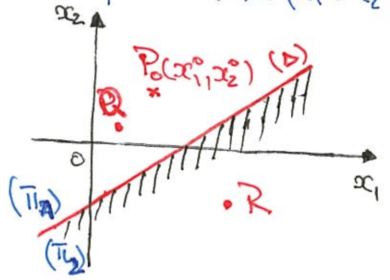
Seminar 5 — Rezolvarea problemelor de programare liniară (PPL) cu 2 necunoscute (în două dimensiuni) cu metoda grafică

Fie (P.P.L) de forma:

$$\begin{cases} (1)\ (\min/\max)\ f(x_1,x_2)=c_1x_1+c_2x_2 \\ (2)\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2 \lesseqqgtr b_1 & (R_1) \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2 \lesseqqgtr b_2 & (R_2) \\ \text{-----------------} & \dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2 \lesseqqgtr b_m & (R_m) \end{cases} \\ (3)\ x_1,x_2\geq 0 \end{cases}$$

I) Separarea planului în regiuni de către o dreaptă. Soluția geometrică a unei inecuații liniare cu două necunoscute.

Fie planul $(\pi)\equiv(x_1Ox_2)$ și o dreaptă $(\Delta)\ ax_1+bx_2+c=0$ inclusă în plan $(\Delta\subset\pi)$.



Asociem dreptei (Δ) funcția liniară:

$$\begin{cases} g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ g(x_1,x_2)\overset{def}{=}ax_1+bx_2+c \end{cases} \Rightarrow (\Delta)\ g(x_1,x_2)=0$$ → ec. dreptei (Δ) cu ajutorul funcției „g"

Obs: i) $(\forall)\ P(x_1,x_2)\in\pi$ avem: $\begin{cases} g(P)\equiv g(x_1,x_2)=0 \iff P\in(\Delta) \\ g(P)\neq 0 \iff P\notin(\Delta) \end{cases}$

ii) deci, dacă $P(x_1,x_2)\notin(\Delta) \Rightarrow \begin{cases} g(P)>0 \\ \text{sau} \\ g(P)<0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} (\pi)=(\pi_1)\cup(\pi_2)\cup(\Delta) \\ (\pi_1)\cap(\pi_2)=\emptyset \end{cases}$

cele 2 semiplane deschise determinate de dr. (Δ).

T (de separare a planului în regiuni de către o dreaptă)

Fie punctul $P_0(x_1^0,x_2^0)\in\pi_1$ (sau π_2) a.î. $g(P_0)\equiv g(x_1^0,x_2^0)>0$ (sau <0). Atunci:

$$\begin{cases} g(Q)\underset{(<)}{>}0 & ;\ (\forall)\ Q(x_1,x_2)\in\pi_1 \\ g(R)\underset{(>)}{<}0 & ;\ (\forall)\ R(x_1,x_2)\in\pi_2 \end{cases}$$

Obs: teorema afirmă că dacă funcția g are o valoare pozitivă (negativă) într-un punct P_0 dintr-unul din cele două semiplane π_1,π_2 determinate de dreapta (Δ), atunci va avea tot valori pozitive (negative) în toate celelalte puncte din semiplanul lui P_0 (și negative în celălalt semiplan)

Cu alte cuvinte, dacă pp. că $g(P_0)\equiv g(x_1^0,x_2^0)>0$ cu $P_0\in\pi_1$, atunci:

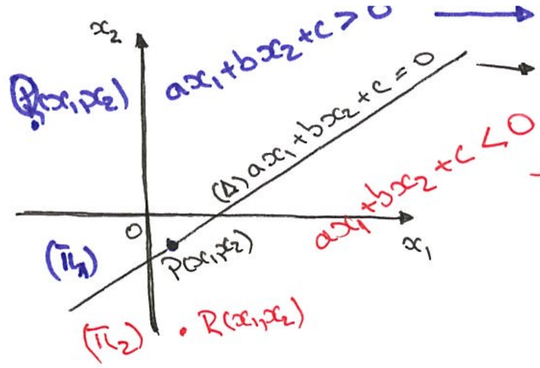
i) $g(Q)\equiv g(x_1,x_2)\equiv ax_1+bx_2+c>0$; $(\forall)\ Q(x_1,x_2)\in\pi_1$

ii) $g(P)\equiv g(x_1,x_2)\equiv ax_1+bx_2+c=0$; $(\forall)\ P(x_1,x_2)\in\Delta$

iii) $g(R)\equiv g(x_1,x_2)\equiv ax_1+bx_2+c<0$; $(\forall)\ R(x_1,x_2)\in\pi_2$

Din relațiile de mai sus, observăm că mulțimea soluțiilor unei inecuații liniare cu două necunoscute = mulțimea punctelor dintr-unul din cele două semiplane determinate de dreapta corespunzătoare inecuației.

(2



→ mulț. soluțiilor inecuației $ax_1+bx_2+c>0$ → (Π_1)

→ mulț. soluțiilor ecuației: $ax_1+bx_2+c=0$ → (Δ)

→ mulț. soluțiilor inecuației $ax_1+bx_2+c<0$ → (Π_2)

Algoritm de lucru (ptr. determ. soluțiilor unei inec. lin. cu 2 necunoscute)

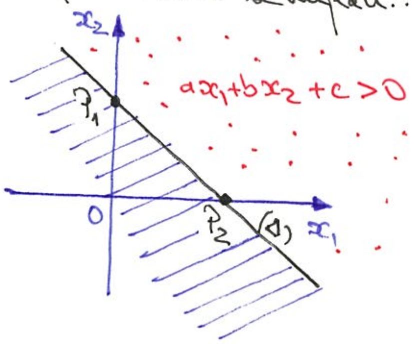
Pentru determinarea soluțiilor unei inecuații liniare de forma: $ax_1+bx_2+c \underset{(<)}{>} 0$ se procedează astfel:

1) se atașează inec. lin. (R) $ax_1+bx_2+c \underset{(<)}{>} 0$ dreapta corespunzătoare $(\Delta)\ ax_1+bx_2+c=0$

2) se reprezintă grafic dreapta (Δ) (folosind în mod uzual punctele de intersecție cu axele de coordonate): $\begin{cases} x_1=0 \overset{(\Delta)}{\Rightarrow} x_2=-\frac{c}{b} \Rightarrow P_1(0,-\frac{c}{b}) \\ x_2=0 \overset{(\Delta)}{\Rightarrow} x_1=-\frac{c}{a} \Rightarrow P_2(-\frac{c}{a},0) \end{cases}$

3) se elimină, prin hașurare, semiplanul care nu este soluție al inecuației (R)

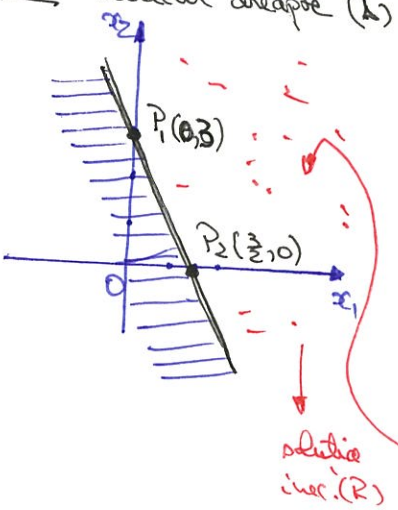
Obs: ptr. a determina care din cele două semiplane determinate de dreapta (Δ) este soluț[ia] inecuației (R) se verifică dacă originea axelor de coordonate $O(0,0)$ (care apar-ține unui semiplan!!) este soluție, sau nu, ptr. inec. (R).



→ semiplanul soluțiilor inec. $ax_1+bx_2+c>0$
(toate punctele din acest semiplan verifică inecuația!!)

