Curs 3

I.4) Schimbarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei

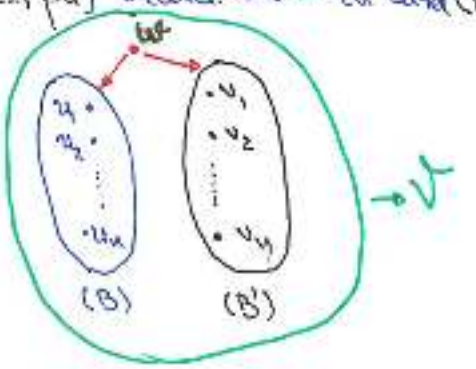
Fie $(V, +, \cdot)$ un spațiu liniar oarecare cu $\dim V = n$ și fie (B) și (B') două baze din V:

$$(3.1)\begin{cases} B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \leq V \\ B' = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \leq V \end{cases}$$

Fie $w \in V$ un vector oarecare, care admite în cele două baze descompunerile:

$$(3.2)\begin{cases} w = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_n u_n \\ w = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \dots + \beta_n v_n \end{cases} \Leftrightarrow (3.2')\begin{cases} w_B = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \to \text{coord. lui } w \text{ în baza } (B) \\ w_{B'} = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n] \to \text{coord. lui } w \text{ în baza } (B') \end{cases}$$

Vom numi: $\begin{cases} (B) \to \text{prima bază / baza inițială / baza veche} \\ (B') \to \text{a doua bază / baza finală / baza nouă} \end{cases}$



Dorim să găsim o legătură (relație) dintre cele două seturi de coordonate (w_B și $w_{B'}$) ale aceluiași vector „w" în cele două baze diferite: (B) și (B') !!

Deoarece $B \leq V \Rightarrow (B)$ - S.G pt. V

deoarece $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ $\Big| \Rightarrow (\exists)\, \alpha_{ij} \in \mathbb{R}$; $i, j = \overline{1,n}$ a.î.:

$$(3.3)\begin{cases} v_1 = \alpha_{11} u_1 + \alpha_{12} u_2 + \dots + \alpha_{1n} u_n \\ v_2 = \alpha_{21} u_1 + \alpha_{22} u_2 + \dots + \alpha_{2n} u_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_n = \alpha_{n1} u_1 + \alpha_{n2} u_2 + \dots + \alpha_{nn} u_n \end{cases} \Leftrightarrow (3.3')\begin{cases} v_1 = [\alpha_{11}, \alpha_{12}, \dots, \alpha_{1n}]_B \\ v_2 = [\alpha_{21}, \alpha_{22}, \dots, \alpha_{2n}]_B \\ \dots\dots\dots\dots \\ v_n = [\alpha_{n1}, \alpha_{n2} \dots, \alpha_{nn}]_B \end{cases} \to \begin{array}{l} \text{descompunerile vect.} \\ v_i,\ i = \overline{1,n} \text{ din } (B') \\ \text{în baza } (B) \end{array}$$

$\downarrow$

deoarece „α_{ij}" sunt coordonatele vectorilor $v_i \in B'$ față de vectorii $u_j \in B$

Vom scrie așa:

$$(3.4)\quad S = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \\ (\in B') \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & \dots\dots & u_n \ (\in B) \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots\dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots\dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots\dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \underline{\text{matricea schimbării de bază}}$$

$$\left(\underline{\text{not}}: (3)\ S \equiv S_{B'/B}\right)$$

Atunci relațiile (3.3) (care exprimă legătura dintre vectorii bazei (B') și vectorii bazei (B)) ne pot scrie sub formă matriceală:

$$(3.3'')\ B' = S \cdot B \quad \text{unde:} \quad B' = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$$

sunt cele două baze scrise matricial (ca matrici coloană)

Teorema: Matricea schimbării de bază S ($=S_{B'B}$) este o matrice inversabilă

Dem: (m.r.a)

