

I.5) Forme liniare

Def Fie  $(V, +, \cdot)$  un spațiu liniar carecane și corpul comutativ al nr. reale  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ . Numim formă liniară pe  $V$  aplicația:  $f: V \rightarrow \mathbb{R}$  care satisface proprietățile:

$$(4.1) \begin{cases} i) f(u+v) = f(u) + f(v) \\ ii) f(\alpha u) = \alpha \cdot f(u) \end{cases} \quad ; \quad \begin{matrix} (i) u, v \in V \\ (ii) \alpha \in \mathbb{R} \end{matrix} \Leftrightarrow (4.1') f(\alpha u + \beta v) = \alpha f(u) + \beta f(v) \quad ; \quad \begin{matrix} (i) u, v \in V \\ (ii) \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Obs:

i) proprietatea de liniaritate (4.1') se poate generaliza pentru cazul a „n” vectori, adică:

$$(4.1'') f(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1) + \alpha_2 f(u_2) + \dots + \alpha_n f(u_n) \quad ; \quad \begin{matrix} (i) u_1, u_2, \dots, u_n \in V \\ (ii) \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

ii) Cu cazul particular  $V \equiv \mathbb{R}^n$  (singurul caz neinteresant), avem următoarea teoremă de caracterizare a formelor liniare:

Teoremă (de caract. a formelor liniare def pe  $\mathbb{R}^n$ )

$$O \text{ aplicație } \begin{cases} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ f(u) = a \in \mathbb{R} \end{cases} \text{ este formă liniară } \Leftrightarrow (4.2) \begin{cases} f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 x_1 + x_2 x_2 + \dots + x_n x_n \end{cases}$$

cu  $x_i \in \mathbb{R}$ , iar  $n \times 1$   $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

Obs: i) nr. reale  $x_i \in \mathbb{R}$ ,  $i=1, \dots, n \rightarrow$  coeficienții formei liniare „f”

ii) (4)  $f$  - formă lin. pe  $\mathbb{R}^n$ , avem:  $f(u_n) = f(0, 0, \dots, 0) = 0$

iii) dacă notăm:  $C = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in M_{1 \times n}(\mathbb{R})$   $\begin{cases} (4.2) \\ (4.2') \end{cases} f(x) = C \cdot X \rightarrow$  subformă matricială a unei forme liniare.

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

Ex: 1)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = 2x_1 - 3x_2 \\ C = (2 \ -3) \rightarrow \text{matricea coeficienților formei liniare} \\ X = (x_1, x_2)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f(x) = C \cdot X = (2 \ -3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 2x_1 - 3x_2$$

2)  $\begin{cases} f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 \end{cases} ; \begin{cases} C = (3 \ 2 \ -4) \\ X = (x_1, x_2, x_3)^T \end{cases} \rightarrow f(x) = C \cdot X = (3 \ 2 \ -4) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3$

3)  $\begin{cases} f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x_1 + 3x_2x_3 - 4 \end{cases} \rightarrow$  nu este formă liniară!!! (avem produsul  $3x_2x_3$ )

4) Analog, nu sunt forme liniare, următoarele aplicații (funcții)

i)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f_1(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2 - x_1x_3 + 4$

ii)  $f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f_2(x_1, x_2) = 4x_1 + x_2 - 1$

iii)  $f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \sqrt{x_2} + 4x_3$

## II: Elemente de programare liniară

- algoritmul Simplex
- metoda celor două faze
- probleme de transport

### II.1 Notiuni introductive. Modela economică generală.

Se numește problemă de programare matematică (P.P.M) o problemă de forma:

$$\begin{cases} (1_m) (\min/\max) f = f(x_1, x_2, \dots, x_k) \rightarrow \text{funcția obiectiv (este o funcție oarecare)} \\ (2_m) \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \leq b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_k) \leq b_2 \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_k) \leq b_m \end{cases} \rightarrow \text{restricții impuse recunoașterilor inegalităților, sub formă de} \\ \text{inecuații/ecuații (funcțiile } g_1, g_2, \dots, g_m \text{ sunt funcții oarecare)} \\ (3_m) x_j \in \mathbb{R}, j=1, k \end{cases}$$

A rezolva (P.P.M) înseamnă a afla toate soluțiile sistemului de restricții (2<sub>m</sub>) (asta admite în general o infinitate de soluții) și apoi să o determinăm (dintre acestea) pe aceea (acelea pot fi mai multe) care face ca funcția obiectiv din (1<sub>m</sub>) să ia valoarea minimă/maximă. Căutarea de soluție se numește soluție optimă a (P.P.M)

