

11. Problema de programare liniară:
$$\begin{cases} (1) (\max) f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 - 3x_3 \\ (2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 12 \end{cases} \\ (3) x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
 se rezolvă aplicând metoda

celor două faze. Rezolvând problema artificială atașată (în faza I), precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) funcția obiectiv are coeficienții: **-1, 2, 3, 0, 0;**
- b) soluția inițială (de plecare) a fazei I este: $X_{\text{inițială}}^{\text{artificială}} = (0, 0, 0, 12, 9)^T$;
- c) diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei I au valorile: **1, 2, -1, 0, 0;**
- d) vectorul care intră în bază este P_2 ;
- e) pivotul schimbării de bază este egal cu 1;
- f) în noua bază, vectorul P_1 are componentele: $P_1 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})^T$;
- g) soluția optimă a problemei artificiale este: $X_{\text{optimă}}^{\text{artificială}} = (0, \frac{9}{2}, 0, \frac{15}{2}, 0)^T$;
- h) valoarea optimă (minimă) a funcției artificiale este egală cu **0**.

12. Pentru aceeași problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând în faza a II-a problema în forma standard, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) coeficienții funcției obiectiv sunt: **-1, 2, 3, 0;**
- b) soluția inițială (de plecare) a fazei a II-a este: $X_{\text{inițială}}^{\text{standard}} = (0, \frac{9}{2}, 0, \frac{15}{2})^T$;
- c) valoarea funcției obiectiv în soluția inițială este egală cu **9;**
- d) diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: **2, 0, -2, 0;**
- e) vectorul care intră în bază este P_3 ;
- f) vectorul care iese din bază este P_4 ;
- g) în noul tabel Simplex diferența $z_3 - c_3 = 0$;
- h) soluția optimă a problemei inițiale este unică.

13. Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

„Un om de afaceri dorește să investească suma de 100.000 lei pe piața de capital. În tabelul de mai jos sunt date opțiunile pe care le are, rata de profit anuală estimată și comisioanele de brokeraj care trebuie să le plătească:

Tip produs	Profitul anual (în % din suma investită)	Comision broker (în % din suma investită)
Acțiuni la firma XYZ (A)	12%	0,8%
Bond-uri guvernamentale (B)	8%	0,9%
Certificate de depozit (C)	10%	1,1%
Derivate financiare (D)	16%	0,7%

Datorită faptului că produsele (B) și (C) au risc investițional zero respectiv foarte mic, investitorul dorește să investească în cele două produse cel puțin 50% din sumă, dar suma investită în produsul (C) să fie cu cel puțin 10.000 lei mai mare decât cea pentru produsul (B). Produsul (D) aduce cel mai mare profit dar are și cel mai mare risc, astfel că acesta nu vrea să investească mai mult de 15.000 lei în acest produs. În plus investitorul nu vrea să plătească un comision total mai mare de 800 lei. Să se determine planul optim de investiții pe care o firmă de brokeraj ar trebui să-l propună investitorului și care să țină cont de cerințele acestuia.”

13) Plan optim de investiții = profit maxim al investitorului în condițiile expuse în problemă

not: x_1 - suma (în lei) pe care o va investi omul de afaceri în acțiuni la firma XYZ;
 x_2 - suma (în lei) ————— " ————— " ————— în bonduri guvernamentale
 x_3 - suma (în lei) ————— " ————— " ————— în certificate de depozit
 x_4 - suma (în lei) ————— " ————— " ————— în derivate financiare

- (1) $(\max) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,12x_1 + 0,08x_2 + 0,10x_3 + 0,16x_4 \rightarrow$ profitul (în lei) obținut ca urmare a investițiilor făcute
- (2) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 100.000 \text{ (lei)} \rightarrow \text{totalul sumelor investite în cele 4 active financiare nu poate depăși capitalul disponibil al investitorului} \\ x_2 + x_3 \geq 50.000 \text{ (lei)} \rightarrow \text{sumele investite în produsele (B) și (C) trebuie să } \geq 50\% \cdot 100.000 \text{ lei} \\ x_3 \geq x_2 + 10.000 \text{ (lei)} \rightarrow \text{suma investită în (C) mai mare ca } 10.000 \text{ lei decât cea în B} \\ x_4 \leq 15.000 \text{ (lei)} \rightarrow \text{suma investită în produsul D să fie maxim 15.000 lei} \\ 0,008x_1 + 0,009x_2 + 0,011x_3 + 0,007x_4 \leq 800 \text{ (lei)} \rightarrow \text{comisionul total să nu depășească 800 lei} \end{cases}$
- (3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \rightarrow$ sumele investite nu pot fi negative, ar fi absurd
 (dacă $(\exists) x_j = 0 \Rightarrow$ nu se va investi în produsul respectiv \Leftrightarrow nu se vor cumpăra acele active financiare.)

Obs:

i) expresia profitului putea fi scrisă și:

$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 12x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 16x_4$ (în % din suma investită), deci valoarea lui f în soluție optimă reprezintă câștigul maxim în „% din sumă” și nu în lei

Ex $f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) = 987623 \text{ (în \%)} = 9876,23 \text{ lei}$ ($x\% = \frac{x}{100}$)

ii) dacă în prima restricție am fi pus „=” adică: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100.000$ (deci condiție mai restrictivă decât cu „ \leq ”) am fi obligat ca planul de investiții cerut să folosească toată suma avută la dispoziție. În acest caz problema putea să nu aibă soluții (să nu existe un astfel de plan) sau să obținem o soluție optimă = profit maxim care să aibă o rată (procent) de profit mai mică decât dacă am fi folosit mai puțin bani!!