Pp: că $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nu este inversabilă ($\nexists S^{-1}$) $\Leftrightarrow \det S = 0$ (S este degenerată) $\Leftrightarrow \operatorname{rang} S < n$ $\Leftrightarrow$ cele „n" linii (sau coloane) ale matricei S nu sunt independente $\Leftrightarrow$ cel puțin una dintre linii se poate scrie ca o combinație liniară de celelalte $\overset{(3.3')}{\underset{(3.3)}{\Leftrightarrow}}$ cel puțin unul dintre vectorii v_i, $i\overline{1,n}$ se poate scrie ca o combinație liniară de ceilalți vectori $\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} B'$ - L.D (fals deoarece $B' \leq V$) $\Leftrightarrow$ presupunerea făcută este falsă $\Leftrightarrow$ S este inversabilă $\{(\exists) S^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})\}$

q.e.d

Vom încerca expresiile (descompunerile) lui $v_i \in B'$, $i\overline{1,n}$ din rel. (3.3) în expresia vectorului w din relația $(3.2)_2$ și obținem:

$$(**)\quad w = \beta_1(s_{11}u_1 + s_{12}u_2 + \dots + s_{1n}u_n) + \beta_2(s_{21}u_1 + s_{22}u_2 + \dots + s_{2n}u_n) + \dots + \beta_n(s_{n1}u_1 + s_{n2}u_2 + \dots + s_{nn}u_n) =$$

$$= \underbrace{(\beta_1 s_{11} + \beta_2 s_{21} + \dots + \beta_n s_{n1})}_{=\alpha_1}u_1 + \underbrace{(\beta_1 s_{12} + \beta_2 s_{22} + \dots + \beta_n s_{n2})}_{=\alpha_2}u_2 + \dots + \underbrace{(\beta_1 s_{1n} + \beta_2 s_{2n} + \dots + \beta_n s_{nn})}_{=\alpha_n}u_n$$

Cf. unicității coordonatelor unui vector într-o bază, din relațiile: $(3.2)_1 + (**)$, obținem:

$$(3.5)\quad \begin{cases} \alpha_1 = s_{11}\beta_1 + s_{21}\beta_2 + \dots + s_{n1}\beta_n \\ \alpha_2 = s_{12}\beta_1 + s_{22}\beta_2 + \dots + s_{n2}\beta_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_n = s_{1n}\beta_1 + s_{2n}\beta_2 + \dots + s_{nn}\beta_n \end{cases} \rightarrow$$ legătura (relațiile) dintre coordonatele w_B și $w_{B'}$ prin intermediul matricii schimbării de bază S^T

care scrise sub formă matriceală:

$$(3.5')\quad w_B = S^T w_{B'} \quad \Leftrightarrow \quad (3.5'')\quad w_{B'} = (S^T)^{-1} w_B$$

Dem: $\nexists$ dem. rel. (3.5'') $\nexists$

Deoarece: $|S| \neq 0 \Leftrightarrow \det(S^T) \neq 0 \Leftrightarrow (\exists)(S^T)^{-1}$ a.î.: $S^T \cdot (S^T)^{-1} = (S^T)^{-1} \cdot S^T = I_n$ (1)

Înmulțim egalitatea (3.5), la stânga, cu $(S^T)^{-1}$ și obținem:

$$(S^T)^{-1} \cdot w_B = \underbrace{(S^T)^{-1} \cdot S^T}_{=I_n} \cdot w_{B'} \Leftrightarrow (S^T)^{-1} \cdot w_B = \underbrace{I_n \cdot w_{B'}}_{=w_{B'}} \Leftrightarrow \underline{(S^T)^{-1} w_B = w_{B'}}$$

q.e.d

Obs:

i) relațiile (formulele) (3.5) sau (3.5') respectiv (3.5'') se numesc: **formulele de schimbare a coordonatelor unui vector la schimbarea bazei**, prin intermediul matricii schimbării de bază

ii) pentru a le aplica în probleme practice, trebuie să determinăm mai întâi matricea schimbării de bază S^T (de fapt S^T și $(S^T)^{-1}$!!!)

iii) Dacă în loc să descompunem vectorii $v_i \in (B')$, $i=\overline{1,n}$ în baza (B), procedăm invers, adică descompunem vectorii bazei inițiale $u_i \in (B)$, $i=\overline{1,n}$ față de vectorii bazei finale (B'), am fi obținut niște relații similare lui (3.3) sau (3.3'), respectiv:

$$(3.6)\begin{cases} u_1 = \lambda'_{11}v_1 + \lambda'_{12}v_2 + \dots + \lambda'_{1n}v_n \\ u_2 = \lambda'_{21}v_1 + \lambda'_{22}v_2 + \dots + \lambda'_{2n}v_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = \lambda'_{n1}v_1 + \lambda'_{n2}v_2 + \dots + \lambda'_{nn}v_n \end{cases} \Leftrightarrow (3.6')\begin{cases} u_1 = [\lambda'_{11}, \lambda'_{12}, \dots, \lambda'_{1n}]_{B'} \\ u_2 = [\lambda'_{21}, \lambda'_{22}, \dots, \lambda'_{2n}]_{B'} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = [\lambda'_{n1}, \lambda'_{n2}, \dots, \lambda'_{nn}]_{B'} \end{cases} \rightarrow \text{coord. vectorilor } u_i \in B \text{ descompuși față de baza } (B')$$

care sub formă matriceală ar exprima:

$$(3.6'')\ B = S' \cdot B' \quad \text{unde } (3.4')\ S' = \begin{pmatrix} \lambda'_{11} & \lambda'_{12} & \dots & \lambda'_{1n} \\ \lambda'_{21} & \lambda'_{22} & \dots & \lambda'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda'_{n1} & \lambda'_{n2} & \dots & \lambda'_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \text{matricea schimbării de bază}$$

($u_1\ u_2\ \dots\ u_n \rightarrow (B')$; $u_1, u_2, \dots, u_n$ pe verticală $\rightarrow (B)$)

Fapt: $S' = S'_{B/B'}$

Se demonstrează ușor că $S' = S^{-1}$ (B) ($S'_{B/B'} = S^{-1}_{B'/B}$), adică: $B \underset{S'=S^{-1}}{\overset{S}{\rightleftarrows}} B'$

Exemple:

1) Fie în spațiul liniar oarecare $(V,+,\cdot)$ bazele: $B=\{u_1,u_2,u_3\}$ și $B'=\{v_1,v_2,v_3\}$ (deci $\dim V=3$). Știm că:

$$(*)\begin{cases} v_1 = 2u_1 + u_2 - u_3 \\ v_2 = u_1 + 3u_2 + u_3 \\ v_3 = -u_2 + 2u_3 \end{cases}$$

iar ~~coordonatele~~ vectorul $(**)\ w = 3v_1 - 2v_2 + v_3$

Se cere să se determine coordonatele vectorului „w" în baza (B).

Rezolvare:

Din rel. $(**)$ $\Rightarrow$ știm coordonatele lui „w" în baza (B'): $(1)\ w_{B'} = [3,-2,1]$

Din rel. $(*)$ $\Rightarrow$ $S\ (= S_{B'/B}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) $\Rightarrow$ $S' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $(2')$

Conform relației (3.5''), avem:

$$w_B = S' \cdot w_{B'} \overset{(2')}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{S'} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{w_{B'}} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow w_B = [4,-4,-3] \Leftrightarrow w = 4u_1 - 4u_2 - 3u_3$$

q.e.d.

Obs: Dacă în textul problemei am fi dat coordonatele lui „w" în baza (B) $(= w_B = [4,-4,-3])$ și am fi cerut coord. lui „w" în baza (B') $(w_{B'} = ?)$, am fi aplicat relația (3.5'') dar trebuia să calculăm $(S')^{-1}$!!!, adică am fi obținut:

$$w_{B'} = (S')^{-1} \cdot w_B = \left((S')^{-1} = ?\right)\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) Fie $(B)\begin{cases} u_1=(1,-1)^T \\ u_2=(-1,2)^T \end{cases} \leq \mathbb{R}^2$ și $(B')\begin{cases} v_1=(2,1)^T \\ v_2=(-3,-2)^T \end{cases} \leq \mathbb{R}^2$ două baze în $\mathbb{R}^2$.

a) determinați matricea schimbării de bază $S_{B'B} \overset{not}{=} S$

b) știind că $w_B=[2,-3]$, aflați $w_{B'}=?$

c) știind că $y_{B'}=[1,1]$, aflați $y_B=?$

> cu ajutorul relațiilor (3.5') și (3.5'')

