Curs 11 IV.3.2) Derivate parțiale de ordinul II. Diferențiala de ord. II. Hessiana atașată unei funcții de „n" variabile

Def. 1 Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție care admite toate cele „n" derivate parțiale de ord. I: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$. Numim derivata parțială de ordinul II a funcției f în raport cu variabilele „x_i" respectiv „x_j", expresia:

$$(11.1)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad ; \quad (\forall)\ i,j=\overline{1,n}$$

Obs:

i) funcția $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ admite „n^2" derivate parțiale de ord. II;

ii) $$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \overset{not}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right); (\forall)\ i=\overline{1,n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right); \ i,j=\overline{1,n},\ i\neq j \end{cases}$$

→ derivate parțiale de ord. II pătratice (sunt în număr de „n": $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$)

→ derivate parțiale de ord. II mixte / dreptunghiulare {sunt în nr. de: $n^2-n = n(n-1)$}

Cazuri particulare

a) $n=1$: $f''(x) = (f'(x))'$

Ex: $f(x) = x^2 e^x$; $x_0=1$

$$f'(x) = (x^2+2x)e^x \Rightarrow \begin{cases} f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x \\ f''(x_0) = f''(1) = 7e \end{cases}$$

b) $n=2$: $f=f(x,y)$

$$f(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f''_{xx} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f''_{yx} \end{cases}$$

$$f(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \to \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f''_{xy} \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f''_{yy} \end{cases}$$

f''_{yx}, f''_{xy} → derivate mixte

f''_{xx}, f''_{yy} → derivate pătratice

Ex: $f(x,y)=3x^2y-6xy^3+3x-2y+1$; $P_0(1,1)$ $\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=6xy-6y^3+3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3x^2-18xy^2-2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(6xy-6y^3+3)=6y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2-18xy^2-2)=-36xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2-18xy^2-2)=6x-18y^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(6xy-6y^3+3)=6x-18y^2 \end{cases} \rightarrow \text{observăm că: } \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Atunci, în punctul $P_0(1,1)$ avem: $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)=6 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)=-36 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(P_0)=-12 \end{cases}$

c) $\underline{n=3}$: $f=f(x,y,z)$

$f(x,y,z) \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \rightarrow$
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{not}{=} f''_{xx}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \overset{not}{=} f''_{yx}$
- $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} \overset{not}{=} f''_{zx}$

$f(x,y,z) \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \rightarrow$
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \overset{not}{=} f''_{xy}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{not}{=} f''_{yy}$
- $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} \overset{not}{=} f''_{zy}$

$f(x,y,z) \rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \rightarrow$
- $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \overset{not}{=} f''_{xz}$
- $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} \overset{not}{=} f''_{yz}$
- $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \overset{not}{=} f''_{zz}$

Ex $f(x,y,z)=x^2yz^3+2xy^3z^2-3yz^3$; $P_0(1,1,1)$ $\rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2xyz^3+2y^3z^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2z^3+6xy^2z^2-3z^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=3x^2yz^2+4xy^3z-9yz^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2xyz^3+2y^3z^2\right) = 2yz^3 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2z^3+6xy^2z^2-3z^3\right) = 12xyz^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(3x^2yz^2+4xy^3z-9yz^2\right) = 6x^2yz+4xy^3-18yz \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2z^3+6xy^2z^2-3z^3\right) = 2xz^3+6y^2z^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2xyz^3+2y^3z^2\right) = 2xz^3+6y^2z^2 \end{cases}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x^2yz^2+4xy^3z-9yz^2\right) = 6xyz^2+4y^3z \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(2xyz^3+2y^3z^2\right) = 6xyz^2+4y^3z \end{cases}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x^2yz^2+4xy^3z-9yz^2\right) = 3x^2z^2+12xy^2z-9z^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(x^2z^3+6xy^2z^2-3z^3\right) = 3x^2z^2+12xy^2z-9z^2 \end{cases}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}$$

Teoremă (crit. lui Schwarz) – caz particular al teoremei lui Young

Fie $\begin{cases} f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$ o funcție de clasă $C^2(D)$ {funcția admite derivate parțiale de ord. 2 care sunt continue global pe mulțimea D}. Atunci, au loc relațiile (egalitățile):

$$(1.2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad ; (\forall)\, i,j = \overline{1,n} \text{ cu } i \neq j$$

Obs i) criteriul lui Schwarz ne spune că în condițiile teoremei (care vor fi întotdeauna satisfăcute în exemplele noastre) nu contează ordinea în care se face derivarea: mai întâi în raport cu necunoscuta „x_j" și apoi în raport cu „x_i" sau viceversa;

ii) cf. crit. lui Schwarz pentru a determina toate cele „n^2" derivate parțiale de ord. II, este suficient să calculăm (bine!) doar „$\underset{\text{pătratice}}{n} + \underset{\text{mixte}}{\dfrac{n^2-n}{2}}$" derivate parțiale.