Ex a) pp. cî pînă $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 100.000 \text{ lei} \Rightarrow \frac{f(x_{opt})}{\text{profit max.}} = 9.000 \text{ lei} \Rightarrow \text{rata de profit} = 9\%$

b) pp.că pînă $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 85.000 \text{ lei} < 100.000 \Rightarrow \text{profit max.} = 8.700 \text{ lei} \Rightarrow \text{rata de profit} = 10,24\%$

11. Problema de programare liniară:
$$\begin{cases} (1) (\max) f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ (2) \begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \end{cases} \\ (3) x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
 se rezolvă aplicând

metoda celor două faze. Rezolvând problema artificială atașată (faza I), precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) în forma standard, problema artificială are 5 variabile;
- b) în primul tabel Simplex a fazei I, avem: $z_1 - c_1 = 2$ și $z_3 - c_3 = 1$;
- c) valoarea funcției artificiale în soluția inițială este egală cu 27;
- d) soluția inițială a problemei artificiale este: $X_{\text{artificiala}}^{\text{initiala}} = (0, 0, 0, 12, 15)^T$;
- e) în următorul tabel Simplex, variabilele principale (bazice) sunt x_1 și x_4 ;
- f) noua soluție obținută este: $X_1^{\text{artificiala}} = (21, 6, 0, 0, 0)^T$;
- g) soluția optimă a problemei artificiale se obține după o singură schimbare de bază;
- h) valoarea optimă (minimă) a funcției artificiale este egală cu 27.

12. Pentru aceeași problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând în faza a II-a problema în forma standard, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) coeficienții funcției obiectiv sunt: -2, 1, -3, 0;
- b) valoarea funcției obiectiv în soluția inițială este egală cu 12;
- c) diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: 0, 2, -2, 0;
- d) vectorul care intră în bază este P_2 ;
- e) vectorul care iese din bază este P_4 ;
- f) în noul tabel Simplex se obține soluția de bază: $X_1^{\text{standard}} = (0, 12, 0, 3)^T$;
- g) noua soluție obținută (în al doilea tabel Simplex al fazei I) nu este soluție optimă;
- h) valoarea optimă a funcției obiectiv pentru problema inițială este: -12.

13. Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

„O rafinărie dorește să încheie un contract pentru transporta un milion de hl (1hl=1hectolitru=100 l) de produse petroliere către distribuitorii săi (stații PECO). Compania de transport selectată dispune de trei tipuri de cisterne, al căror număr, capacitate maximă de transport și cost anual de închiriere sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Tip de cisternă	Număr (buc.)	Capacitate maximă (hl)	Cost anual (mii lei/buc)
Large (L)	30	200	115
Medium (M)	50	120	95
Small (S)	20	75	70

Știind că pentru acest tip de transport este necesară o autorizație specială, iar numărul de șoferi autorizați pe care îi are firma de transport este de 85, din care doar 70 au autorizația necesară să conducă cisternele de tipul (L) și (M), să se determine prețul optim cu care trebuie încheiat contractul.”

(13) pret optim = pret minim (de transport)

not: $\begin{cases} x_1 = \text{nr. de cisterne de tip (L) care vor fi folosite la transportul produselor petroliere;} \\ x_2 = \text{nr. de cisterne de tip (M) } \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\ x_3 = \text{nr. de cisterne de tip (S) } \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \end{cases}$

(1) (min) $f(x_1, x_2, x_3) = 115.000 x_1 + 95.000 x_2 + 70.000 x_3$ (în lei) \rightarrow costul total (anual) al transportului
 $= 115 x_1 + 95 x_2 + 70 x_3$ (în mii lei) \rightarrow telem

(2) $\begin{cases} 200 x_1 + 120 x_2 + 75 x_3 = 1000.000 \text{ (în hl)} \rightarrow \text{capacitatea totală de transport anuală și fie} \\ x_1 \leq 30 \rightarrow \text{(cel puțin) egale cu 1 milion de hl;} \\ x_2 \leq 50 \\ x_3 \leq 20 \end{cases}$

\rightarrow nu putem folosi mai multe cisterne (din fiecare tip) decât nr. avut la dispoziție de transportator;

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 85 \rightarrow$ un șofer conduce o cisternă, deci nu pot fi folosite mai multe cisterne decât nr. total de șoferi;

$x_1 + x_2 \leq 70 \rightarrow$ nu pot fi folosite la transport mai multe cisterne de tip (L) și (M) decât numărul șoferilor care pot conduce acest tip de cisternă;

(3) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
 (eventual $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$) \rightarrow $\begin{cases} x_i > 0 \rightarrow \text{folosesc nr. } x_i \text{ de cisterne de tipul } i \text{ la transport} \\ x_i = 0 \rightarrow \text{nu folosesc cisterne de tipul } i \text{ la transport} \\ x_i < 0 \rightarrow \text{absurd (folosesc un nr. negativ de cisterne, de} \\ \text{ex: } x_2 = -8 \Rightarrow \text{"-8" cisterne de tip (M) ??} \end{cases}$

Ob: evident dorim o soluție care să aibă componentele nr. întregi (neterele): Ce ar însemna, dacă să pp. soluția optimă ar fi: $X_{\text{optim}} = (18,3; 42,7; 12,5)^T$

Înseamnă $\begin{cases} 18,3 \text{ cisterne de tip (L)} \\ 42,7 \text{ cisterne de tip (M)} \\ 12,5 \text{ cisterne de tip (S)} \end{cases}$?

ii) $f = 115.000 \text{ lei}$ $\xrightarrow{\text{costul de încălzire a}}$ $\frac{\text{cisternă tip L}}{\text{an}}$ $\cdot x_1$ (nr. de cisterne tip (L) folosite ~~an~~) + ...

iii) $200 \text{ (hl / cisternă (L))} \cdot x_1$ (nr. de cisterne tip (L)) + ...
 \rightarrow se simplifică

11. Problema de programare liniară:
$$\begin{cases} (1) (\min) f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + 2x_3 \\ (2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 18 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 20 \end{cases} \\ (3) x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
 se rezolvă aplicând metoda

celor două faze. Rezolvând problema artificială atașată (faza I), precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) funcția obiectiv are coeficienții: **0, 0, 0, 0, 1**;
- b) soluția inițială (de plecare) a fazei I este: $X_{\text{inițială}}^{\text{artificială}} = (0, 0, 0, 18, 20)^T$;
- c) diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei I au valorile: **-2, 1, -3, 0, 0**;
- d) valoarea funcției obiectiv (a funcției artificiale) în primul tabel Simplex este egală cu **18**;
- e) la prima schimbare de bază, iese din bază vectorul P_5^a ;
- f) pivotul primei schimbări de bază este egal cu **2**;
- g) în noul tabel Simplex vectorul P_2 are componentele: $P_2 = (-\frac{1}{3}, \frac{10}{3})^T$;
- h) soluția optimă a problemei artificiale este: $X_{\text{optimală}}^{\text{artificială}} = (0, 0, 6, 14, 0)^T$.