Rezolvare:

a) Fie $S=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ atunci: $\begin{cases} v_1=s_{11}u_1+s_{12}u_2 \\ v_2=s_{21}u_1+s_{22}u_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2,1)^T=s_{11}(1,-1)^T+s_{12}(-1,2)^T \\ (-3,-2)^T=s_{21}(1,-1)^T+s_{22}(-1,2)^T \end{cases} (=)$

$$\begin{cases} s_{11}-s_{12}=2 \\ -s_{11}+2s_{12}=1 \end{cases} \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{met. lui}} \bar{A}=\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +\end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +\end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} s_{11}=5 \\ s_{12}=3 \end{cases}$$
(u_1 u_2 v_1; s_{11} s_{12}; s_{11} s_{12})

$$\begin{cases} s_{21}-s_{22}=-3 \\ -s_{21}+2s_{22}=-2 \end{cases} \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{met. lui}} \bar{A}=\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +\end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -5 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +\end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} s_{21}=-8 \\ s_{22}=-5 \end{cases}$$
(u_1 u_2 v_2)

$$\Rightarrow S=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -8 & -5 \end{pmatrix}$$

b) trebuie să determinăm mai întâi S^T și $(S^T)^{-1}$ pt. a putea aplica formulele (3.5') și (3.5'').

Dacă $S \Rightarrow S^T=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ (*) Determinăm $(S^T)^{-1}$ cu T.E., adică:

$$S^T=\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}_{=S^T}\Big|\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{=I_2}\Big) \cdot\tfrac{1}{5} \quad /\cdot(-3) \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{8}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \boxed{+1/5} & -3/5 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ +\end{matrix} /\cdot(-5) \cdot(-8) \sim \left(\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\Big|\begin{matrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{matrix}\right) \Rightarrow$$
($=I_2$; $=(S^T)^{-1}$)

$$\Rightarrow (S^T)^{-1}=\begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \quad (**)$$

{ În acest caz particular am obținut că $S^T=(S^T)^{-1}$ $(=)$ $(=) S=S^{-1}$ }

Avem: $w_{B'} \overset{(3.5'')}{=} (S^T)^{-1} w_B \overset{(**)}{=} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 34 \\ 21 \end{pmatrix} (=) \underline{w_{B'}=[34,21]}$

$w=34v_1+21v_2$

c) Cf. (3.5'): $y_B = S^T y_{B'} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix} (=) \underline{y_B=[-3,-2]}$

Verificare calcule

$y_{B'}=[1,1] (=) \underline{y=v_1+v_2}=(2,1)^T+(-3,-2)^T=\underline{(-1,-1)^T}$

$y_B=[-3,-2] (=) \underline{y=-3u_1-2u_2}=-3(1,-1)^T-2(-1,2)^T=\underline{(-1,-1)^T}$ > correct.

$\underline{y=-3u_1-2u_2}$

Lema substituției (caz particular: cele două baze B și B' diferă printr-un singur vector)

Fie $B=\{u_1,\dots,u_{i-1},u_i,u_{i+1},\dots,u_n\}\le V$ și vectorii $v,w\in V$ cu descompunerile în B:

$$(3.7)\begin{cases} v=\gamma_1u_1+\dots+\gamma_{i-1}u_{i-1}+\gamma_iu_i+\gamma_{i+1}u_{i+1}+\dots+\gamma_nu_n \\ w=\alpha_1u_1+\dots+\alpha_{i-1}u_{i-1}+\alpha_iu_i+\alpha_{i+1}u_{i+1}+\dots+\alpha_nu_n \end{cases} \Leftrightarrow (3.7')\begin{cases} v_B=[\gamma_1,\dots,\gamma_i,\dots,\gamma_n] \\ w_B=[\alpha_1,\dots,\alpha_i,\dots,\alpha_n] \end{cases}$$

Atunci:

a) $B'=\{u_1,\dots,u_{i-1},v,u_{i+1},\dots,u_n\}\le V \Leftrightarrow \gamma_i\neq 0$

b) dacă $B'\le V$, atunci $w=\beta_1u_1+\dots+\beta_{i-1}u_{i-1}+\beta_iv+\beta_{i+1}u_{i+1}+\dots+\beta_nu_n \Leftrightarrow w_{B'}=[\beta_1,\dots,\beta_i,\dots,\beta_n]$

unde noile coordonate „$\beta_i, i=\overline{1,n}$" ale lui „w" sunt date de relațiile:

$$(3.8)\begin{cases} \beta_1=\alpha_1-\frac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_1 \\ \text{-----------} \\ \beta_{i-1}=\alpha_{i-1}-\frac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_{i-1} \\ \beta_i=\frac{\alpha_i}{\gamma_i} \\ \beta_{i+1}=\alpha_{i+1}-\frac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_{i+1} \\ \text{-----------} \\ \beta_n=\alpha_n-\frac{\alpha_i}{\gamma_i}\gamma_n \end{cases}$$

