarrow 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 2 \ (F)$

Evident, mama își dă seama că ceva este "putred" (ori copiii au mințit, ori au fost înșelați de vânzătoare)