12. Pentru aceeași problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând în faza a II-a problema în forma standard, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) coeficienții funcției obiectiv sunt: **-1, 2, -2, 0**;
- b) soluția inițială (de plecare) a fazei a II-a este: $X_{\text{inițială}}^{\text{standard}} = (0, 0, 6, 14)^T$;
- c) în primul tabel Simplex al fazei a II-a, avem diferențele: $z_1 - c_1 = \frac{1}{3}$ și $z_4 - c_4 = 0$;
- d) valoarea funcției obiectiv din primul tabel Simplex al fazei a II-a este egală cu **12**;
- e) vectorul care intră în bază este P_1 ;
- f) vectorul care iese din bază este P_4 ;
- g) noua soluție de bază găsită este $X_1^{\text{standard}} = (0, \frac{21}{5}, \frac{37}{5}, 0)^T$;
- h) valoarea optimă a funcției obiectiv a problemei inițiale, este egală cu $\frac{32}{5}$.

13. Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

„O firmă de produse cosmetice dorește să-și promoveze produsele, bugetul alocat fiind de 1.500.000 Euro. Compania de publicitate cu care firma lucrează propune următoarele 4 tipuri de publicitate:

Tip de publicitate	Cost	Nr. minim de acțiuni
TV	2.800 Euro/minut	150 minute
Radio	850 Euro/minut	400 minute
Internet	250 Euro/anunț	350 anunțuri
Flayere	15.000 Euro/campanie	5 campanii

cu mențiunea că pentru a beneficia de prețurile (cele din tabel) promoționale oferite de trusturile de presă care dețin companiile de radio-tv, suma totală pentru reclama radio-tv trebuie să fie de minim un milion de Euro. Să se determine un plan optim de publicitate, știind că cifra de vânzări a companiei crește cu fiecare acțiune publicitară efectuată.”

⑬ plan optim de publicitate = nr. maxim de acțiuni publicitare (trebuie să conțină mă - car nr. minim propus) dar care să coste cât mai puțin.

not: x_1 = nr. de minute de publicitate TV (care vor fi folosite în campania publicitară)
 x_2 = nr. de minute de publicitate Radio (din campania publicitară)
 x_3 = nr. de anunțuri postate pe internet (— — — —)
 x_4 = nr. de campanii de tipărire și distribuire de flyere (— — — —)

(1) (min) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2.800x_1 + 850x_2 + 250x_3 + 15.000x_4$ (în Euro) } → costul total (minim)
 $= 2,8x_1 + 0,85x_2 + 0,25x_3 + 15x_4$ (în mii Euro) } al campaniei publicitare

(2) $\begin{cases} x_1 \geq 150 \text{ (min)} \\ x_2 \geq 400 \text{ (min)} \\ x_3 \geq 350 \text{ (anunțuri)} \\ x_4 \geq 5 \text{ (campanii)} \end{cases}$ } → trebuie organizate măcar numărul minim de acțiuni publi - citare (din fiecare tip), conform recomandării companiei de publicitate

$2.800x_1 + 850x_2 \geq 1.000.000$ (Euro) → costul total al campaniei publicitare Radio-TV să fie minim de 1 milion Euro pentru a beneficia de prețurile promoționale din tabel.

$2.800x_1 + 850x_2 + 250x_3 + 15.000x_4 \leq 1.500.000$ (Euro) → costul total al campaniei publicitare nu trebuie să depășească bugetul de publicitate alocat

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ → nr. de minute / nr. de anunțuri / nr. de campanii nu pot fi negative!!

Obs:

- funcția obiectivă putea fi considerată și de forma:

(1) (max) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ ≠ nr. maxim de acțiuni (minute + anunțuri + campanii) publicitare, deoarece profitul companiei este proporțional cu nr. de acțiuni publicitare

- totuși, în realitate, depășirea target-ului de publicitate propus de agențiile specializate nu duce la o creștere substantiată a vânzărilor; eficiența unei "supra publicități" este extrem de scăzută în creșterea vânzărilor (deci implică în creșterea profitului)

De ex: - dacă la un buget de publicitate de 1.000.000 Euro cifra de vânzări este răspunsuri de 10% la un buget de 2.000.000 cifre de vânzări nu va crește de 20% ci poate de 11% sau 12%. Deci "eficiența" celui de-al doilea milion de Euro este extrem de scăzută, comparativ cu primul milion de Euro investit!!!

11. Problema de programare liniară:
$$\begin{cases} (1) (\max) f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 - 2x_3 \\ (2) \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 21 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 18 \end{cases} \\ (3) x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
 se rezolvă aplicând metoda

celor două faze. Rezolvând problema artificială atașată (faza I), precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) coeficienții funcției obiectiv din tabel sunt: **1, -1, -2, 0, 0**;
- b)** baza din primul tabel Simplex este formată din vectorii P_4^c și P_5^a ;
- c) soluția inițială (de plecare) a fazei I este: $X_{\text{inițială}}^{\text{artificială}} = (0, 0, 0, 18, 21)^T$;
- d) diferențele din primul tabel Simplex al fazei I au valorile: $z_1 - c_1 = 0$ și $z_3 - c_3 = -3$;
- e)** vectorul care intră în bază este P_3 ;
- f)** vectorul care iese din bază este P_5^a ;
- g)** noua soluție obținută este: $X_1^{\text{artificială}} = (0, 0, 6, 33, 0)^T$;
- h) soluția optimă a problemei artificiale este: $X_{\text{optimă}}^{\text{artificială}} = (33, 6, 0, 0, 0)^T$.