Ex $\begin{cases} f: \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R} \\ f = f(x_1, \dots, x_{10}) \end{cases}$ are $n^2 = 10^2 = \underline{100}$ deriv. parțiale de ord II. Dar este suficient să calculăm doar $n + \dfrac{n^2-n}{2} = 10 + \dfrac{100-10}{2} = 10 + \dfrac{90}{2} = 10+45 = \underline{\underline{55}}$ deriv. parțiale de ord. II

Def 2: Numim (matricea) hessiana atașată funcției $f: D\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, matricea pătratică formată cu derivatele parțiale de ord. II ale funcției „f", adică:

$$(13.3)\quad H(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}\in \mathcal{M}_n^S(\mathcal{F}(x_1,x_2,\ldots,x_n))$$

simetrice

mulț. funcț. de „n" variab.

matrici pătratice de ord „n", simetrice, cu elemente în mulț. funcțiilor de „n" variabile

Obs:

i) conf. Crit. lui Schwarz $\Rightarrow$ (13.4) $H=H^T$ (H este matrice simetrică)

ii) Fie $X_0\in D$ și notăm cu: (13.5) $a_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_0)=a_{ji}$. Atunci, definim:

$$(13.6)\quad H(X_0)\equiv H(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\stackrel{def}{=}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_n^S(\mathbb{R})$$

Cazuri particulare

a) $n=2$: $f=f(x,y)$; $X_0=(x_0,y_0)$

$$(13.3')\quad H(x,y)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2^S(\mathcal{F}(x,y)) \Rightarrow (13.6')\quad H(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2^S(\mathbb{R})$$

Ex pt. $f(x,y)=3x^2y-6xy^3+3x-7y+1$ și $P_0(1,1)$ avem (cf. calculelor precedente făcute):

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 6y & 6x-18y^2\\ 6x-18y^2 & -36xy\end{pmatrix} \Rightarrow H(P)\equiv H(1,1)=\begin{pmatrix} 6 & -12\\ -12 & -36\end{pmatrix}$$

b) $n=3$: $f=f(x,y,z)$; $X_0=(x_0,y_0,z_0)$

$$(13.3'')\quad H(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_3^S(\mathcal{F}(x,y,z)) \Rightarrow (13.6'')\quad H(x_0,y_0,z_0)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$$

Ex: ptr. $f(x,y,z)=x^2yz^3+2xy^3z^2-3yz^3$ și $P_0(1,1,1)$ avem (cf. calculelor precedente):

$$H(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2yz^3 & 2xz^3+6y^2z^2 & 6xyz^2+4y^3z \\ 2xz^3+6y^2z^2 & 12xy & 3x^2z^2+12xy^2z-9z^2 \\ 6xyz^2+4y^3z & 3x^2z^2+12xy^2z-9z^2 & 6x^2yz+4xy^3-18yz \end{pmatrix} \Rightarrow H(P_0)=H(1,1,1)=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 8 & 12 & 6 \\ 10 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Def 3: Numim diferențiala de ordinul II atașată funcției $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\in C^2(D)$, expresia

$$(11.4)\quad d^2f(x_1,x_2,\dots,x_n)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_i dx_j=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}dx_1dx_n$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}dx_2dx_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}dx_2dx_n$$
$$\dots$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}dx_ndx_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}dx_ndx_2+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2$$

Aplicând crit. lui Schwarz (totdeauna valabil în exemplele noastre) obținem forma diferențialei de ord. II care apare în aplicațiile practice:

$$(11.4')\quad d^2f(X)=\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2}_{\text{„n" termeni pătratici}}+\underbrace{2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+\dots+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}dx_1dx_n+\dots+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n}_{\text{„}\frac{n^2-n}{2}\text{" termeni micști (dreptunghiulari) (egali doi câte doi)}}$$

Calculând $d^2f(X)$ într-un punct oarecare $X_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in D\subset\mathbb{R}^n$, obținem forma diferențialei de ord. II într-un punct fiind:

$$(11.5)\quad d^2f(X_0)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_0)}_{\overset{not}{\underset{(13.5)}{=}}a_{ij}\,(=a_{ji})}dx_idx_j=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}dx_idx_j$$

sau:

$$(11.5')\quad d^2f(X_0)=a_{11}dx_1^2+a_{22}dx_2^2+\dots+a_{nn}dx_n^2+2a_{12}dx_1dx_2+\dots+2a_{1n}dx_1dx_n+\dots+2a_{n-1,n}dx_{n-1}dx_n$$