B	w	v
u_1	α_1	γ_1
⋮	⋮	⋮
u_{i-1}	α_{i-1}	γ_{i-1}
← u_i	α_i	$\boxed{\gamma_i}\neq 0$ → pivotul transf. elem.
u_{i+1}	α_{i+1}	γ_{i+1}
⋮	⋮	⋮
u_n	α_n	γ_n
u_1	β_1	0
⋮	⋮	⋮
u_{i-1}	β_{i-1}	0
v	β_i	1
u_{i+1}	β_{i+1}	0
⋮	⋮	⋮
u_n	β_n	0

(prin ce se face unitate coloana matricii)

Obs: Elementele din enunțul lemei subst. precum și formulele (3.8) de schimbare a coordonatelor nu trebuie memorate dacă sunt puse sub formă tabelară.

Dem: a) Deoarece $B\le V$ și card $B=n \Rightarrow \dim V=n$. Atunci $B'\le V \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) card } B'=n=\dim V \\ \text{(ii) } B' - L.i \end{cases}$ (A)

Verificăm în ce condiții B' este (sau nu) L.i. Fie scalarii $a_i\in\mathbb{R}, i=\overline{1,n}$, impunem condiția: (1) $a_1u_1+\dots+a_{i-1}u_{i-1}+a_iv+a_{i+1}u_{i+1}+\dots+a_nu_n=0_V$

Înlocuind expresia lui „v" din $(3.7)_1$ în relația (1) obținem:

$a_1u_1+\dots+a_{i-1}u_{i-1}+a_i(\gamma_1u_1+\dots+\gamma_{i-1}u_{i-1}+\gamma_iu_i+\gamma_{i+1}u_{i+1}+\dots+\gamma_nu_n)+a_{i+1}u_{i+1}+\dots+a_nu_n=0_V \Leftrightarrow$

(2) $(a_1+a_i\gamma_1)u_1+\dots+(a_{i-1}+a_i\gamma_{i-1})u_{i-1}+a_i\gamma_iu_i+(a_{i+1}+a_i\gamma_{i+1})u_{i+1}+\dots+(a_n+a_i\gamma_n)u_n=0_V \overset{def}{\Leftrightarrow}$

deoarece $B\le V \Rightarrow$ vectorii $u_1,\dots,u_i,\dots,u_n - L.i$

$$(3)\begin{cases} a_1+a_i\gamma_1=0 \\ \text{--------} \\ a_{i-1}+a_i\gamma_{i-1}=0 \\ a_i\gamma_i=0 \\ a_{i+1}+a_i\gamma_{i+1}=0 \\ \text{--------} \\ a_n+a_i\gamma_n=0 \end{cases}$$

$a_i\gamma_i=0 \longrightarrow$ dacă:

(i) $\gamma_i\neq 0 \Rightarrow a_i=0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} a_1=\dots=a_{i-1}=a_{i+1}=\dots=a_n=0 \Rightarrow B'-L.i \Rightarrow B'\le V$

(ii) $\gamma_i=0 \Rightarrow a_i\neq 0 \Rightarrow B'-L.D \Rightarrow B\not\le V$

(a_i poate fi orice nr. real, deci și diferit de 0)

b) Înlocuim în relația: $w = p_1 u_1 + \dots + p_{i-1} u_{i-1} + p_i v + p_{i+1} u_{i+1} + \dots + p_n u_n$ vectorul v cu expresia din $(3.7)_1$ și vom obține:

$$w = p_1 u_1 + \dots + p_{i-1} u_{i-1} + p_i (\delta_1 u_1 + \dots + \delta_{i-1} u_{i-1} + \delta_i u_i + \delta_{i+1} u_{i+1} + \dots + \delta_n u_n) + p_{i+1} u_{i+1} + \dots + p_n u_n \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(4)\ w = (p_1 + p_i \delta_1) u_1 + \dots + (p_{i-1} + p_i \delta_{i-1}) u_{i-1} + p_i \delta_i u_i + (p_{i+1} + p_i \delta_{i+1}) u_{i+1} + \dots + (p_n + p_i \delta_n) u_n$$