12. Pentru aceeași problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând faza a II-a problema în forma standard, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a)** coeficienții funcției obiectiv sunt: **-1, 1, 2, 0**;
- b)** valoarea funcției obiectiv în soluția inițială este egală cu **12**;
- c)** diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a, au valorile: **5/3, -5/3, 0, 0**;
- d)** intră în bază vectorul P_1 ;
- e) pivotul transformării (a schimbării de bază) are valoarea egală cu **1/3**;
- f) noua soluție obținută este $X_1^{\text{standard}} = (9, 3, 0, 0)^T$;
- g)** valoarea funcției obiectiv în noua soluție este egală cu **-3**;
- h)** soluția optimă a problemei inițiale este: $X_{\text{optimă}}^{\text{inițială}} = (9, 0, 3)^T$ și este unică.

13. Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

„Universitatea „Al. I. Cuza” dorește să construiască un cămin nou pentru studenți care va trebui să aibă 450 de locuri de cazare în camere cu 2, 3 și 4 locuri. Suprafața camerelor, sumele necesare pentru dotarea acestora și prețul plătit de student pentru un loc, sunt prezentate în tabelul de mai jos:

Tip cameră	Suprafața camerei (m ²)	Sume pentru dotare (lei/cameră)	Preț loc în cameră (lei/an)
Cu 2 paturi (C2)	14	4.000	5.000
Cu 3 paturi (C3)	18	3.200	3.500
Cu 4 paturi (C4)	22	2.500	3.000

Costul de construcție este de 1.000 lei/m² iar universitatea are prevăzută în buget suma de 3 milioane lei pentru această construcție și suma de 500.000 lei pentru dotarea acestora. Senatul universității a cerut ca numărul camerelor cu 4 locuri să fie de cel puțin jumătate din total, dar să fie prevăzute maxim 120 de camere cu două sau trei locuri. Să se determine un plan optim de construcție (amenajare) al căminului.”

1.3) plan optim de construcție = un proiect care să respecte cerințele economice și sociale care dar care să aducă un profit maxim universității (după ce căminul va fi construit) din taxele achitate de studenți pe 1bc/camero.

not: $\begin{cases} x_1 = \text{nr. de camere cu două locuri (care urmează a fi construite)} \\ x_2 = \text{nr. de camere cu trei locuri (} \text{---} \text{---} \text{---} \text{)} \\ x_3 = \text{nr. de camere cu patru locuri (} \text{---} \text{---} \text{---} \text{)} \end{cases}$

(1) $(\max) f(x_1, x_2, x_3) = 2 \times 5.000 \cdot x_1 + 3 \times 3.500 \cdot x_2 + 4 \times 3.000 \cdot x_3 = 10.000x_1 + 10.500x_2 + 12.000x_3$ (în lei)

$\begin{matrix} \swarrow & \downarrow & \swarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{(nr. studenți/cam)} & \cdot & \text{(diviz anuale)} & \cdot & \text{(nr. de camere)} \\ & \text{pe 1bc/cam} & & & \text{cu 2 locuri} \end{matrix}$

\downarrow profitul total anual (maxim) din închiriere a tuturor camerelor cu 2, 3, 4 locuri.

(2) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 450 \text{ (locuri în camere)} \rightarrow \text{nr. total de locuri de cazare trebuie să fie 450,} \\ 14 \times 1.000 \cdot x_1 + 18 \times 1.000 \cdot x_2 + 22 \times 1.000 \cdot x_3 \leq 3.000.000 \text{ (€)} \\ 4.000x_1 + 3.200x_2 + 2.500x_3 \leq 500.000 \text{ (în lei)} \\ x_3 \geq \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3) \rightarrow \text{nr. de camere cu 4 locuri să fie } \underline{\text{minimum}} \text{ jumătate din totalul camerelor} \\ x_1 + x_2 \leq 120 \rightarrow \text{nr. de camere cu 2 și 3 locuri trebuie să fie maxim de 120 camere} \end{cases}$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{(nr. de m}^2) & \cdot & \text{(preț p}^2) & \cdot & \text{(nr. de camere)} \\ & & & & \text{---} \end{matrix}$

$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{cost total de construcție al unei camere cu 2 locuri} & \cdot & \text{(nr. total de camere cu 2 locuri care vor fi construite)} & + & \dots \end{matrix}$

suma totală pt. dotarea tuturor camerelor nu trebuie să depășească bugetul alocat

(3) $x_1, x_2, x_3 \geq 0 \rightarrow$ nu pot construi un nr. negativ de camere $(x_i > 0 \rightarrow \text{construiesc cam. de tip } "i")$
 $(x_i = 0 \rightarrow \text{nu construiesc cam. de tip } "i")$

Obs. $(x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N})$

\downarrow

soluția optimă ar trebui să aibă numai componente întregi (naturale)

de ex. ca ar însemna $x_1^{\text{optim}} = 13,47$ camere cu două locuri?!

11. Problema de programare liniară:
$$\begin{cases} (1) (\min) f(x_1, x_2, x_3) = x_1 - 2x_2 + x_3 \\ (2) \begin{cases} -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 16 \end{cases} \\ (3) x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
 se rezolvă aplicând metoda

celor două faze. Rezolvând problema artificială atașată (în faza I), precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) problema artificială conține o singură variabilă artificială;
- b) coeficienții funcției obiectiv din tabelul Simplex sunt : **1, -2, 1, 0, 0**;
- c) soluția inițială (de plecare) a fazei I este: $X_{\text{inițială}}^{\text{artificială}} = (0, 0, 0, 10, 16)^T$;
- d) funcția obiectiv are în primul tabel Simplex valoarea: **10**;
- e) la prima schimbare de bază, intră în bază vectorul P_3 și iese vectorul P_5 ;
- f) pivotul schimbării de bază este egal cu **1**;
- g) noua soluție obținută este: $X_1^{\text{artificială}} = (0, 0, 0, 5, 11)^T$;
- h) soluția optimă a problemei artificiale se obține după o singură schimbare de bază.