$\downarrow$

este o formă pătratică în diferențialele argumentelor (necunoscutelor) funcției

Obs(!!) Din (11.3') și (11.4) $\Rightarrow$ matricea asociată acestei forme pătratice este: $A\equiv H(X_0)$ tocmai hessiana calculată în pct. X_0

Cazuri particulare:

a) $n=1$: $f=f(x)$; $X=x_0$

$$(*)\begin{cases} d^2f(x) \overset{def}{=} f''(x)\,dx^2 \\ d^2f(x_0) = \underbrace{f''(x_0)}_{\text{not } a}\,dx^2 = a\,dx^2 \end{cases}$$

Ex: $f(x)=x^2e^x$; $x_0=1$ $\Rightarrow \begin{cases} f'(x)=(x^2+2x)e^x \\ f''(x)=(x^2+4x+2)e^x \end{cases}$

$$(*)\begin{cases} d^2f(x)=(x^2+4x+2)e^x\,dx^2 \\ d^2f(1)=\underbrace{7e}_{=a}\,dx^2 \end{cases}$$

b) $n=2$: $f=f(x,y)$; $X_0=(x_0,y_0)$

se ridică la puterea a II-a prin "derivare"

$$(**)\begin{cases} d^2f(x,y) \overset{def}{=} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy \quad \left[\overset{(!!)}{=} \Big(\underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy}_{\overset{def}{=} df(x,y)}\Big)^{(2)} \right] \\ d^2f(x_0,y_0) = a_{11}dx^2 + a_{22}dy^2 + 2a_{12}dx\,dy \end{cases}$$

Ex: $f(x,y)=3x^2y-6xy^3+3x-2y+1$; $P_0(1,1)$ $\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-36xy \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=6x-18y^2 \end{cases}$

$$(**)\begin{cases} d^2f(x,y)=6y\,dx^2-36xy\,dy^2+2(6x-18y^2)dx\,dy \\ d^2f(1,1)=\underbrace{6}_{=a_{11}}dx^2\underbrace{-36}_{=a_{22}}dy^2\underbrace{-24}_{=2a_{12}}dx\,dy \end{cases}$$

$\to$ formă pătratică (definită pe $\mathbb{R}^2$) cu necunoscutele: dx, dy

Obs: $H(P_0)=\begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$ $\to$ matricea asociată formei pătratice $d^2f(X_0)$

c) $n=3$: $f=f(x,y,z)$; $X_0=(x_0,y_0,z_0)$

$$(***)\begin{cases} d^2f(x,y,z)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx\,dz+2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy\,dz \left[= \Big(\underbrace{\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy+\dfrac{\partial f}{\partial z}dz}_{\overset{def}{=} df(x,y,z)}\Big)^{(2)} \right] \\ d^2f(X_0)=a_{11}dx^2+a_{22}dy^2+a_{33}dz^2+2a_{12}dx\,dy+2a_{13}dx\,dz+2a_{23}dy\,dz \end{cases}$$

Ex: $f(x,y,z)=x^2yz^3+2xy^3z^2-3yz^3$; $P_0(1,1,1)$

$$(***)\begin{cases} d^2f(x,y,z) \overset{\text{vezi}}{\underset{\text{pg.3}}{=}} 2yz^3dx^2+12xyz^2dy^2+(6x^2yz+4xy^3-18yz)dy^2+2(2xz^3+6y^2z^2)dx\,dy + \\ \quad +2(6xyz^2+4y^3z)dx\,dz+2(3x^2z^2+12xy^2z-9z^2)dy\,dz \\ d^2f(1,1,1)=\underbrace{2}_{a_{11}}dx^2+\underbrace{12}_{a_{22}}dy^2\underbrace{-8}_{a_{33}}dz^2+\underbrace{16}_{2a_{12}}dx\,dy+\underbrace{20}_{2a_{13}}dx\,dz+\underbrace{12}_{2a_{23}}dy\,dz \end{cases} \Rightarrow H(P_0)=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 8 & 12 & 6 \\ 10 & 6 & -8 \end{pmatrix}=A$$

$\downarrow$

formă pătratică (definită pe $\mathbb{R}^3$) cu necunoscutele: dx, dy, dz

IV. 4.1 Forme pătratice

Def 1: Numim formă pătratică (definită pe $\mathbb{R}^n$), funcția (aplicația) definită astfel:

$$(11.6)\ \begin{cases} f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f(x_1,x_2,\dots,x_n) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad \text{a.î.: } (*)\ a_{ij}=a_{ji}\ ;\ (\forall)\, i,j=\overline{1,n} \end{cases}$$

(proprietatea de simetrie a coeficienților)

