Seminar 1

TRANSFORMĂRI ELEMENTARE (T.E.) – APLICAȚII

Def: Fie matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Numim transformare elementară (t.e.) una dintre următoarele operații efectuate asupra liniilor acesteia:

(T$_1$) Înmulțirea (elementelor) unei linii cu un scalar nenul ($\neq 0$);

$$A = \begin{array}{c} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Big/ \cdot \alpha \neq 0 \underset{(L_i \to \alpha L_i)}{\sim} A' \overset{not}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \cdots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \underline{not}: A \sim A'$$

notația $A \sim A'$ reprezintă faptul că matricea A' a fost obținută din matricea A prin t.e. (spunem că matricile A și A' sunt echivalente d.p.d.v al t.e)

Ex:

a) $$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} /\cdot 3 \sim \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} /(-1) \sim \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} /\cdot \tfrac{3}{4} \sim \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 3/4 & 0 & 3/2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Obs: toate cele 4 matrici sunt echivalente (dpdv al t.e)

b) $$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} /(-\tfrac{1}{2}) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1/2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} /(-2) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1/2 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}$$

(T$_2$) Înmulțirea (elementelor) unei linii cu un scalar nenul ($\alpha \neq 0$) și adunarea ei la o altă linie

$$A = \begin{array}{c} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} /\cdot \alpha \neq 0 \underset{\{L_j \to L_j + \alpha L_i\}}{\sim} A'' \overset{not}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1}+\alpha a_{i1} & a_{j2}+\alpha a_{i2} & \cdots & a_{jn}+\alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \underline{not}\ A \sim A''$$

Ex:

a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} /\cdot 3 \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} /(-1) \sim \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

b) $$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} /\cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} /(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} /\cdot \tfrac{1}{2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 5/2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Obs: putem aplica (T$_2$) simultan asupra mai multor linii:

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} /\cdot 2 \ /\cdot(-3) \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

(T3) Schimbarea (elementelor) a două linii între ele:

$$A=\begin{array}{c} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \underset{(L_i \leftrightarrow L_j)}{\sim} A'''=\begin{array}{c} \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \underline{\underline{\text{not}}} \; A \sim A'''$$

Ex $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Obs:(!!!) în toate aplicațiile de pe parcursul acestui curs/seminar, vom folosi t.e. pentru a transforma una sau mai multe coloane a unei matrice oarecare, în coloanele matricei unitate.

Obs $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ → matricea unitate de ord. 2 ; $I_n=\begin{array}{c} \\ L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ → matricea unitate de ord. n

$I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → matricea unitate de ord. 3

Obs: Rezolvarea sistemelor de ec. lin. cu 2 sau 3 necunoscute (și același nr. de ecuații → sist. pătratice de tip Cramer) cu metoda eliminării, înseamnă să înlocuim (obținem din) sistemul inițial un nou sist. liniar, cu aceleași soluții cu sist. inițial (sisteme echivalente) dar mai simple de rezolvat

Ex: a) $\begin{cases} x_1+2x_2=5 & /\cdot 2 \\ -2x_1-5x_2=-1 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=5 \\ -x_2=9 & /(-1) \,/\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=23 \\ x_2=-9 \end{cases}$

$\Downarrow$

$S=\{(23,-9)\}$ → sol. unică

$\bar{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 2 & 5 \\ -2 & -5 & -1 \end{array}\right) \end{array} /\cdot 2 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & \boxed{-1} & 9 \end{array}\right) \end{array} /(-1) \,/\cdot 2 \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 23 \\ 0 & 1 & -9 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} x_1=23 \\ x_2=-9 \end{cases}$ → soluție unică (sist. comp. deter.)

pivot ($\neq 0$)

b) $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=3 & /(-1) \\ -x_1-2x_2+3x_3=-1 & \\ x_1-x_3=6 & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2-2x_3=3 \\ -x_2+x_3=2 & /(-1) \,/\cdot(-1) \\ -x_2+x_3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \cancel{+x_2} -x_3=5 \\ +x_2-x_3=-2 \\ 0=1 \text{ (F)} \end{cases} \Rightarrow S=\emptyset$ sist. incomp.

$\bar{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 6 \end{array}\right) \end{array} /(-1) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array} /(-1) \,/(-1) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow 0=1 \text{ (F)} \Rightarrow$ sist. incompatibil

Obs: În metoda eliminării (rând pe rând a necunoscutelor) se aplică următoarele trei operații asupra ecuațiilor din sistemul liniar:

(O_1) se înmulțește o ecuație (sau mai multe) cu un scalar nenul ($\neq 0$);

(O_2) se înmulțește o ecuație cu un scalar nenul și se adună la o altă ecuație;

(O_3) se schimbă între ele două ecuații;

Prin aceste operații, soluția (-ile) sist. lin. nu se modifică. Obținem alte sisteme care sunt echivalente cu sist. inițial (cu aceleași soluții) dar care au o formă mai simplă de rezolvat.