Ex: Rezolvați inecuația: (R) $2x_1+x_2-3>0$

Dem: asociem dreapta $(\Delta)\ 2x_1+x_2-3=0 \Leftrightarrow (\Delta)\ 2x_1+x_2=3 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \Rightarrow x_2=3;\ P_1(0,3) \\ x_2=0 \Rightarrow x_1=\frac{3}{2};\ P_2(\frac{3}{2},0) \end{cases}$



Înlocuim coordonatele originii $O(0,0)$ în inec.(R): $2\cdot 0+0-3>0 \Leftrightarrow -3>0$ (F)

deci $O(0,0)$ nu este soluție (nu verifică) a inec.(R), deci semiplanul care conține originea nu este soluția lui (R) și-l eliminăm hașurându-l. Semiplanul care nu conține originea este soluția inecuației!

II) Rezolvarea sistemelor liniare de inecuații cu două necunoscute cu metoda grafică

Pentru a determina mulțimea soluțiilor ($\overset{not}{=} S$) unui sistem de inecuații de forma:

$$(2)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \lesseqgtr b_1 & (R_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \lesseqgtr b_2 & (R_2) \\ \text{-------------------} & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \lesseqgtr b_m & (R_m) \end{cases}$$

vom proceda astfel:

① asociem fiecărei inecuații (restricții) (R_i) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \lesseqgtr b_i$; $i=\overline{1,m}$ dreapta corespunzătoare: (Δ_i) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$; $i=\overline{1,m}$ și o reprezentăm grafic (folosind punctele de intersecție ale dreptei cu axele de coordonate)

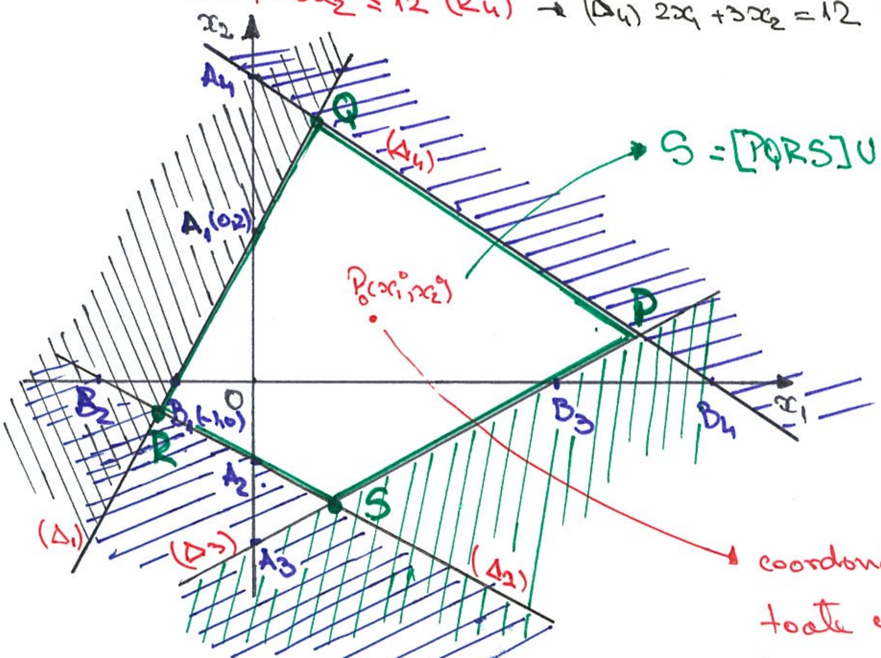
② se elimină (prin hașurare) unul din cele două semiplane determinate de dreapta (Δ_i) care nu este soluția (nu verifică) inecuației corespunzătoare (R_i)

③ zona rămasă nehașurată din plan, reprezintă soluția ($\overset{not}{=} S$) sistemului de inecuații

<u>Obs:</u> (i) S = mulțimea coordonatelor punctelor din zona nehașurată a planului x_1Ox_2
(ii) S = <u>mulțime poligonală convexă</u>

