

11. Fie sistemul de ecuații liniare:
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_5 = -6 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}$$
 Aplicând metoda lui Gauss, determinați forma explicită și soluția de bază corespunzătoare acestora, considerând variabile principale pe x_1 și x_4 . Stabiliți tipul soluției de bază găsite (și explicați/justificați de ce este de acest tip).

Dem:

$$(K) \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_1 \cdot (-\frac{1}{2}) \\ R_1 \cdot \frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \equiv A_{GJ}$$

$$\begin{matrix} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \gamma \\ \downarrow \\ \text{v. soc.} \end{matrix}$$

$\Rightarrow X_E = (\alpha, \beta, -\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{3}{2}\gamma, 3 + \alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{2}\gamma, \gamma)^T \in \mathbb{R}^5 \rightarrow$ forma explicită corresp. v.p. x_3, x_4
 $\downarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$\bar{X} = (0, 0, 0, 3, 0)^T \in \mathbb{R}^5 \rightarrow$ soluția de bază corespunzătoare $\left\{ \begin{array}{l} \text{actuațională (toate componentele sunt } \geq 0) \\ \text{degenerată (var. prive. } x_3 = 0) \end{array} \right.$

Obs: aveți de făcut o minge de coloană a matricei unitate (I_2)!!! În 4-5 minute asigurați-vă minim nota 4 (pentru) la subiectul scris $\{(10+1+1) \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36\}$.

12. Fie mulțimea de vectori $B = \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{R}^3$ de forma:
$$\begin{cases} x_1 = (-2, 2, -1)^T \\ x_2 = (0, -1, 1)^T \\ x_3 = (-1, 1, 0)^T \end{cases}$$
 Se cere:

- arătați că $B \leq \mathbb{R}^3$ (B este bază în \mathbb{R}^3);
- dacă $y = (3, 0, -2)^T$ determinați numai cu lema substitutiei coordonatele acestuia în baza B :
 $y_B = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$;
- dacă $z_B = [2, 1, -2]$ determinați coordonatele acestuia în baza canonică din \mathbb{R}^3 : $z_B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$.

Dem:

a) $B \leq \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) card } B = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \text{ (A)} \\ \text{ii) } B = \text{L.I.} \Leftrightarrow r_A = 3 = \text{nr. var.}, \text{ unde } A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv A_{GJ} \Rightarrow r_A = 3 \Leftrightarrow B = \text{L.I.} \Leftrightarrow B \leq \mathbb{R}^3.$

Verificare calculul:

$$y = -x_1 - 3x_2 - x_3 = (-2, 2, -1)^T - 3(0, -1, 1)^T - (-1, 1, 0)^T = (3, 0, -2)^T \text{ (adus.)}$$

b) $B = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 + R_1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \cdot (-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \cdot (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv A_{GJ}$

$y = -x_1 - 3x_2 - x_3 \Leftrightarrow y_B = [-1, -3, -1]$

c) $z_B = [2, 1, -2] \Leftrightarrow z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2(-2, 2, -1)^T + (0, -1, 1)^T - 2(-1, 1, 0)^T = (-2, 1, -1)^T \Leftrightarrow z_B = [-2, 1, -1]$
 $z = -2e_1 + e_2 - e_3$

13. Fie bazele din \mathbb{R}^2 : $(B) \begin{cases} u_1 = (5, -3)^T \\ u_2 = (-2, 1)^T \end{cases}$ și $(B') \begin{cases} v_1 = (-3, -1)^T \\ v_2 = (7, 2)^T \end{cases}$. Se cere:

- dacă $w = (-1, 3)^T$ aflați cu ajutorul lemei substituției coordonatele $w_B = [\alpha_1, \alpha_2]$ și $w_{B'} = [\beta_1, \beta_2]$;
- dacă $x_B = [-1, -2]$ determinați vectorul $x = (a_1, a_2)^T$;
- dacă $y_{B'} = [2, 4]$ determinați, cu ajutorul lemei substituției, coordonatele $y_B = [\gamma_1, \gamma_2]$;
- determinați, cu lema substituției, matricea schimbării de bază: $S_{B'B}$;
- rezolvați punctul c) folosind formulele de schimbare a coordonatelor unui vector la schimbarea bazei (prin intermediul matricii schimbării de bază).