12. Pentru aceeași problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând în faza a II-a problema în forma standard, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) problema conține 2 variabile de compensare;
- b) coeficienții funcției obiectiv din tabelul Simplex sunt: **-1, 2, -1, 0**;
- c) soluția inițială (de plecare) a fazei a II-a este: $X_{\text{inițială}}^{\text{standard}} = (0, 0, 5, 11)^T$;
- d) diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: **-5/2, 5/2, 0, 0**;
- e) vectorul care intră în bază este P_1 ;
- f) pivotul schimbării de bază este egal cu **1/2**;
- g) noua soluție obținută este: $X_1^{\text{standard}} = (0, 10, 0, 6)^T$;
- h) soluția de bază obținută în al doilea tabel Simplex al fazei a II-a, este soluție optimă.

13. Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

„O fabrică de mobilă produce patru tipuri de mobilă: dulapuri, mese, paturi și scaune. Pentru fiecare tip de mobilier avem următoarele date:

Tip mobilier	Cantitate de lemn (m ² /buc.)	Ore de muncă (nr. ore/buc.)	Preț de vânzare (lei/buc.)
Dulapuri (D)	12	12	1.500
Mese (M)	2,5	5	600
Paturi (P)	5,5	7	1.100
Scaune (S)	0,8	2	150

și are un contract ferm cu un magazin specializat de mobilă pentru producerea lunară a minim 20 de dulapuri și 30 de paturi. Fabrica poate produce minim 1.000 de piese de mobilier lunar, dar datorită utilajelor folosite nu poate produce mai mult de 700 de paturi și mese la un loc, respectiv 500 de dulapuri și scaune. Știind că, fabrica este aprovizionată lunar cu cantitatea de 5.000 m² de cherestea și are un număr de 50 de muncitori care lucrează în medie 8 ore/zi timp de 20 de zile pe lună, să se determine planul lunar optim de producție.”

13) plan optim de producție = profit maxim din vânzarea produselor de mobilier, care este (evident) direct proporțional cu prețul de vânzare al acestora (profit maxim \Leftrightarrow cifra totală de vânzări este maximă)

not: $\begin{cases} x_1 = \text{nr. de dulapuri care urmează a fi fabricate;} \\ x_2 = \text{nr. de mese} \\ x_3 = \text{nr. de paturi} \\ x_4 = \text{nr. de scaune} \end{cases}$

(1) $(\max) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1.500 x_1 + 600 x_2 + 1.100 x_3 + 150 x_4$ (in lei) = cifra totală de vânzări
 (preț unit.) \cdot (nr. de dulapuri) + +
 a „ x_1 ” dulapuri, „ x_2 ” mese, „ x_3 ” paturi, „ x_4 ” scaune

(2) $\begin{cases} x_1 \geq 20 & \text{(buc)} \quad \text{trebuie fabricate minim 20 de dulapuri conform contractului firmă închiat} \\ x_3 \geq 30 & \text{(buc)} \quad \text{trebuie fabricate minim 30 de paturi} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1.000 & \text{(buc)} \rightarrow \text{se pot fabrica lunar minim 1.000 de piese de mobilier;} \\ x_2 + x_3 \leq 700 & \text{(buc)} \rightarrow \text{nu se pot fabrica lunar mai mult de 700 de mese și paturi la un loc;} \\ x_1 + x_4 \leq 500 & \text{(buc)} \rightarrow \text{1500 de dulapuri și scaune la un loc;} \\ 12x_1 + 2,5x_2 + 5,5x_3 + 0,8x_4 \leq 5.000 & \text{(m}^3\text{)} \rightarrow \text{cantitatea lunară de cherestea necesară} \\ 12x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 \leq 8.000 & \text{(pre muncă)} \rightarrow \text{ptr. a fabrica cantitățile } x_1, x_2, x_3, x_4 \text{ de piese de mobilier nu poate depăși cantitatea de } 5.000 \text{ m}^3 \text{ de cherestea avută la dispoziție;} \end{cases}$

nr. Lună de ore de muncă necesare ptr. a se fabrica cantitățile x_1 de dulapuri, x_2 de mese, x_3 de paturi și x_4 de scaune nu poate depăși disponibil de: $50 \text{ muncitori} \times 80 \text{ ore/lun} \times 20 \text{ zile/lun} = 8.000 \text{ ore/lun}$ — avută la dispoziție

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ (eventual $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$) \rightarrow nu pot produce un nr. negativ de piese de mobilier!!

Obs: chiar dacă în problema contractul firmă ar fi fost închiat pentru exact 20 de dulapuri și exact 30 de paturi, restricțiile ar fi rămas la fel ($x_1 \geq 20$ și $x_3 \geq 30$) deoarece fabrica trebuie să producă și în afara contractelor firme deja închiate!!

11. Problema de programare liniară:
$$\begin{cases} (1) (\max) f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ (2) \begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 16 \end{cases} \\ (3) x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
 se rezolvă aplicând metoda

celor două faze. Rezolvând problema artificială atașată (în faza I), precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) problema artificială conține două variabile artificiale;
- b) coeficienții funcției obiectiv din tabelul Simplex atașat fazei I, sunt: **0, 0, 0, 0, 1**;
- c) soluția inițială (de plecare) a fazei I este: $X_{\text{inițială}}^{\text{artificială}} = (0, 0, 0, 15, 16)^T$
- d) diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei I au valorile: **1, 3, 1, 0, 0**;
- e) vectorul care intră în bază este P_2 ;
- f) vectorul care iese din bază este P_4 ;
- g) noua soluție obținută este: $X_1^{\text{artificială}} = (0, 5, 0, 11, 0)^T$;
- h) soluția obținută după prima schimbare de bază nu este optimă;

12. Pentru aceeași problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând faza a II-a problema în forma standard, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) soluția inițială (de plecare) a fazei a II-a este: $X_{\text{inițială}}^{\text{standard}} = (0, 5, 0, 11)^T$;
- b) valoarea funcției obiectiv în soluția inițială este egală cu **15**;
- c) diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: **0, 0, 2, 0**;
- d) vectorul care intră în bază este P_1 ;
- e) vectorul care iese din bază este P_4 ;
- f) pivotul schimbării de bază are valoarea **2/3**;
- g) noua soluție de bază obținută este: $X_1^{\text{standard}} = (0, 0, 15, 46)^T$;
- h) valoarea optimă a funcției obiectiv a problemei inițiale este: **15**.

13. Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

„O fabrică de dulciuri produce trei tipuri de bomboane pentru sărbătorile de iarnă, folosind: lapte praf, cacao și unt. Cantitățile necesare și prețul acestora sunt în tabelul de mai jos:

Tip bomboane	Lapte praf (kg/100 buc.)	Cacao (kg/100 buc.)	Unt (kg/100 buc.)	Preț (lei/1.000 buc.)
T_1	0,8	0,2	0,3	1.300
T_2	0,9	0,1	0,2	1.100
T_3	0,7	0	0,4	900

Fabrica dispune zilnic de următoarele cantități: 10 tone de lapte praf, 500 Kg de cacao și 1,5 tone de unt iar capacitatea maximă de producție a fabricii este 5 milioane de bomboane zilnic. Datorită procesului de fabricație nu se pot fabrica zilnic mai mult 4 milioane de bomboane de tipul T_1 și T_3 la un loc. Din vânzările din anii trecuți s-a observat că cele mai căutate sunt bomboanele de tipul T_2 managementul fabricii decidând ca cantitatea acestora să fie cel puțin egală cu a celorlalte două tipuri. Să se determine un plan optim de producție.”

13) plan optim de producție = să determinăm nr. de bomboane de fiecare tip care urmează a fi fabricate a.î. profitul rezultat în urma vânzării lor să fie maxim

Obs: se pot scrie trei modele diferite (dar echivalente) depinde de unitatea de măsură folosită în notațiile recunoscutelor.

not

$$\begin{cases} x_1 = \text{nr. de bomboane de tipul } (T_1) \text{ care urmează a fi fabricate (în bucăți / sute bucăți / mii buc)} \\ x_2 = \text{nr. de bomboane de tipul } (T_2) \\ x_3 = \text{nr. de bomboane de tipul } (T_3) \end{cases}$$

(1) $(\max) f(x_1, x_2, x_3) = 1,3x_1 + 1,1x_2 + 0,9x_3$ (în lei) (x_1, x_2, x_3 în bucăți)
 $\left(\begin{aligned} &= 130x_1 + 110x_2 + 90x_3 \text{ (în lei)} \text{ (cu } x_1, x_2, x_3 \text{ sute de buc.)} \\ &= 1300x_1 + 1100x_2 + 900x_3 \text{ (în lei)} \text{ (cu } x_1, x_2, x_3 \text{ mii de buc.)} \end{aligned} \right)$ - cifre de vânzări (profit) să fie maximă din vânzarea bomboanelor

(2) $0,008x_1 + 0,009x_2 + 0,007x_3 \leq 10.000$ (în kg) de lapte praf, x_1, x_2, x_3 în bucăți \rightarrow nu pot folosi o cantitate de lapte praf / în producerea a x_1, x_2, x_3 bomboanelor mai mare decât cea disponibilă;
 $\left(\begin{aligned} \text{sau: } 0,8x_1 + 0,9x_2 + 0,7x_3 &\leq 10.000 \text{ (în kg)} \rightarrow \text{cu } x_1, x_2, x_3 \text{ în sute de bucăți} \\ \text{sau: } 8x_1 + 9x_2 + 7x_3 &\leq 10.000 \text{ (în kg)} \rightarrow \text{cu } x_1, x_2, x_3 \text{ în mii de bucăți} \end{aligned} \right)$

$0,002x_1 + 0,001x_2 \leq 500$ (în kg) **pr. cacao**; cu x_1, x_2, x_3 cantitatea în bucăți \rightarrow nu pot folosi mai multă cacao decât cantitatea avută la dispoziție
 $\left(\begin{aligned} \text{sau: } 0,2x_1 + 0,1x_2 &\leq 500 \text{ (în kg)} \text{ , cu } x_1, x_2, x_3 \text{ în sute de bucăți} \\ \text{sau: } 2x_1 + x_2 &\leq 500 \text{ (în kg)} \text{ , cu } x_1, x_2, x_3 \text{ în mii de bucăți} \end{aligned} \right)$

$0,003x_1 + 0,002x_2 + 0,004x_3 \leq 1.500$ (în kg) **pr. unt**; cu x_1, x_2, x_3 în bucăți \rightarrow nu pot folosi o cantitate de unt mai mare decât cea avută la dispoziție
 $\left(\begin{aligned} \text{sau: } 0,3x_1 + 0,2x_2 + 0,4x_3 &\leq 1.500 \text{ (în kg)} \text{ , cu } x_1, x_2, x_3 \text{ în sute de bucăți} \\ \text{sau: } 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 1.500 \text{ (în kg)} \text{ , cu } x_1, x_2, x_3 \text{ în mii de bucăți} \end{aligned} \right)$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5.000.000$ (buc) \rightarrow capacitatea maximă de producție este de 5 milioane de bomboane (de toate tipurile);
 $\left(\begin{aligned} \text{sau: } x_1 + x_2 + x_3 &\leq 50.000 \text{ (în sute de buc)} \\ \text{sau: } x_1 + x_2 + x_3 &\leq 5.000 \text{ (în mii de buc)} \end{aligned} \right)$

$x_1 + x_3 \leq 4.000.000$ (buc) \rightarrow capacitatea maximă de producție a bomboanelor de tip T_1 și T_3 este de 4 milioane buc.
 $\left(\begin{aligned} \text{sau: } x_1 + x_3 &\leq 40.000 \text{ (sute buc)} \\ \text{sau: } x_1 + x_3 &\leq 4.000 \text{ (mii buc)} \end{aligned} \right)$

$x_2 \geq x_1 + x_3$ (în buc/sute buc/mii buc) \rightarrow cantitatea de bomboane de tip T_2 fabricate să fie cel puțin la fel de mare ca cea a bomboanelor de tip T_1 și T_3 la un loc

(3) $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ \rightarrow nr. de bomboane fabricate nu fie ≥ 0 (logic, nu?)