Ex:

$$(2)\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 & (R_1) \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 & (R_2) \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 & (R_3) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 & (R_4) \end{cases}
\begin{array}{lll} \to (\Delta_1)\ 2x_1 - x_2 = -2 & : A_1(0,2)\ ; & B_1(-1,0) \\ \to (\Delta_2)\ x_1 + 2x_2 = -2 & : A_2(0,-1)\ ; & B_2(-2,0) \\ \to (\Delta_3)\ x_1 - 2x_2 = 4 & : A_3(0,-2)\ ; & B_3(4,0) \\ \to (\Delta_4)\ 2x_1 + 3x_2 = 12 & : A_4(0,4)\ ; & B_4(6,0) \end{array}$$



$S = [PQRS] \cup \text{int}[PQRS] \overset{not}{\equiv} \overline{[PQRS]}$ → închiderea patrulaterului [PQRS]

↓

mulțime poligonală convexă (mulțimea soluțiilor sist. (2))

coordonatele x_1^0, x_2^0 ale punctului P_0 verifică toate cele 4 inecuații ale sist. (2)

{P_0 este una din infinitatea de soluții aflate în interiorul și pe laturile patrulaterului PQRS}

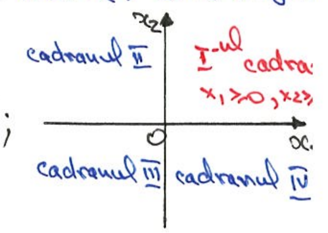
III Rezolvarea P.P.L. cu metoda grafică

Fie P.P.L de forma (1) – (3). Algoritmul de rezolvare (de determinare a soluției optime) ~~[illegible]~~ cu metoda grafică constă în următoarele etape:

① Se determină mulțimea S a soluțiilor generale a PPL (adică a sist. lin. de inec. (2) cu metoda grafică)

② Se determină mulțimea S_A a soluțiilor admisibile a PPL (soluțiile sist. (2) care verifică condițiile de nenegativitate (3)), astfel:

$$S_A \stackrel{def}{=} S \cap \{\text{primul cadran}\} \rightarrow \text{mulțime poligonală convexă};$$



③ Se determină mulțimea S_0 a soluțiilor optime a PPL astfel:

metoda I

a) se determină mulțimea S_{AB} soluțiilor de bază admisibile a PPL astfel:

$$S_{AB} \stackrel{def}{=} \{\text{vârfurilor mulțimii } S_A\}$$

Obs: elementele lui S_{AB} (vârfurile lui S_A) se află la intersecția a două drepte $(\Delta_i) \cap (\Delta_j)$ deci trebuie rezolvat sist. liniar de 2 ecuații cu 2 necun. format din ecuațiile celor două drepte.

b) se calculează valoarea funcției obiectiv în fiecare din elementele lui S_{AB} ($\equiv$ vârfurile lui S_A)

Mulțimea S_0 este formată din coordonatele acelui(-lor) vârf(-uri) unde $f(x_1, x_2)$ ia valoarea minimă sau maximă (optimă)

Obs: este obligatoriu ca mulțimea S_A să fie un poligon (linie poligonală închisă)