Din $(3.7)_2$ și (4), conform unicității coordonatelor în baza B, obținem:

$$(5)\ \begin{cases} p_1 + p_i \delta_1 = \alpha_1 \\ \dots\dots\dots \\ p_{i-1} + p_i \delta_{i-1} = \alpha_{i-1} \\ p_i \delta_i = \alpha_i \ /\cdot \frac{1}{\delta_i} \neq 0 \Rightarrow \boxed{p_i = \frac{\alpha_i}{\delta_i}} \ (*) \\ p_{i+1} + p_i \delta_{i+1} = \alpha_{i+1} \\ \dots\dots\dots \\ p_n + p_i \delta_n = \alpha_n \end{cases} \quad (\Leftrightarrow) \quad (5') \begin{cases} p_1 = \alpha_1 - p_i \delta_1 \overset{(*)}{=} \alpha_1 - \frac{\alpha_i}{\delta_i} \delta_1 \\ \dots\dots\dots \\ p_{i-1} = \alpha_{i-1} - p_i \delta_{i-1} \overset{(*)}{=} \alpha_{i-1} - \frac{\alpha_i}{\delta_i} \delta_{i-1} \\ p_i = \frac{\alpha_i}{\delta_i} \\ p_{i+1} = \alpha_{i+1} - p_i \delta_{i+1} \overset{(*)}{=} \alpha_{i+1} - \frac{\alpha_i}{\delta_i} \delta_{i+1} \\ \dots\dots\dots \\ p_n = \alpha_n - p_i \delta_n \overset{(*)}{=} \alpha_n - \frac{\alpha_i}{\delta_i} \delta_i \end{cases} \equiv (3.8)$$

q.e.d.

Ex:

Fie $B = \{u_1, u_2, u_3\} \leq V$ și vectorii $\begin{cases} v = u_1 - u_2 + 2u_3 \\ w = 3u_1 + u_2 \end{cases}$ $\{v_B = [1, -1, 2]\}$ $\{w_B = [3, 1, 0]\}$

Determinați coordonatele lui „w" în bazele:

a) $B' = \{u_1, v, u_3\}$ c) $B''' = \{v, u_2, u_3\}$

b) $B'' = \{u_1, u_2, v\}$

Dem: Aplicăm forma matricială scriind datele problemei sub formă tabelară:

a)

B	w	v ↓
u_1	3	1
← u_2	+1	$\boxed{-1}$
u_3	0	2
	4	0
↓ v	−1	1
u_3	2	0

(+) /(−1)/ /·2

$w = 4u_1 - v + 2u_3$

$w_{B'} = [4, -1, 2]$

b)

B	w	v ↓
u_1	3	1
u_2	1	−1
← u_3	0	$\boxed{2}$
u_1	3	0
u_2	1	0
v	0	1

(+) (+) /·½ /·½ /·(−½)

$w = 3u_1 + u_2 + 0v$

$w_{B''} = [3, 1, 0]$

c)

B	w	v ↓
← u_1	3	$\boxed{1}$
u_2	1	−1
u_3	0	2
v	3	1
u_2	4	0
u_3	−6	0

/·(−2) (+) (+)

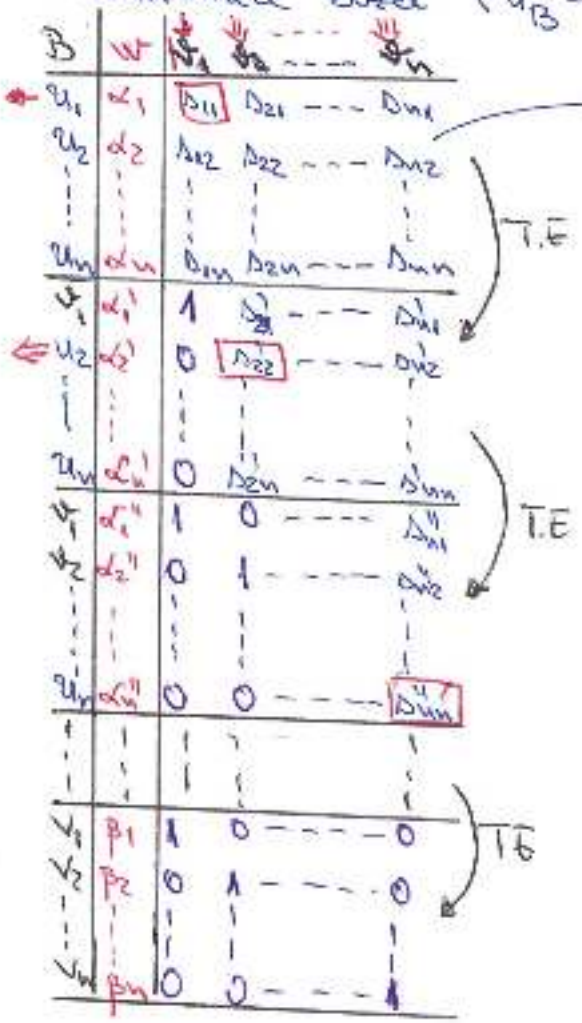
$w = 3v + 4u_2 - 6u_3$

$w_{B'''} = [3, 4, -6]$

Obs:

i) Lema substituției (L.S.) poate fi aplicată iterativ a.î. putem afla coordonatele unui vector (sau a mai multora) într-o nouă bază B' care diferă de baza inițială prin 2, 3, ... sau toți vectorii

ii) Când noua bază B' diferă prin toți vectorii de vechea bază B, pentru a putea aplica L.S. trebuie să știm (deja) matricea schimbării de bază (așa cum vedeți în tabelul de mai jos) și evident că în acest caz avem mult mai simplu să aplicăm formulele de schimbare a coord. la schimbarea bazei ($x_B = S \cdot x_{B'}$ sau $x_{B'} = (S^T)^{-1} x_B$)



→ sunt componentele matricii S^T (!!!)

Obs: pentru a se evita calculul matricii S (necesară în primul tabel din L.S.) se va lua întotdeauna ca bază inițială = baza canonică din $\mathbb{R}^n$ (B_c)

iii) Lema subst. poate fi folosită și atunci când dorim să aflăm coord. unui vector direct într-o bază B, vom considera în acest caz:

- Baza inițială: B_c → bază canonică
- Baza finală: B → bază în care se cer coord. vect.

Ex: Fie $(B)\begin{cases} u_1 = (1,-1,0)^T \\ u_2 = (-1,2,2)^T \\ u_3 = (0,-2,-1)^T \end{cases} \leq \mathbb{R}^3$

Se cere:

a) $x = (3,3,-1)^T \Rightarrow x_B = ?$

b) $x_B = [2,1,1] \Rightarrow x = ?$

Deci:

a)

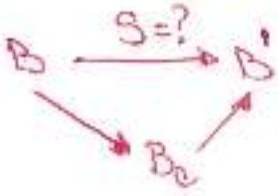
	B	W	u_1 (I)	u_2 (II)	u_3 (III)	
←	e_1	3	[1]	-1	0	/
	e_2	3	-1	2	-2	+
	e_3	-4	0	2	-1	
	u_4	3	1	-1	0	+
⇐	e_2	6	0	[1]	-2	/·(-2)
	e_3	-4	0	2	-1	+
	u_1	9	1	0	-2	+
	u_2	6	0	1	-2	+
⇐	e_3	-16	0	0	[3]	/·1/3 /·2/3 /·2/3
	u_1	-5/3	1	0	0	
	u_2	-14/3	0	1	0	
	u_3	-16/3	0	0	1	

(↓)

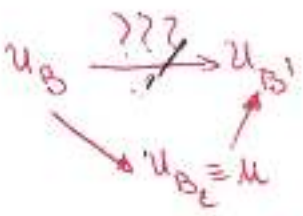
$W = -\frac{5}{3}u_1 - \frac{14}{3}u_2 - \frac{16}{3}u_3 \Leftrightarrow W_B = \left[-\frac{5}{3}, -\frac{14}{3}, -\frac{16}{3}\right]$

b) $Z_B = [2,1,1] \Leftrightarrow Z = 2u_1 + u_2 + u_3 = 2(1,-1,0)^T + (-1,2,2)^T + (0,-2,-1)^T = \underline{(1,-2,1)^T}$

iv) atunci când dorim să aflăm $v_{B'}$ avnd v_B (sau invers), dar nu știm matricea S, vom folosi întotdeauna ca bază intermediară baza canonică B_c.



adică:



v) tabelul inițial al unei substituții: atunci când vrem să aflăm coord. unui vector $w = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in \mathbb{R}^n$ în baza $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ fă vectorii u_i, $i = \overline{1,n}$ având corespondențele: $\begin{cases} u_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})^T \\ u_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})^T \\ \vdots \\ u_n = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})^T \end{cases}$ va fi

urmă tabel:

B	W	u_1	u_2	...	u_n
e_1	α_1	a_{11}	a_{21}	...	a_{n1}
e_2	α_2	a_{12}	a_{22}	...	a_{n2}
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮
e_n	α_n	a_{1n}	a_{2n}	...	a_{nn}