Obs:

a) relația (11.6) scrisă explicit (pe larg) arată astfel:

$$(11.6')\ f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \underline{a_{11}x_1^2} + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ a_{21}x_2x_1 + \underline{a_{22}x_2^2} + \dots + a_{2n}x_2x_n + \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + \underline{a_{nn}x_n^2}$$

b) conform condițiilor de simetrie $(*)$ $a_{ij}=a_{ji}$ avem egalitățile: $a_{ij}x_ix_j = a_{ji}x_jx_i\ ;\ (\forall)\, i,j=\overline{1,n}$

deci putem rescrie expresia formei pătratice „f" astfel:

$$(11.6'')\ f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \underbrace{a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2}_{\text{„n" termeni pătratici}} + \underbrace{2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + \dots + 2a_{ij}x_ix_j + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n}_{\text{„}\frac{n^2-n}{2}\text{" termeni dreptunghiulari (mixți)}}$$

aceasta fiind forma întâlnită în aplicațiile practice (!!!)

c) coeficienții formei pătratice $a_{ij}\in\mathbb{R}$, formează o matrice numită matricea asociată formei pătratice și anume:

$$(11.7)\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n^S(\mathbb{R})$$

și care verifică datorită condițiilor de simetrie $(*)$ relația:

$(**)$ $A = A^T$ (A este o matrice simetrică)

d) o formă pătratică „f" are „n^2" termeni $\begin{cases} \text{„}a_{ii}x_i^2\text{"} \to \text{„n" termeni pătratici } (i=\overline{1,n}) \\ \text{„}a_{ij}x_ix_j\text{"} \to \text{„}n^2-n\text{" termeni dreptunghiulari } (i,j=\overline{1,n};\ i\neq j) \text{ egali 2 câte 2.} \end{cases}$

e) $(\forall)$ f - formă pătratică avem: $f(0,0,\dots,0)=0 \iff f(0_n)=0$

f) vom nota: $f(X) \equiv f(x_1,x_2,\dots,x_n)$; $(\forall)\, X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

Def 2: Spunem că forma pătratică „f" este:

a) pozitiv definită $\iff f(X) > 0 \;;(\forall) X \in \mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$;

b) semipozitiv definită $\iff f(X) \geq 0 \;; (\forall) X \in \mathbb{R}^n_*$; $\{(\exists) X_0 \in \mathbb{R}^n_*$ a.î. $f(X_0) = 0\}$

c) negativ definită $\iff f(X) < 0 \;; (\forall) X \in \mathbb{R}^n_*$;

d) seminegativ definită $\iff f(X) \leq 0 \;; (\forall) X \in \mathbb{R}^n_*$; $\{(\exists) X_0 \in \mathbb{R}^n_*$ a.î. $f(X_0) = 0\}$

e) nedefinită ca semn $\iff (\exists) X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n_*$ a.î.: $f(X_0) > 0$ și $f(Y_0) < 0$;
(nu păstrează semn constant)

Def 3 Numim forma canonică asociată unei forme pătratice definite cu (11.6) sau (11.6') sau (11.6'') expresia:

(11.8) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2 \;; \alpha_i \in \mathbb{R}, \; i = \overline{1,n}$ → coeficienții formei canonice ~~pătratice~~

unde:

(11.9) $\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots + b_{2n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \ldots + b_{nn}x_n \end{cases}$ → forme liniare ; $b_{ij} \in \mathbb{R}, \; i,j = \overline{1,n}$ (obs: în general $b_{ij} \neq b_{ji}$)

Stabilirea tipului (semnului) unei forme pătratice nu se poate face pe forma generală (11.6''); dacă însă se cunoaște forma canonică asociată, acest lucru este extrem de simplu de stabilit conform teoremei următoare:

Teorema 1 (de caracterizare a tipului/semnului unei forme pătratice)

Fie o formă pătratică definită de relația (11.6'') a cărei formă canonică asociată este dată de relația (11.8). Atunci forma pătratică „f" este:

a) pozitiv definită $\iff (\forall) \alpha_i > 0 \;, i = \overline{1,n}$;

b) semipozitiv definită $\iff (\forall) \alpha_i \geq 0 \;, i = \overline{1,n}$; $\{(\exists)$ și $\alpha_i = 0\}$

c) negativ definită $\iff (\forall) \alpha_i < 0 \;, i = \overline{1,n}$;

d) seminegativ definită $\iff (\forall) \alpha_i \leq 0 \;, i = \overline{1,n}$; $\{(\exists)$ și $\alpha_i = 0\}$

e) nedefinită ca semn $\iff (\exists) \alpha_i > 0$ și $(\exists) \alpha_j < 0$ cu $i,j \in \{1,2,\ldots,n\}$;

Vom prezenta în continuare două metode de determinare a formei canonice asociate unei forme pătratice și anume:

a) metoda lui Jacobi;
b) metoda lui Gauss;