11. Problema de programare liniară:
$$\begin{cases} (1) (\max) f(x_1, x_2, x_3) = -4x_1 - 3x_2 + x_3 \\ (2) \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 18 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 21 \end{cases} \\ (3) x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
 se rezolvă aplicând

metoda celor două faze. Rezolvând problema artificială atașată (în faza I), precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) în problema artificială se introduce o singură variabilă artificială;
- b) coeficienții funcției obiectiv din tabelul Simplex corespunzător fazei I sunt: **4, 3, -1, 0, 0;**
- c) soluția inițială (de plecare) a fazei I este: $X_{\text{inițială}}^{\text{artificială}} = (0, 0, 0, 18, 21)^T$;
- d) diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei I au valorile: **1, -3, -1, 0, 0;**
- e) vectorul care intră în bază este P_2 ;
- f) vectorul care iese din bază este P_4 ;
- g) noua soluție obținută este: $X_1^{\text{artificială}} = (0, 25, 0, 7, 0)^T$;
- h) noua soluție obținută, în al doilea tabel Simplex al fazei I, este optimă.

12. Pentru aceeași problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând faza a II-a problema în forma standard, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) coeficienții funcției obiectiv sunt: **4, 3, -1, 0;**
- b) soluția inițială (de plecare) a fazei a II-a este: $X_{\text{inițială}}^{\text{standard}} = (0, 7, 0, 25)^T$;
- c) diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: **5, 0, -2, 0;**
- d) vectorul care intră în bază este P_1 ;
- e) vectorul care iese din bază este P_4 ;
- f) pivotul schimbării de bază are valoarea: **2/3;**
- g) soluția optimă a problemei în formă standard este: $X_{\text{optimă}}^{\text{standard}} = (0, \frac{15}{2}, 0, \frac{9}{2})^T$;
- h) soluția optimă a problemei inițiale $X_{\text{optimă}}^{\text{inițială}} = (0, \frac{9}{2}, \frac{15}{2})^T$ și este unică.

13. Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

„Ministerul Economiei și Industriei are pentru anul 2016 un buget pentru investiții de 1 miliard de Euro, pentru modernizări și reparația facilităților de producere a energiei electrice. În tabelul de mai jos sunt prezentate proiectele propuse, necesarul maximal de investiții și cantitatea de energie produsă suplimentar (calculată în Mwh pentru fiecare milion de euro investit) în fiecare caz în parte:

Proiect	Necesar de investiții (milioane Euro/proiect)	Cantitatea de energie produsă (Megawați/oră per 1 milion Euro investit)
Centrale pe cărbune	500	8
Centrale pe gaz	300	4,5
Turbine eoliene	200	3
Hidrocentrale	450	6,5

Datorită fenomenului de poluare, s-a luat decizia să se aloce pentru centralele pe cărbune și gaz cel puțin 75% din sumele solicitate. Deoarece vechimea hidrocentralelor impune reparații și modernizări urgente s-a hotărât ca suma alocată acestora să fie de cel puțin trei ori mai mare decât cea alocată pentru turbinele eoliene. Să se determine planul optim de investiții al ministerului.”

13) plan optim de investiții = să se producă cât mai multă energie pentru banii investiți (evident, respectând restricțiile impuse)

not

- x_1 = suma care urmează a fi investită în centralele pe cărbune (în milioane de Euro);
- x_2 = suma (în milioane Euro) care urmează a fi investită în centralele pe gaz;
- x_3 = suma (în milioane Euro) ————— în turbine eoliene;
- x_4 = suma (în milioane Euro) ————— în hidrocentrale.

(1) $(\max) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_1 + 4,5x_2 + 3x_3 + 6,5x_4$ (în MWh) → cantitatea totală de energie care urmează a fi produsă

(2)

- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1.000$ (milioane Euro) — bugetul maxim de investiții al ministerului (MEI) (suplinitor) în urma investițiilor făcute
- $x_1 \leq 500$ (milioane Euro)
- $x_2 \leq 300$ (milioane Euro)
- $x_3 \leq 200$ (milioane Euro)
- $x_4 \leq 450$ (milioane Euro)

→ sumele care urmează a fi investite în fiecare proiect nu trebuie să depășească necesarul (= suma maximă care poate fi investită în fiecare proiect)

$x_1 + x_2 \geq 75\% (500 + 300) \Rightarrow x_1 + x_2 \geq 600$ (în milioane Euro) → suma totală care urmează a fi investită în centralele pe cărbune și pe gaz să fie cel puțin 75% din necesar (din suma solicitată)

$\frac{75}{100} = 0,75$

Obs: sau:

- $x_1 \geq 0,75 \cdot 500 \Rightarrow x_1 \geq 375$ (mil. Euro)
- $x_2 \geq 0,75 \cdot 300 \Rightarrow x_2 \geq 225$ (mil. Euro)

→ fiecare sumă nu poate să fie de minim 75% din necesar

depinde de interpretarea textului (care aici nu este foarte clar)

$x_4 \geq 3x_3$ (în milioane Euro) → suma care va fi alocată hidrocentralelor trebuie să fie de cel puțin trei ori mai mare decât cea care va fi alocată turbinelor eoliene

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

- dacă $x_i > 0$ → aloc suma proiectului "i"
- $x_i = 0$ → proiectul "i" nu primește bani

evident $x_i < 0$ absurd

Obs i) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{8 \text{ MWh}}{1 \text{ mil. Euro investit}} \right) \cdot x_1 (\text{mil. Euro investit}) + \dots = \text{rezultatul va fi în MWh}$

ii) mai clar: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 8x_1 + 4,5x_2 + 3x_3 + 6,5x_4$