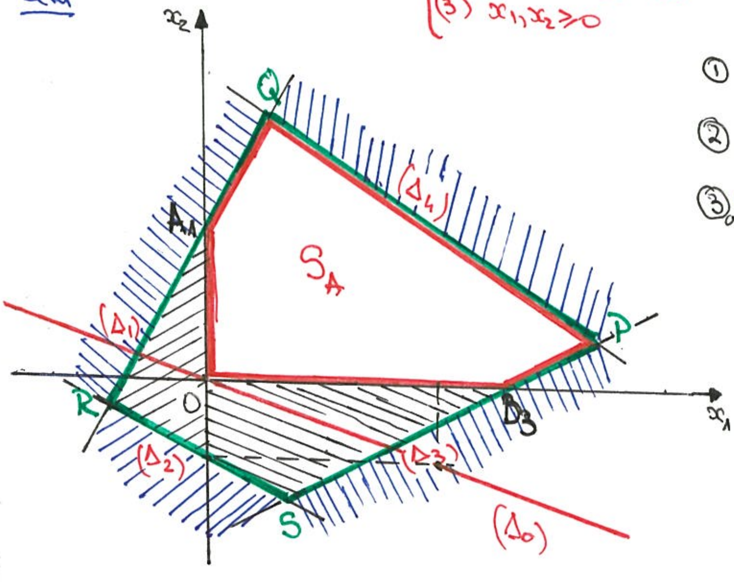
metoda II

a) se reprezintă grafic dreapta: $(\Delta_0)\ f(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow (\Delta_0)\ c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ (care este o dreaptă care trece prin $O(0,0)$)

b) mulțimea S_0 este formată din coordonatele punctului (vârfului) din S_{AB} care se află la distanța optimă (min/max) de dreapta (Δ_0).

Ex: Să se rezolve (P.P.L):
$$\begin{cases} (1)\ (\max)\ f(x_1,x_2) = x_1 + 3x_2 \\ (2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \end{cases} \\ (3)\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
→ este sistemul care l-am rezolvat în capitolul anterior

Dem



① $S = [PQRS]$

② $S_A = [OB_3PQA_1]$

③ a) $S_{AB} = \{O, B_3, P, Q, A_1\}$ metoda I

$O(0,0) \Rightarrow f(O) = f(0,0) = 0$

$B_3(4,0) \Rightarrow f(B_3) = f(4,0) = 4$

$A_1(0,2) \Rightarrow f(A_1) = f(0,2) = 6$

$\{P\} = \Delta_3 \cap \Delta_4 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{36}{7} \\ x_2 = \frac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow f(P) = f\left(\frac{36}{7}, \frac{4}{7}\right) = \frac{48}{7} \simeq 6,8$

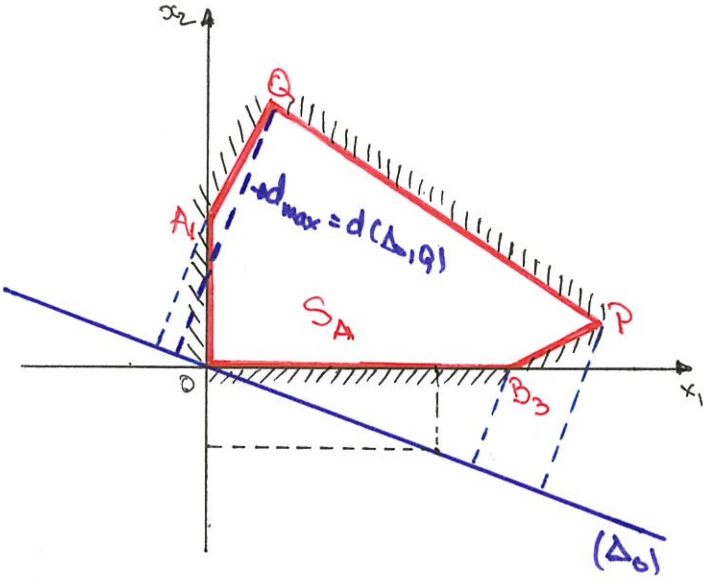
$\{Q\} = \Delta_1 \cap \Delta_4 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} \\ x_2 = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow f(Q) = f\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{2}\right) = \frac{45}{4} \simeq 11,2$ (max)

b) deoarece valoarea maximă a funcției obiectiv este atinsă în punctul $Q \Rightarrow$

$S_0 = \{Q\}$ deci $\begin{cases} x_1^{optim} = \frac{3}{4} \\ x_2^{optim} = \frac{7}{2} \end{cases}$