Desu:

a) $a_1) w = (-1, 3)^T \xrightarrow{?} w_B^{int} = [\alpha_1, \alpha_2]$

B	w	u_1	u_2
e_1	-1	5	-2
e_2	3	-2	1
e_1	5	1	0
e_2	3	-2	1
u_1	-5	1	0
u_2	-12	0	1

$w = -5u_1 - 12u_2 \Rightarrow w_B = [-5, -12]$

$\Rightarrow w = -5(5, -3)^T - 12(-2, 1)^T = (-1, 3)^T$ (adecu)

$a_2) w = (-1, 3)^T \xrightarrow{?} w_{B'}^{int} = [\beta_1, \beta_2]$

B	w	v_1	v_2
e_1	-1	-3	-1
e_2	3	7	2
e_1	-10	0	1
e_2	-3	1	-2
v_1	-10	0	1
v_2	-23	1	0

$w = -23v_1 - 10v_2 \Rightarrow w_{B'} = [-23, -10]$

$\Rightarrow w = -23(-3, -1)^T + 10(7, 2)^T = (-1, 3)^T$ (A)

b) $x_B = [-1, -2] \Rightarrow x = -u_1 - 2u_2 = -(5, -3)^T - 2(-2, 1)^T = (-1, 1)^T$

c) $y_{B'} = [2, 4] \xrightarrow{?} y_B = [\gamma_1, \gamma_2]$

$y_B = [2, 4] \Rightarrow y = 2u_1 + 4u_2 = 2(5, -3)^T + 4(-2, 1)^T = (2, -2)^T \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 18(-3, -1)^T + 8(7, 2)^T = (2, -2)^T$ (A)

B	y	v_1	v_2
e_1	2	-3	-1
e_2	-2	7	2
e_1	8	0	1
e_2	2	1	-2
v_1	8	0	1
v_2	18	1	0

$y = 18v_1 + 8v_2 \Rightarrow y_{B'} = [18, 8]$

d) $S_{B'B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ a. f. $\begin{cases} v_1 = a_{11}u_1 + a_{21}u_2 \\ v_2 = a_{12}u_1 + a_{22}u_2 \end{cases}$

B	v_1	v_2	u_1	u_2
e_1	-3	-1	5	-2
e_2	-1	2	-2	1
e_1	-5	11	1	0
e_2	-1	2	-2	1
u_1	5	-11	1	0
u_2	14	-31	0	1

Deci $(u_1, u_2) \Rightarrow S_{B'B} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ -11 & -31 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} v_1 = 5u_1 + 14u_2 \\ v_2 = -11u_1 - 31u_2 \end{cases}$

q.e.d

c) $y_B = [2, 4]^T \Rightarrow y_{B'} = (S^T)^{-1} y_B = \underbrace{(S^{-1})^T}_{S'^{-1}} y_B$ (*)

$S \rightarrow \tilde{S} = \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 14 & 1 & 0 \\ -11 & -5 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{R_1 \cdot \frac{1}{3} \\ R_2 \cdot \frac{1}{-5}}} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 14/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1/5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2 \cdot (-5)} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 31 & 14 \\ 0 & 1 & -11 & -5 \end{array} \right) \Rightarrow S'^{-1} = \begin{pmatrix} 31 & 14 \\ -11 & -5 \end{pmatrix} = S'_{B' B}$

Dec (*) + (*) $\Rightarrow y_{B'} = \begin{pmatrix} 31-11 \\ -11-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y_{B'} = [18, 8]^T$ q.e.d

obs: am fi putut obtine matricea $S' = S^{-1}$ cu o alta substitutie, unde:

$S'_{B' B} = \begin{pmatrix} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{pmatrix}$ ar: (*) $\begin{cases} u_1 = s'_{11}v_1 + s'_{12}v_2 \\ u_2 = s'_{21}v_1 + s'_{22}v_2 \end{cases}$

Dec (*) + (*) $\Rightarrow S'_{B' B} = \begin{pmatrix} 31 & 14 \\ -11 & -5 \end{pmatrix} = S'^{-1}_{B' B}$

B	u_1	u_2	v_1	v_2
e_1	5	-2	-3	1
e_2	3	1	-1	2
v_1	14	-5	0	1
v_2	3	-1	1	-2
u_1	14	-5	0	1
u_2	31	-11	1	0

(*) $\begin{cases} u_1 = 31v_1 + 14v_2 \\ u_2 = -11v_1 - 5v_2 \end{cases}$

q.e.d