Este posibil să studiem economie, fără matematică?

- câteva probleme practice economice modelate matematic –

Ştiaţi că:

- **În anul 1968, Sveriges Riksbank (Banca centrală a Suediei) introduce *“The Sveriges Riksbank Prize in Economic Sciences (Premiul Nobel pentru Economie*)” în memoria lui Alfred Nobel;**
- **Primul Premiu Nobel pentru Economie a fost câştigat de Ragnar Frisch (Norway – economist) and Jan Tinbergen (Netherlands – fizician) in 1969;**
- **În cei 45 de ani dintre 1969 and 2013, au fost 73 de laureaţi din care: 33 dintre aceştia erau licenţiaţi în Matematică (matematică-fizică, mecanică, inginerie, etc.) şi doar 29 în Economie (finanţe, comerţ, economie politică, etc.);**
- **Din aceşti 73 de laureaţi, 47 aveau M.Sc. sau PhD în ambele domenii: Mathematică şi Economie.**
- **Nu există Premiul Nobel pentru Matematică!!!**

În teoria economică, cât şi în calculele corespunzătoare aplicaţiilor economice, utilizăm o mulţime de noţiuni/teorii/algoritmi matematici, cum ar fi de exemplu:

- **Algebră liniară (vectorială);**
- **Cercetări operaţionale;**
- **Elemente de analiză matematică n-dimensională;**
- Teoria jocurilor;
- Teoria haosului;
- Probabilităţi şi statistică matematică;
- Ecuaţii diferenţiale;
- Teoria grafurilor şi reţelelor, etc.

Vom prezenta în continuare (foarte pe scurt) trei modele matematice, pentru trei probleme economice care apar foarte frecvent în aplicaţii. Primele două se pot rezolva cu ajutorul elementelor de algebră liniară, pentru cea de a treia având nevoie de utilizarea noţiunilor de derivate parţiale/diferenţială pentru funcţii de n-variabile.

1.Algoritmul Simplex pentru rezolvarea problemelor de programare liniară (PPL)

Examplu:O companie produce 3 tipuri de genţi pentru laptop (normale, de lux şi VIP) să le numim: $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$, **P3**, utilizând 5 tipuri de resurse: $\mathbf{M_1}$, $\mathbf{M_2}$, $\mathbf{M_3}$, $\mathbf{M_4}$, $\mathbf{M_5}$ (piele, fermoare, material textil, capital şi ore muncă) în cantităţile din tabelul de mai jos:

	$\mathbf{M_1}$ (piele/m^2)	$\mathbf{M_2}$ (fermoare/buc.)	$\mathbf{M_3}$ (material textil/m^2)	$\mathbf{M_4}$ (capital/Euro)	$\mathbf{M_5}$ (ore de muncă/h)
$\mathbf{P_1}$	0.85	4	1.25	32	4
$\mathbf{P_2}$	1.10	6	1.30	38	6
$\mathbf{P_3}$	1.55	5	0.55	52	7

Compania vinde fiecare din cele trei tipuri de genţi cu următoarele preţuri: **46** Euro, **55** Euro şi **72** Euro.

Câte genţi de fiecare tip ar trebui să producă compania, pentru a avea profit maxim, ştiind că au la dispoziţie: ***450*** *m^2 de piele,* ***1.500*** *de fermoare,* ***355*** *m^2 de material textil,* ***14.500*** *Euro capital iniţial şi* ***760*** *ore de muncă?*

Notăm cu: x_1, x_2, x_3 numărul de genţi de fiecare tip care ar trebui produs.

Modelul matematic **(este o Problemă de Programare Liniară _PPL):**

$$(1)\quad (\max) f(x_1, x_2, x_3) = 46x_1 + 55x_2 + 72x_3$$

$$(2)\begin{cases} 0.85x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 \le 450 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 \le 1.500 \\ 1.25x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 \le 355 \\ 32x_1 + 38x_2 + 52x_3 \le 14.500 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 \le 760 \end{cases}$$

$$(3)\quad x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Pentru a o putea rezolva trebuie să o aducem la **forma standard**:

$$(1)\quad (\max) f(x_1, x_2, x_3) = 46x_1 + 55x_2 + 72x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 + 0x_8$$

$$(2)\begin{cases} 0.85x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 + x_4 = 450 \\ 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_5 = 1.500 \\ 1.25x_1 + 1.10x_2 + 1.55x_3 + x_6 = 355 \\ 32x_1 + 38x_2 + 52x_3 + x_7 = 14.500 \\ 4x_1 + 6x_2 + 7x_3 + x_8 = 760 \end{cases}$$

$$(3)\quad x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots, x_8 \ge 0$$

- **Algoritmul (metoda) Simplex** este cel mai popular şi utilizat în rezolvarea PPL. A fost descoperit de către matematicianul american **George Bernard Dantzig** (8.11.1914 – 13.05.2005)**,** fiind publicat în revista ***Journal Computing in Science and Engineering*** (şi considerat ca unul din primii 10 algoritmi descoperiţi în secolul 20)
- **Algoritmul Simplex**, este un proces iterativ de determinare a unor soluţii (de bază admisibile) ale unui sistem de ecuaţii liniare compatibil nedeterminat (cu o infinitate de soluţii), "din ce în ce mai bune", până o găsim pe cea optimă.