Dacă într-o (P.P.M) atât funcția obiectiv „f” cât și funcțiile „g<sub>1</sub>, g<sub>2</sub>, ..., g<sub>m</sub>” care definesc restricțiile (2<sub>m</sub>) sunt forme liniare, obținem cazul particular (dar extrem de important și foarte des întâlnit în aplicațiile economice) al problemelor de programare liniară (P.P.L) având forma următoare:

$$\begin{cases} (1_L) (\min/\max) f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k \rightarrow \text{funcția obiectiv (funcție cost/profit)} \\ (2_L) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \leq b_m \end{cases} \rightarrow \text{restricții economice} \\ (3_L) x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \rightarrow \text{condiții de nenegativitate} \end{cases}$$

Obs:

Funcțiile „g<sub>1</sub>, g<sub>2</sub>, ..., g<sub>m</sub>” care definesc restricțiile din sistemul (2<sub>m</sub>) au în acest caz, următoarele expresii:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \end{cases} \rightarrow \text{forme liniare (cf b.2)}$$

În continuare vom prezenta câteva probleme economice generale al căror model matematic este (P.P.L)



# 1) Problema planificării producției (obținerea optimă/eficientă a resurselor limitate) (3)

"O companie/firmă dispune de resursele limitate (materii prime, forță de muncă, bani, etc.):

$R_1, R_2, \dots, R_m$  ( $R_j, j=1, \dots, m$ ) în cantitățile:  $b_1, b_2, \dots, b_m$  ( $b_j, j=1, \dots, m$ )

și dorește să fabrice (obțină) produsele (obiecte, maruri, servicii, etc.):

$P_1, P_2, \dots, P_k$  ( $P_j, j=1, \dots, k$ ) în cantitățile:  $x_1, x_2, \dots, x_k$  ( $x_j, j=1, \dots, k$ ) necesitățile inițiale

stăruind că:

a) consumul unitar din resursa " $R_i$ " pentru a se fabrica un produs " $P_j$ " este cantitatea " $a_{ij}, i=1, \dots, m, j=1, \dots, k$ "

b) profitul (net/briet) unitar din vânzarea unui produs " $P_j$ " este " $c_j, j=1, \dots, k$ "

să se determine un plan de producție optim (cât să se fabrice din fiecare produs și profitul total realizat să fie maxim și să se încadreze în cantitățile limitate de resurse avute la dispoziție)

Modelul matematic al acestei probleme economice este o (P.P.L) de formă:

$$\begin{cases} (1) (\max) f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k \rightarrow \text{valoarea profitului (funcția profit)} \\ (2) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1k} x_k \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2k} x_k \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mk} x_k \leq b_m \end{cases} \quad (4) \rightarrow \text{restricții economice (nu pot folosi mai mult dintr-o resursă decât am la dispoziție)} \\ (3) x_j \geq 0, j=1, \dots, k \rightarrow \text{cantitățile care urmează a fi produse nu pot fi valori negative.} \end{cases}$$

## Exemple

i) vezi primul exemplu (cu gentile de laptop) din cursul introductiv (cursul 00)

ii) U.E. a lansat o competiție privind finanțarea proiectelor de cercetare privind energia alternativă (la combustibilii fosili) cu un buget total de un miliard de Euro. Comisia de evaluare a reținut din cele peste 200 de proiecte depuse doar 6 pentru a le finanța. Fiecare din cele 6 proiecte a fost evaluat și punctat în raport cu criteriul: „beneficiul (profitul) net obținut pentru fiecare Euro investit” reprezentând beneficiul (profitul) potențial pentru o perioadă de 10 ani de aplicare a proiectului. În tabelul de mai jos se găsesc proiectele, sumele maxime solicitate de autori și beneficiul net estimat de comisie:

Nr.	Tipul proiectului	Beneficiul net pe 1 Euro investit	Suma maximă solicitată
1.	Energie solară (I)	4,4 E	220 milioane Euro
2.	Energie solară (II)	3,8 E	180 mil. E
3.	Combustibilii nucleici	4,1 E	250 mil. E
4.	Bio-combustibilii	3,5 E	150 mil. E
5.	Energie nucleară	5,1 E	400 mil. E
6.	Energie geo-termală	3,2 E	120 mil. E
Total finanțat =			1.320.000.000 Euro