$\left(\frac{\text{MWh}}{\text{mil. Euro investit}} \right) \cdot (\text{nr. de milioane Euro investite}) + () \cdot () + () \cdot ()$

se simplifică "milioane Euro investite"

11. Problema de programare liniară:
$$\begin{cases} (1) (\max) f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1 - x_2 + x_3 \\ (2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 24 \end{cases} \\ (3) x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
 se rezolvă aplicând metoda

celor două faze. Rezolvând problema artificială atașată (în faza I), precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) trebuie introduse două variabile artificiale;
- b) soluția inițială (de plecare) a fazei I este: $X_{\text{inițială}}^{\text{artificială}} = (0, 0, 0, 26, 24)^T$;
- c) în primul tabel Simplex al fazei I, diferențele $z_1 - c_1 = 2$ și $z_3 - c_3 = 1$;
- d) valoarea funcției obiectiv pentru soluția inițială este egală cu 26;
- e) vectorul care intră în bază este P_2 ;
- f) vectorul care iese din bază este P_5^a ;
- g) în noul tabel componentele vectorului P_3 sunt: $P_3 = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})^T$;
- h) noua soluție obținută este: $X_1^{\text{artificială}} = (13, 11, 0, 0, 0)^T$;

12. Pentru aceeași problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând faza a II-a problema în forma standard, precizați care dintre următoarele afirmații sunt adevărate:

- a) soluția inițială (de plecare) a fazei a II-a este: $X_{\text{inițială}}^{\text{standard}} = (13, 0, 11, 0)^T$;
- b) valoarea funcției obiectiv în soluția inițială este egală cu 26;
- c) diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: 0, 0, 2, 0;
- d) vectorul care intră în bază este P_2 ;
- e) pivotul schimbării de bază are valoarea 1/2;
- f) noua soluție de bază obținută este: $X_1^{\text{standard}} = (\frac{54}{5}, 0, \frac{22}{5}, 0)^T$;
- g) diferențele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din al doilea tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: 6/5, -4/5, 0, 0;
- h) valoarea optimă a funcției obiectiv din problema standard este egală cu: 86/5.

13. Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

„Un dezvoltator imobiliar are la dispoziție un teren de 10 ha, pe care dorește să construiască 4 tipuri de case. Suprafețele de teren, costul de construcție și profitul net sunt date în tabelul de mai jos:

Tip case:	Suprafața de teren necesară (m ² /casă)	Cost unitar de construcție (mii lei/casă)	Profit unitar (mii lei/casă)
Tip 1	300	85	35
Tip 2	500	125	55
Tip 3	800	180	90
Tip 4	1.000	200	110

Dezvoltatorul a semnat deja contracte pentru patru case de tipul 1, 3 case de tipul 3 și o casă de tipul 4. Compania de construcții cu care are contract poate construi maxim 50 de case anual. Pe baza unor studii de piață, patronul hotărăște să construiască de două ori mai multe case de tipul 2 și 3 decât cele de tipul 1 și 4. Știind că suma maximă pe care o poate investi anual este de 8 milioane lei, determinați planul anual optim al afacerii.”

13) plan optim al afacerii = profit total maxim în urma vânzării caselor ^{care urmează a fi} construite (ținând evident cont de restricțiile impuse în enunț)

not $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \text{nr. de case de tipul } (T_1) \text{ care urmează să fie construite;} \\ x_2 = \text{nr. de case de tipul } (T_2) \text{ — // — // — // — } \\ x_3 = \text{nr. de case de tipul } (T_3) \text{ — // — // — } \\ x_4 = \text{nr. de case de tipul } (T_4) \text{ — // — // — } \end{array} \right\}$

(1) $(\max) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 35.000x_1 + 55.000x_2 + 90.000x_3 + 110.000x_4$ (în lei) \rightarrow profitul maxim
 $\stackrel{\text{sau}}{=} 35x_1 + 55x_2 + 90x_3 + 110x_4$ (în mii de lei) (în lei) obținut din vânzarea celor 4 tipuri de case

(2) $\left\{ \begin{array}{l} 300x_1 + 500x_2 + 800x_3 + 1.000x_4 \leq 100.000 \text{ (în m}^2\text{)} \rightarrow \text{suprafața totală necesară construirii} \\ \text{Sau: } 0,03x_1 + 0,05x_2 + 0,08x_3 + 0,1x_4 \leq 10 \text{ (în ha)} \} \text{ celor 4 tipuri de case nu trebuie să depășească } 10 \text{ ha} = 10 \times 10.000 \text{ m}^2 = 100.000 \text{ m}^2 \\ 85.000x_1 + 125.000x_2 + 180.000x_3 + 200.000x_4 \leq 8.000.000 \text{ (lei)} \rightarrow \text{costul total de construcție} \\ \text{Sau: } 85x_1 + 125x_2 + 180x_3 + 200x_4 \leq 8.000 \text{ (în mii de lei)} \} \text{ nu trebuie să depășească suma} \\ \text{maximă de care dispune investitorul} \\ x_1 \geq 4 \text{ (buc.)} \\ x_2 \geq 3 \text{ (buc.)} \\ x_4 \geq 1 \text{ (buc.)} \} \rightarrow \text{contractele sunt semnate, deci casele trebuie obligatoriu construite;} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 50 \text{ (buc.)} \rightarrow \text{compania de construcții nu poate construi anual decât cel} \\ \text{mult 50 de case (de toate tipurile);} \\ x_2 + x_3 = 2(x_1 + x_4) \rightarrow \text{casele de tip 2 și 3 care urmează a fi construite trebuie să fie} \\ \text{de două ori mai multe decât ale de tipul 1 și 4.} \end{array} \right.$

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ — nr de case care urmează a fi construite, nu pot fi < 0
 $(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N})$

Obs: evident am dori ca soluția optimă să aibă toate componentele nr. întregi (naturale). Întrebăm, ce s-ar întâmpla (ce ar face investitorul) dacă soluția optimă ar fi de forma:

$x_{\text{optim}} = (9,72; 10,66; 8,5; 14,37)^T$
 \downarrow
 ce înseamnă 9,72 case de tip 1 ??