2.Probleme de transport

Examplu:

Firma Petromar Oil SRL operează 4 staţii de benzină situate în: Copou (S_1), Bucium (S_2), Păcurari (S_3) and Tătăraşi (S_4) care vând în medie pe săptămână cantităţile: 15.000 l, 10.000 l, 25.000 l and 20.000 l de benzină. Firma se aprovizionează cu benzină de la 3 depozite: D_1, D_2, D_3, fiecare dintre ele putând furniza săptămânal următoarele cantităţi: 20.000 l, 40.000 l, 35.000 l. Costurile de transport de la depozite la staţiile de benzină pentru 1.000 l sunt date în tabelul de mai jos:

	S_1	S_2	S_3	S_4	
D_1	3 x_{11}	1 x_{12}	5 x_{13}	2 x_{14}	**20**
D_2	6 x_{21}	4 x_{22}	1 x_{23}	3 x_{24}	**40**
D_3	2 x_{31}	1 x_{32}	3 x_{33}	1 x_{34}	**35**
	15	**10**	**25**	**20**	

Model matematic:

(1) $(\min) f(x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots, x_{34}) = 3x_{11} + x_{12} + 5x_{13} + x_{14} + 6x_{21} + 4x_{22} + x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + x_{32} + 3x_{33} + x_{34}$

$$(2)\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 20 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 40 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 35 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 15 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 25 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20 \end{cases}$$

(3) $x_{11}, x_{12}, \ldots\ldots, x_{34} \ge 0$

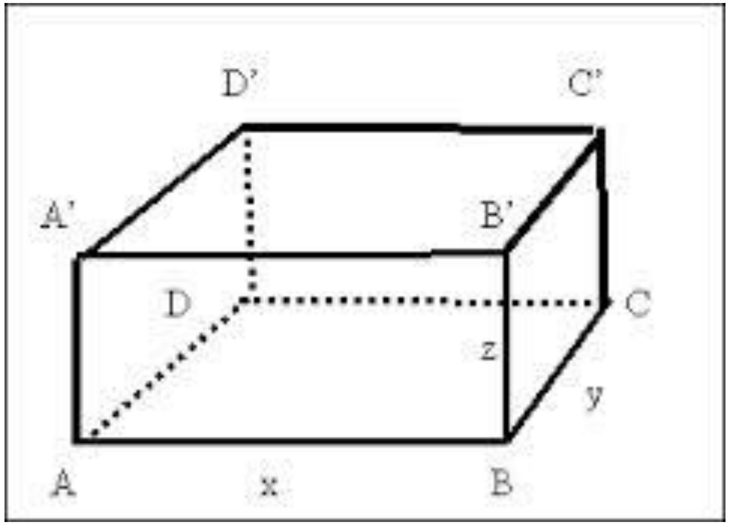
- Se observă că o problem de transport este de fapt un caz particular de PPL, deci am putea rezolva problema cu ajutorul algoritmului SIMPLEX.
- Totuşi, în aplicaţiile practice reale, numărul depozitelor este de ordinul zecilor sau sutelor, iar cel al centrelor de desfacere (magazine) de ordinal sutelor sau chiar al miilor!!! Pentru astfel de probleme chiar şi algoritmul SIMPLEX este ineficient, aşa că a fost "îmbunătăţit" obţinându-se un nou algoritm de rezolvare a PT.

3. Determinarea punctelor de extrem local (condiţionate/necondiţionate) pentru funcţii de *n*-variabile

Aplicaţie economică:

"Datorită deselor întreruperi în furnizarea apei potabile, societatea S.C. ANTIBIOTICE S.A., decide construcţia unui bazin descoperit, de forma unui paralelipiped dreptunghic, cu capacitatea (volumul) de 1.000 m^3. Cunoscând că preţul (fix) de construcţie este de 500 Euro/m^2, să se determine costul total (minim) de construcţie al bazinului."

Model matematic:



$$A_{totala} = xy + 2xz + 2yz$$

$$V = xyz = 1.000$$

$$C_{total} = 500 \cdot A_{totala} \text{ (Euro) - minim} \quad \Leftrightarrow \quad A_{totala} \text{ - minima}$$

$$\begin{cases} f : \mathbb{R}_{+}^{*3} \to \mathbb{R}_{+}^{*} \\ f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz \end{cases} \text{(minim)}$$

$$xyz = 1.000 \quad \Leftrightarrow \quad g(x,y,z) = xyz - 1.000 = 0$$

Trebuie sa determinam x,y,z=? a.i. f sa fie minima!!!

Solutia optima este:

$$\begin{cases} x = y = 10\sqrt[3]{2}\, m \\ z = 5\sqrt[3]{2}\, m \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{totala}^{\text{minima}} = 300\sqrt[3]{4}\, m^2 \cong 476\, m^2 \\ C_{total}^{\text{minim}} = 150.000\sqrt[3]{4}\, Euro \cong 238.000\, Euro \end{cases}$$