Președintele Comisiei Europene a solicitat ca proiectul din domeniul militar să primească cel puțin 60% din suma maximă solicitată, motivând cu importanța strategică a acțiunii la nivelul U.E. Datorită lobby-ului intens făcut de O.N.S.-urile pe domeniul ecologic, li s-a promis acestora alocarea a minimul 250 milioane Euro pentru finanțarea proiectelor "verzi" adică a celor două proiecte de energie solară și cel privind energia geotermală. Să se determine planul optim de alocare a banilor (câți bani se primească fiecare proiect și beneficiul potențial obținut prin aplicarea lor să fie maxim)

### Modelul matematic

not:  $x_j, j=1,6$  - sume (în milioane de Euro) care urmează a fi alocate proiectului  $P_j$

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \max f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = 4,4x_1 + 3,8x_2 + 4,1x_3 + 3,5x_4 + 5,1x_5 + 3,2x_6 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{profitul total} \\ \text{(în milioane Euro)} \end{array} \right. \\
 (2) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 1.000 \quad (\text{suma totală alocată celor 6 proiecte nu poate depăși 1 miliard Euro}) \\ x_1 \leq 220 \\ x_2 \leq 180 \\ x_3 \leq 250 \\ x_4 \leq 150 \\ x_5 \leq 400 \\ x_6 \leq 120 \end{array} \right. \rightarrow \text{sume alocate celor 6 proiecte nu pot depăși valorile maxime solicitate prin proiect} \\
 & x_5 \geq 240 \quad (\text{suma alocată proiectului nuclear să fie minim 60\% \cdot 400 mil. Euro = 240 mil. Euro}) \\
 & x_1 + x_2 + x_6 \geq 250 \quad (\text{totalul sumelor alocate proiectelor "verzi" să fie minim 250 mil. Euro}) \\
 (3) \quad & x_j \geq 0, j=1,6 \quad (\text{sume alocate nu pot avea valori negative})
 \end{aligned}$$

### 2) Problema dietei

"În urma unui studiu biologic efectuat asupra animalelor de la o fermă s-a stabilit că rația zilnică de hrană a acestora trebuie să conțină elementele nutritive:

$N_1, N_2, \dots, N_m \in N_i, i=1, m$  în cantitățile minime  $b_1, b_2, \dots, b_m \in b_j, j=1, m$

Ferma dispune de furaje:

$F_1, F_2, \dots, F_k \in F_j, j=1, k$

care (în urma analizelor de laborator efectuate) conțin pe unitate de furaj  $F_j, j=1, k$  cantitatea  $a_{ij}$  din elementul nutritiv  $N_i, i=1, m$ , știind că profitul unitar al furajului  $F_j$  este  $c_j, j=1, k$  să se determine rația optimă zilnică a animalelor (adică să se determine componenta și cantitatea necesară din fiecare furaj astfel încât aceasta să conțină toate elementele nutritive indicate în măcar cantitățile minime indicate și care să coste cât mai puțin)

not:  $x_1, x_2, \dots, x_k$  - cantitatea de furaj de tipul  $F_1, F_2, \dots, F_k$  care urmează a fi folosite în rația zilnică



Modelul matematic este o (P.P.L) de forma:

- (1) (min)  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k \rightarrow$  costul total al rației zilnice (funcția cost)
- (2) 
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \geq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \geq b_m \end{cases} \quad (4.2)$$
- (3)  $x_j \geq 0, j = \overline{1, k} \rightarrow$  cantitățile de furaje folosite la rație nu pot lua valori negative
- cantitățile de substanțe nutritive din rația zilnică (din mixul de furaje folosit) nu ~~sunt~~ <sup>sunt</sup> să fie minime cantitățile indicate prin stadiul biologic.

Ans:

- i) problemele sub formă generală (4.1) și (4.2) se numesc forme canonice a unei (P.P.L); astfel probl. de (max) are toate restricțiile din (2) de forma " $\leq$ "  
(min) are toate restricțiile din (2) de forma " $\geq$ "
- ii) probleme reale economice nu au modelul matematic asociat lor sub formă canonică decât foarte rar (sau deloc). De obicei sistemul de restricții economice (2) are și inecuații de tip " $\leq$ " și " $\geq$ " dar și ecuații (deci cu semnul " $=$ ").
- iii) în problema de mai sus nu este specificată cantitatea de furaj  $F_j, j=1, \dots, n$  disponibilă, este ca și cum ferma ar dispune de cantități nelimitate. Dacă notăm cu:  $f_1, f_2, \dots, f_n$  cantitățile (limitate) de furaj  $F_1, F_2, \dots, F_n$  pe care le are ferma la dispoziție atunci la sistemul (2) mai trebuie adăugate și inecuațiile:
- (2)  $x_i \leq f_i$

$$(2') \begin{cases} x_1 \leq f_1 \\ x_2 \leq f_2 \\ \vdots \\ x_k \leq f_k \end{cases}$$

numărul restului, crescând de la „ $m$ ” la „ $m+k$ ” !!!