Așa cum s-a putut observa și din exemplele de mai sus cele trei operații (O_1)-(O_3) efectuate asupra ec. lin. din sistem sunt de fapt cele trei transf. elem. (T_1)-(T_3) care se efectuează asupra matricii extinse $\bar{A}$ atașate sistemului

Obs: pentru a înțelege modul de lucru cu t.e. vom arăta 4 aplicații ale acestora (trei dintre ele le-ați întâlnit la liceu, dar ați folosit o altă metodă de rezolvare, cu determinanți)

Aplicații ale T.E.

1) Determinarea rangului unei matrici; ~~[illegible]~~

2) Determinarea inversei unei matrici (pătratice);

3) Rezolvarea sist. de ecuații liniare (metoda lui Gauss!!)

4) Determinarea soluțiilor de bază ale unui sist. liniar (compatibil nedeterminat)

1) Determinarea rangului unei matrice cu t.e

Def: Fie matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Numim rangul matricei A ($\overset{not}{=} \text{rang} A \equiv r_A$) numărul natural $r \in \mathbb{N}$ cu proprietățile:

i) există un minor de ordin „r" (not: M_r) al matricei A, nenul ($\neq 0$) $\{(\exists) M_r \neq 0\}$

ii) toți minorii de ordin superior lui „r" sunt nuli ($=0$) $\{(\forall) M_k = 0$, $(\forall) k > r \Leftrightarrow (\forall) k \in \{r+1, r+2, \dots\}\}$

Obs:

a) $(\forall) A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \overset{def}{\Rightarrow} 0 \leq r_A \leq \min\{m,n\}$

b) $r_A = 0 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \overset{not}{=} O_{m,n} \equiv O$ - matricea nulă

c) nr. minorilor de ordin sup. lui „r" ~~este~~ egal cu: $= C_m^{r+1} \cdot C_n^{r+1} + C_m^{r+2} \cdot C_n^{r+2} + \cdots$

Ex Fie $A \in \mathcal{M}_{6,10}(\mathbb{R})$ cu $r_A = 4$. Cf. def. trebuie să arătem că există un $M_4 \neq 0$ și toți minorii de ord. 5 și 6 sunt zero, adică: $\begin{cases} \text{nr. min. de ord 5 este } C_6^5 \cdot C_{10}^5 = 6 \times 252 = 1512 \\ \text{nr. } M_6 \text{ este: } C_6^6 \cdot C_{10}^6 = 1 \times 210 = 210 \end{cases}$

deci un total de 1722 de minori de ord. 5 și 6 !!!

T_1: rang $A = r \iff \begin{cases} (i)\ (\exists) M_r \neq 0 \\ (ii)\ (\forall) M_{r+1} = 0 \end{cases}$ (toți minorii de ord. „r+1" sunt nuli)

Obs: nr. minorilor de ordinul „r+1" este egal cu: $C_m^{r+1} \cdot C_n^{r+1}$

Ex: în cazul exemplului precedent avem de calculat doar cei 1.512 minori de ord. 5 nu și pe cei de ord. 6.

T_2: rang $A = r \iff \begin{cases} (i)\ (\exists) M_r \neq 0 \\ (ii)\ (\forall) \overline{M}_{r+1} = 0 \end{cases}$ (toți minorii de ord. „r+1" obținuți prin bordarea minorului de ord. r nenul, sunt nuli)

Obs: nr. $\overline{M}_{r+1}$ este egal cu: $(m-r)\cdot(n-r)$

Ex: în cazul ex. precedent trebuie să calculăm: $(m-r)(n-r) = (6-4)(10-4) = 2\cdot 6 = 12$ minori de ord 5 obținuți prin bordarea minorului de ord. 4 nenul (și nu 1.512!!)

Obs(!!!) Rangul unei matrice ne spune câte linii (respectiv coloane) sunt independente din totalul de linii (coloane) ale matricei, adică nu se pot scrie ca și combinații liniare de celelalte linii (coloane).