$(\max) f(x_1, x_2) = \frac{45}{4}$

metoda II



$(\Delta_0)\ x_1 + 3x_2 = 0$ $\begin{cases} O(0,0) \\ T(3,-1) \end{cases}$

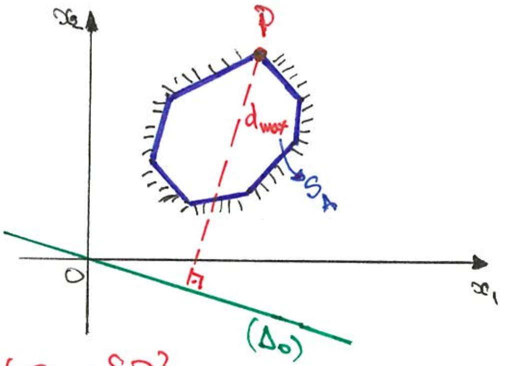
Conform figurii $d_{max}(\Delta_0, S_A) = d(\Delta_0, Q) \Rightarrow$

$\Rightarrow S_0 = \{Q\}$ cu $\begin{cases} Q(3/4, 7/2) \\ f(Q) = \frac{45}{4} \end{cases}$

IV) Tipurile de soluții ale unei P.P.L.

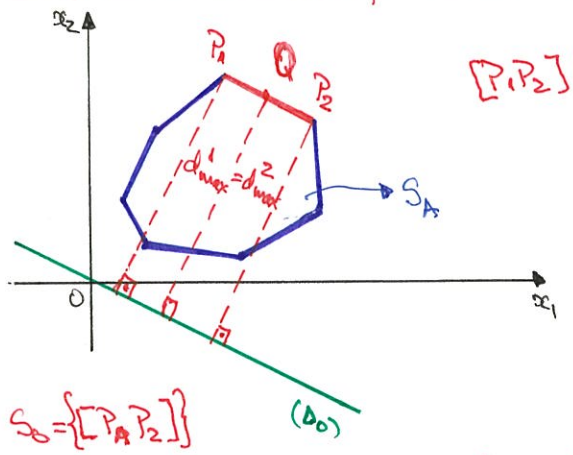
A) P.P.L. de „maxim"

a₁) soluție optimă unică (și finită)



$\begin{cases} S_0 = \{P\} \\ (\max) f(x_1,x_2) = f(P) \end{cases}$

a₂) o infinitate de soluții optime (finite)

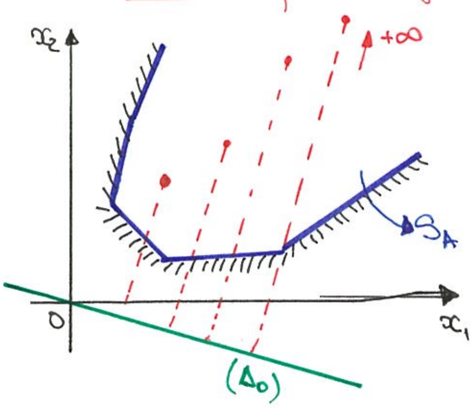


$[P_1P_2] \parallel (\Delta_0)$

$S_0 = \{[P_1P_2]\}$

$(\max) f(x_1,x_2) = f(P_1) = f(P_2) = f(Q)$; $(\forall)\ Q \in [P_1, P_2]$

a₃) maxim (optim) infinit



$\begin{cases} S_0 = \emptyset \\ (\max) f(x_1,x_2) = +\infty \end{cases}$

Obs: este posibil ca pentru anumite P.P.L (cazuri particulare) să avem:

$\begin{cases} a)\ S = \emptyset \Rightarrow S_A = \emptyset \Rightarrow S_0 = \emptyset \\ b)\ S \neq \emptyset \text{ dar } S \cap (I^{ul} \text{ cadran}) (= S_A) = \emptyset \Rightarrow S_0 = \emptyset \end{cases}$

B) PPL de „minim"

3 cazuri similare !!!