### 3) Problème de transport (P.T)

Acest tip de probleme este o clasă particulară de (P.P.L) și ~~nu~~ vor fi prezentate la finalul acestui capitol pe larg. Modelul lor de rezolvare este similar cu al al (P.P.L) generale, dar nu identic. Diferența majoră dintre cele două clase de probleme este nr. mult mai mare de ecuații și/sau inecuații precum și de necunoscute care apar în (P.I).

## II.2 Diverse forme (de scriere) a unei P.P.L.

### A) Forma generală a unei P.P.L.

A<sub>1</sub>) Forma generală scrisă explicit (sau forma generală a unei P.P.L. scrisă sub formă explicită)

$$(P.P.L.) \begin{cases} (1_g) \text{ (min/max) } f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k \\ (2_g) \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1k} x_k \leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2k} x_k \leq b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mk} x_k \leq b_m \end{cases} \\ (3_g) x_j \geq 0, j = \overline{1, k} \end{cases}$$

Obs:

este forma clasică a modelului unei P.P.L. economice; se poate cere sau valoarea minimă sau cea maximă a funcției obiectiv, iar restricțiile pot avea semnurile " $\leq$ ", " $\geq$ " sau " $=$ ";

### A<sub>2</sub>) Forma generală scrisă matricial

$$(P.P.L.) \begin{cases} (1_g) \text{ (min/max) } f(X) = C X \\ (2_g) A \cdot X \leq B \\ (3_g) X \geq 0 \end{cases}$$

Am folosit următoarele notații matriciale:

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,k}}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}; \quad C = (c_1, c_2, \dots, c_k); \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

### A<sub>3</sub>) Forma generală scrisă vectorial

$$(P.P.L.) \begin{cases} (1_g) \text{ (min/max) } f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k \\ (2_g) x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_k P_k \leq P_0 \\ (3_g) x_j \geq 0, j = \overline{1, k} \end{cases}$$

unde am notat cu  $P_1, P_2, \dots, P_k$  vectorii coloană ai matricei  $A$ , adică:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & \dots & P_k & P_0 \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & b_m \end{pmatrix}$$

iar cu  $P_0$  coloana termenilor liberi din sistem.

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})^T \in \mathbb{R}^m; \quad P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})^T \in \mathbb{R}^m; \quad \dots; \quad P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$$



Obs: Scrierea sub formă matricială sau vectorială ne ajută în definirea unor concepte și în demonstrarea teoremelor care fundamentează algoritmul de rezolvare al (P.P.L.)  
 ii) întotdeauna modelul matematic al unei probleme economice reale/caroak este scris/obținut sub formă explicită

## B) Forma standard a unei P.P.L.

### B1) Forma standard scrisă explicit (!!!)

Obs: orice inecuație (restricție economică) din sistemul liniar în forma generală (2g), poate fi transformată într-o ecuație adăugând/scăzând o nouă variabilă (necunoscută), numită variabilă de compensare (sau "écart" (fr.) sau "slack variable" (engl)), adică:

$$\begin{aligned} a) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k &\leq b_i \xrightarrow{+x_i^c} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k + x_i^c = b_i \\ b) \quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k &\geq b_i \xrightarrow{-x_i^c} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k - x_i^c = b_i \end{aligned} \quad \left( \begin{array}{l} x_i^c \text{ = variabilă} \\ \text{de compensare} \end{array} \right)$$

$$\text{Ex: } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4 \xrightarrow{+x_4^c} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4^c = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 8 \xrightarrow{-x_5^c} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5^c = 8 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} x_4^c \text{ și } x_5^c \text{ sunt variabile} \\ \text{de compensare} \end{array} \right)$$