Obs:

i) în cazul sist. lin. de ec., rangul matricei A (r_A) respectiv rangul matricei extinse $\bar{A}$ ($r_{\bar{A}}$) ne arată câte dintre ecuații sunt independente (principale) și câte depind de acestea (secundare) adică sunt combinații (liniare) de ecuațiile principale, deci pot fi eliminate

ii) în ex. precedent $\begin{cases} \text{4 din cele 6 linii ale matricei sunt independente} \\ \text{4 din cele 10 coloane ale matricei sunt independente} \end{cases}$ restul pot fi scrise ca și combinații (liniare) de acestea.

iii) pentru a evita calculele lungi ale rangului folosind minori (determinanți) ne bazăm pe următoarea teoremă:

T_3: Transformările elementare aplicate unei matrici, nu-i modifică rangul. Adică, dacă:

(1.1) $\boxed{A \sim B \Rightarrow r_A = r_B}$ sau mai general: (1.1') $\boxed{A_1 \sim A_2 \sim \dots \sim A_k \Rightarrow r_{A_1} = r_{A_2} = \dots = r_{A_k}}$

Obs:

- pentru a folosi T_3, va trebui să aducem matricea noastră la o formă (mai simplă) pentru care rangul matricei să nu trebuiască să fie calculat (cu T_2) ci să rezulte direct din expresia acesteia. Această formă o vom numi forma Gauss-Jordan

Def: Fie matricea $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$. Numim **forma Gauss-Jordan** a acesteia, o matrice obținută din aceasta prin t.e. și care conține nr. maxim posibil de coloane ale matricii unitate, ~~posibil~~ adică are forma:

$$(1.2)\quad A = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{array}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \sim \cdots \sim A_{G-J} = \begin{array}{c} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_r \\ L_{r+1} \\ \vdots \\ L_m \end{array}\begin{pmatrix} a'_{11} & 1 & a'_{1i} & 0 & a'_{1j} & 0 & a'_{1k} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 0 & a'_{2i} & 1 & a'_{2j} & 0 & a'_{2k} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{rj} & 1 & a'_{rk} & \cdots & a'_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

primele „r" coloane ale matricii unitate ($\equiv I_m$)

Obs:

i) un caz particular, este **forma Gauss-Jordan redusă (canonică)** ($\overset{not}{=} A^R_{G-J}$), unde coloanele matricii unitate sunt primele (ocupă primele „r" poziții), adică are expresia:

$$(1.2')\quad A^R_{G-J} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & a'_{1,r+1} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a'_{2,r+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a'_{r,r+1} & \cdots & a'_{rn} \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{c|c} I_r & A' \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

ii) o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, cu $\text{rang}\, A = r$, nu are o unică formă Gauss-Jordan, ci poate avea maxim: $C_n^r \overset{def}{=} \frac{n!}{r!(n-r)!}$ (putem alege „r" din cele „n" coloane ale matricii pentru a le transforma (cu t.e) în coloanele matricii unitate în C_n^r moduri)

iii) este evident cf. def. rangului unei matrice (sau T_2) că $\underline{\text{rang}\, A^R_{G-J} = r = \text{rang}\, A_{G-J}} =$ = nr. (max.) de coloane ale matricii unitate; atunci, cf T_3 avem:

$$r_A = \text{rang}\, A_{G-J} = r$$

Ex: Determinați rangul următoarelor matrice, folosind t.e.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

Dem: evident $0 \le r_A \le \min(2,3)$; deoarece $(\exists)\, a_{ij} \ne 0 \Rightarrow r_A \ge 1$ $\Big|$ $\Rightarrow$ $\underline{1 \le r_A \le 2}$

Aducem A la forma Gauss-Jordan, avem:

pivot ≠ 0

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 \end{pmatrix} \Big| (-1) \Big| \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \equiv A^R_{G-J} \Rightarrow r_{A^R_{G-J}} = 2 = r_A$$

sau:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \Big| \cdot \frac{1}{3} \sim \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 \\ \boxed{-1} & -3 & 0 \end{pmatrix} \Big| \cdot(-1) \Big| \cdot \frac{1}{3} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} = A_{G-J} \Rightarrow r_A = 2 = r_{A_{G-J}}$$

q.e.d

b) $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$

Obs: evident, din forma matricii $B \Rightarrow 1 \leq r_B \leq 3$

Dem:

$$B=\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Big| \ \Big|(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Big|(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B^R_{G-J} \Rightarrow r_B = 2$$

sau:

$$B=\begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Big|(-1)\Big|\cdot 2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \Big|\cdot 2 \Big|(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 11 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{G-J} \Rightarrow r_B = 2$$

Obs: Se poate obs. că $L_3 = 2L_1 + L_2$, deci una dintre linii este combinație (liniară) de celelalte două!!

q.e.d

c)

$$C=\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Big|(-1)\Big| \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \Big|\cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \Big|(-1)\Big|(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C_{G-J}$$

$$\Downarrow$$

$$r_C = 3$$