Obs:

i) putem nota noile variabile de compensare introduse oricum dorim  $\begin{cases} x_i^c \\ y_i \end{cases}$

ii) În continuare, în modelul general (+ def, teoreme) vom utiliza notația pentru noile variabile de compensare:  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+p}$ , ceea ce înseamnă că (P.P.L.) inițială, în forma generală are  $k$  variabile inițiale ( $x_1, x_2, \dots, x_k$ ) și noi am mai introdus un nr. de  $n-p \leq n$  variabile de compensare ( $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$  unde am notat  $n = k+p$ )

iii) (4) (P.P.L.) în forma generală (2g) + sistem care are  $n$  inecuații) poate fi adusă la forma standard (P.P.L.)<sub>s</sub>: (1s) - (3s) (sistemul (2s) devine sistem de ecuații) prin adăugarea de variabile de compensare, adică (P.P.L.)<sub>s</sub> are forma:

$$\begin{aligned} (1s) \quad & (\min/\max) f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k + \underbrace{0x_{k+1} + \dots + 0x_n}_{\substack{\text{de restricție} \\ \text{în forma standard (2s)}}} \\ (2s) \quad & \begin{cases} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k \pm x_{k+i} = b_i \\ a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jk}x_k \pm x_{k+j} = b_j \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \pm x_{k+m} = b_m \end{cases} \\ (3s) \quad & x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

Forma standard explicită a unei (P.P.L.)

- i) se observă din sistemul de ec. (2<sub>g</sub>) că (PIL) în forma standard are  $n = k + p$  necunoscute și anume:
- $k$  necunoscute initiale (cele din forma generală):  $x_1, x_2, \dots, x_k$
  - $p$  necunoscute de compensare (adăugate pentru a transforma toate inecuațiile din sist. (2<sub>g</sub>) în ecuații în sist. (2<sub>s</sub>):  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+p} = x_u$

ii) dacă în sistemul (inițial) se restrînge sub forma generală avem:

- a) toate <sup>cele  $m$</sup>  restrîngerile sub formă de inecuație, va trebui să adăugăm/ scădem în fiecare inecuație o variabilă de compensare (deci  $p = m$ ) și în sistemul sub formă standard (2<sub>s</sub>) vom avea în total  $n = k + m$  variabile;
- b) dacă din cele „ $m$ ” restrîngerile din sist. (2<sub>g</sub>) doar  $p < m$  sunt inecuații (restul pînă la „ $m$ ” fiind ecuații) atunci sist. standard (2<sub>s</sub>) va avea:  $n = k + p$  variabile;
- c) dacă toate cele „ $m$ ” restrîngerile din sist. (2<sub>g</sub>) sunt ecuații, atunci el este deja în formă standard deci nu trebuie să mai adăugăm <sup>noi</sup> variabilă de compensare ( $p = 0$  și  $k = n$ )

Ex:

a) 
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6 \\ (2g) \quad 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 8 \end{cases} \longrightarrow (2s) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^c = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_5^c = 8 \end{cases}$$

Aici  $p = k = 3$  (nr. de necun. initiale)  
 $p = 2 (= m) \rightarrow$  nr. de var. de compensare  
 $n = k + p = 5 \rightarrow$  nr. total de variabile

b) 
$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 4 \\ (2g) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 6 \end{cases} \longrightarrow (2s) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4^c = 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5^c = 6 \end{cases}$$

- iii) expresia funcției obiectiv rămîne aceeași și în forma standard (ca și în forma generală inițială) deoarece coeficienții din funcție corespund variabilelor de compensare sau introduse sunt toți egali cu 0:  $c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = c_n = 0$ , adică:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) &\stackrel{\text{def}}{=} c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k + \underbrace{c_{k+1} x_{k+1} + c_{k+2} x_{k+2} + \dots + c_n x_n}_{\substack{\stackrel{\text{def}}{=} 0 \\ \stackrel{\text{def}}{=} 0}} \\ &= \underbrace{c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k}_{= f(x_1, \dots, x_k)} + 0 \\ &= f(x_1, x_2, \dots, x_k) \end{aligned}$$

Ex: Se presupunem că funcțiile obiectiv pentru sistemele a) și b) din ex. precedent sunt:

a)  $f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \longrightarrow (1s) f(x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c) = \underbrace{4x_1}_{=c_1} + \underbrace{3x_2}_{=c_2} - \underbrace{2x_3}_{=c_3} + \underbrace{0 \cdot x_4^c}_{=c_4} + \underbrace{0 \cdot x_5^c}_{=c_5}$

b)  $(2s) f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1 - 6x_2 - 4x_3 \longrightarrow (2s) f(x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c) = \underbrace{7x_1}_{=c_1} - \underbrace{6x_2}_{=c_2} - \underbrace{4x_3}_{=c_3} + \underbrace{0 \cdot x_4^c}_{=c_4} + \underbrace{0 \cdot x_5^c}_{=c_5}$



(iv) Sunt două cazuri pentru o P.P.L.)  $\begin{cases} \text{se cere valoarea optimă minimă} \\ \text{se cere valoarea optimă maximă} \end{cases}$  Metoda de rezolvare (algoritm

Simplex) este similară dar nu identică ptr. cele două tipuri de probleme. Pentru a nu învăța 2 algoritmi diferiți (cu pericolul de a face confuzie la fiecare etapă de rezolvare) vom studia doar P.P.L. de minim. Acest lucru este posibil, deoarece orice problemă de maxim se poate reduce la o problemă de minim conform relației:

$$(6.1) (\max) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -(\min) -f(x_1, x_2, \dots, x_n) ; \text{ (ii) } f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

(formă liniară)

Datorită relației (6.1)  $(\max) f = -(\min) (-f)$  vom considera întotdeauna (P.P.L.) sub formă standard de forma:

$$\begin{cases} (1_s) (\min) f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k + \underbrace{c_{k+1}x_{k+1} + \dots + c_nx_n}_{=0} \\ (2_s) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \underbrace{a_{1,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{1n}x_n}_{=0} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \underbrace{a_{2,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{2n}x_n}_{=0} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k + \underbrace{a_{m,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{mn}x_n}_{=0} = b_m \end{cases} ; a_{ij} \in \{-1, 0, 1\} ; \text{ (ii) } i = \overline{1, m} \\ \text{ (iii) } j = \overline{1, n} \\ (3_s) x_1, x_2, \dots, x_k, \underbrace{x_{k+1}, \dots, x_n}_{\geq 0} \geq 0 \end{cases}$$

Ex: Să se aducă la forma standard, următoarea (P.P.L.)<sub>g</sub> scrisă explicit sub formă generală:

$$\begin{cases} (1_g) (\max) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 \\ (2_g) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 \geq 2 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 3 \end{cases} \\ (3_g) x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Pentru a aduce (P.P.L.)<sub>g</sub> la forma standard (P.P.L.)<sub>s</sub>, trebuie să transf. problema de maxim într-una de minim, iar sist. de restricții (2<sub>g</sub>) să-l aducem la forma standard (2<sub>s</sub>), adică:

$$\begin{cases} (1_s) (\min) -f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5^c, x_6^c, x_7^c, x_8^c) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 0 \cdot x_5^c + 0 \cdot x_6^c + 0 \cdot x_7^c + 0 \cdot x_8^c \\ (2_s) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5^c = 6 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 - x_6^c = 2 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_7^c = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_8^c = 3 \end{cases} \\ (3_s) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5^c, x_6^c, x_7^c, x_8^c \geq 0 \end{cases}$$



## B<sub>2</sub>) Forma standard scrisă sub formă matricială

- (1s) (min)  $f(x) = C \cdot x$
- (2s)  $A \cdot x = B$
- (3s)  $x \geq 0$

cu notăile:  $A = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_k & p_{k+1} & \dots & p_n \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & a_{m,k+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ ;  $B = \begin{pmatrix} p_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$C = (c_1, c_2, \dots, c_k, \underbrace{c_{k+1}}_{=0}, \dots, \underbrace{c_n}_{=0})$ ;  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$

Ex pentru exemplul anterior forma matricială de mai sus, apar matricele:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5^c & x_6^c & x_7^c & x_8^c \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix}$$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5^c \quad p_6^c \quad p_7^c \quad p_8^c$

## B<sub>3</sub>) Forma standard scrisă vectorial

- (1s) (min)  $f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k + c_{k+1} x_{k+1} + \dots + c_n x_n$
- (2s)  $x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_n p_n = p_0$
- (3s)  $x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n \geq 0$

cu:

$p_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})^T \in \mathbb{R}^m$

$p_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})^T \in \mathbb{R}^m$

$p_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})^T \in \mathbb{R}^m$

$p_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$

Obs. Necesitatea introducerii formei standard pentru o PPL rezolvată din:

- a) imposibilitatea rezolvării (PPL) în formă generală; (inițială)
- b) teorema de mai jos

Teoremă Soluția optimă a unei (PPL)<sub>g</sub> sub formă generală (inițială) se obține din soluția optimă a (PPL)<sub>s</sub> sub formă standard din care se elimină variabilele de compensare introduse.

Mai jos este prezentată „schema de rezolvare” a unei (PPL)<sub>g</sub>:

