

# Metoda celor două faze (exemple)

1

①

$$\begin{cases} (1) (\min) f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ (2) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 10 \end{cases} \\ (3) x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{forma generată a (P.P.L)}$$

⇓

$$\begin{cases} (1s) (\min) f(x_1, x_2, x_3; x_4^c, x_5^c) = 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 0 \cdot x_4^c + 0 \cdot x_5^c \\ (2s) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4^c = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5^c = 10 \end{cases} \\ (3s) x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{forma standard a (P.P.L)}$$

⇓

$$(2s) \rightarrow \bar{A} = \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & b \\ \hline 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \end{array} \xrightarrow{(-1)} \sim \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & b \\ \hline -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 1 & -10 \end{array} \Rightarrow \bar{X}_1 = (0, 0, 0, -6, 10)^T$$

v. sec. = 0      v. princ.      sol. de bază inadmisibilă

Obs: i)  $\bar{X}_1$  - sol. a sist. (2), dar nu verific. rel. (3) !!

ii) sist. (2) are cel mult  $C_5^2 = 10$  soluții de bază, am găsit (poate repede) o soluție ( $\bar{X}_1$ ) dar nu ne folosește (este inadmisibilă), vom căuta alta, luând de exemplu  $x_3$  și  $x_4^c$  variabile principale:

$$\bar{A} = \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & b \\ \hline 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \end{array} \xrightarrow{(-1)/2} \sim \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & b \\ \hline -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 5 & 5 & 0 & -2 & -1 & 22 \end{array} \xrightarrow{(-1/2)/1/2} \sim \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & b \\ \hline 1/2 & 3/2 & 1 & 0 & -1/2 & 5 \\ -5/2 & -5/2 & 0 & 1 & 1/2 & -11 \end{array} \Rightarrow \bar{X}_2 = (0, 0, 5, -11, 0)^T \rightarrow \text{S.B. inadmisibilă}$$

v.s = 0      v.p      v.s = 0      (decă nu verific. condiții (3))  
nu avem ce face cu ea

iii) căutăm alta (cu  $x_1$  și  $x_4^c$  v. principale  $\rightarrow$  de ce ??)

$$\bar{A} = \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & b \\ \hline 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \end{array} \xrightarrow{(-1/2)/(-1/2)} \sim \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & b \\ \hline 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & 3 \\ 0 & 5/2 & 5/2 & 1/2 & -1 & 7 \end{array} \xrightarrow{(-1/2)/2} \sim \begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & b \\ \hline 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & -2 & 14 \end{array} \Rightarrow \bar{X}_0 = (10, 0, 0, 14, 0)^T \rightarrow \text{S.B.A.i}$$

v.p      v.s = 0      este sol. de bază admisibilă (verif. (2) + (3))  
deci putem începe algh. Simplex.

B	C <sub>B</sub>	P <sub>0</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub> <sup>c</sup>	P <sub>5</sub> <sup>c</sup>	θ <sub>i</sub>
P <sub>1</sub>	3	10	1	3	2	0	-1	10/3
P <sub>4</sub> <sup>c</sup>	0	14	0	5	5	1	-2	14/5
		f(x <sub>0</sub> ) = 30	0	10	8	0	-3	
P <sub>1</sub>	3	8/5	1	0	-1	-3/5	1/5	8/5
P <sub>2</sub>	-1	14/5	0	1	1	1/5	-2/5	*
		f(x <sub>1</sub> ) = 2	0	0	-2	-2	1	
P <sub>5</sub> <sup>c</sup>	0	8	5	0	-5	-3	1	
P <sub>2</sub>	-1	6	2	1	-1	-1	0	
		f(x <sub>2</sub> ) = -6	-5	0	3	1	0	

↓ 4c)

per. cal.  $\Rightarrow$   $\bar{x}_0 = (10, 0, 0, 14, 0)^T$   
 $\Rightarrow$   $f(\bar{x}_0) = 30$

per. cal.  $\Rightarrow$   $\bar{x}_1 = (8/5, 14/5, 0, 0, 0)^T$   
 $\Rightarrow$   $f(\bar{x}_1) = 2$

per. cal.  $\Rightarrow$   $\bar{x}_2 = (0, 6, 0, 0, 8)^T$   
 $\Rightarrow$   $f(\bar{x}_2) = -6$

(min) f = -∞ (PPL are optim infinit, deci nu are S.O)

Obs: - am putut aplica alg. Simplex, doar după ce am determinat cu met. lui Gauss o S.B.A. i ( $\bar{x}_0$ ) !!!

- pentru a evita calculul multor sol. de baza neadmisibile până găsim una admisibilă, aplicăm metoda celor 2 faze.

Adăugăm (P.P.L)<sub>s</sub> (1s)-(3s) problema artificială

(1a) (min)  $f_a(x_6^a, x_7^a) = x_6^a + x_7^a + 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4^c + 0 \cdot x_5^c$   
 (2a)  $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4^c + x_6^a = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5^c + x_7^a = 10 \end{cases}$   
 (3a)  $x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c, x_6^a, x_7^a \geq 0$

$\Rightarrow$  problema artificială  
(PPL)<sub>a</sub>

Din sist. (2a)  $\Rightarrow \bar{A}_a = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_6^a & P_7^a & P_0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_0^a = (0, 0, 0, 0, 0, 6, 10)^T$

v. sec. = 0

↓ S.B.A. i a  
 { sol. de baza adm. inf.  
 ptr. probl. artificială }

Obs: adăugând în fiecare ecuație câte o variabilă artificială, ne-au apărut coloanele matricii unitate (nu a fost nevoie să aplicăm metoda lui Gauss)

ii) aplicăm alg. Simplex ptr. a rezolva (P.P.L)<sub>a</sub> cu soluția inițială găsită (imediat)  $\bar{x}_0^a$ :

coef. functiei artificiale  $f_{art}$

B	C <sub>B</sub>	P <sub>0</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	P <sub>6</sub>	P <sub>7</sub>	θ <sub>i</sub> = $\frac{C_B}{P_j \downarrow}$
P <sub>6</sub>	1	6	2	1	-1	-1	0	1	0	6/1
P <sub>2</sub>	1	10	1	3	2	0	-1	0	1	10/3
	f <sub>art</sub>	16	3	4	1	-1	-1	0	0	
P <sub>6</sub>	1	8/3	5/3	0	-5/3	-1	1/3	1	-1/3	8/5
P <sub>2</sub>	0	10/3	1/3	1	2/3	0	-1/3	0	1/3	10
	f <sub>art</sub>	8/3	5/3	0	-5/3	-1	1/3	0	-4/3	
P <sub>1</sub>	0	8/5	1	0	-1	-3/5	1/5	3/5	-1/5	
P <sub>2</sub>	0	14/5	0	1	1	1/5	-2/5	-1/5	2/5	
	f <sub>art</sub>	0	0	0	0	0	0	-1	-1	

Faza I<sup>a</sup>

pe col. lin P<sub>0</sub>

$\vec{x}_{optim} = (8/5, 14/5, 0, 0, 0, 0, 0)^T \rightarrow$  sol. optimă (dar nu ste unită)  
(min)  $f_{art} = 0$   
ptr. (PPL) a.

Rezolvăm acum probl. inițială în formă standard cu soluția inițială  $\vec{x}_0 \equiv \vec{x}_{optim}$  (fără variabilele artif.), aplicând alg. Simplex:

B	C <sub>B</sub>	P <sub>0</sub>	P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub>	P <sub>5</sub>	θ <sub>i</sub> = $\frac{C_B}{P_j \downarrow}$
P <sub>1</sub>	3	8/5	1	0	-1	-3/5	1/5	8/1.5
P <sub>2</sub>	-1	14/5	0	1	1	1/5	-2/5	*
	f	2	0	0	-2	-2	1/5	
P <sub>5</sub>	0	8	5	0	-5	-3	5	
P <sub>2</sub>	-1	6	2	1	-1	-1	0	
	f	-6	-5	0	3	1	0	

coef. functiei "f" din forma standard

Obs: i primul tabel Simplex al fazei II<sup>a</sup> se obține din ultimul tabel Simplex al fazei I<sup>a</sup> (dimind coloana vectorilor artificiali și completând noile valori pe coloana C<sub>B</sub>)

Faza II<sup>a</sup>

(min)  $f = -\infty$

( $\exists$ ) diferențe  $z_j - c_j > 0$  ( $z_3 - c_3 = 3 > 0$ ), dar componentele vectorului  $P_j$  corespunzător sunt toate  $\leq 0$   $\nexists P_3 = (-5, -1)^T$  are ambele componente negative

$(1) (\max) f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 + 2x_2 - x_3$   
 $(2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 8 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 12 \end{cases}$   
 $(3) x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$(1s) (\min) (-f) = -2x_1 - 2x_2 + x_3 + 0x_4^c + 0x_5^c$   
 $(2s) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4^c = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5^c = 12 \end{cases}$   
 $(3s) x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c \geq 0$

Ataşam  $(PPL)_3$  o nouă problemă (artificială)  $(PPL)_a$  [adăugând în ecuațiile din sistemul  $(2s)$  variabile artificiale (cu ecuațiile unde am scris var. de compensare sau nu am introdus var. de compensare)]

$(1a) (\min) f_a(x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c, x_6^a) = 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4^c + 0 \cdot x_5^c + x_6^a$   
 $(2a) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4^c + x_6^a = 8 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_5^a = 12 \end{cases}$   
 $(3a) x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c, x_6^a \geq 0$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_6^a & P_0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$   
 $\bar{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix}$   
 $\bar{c} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Faza I

B	CB	PO	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4^c$	$P_5^c$	$P_6^a$	$\theta_i = \frac{P_0}{P_j}$
$P_6^a$	1	8	1	2	1	-1	0	1	$8/2 = 4$
$P_5^c$	0	12	2	1	3	0	1	0	$12/1 = 12$
$f_a$	0	8	1	2	1	-1	0	0	$z_j - c_j$
$P_2$	0	4	1/2	1	1/2	-1/2	0	1/2	
$P_5^c$	0	8	3/2	0	5/2	1/2	1	-1/2	
$f_a$	0	0	0	0	0	0	0	-1	$z_j - c_j$

$\theta_i = \frac{P_0}{P_j}$

atenție, în baza se scriu vectorii în ordinea coloanelor matricei unitate  
adică  $\{P_6^a, P_5^c\}$  și nu  $\{P_5^c, P_6^a\}$

sol. este optimă (dar nu este unică)  
 $x_{\text{optim}} = (0, 4, 0, 0, 8, 0)^T \rightarrow \text{sol. optimă a } (PPL)_a \text{ (dar nu este unică)}$   
 $(\min) f_a = 0$

Faza II

B	CB	PO	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4^c$	$P_5^c$	$\theta_i = \frac{C_B}{P_j}$
$P_2$	-2	4	1/2	1	1/2	-1/2	0	$4/1/2 = 8$
$P_5^c$	0	8	3/2	0	5/2	1/2	1	$8/3/2 = 16/3$
$-f$	-8	1	0	0	1	0	0	$z_j - c_j$
$P_2$	-2	4/3	0	1	-1/3	-2/3	-1/3	*
$P_1$	-2	16/3	1	0	5/3	1/3	2/3	16
$-f$	-40/3	0	0	-11/3	2/3	-2/3	0	$z_j - c_j$
$P_2$	-2	12	2	1	3	0	1	
$P_4^c$	0	16	3	0	5	1	2	
$-f$	-24	-2	0	-7	0	-2	0	$z_j - c_j$

În primul tabel Simplex:  
 avem 2 diferențe  $z_j - c_j > 0$  și maxim  
 $(z_1 - c_1 = z_4 - c_4 = 1)$  și luăm alba pe  
 $P_1$  (putem să-l introducem și  
 pe  $P_4^c$ )

standard  
 $x_{\text{optim}} = (0, 12, 0, 16, 0)^T$  - s.o. unică  
 $\min(-f) = -24$   
 $x_{\text{optim}} = (0, 12, 0)^T$  - s.o. unică  
 $(\max) f = 24$

(iii) (1) (min)  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1 + 3x_2 - 2x_3$   
 (2)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \end{cases}$   
 (3)  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

(1s) (min)  $f = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0x_4^c$   
 (2s)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4^c = 10 \end{cases}$   
 (3s)  $x_1, x_2, x_3, x_4^c \geq 0$

$\Rightarrow$  (1a) (min)  $f_a(x_1^a, x_2^a, x_3^a, x_4^c, x_5^a, x_6^a) = x_5^a + x_6^a$   
 (2a)  $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5^a = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4^c + x_6^a = 10 \end{cases}$   
 (3a)  $x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^a, x_6^a \geq 0$

obs  
 (2s)  $\rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 10 \end{matrix}$  are  
 nici o coloană a matricii unități  
 deci trebuie să facem cu  
 met. lui Gauss 2 col. ale  $\bar{I}_2$

(2a)  $\Rightarrow \bar{A}_a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{x}_0 = (0, 0, 0, 0, 4, 10)^T$  - S.B. a  $a$   
 v. sec. = 0 v. priv.

Faza I

B	C <sub>B</sub>	P <sub>0</sub>	0	0	0	0	1	1		
			P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub> <sup>c</sup>	P <sub>5</sub> <sup>a</sup>	P <sub>6</sub> <sup>a</sup>		θ <sub>i</sub>
P <sub>5</sub> <sup>a</sup>	1	4	1	1	2	0	1	0	4/2=2	1/2 / (-3/2)
P <sub>6</sub> <sup>a</sup>	1	10	2	-1	3	-1	0	1	10/3	+
	f <sub>a</sub> =14	3	0	5	-1	0	0	0		
P <sub>3</sub>	0	2	1/2	1/2	1	0	1/2	0	2/1/2=1	1/2 / (-1)
P <sub>6</sub> <sup>a</sup>	1	4	1/2	-5/2	0	-1	-3/2	1	4/1/2=8	+
	f <sub>a</sub> =4	1/3	-5/2	0	-1	-5/2	0	0		
P <sub>1</sub>	0	4	1	1	2	0	1	0		
P <sub>6</sub> <sup>a</sup>	1	2	0	-3	-1	-1	-2	1		
	f <sub>a</sub> =2	0	-3	-1	-1	-3	0	0		

$\downarrow$  h<sub>a</sub>  
 $\begin{cases} x_{\text{artif}} = (4, 0, 0, 0, 10, 2)^T \rightarrow \text{sol. opt. unică} \\ (\min) f_a = 2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (PPL)_s \text{ are sol. de bază admisibilă}$

(baze ale  $C_4^2 = 6$  S.B. ale lui (2s) sunt inadmisibile)



(PPL): nu are soluție (nici optimă, nici altfel) - ADERANT ECONOMIC



(14) (1) (max)  $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1 + x_2 + 2x_3$  (15) (min)  $(-f) = -3x_1 - x_2 - 2x_3 + 0x_4$  (16)

(2)  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \end{cases}$  (PPL)<sub>3</sub>  $\Rightarrow \begin{cases} (2s) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^e = 10 \end{cases} \Rightarrow$

(3)  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$  (3s)  $x_1, x_2, x_3, x_4^e \geq 0$

$\Rightarrow$  (min)  $f_a(x_5^a) = x_5^a$

(2a)  $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5^a = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^e = 10 \end{cases}$

(3a)  $x_1, x_2, x_3, x_4^e, x_5^a \geq 0$

$\Rightarrow \bar{A}_a = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^e & P_5^a & P_0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{X}_0 = (0, 0, 0, 10, 8)^T$

$\downarrow$  SBAia

Faza I (se rezolvă probl. artificială)

B	C <sub>B</sub>	P <sub>0</sub>	0	0	0	0	1	
			P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub> <sup>e</sup>	P <sub>5</sub> <sup>a</sup>	$\theta_i = \frac{C_B}{P_j}$
P <sub>5</sub> <sup>a</sup>	1	8	2	-1	3	0	1	8/3
P <sub>4</sub> <sup>e</sup>	0	10	3	1	2	1	0	10/2=5
$f_a = 8$		2	-1	3	0	0		$z_j - c_j$
P <sub>3</sub>	0	8/3	2/3	-1/3	1	0	1/3	
P <sub>4</sub> <sup>e</sup>	0	14/3	5/3	5/3	0	1	-2/3	
$f_a = 0$		0	0	0	0	0	-1	

$\Rightarrow$  coef. fct. artif. " $f_a$ "

$\theta_i \geq 0$ , minimum  $\rightarrow$  out. de ieșire din bază

$\theta_i \leq 0$  si max  $\rightarrow$  out. de intrare în bază

$\Rightarrow$  sol. optimă (nu este unică) ptr. (PPL)<sub>a</sub>

$\begin{cases} x_{\text{optif.}} = (0, 0, 0, 8/3, 14/3, 0)^T \\ (\text{min}) f_a = 0 \end{cases}$

Faza II (se rezolvă probl. în formă standard)

B	C <sub>B</sub>	P <sub>0</sub>	-3	-1	-2	0	
			P <sub>1</sub>	P <sub>2</sub>	P <sub>3</sub>	P <sub>4</sub> <sup>e</sup>	$\theta_i = \frac{C_B}{P_j}$
P <sub>3</sub>	-2	8/3	2/3	-1/3	1	0	*
P <sub>4</sub> <sup>e</sup>	0	14/3	5/3	5/3	0	1	14/5
$-f = -10$		5/3	5/3	0	0		
P <sub>3</sub>	-2	18/5	1	0	1	1/5	
P <sub>2</sub>	-1	14/5	1	1	0	3/5	
$-f = -10$		0	0	0	0	-1	

$\Rightarrow x_{\text{optif.}} = (0, 14/5, 18/5, 0)^T$

$(\text{max}) f = 10$  dar nu este unică

(PPL)<sub>0</sub> are o  $\infty$  de soluții optime

$\Rightarrow$  sol. optimă (nu este unică) ptr. (PPL)<sub>a</sub>

$\begin{cases} x_{\text{optif.}}^{\text{standard}} = (0, 14/5, 18/5, 0)^T \\ (\text{min}) (-f) = -10 \end{cases}$

$P_1 \notin B \Rightarrow z_j - c_j = 0$

(1) (max/min)  $f(x_1, x_2, x_3) = \dots$  (2) (min)  $(f \text{ sau } -f) = \dots$

(2) 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12 \\ 3x_1 - x_2 \geq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 15 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 \leq 8 \end{cases}$$

(3)  $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

$\Rightarrow$  (2s) 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4^c = 12 \\ 3x_1 - x_2 - x_5^c = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_6^c = 15 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_7^c = 8 \end{cases}$$

(3s)  $x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c, x_6^c, x_7^c \geq 0$

Obs: sistemului în formă standard (2s) îi corespunde matricea extinsă:

$$\bar{A} = \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & x_6^c & x_7^c & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 15 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

care are doar 2 coloane de matricei unitate  $I_5$

În loc să facem alte 3 coloane prin t.e. (met. lui Gauss) atașăm problema artificială (din metoda celor 2 faze) astfel:

Variantă I (se introduce în fiecare ecuație câte o variabilă artificială), deci nr. maximal.

(1a) (min)  $f_a(x_8^a, x_9^a, x_{10}^a, x_{11}^a, x_{12}^a) = x_8^a + x_9^a + x_{10}^a + x_{11}^a + x_{12}^a$

(2a) 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4^c + x_8^a = 12 \\ 3x_1 - x_2 - x_5^c + x_9^a = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_{10}^a = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_6^c + x_{11}^a = 15 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_7^c + x_{12}^a = 8 \end{cases}$$

(3a)  $x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c, x_6^c, x_7^c, x_8^a, x_9^a, \dots, x_{12}^a \geq 0$

$\rightarrow \bar{A}_a = \begin{array}{cccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & x_6^c & x_7^c & x_8^a & x_9^a & x_{10}^a & x_{11}^a & x_{12}^a & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}$

$\downarrow$

$\bar{x}_0^a = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 12, 5, 10, 15, 8)^T \rightarrow \text{SBAI}_a$

Obs: i) aveam nevoie de 5 coloane de matricei unitate ( $I_5$ ) și am obținut 7 coloane (prima și a doua în dublu exemplar!!)

- ii) (P.F.L.)<sub>a</sub> are acum 12 neanoscute
- iii) nu este nevoie să introducem obligatoriu în fiecare ecuație câte o variabilă artificială, ci doar în ale în care am scăzut sau nu am introdus variabile de compensare.

Variable II (se introduce nr. minimum necesar de variabile artificiale) ②  
 , deci nr. optim +

(1a) (min)  $f_a(x_8^a, x_9^a, x_{10}^a) = x_8^a + x_9^a + x_{10}^a$

(2a) 
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4^c = 12 \\ 3x_1 - x_2 - x_5^c + x_8^a = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_9^a = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_6^c + x_{10}^a = 15 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_7^a = 8 \end{cases} \Rightarrow \bar{A}_c =$$

$$\bar{A}_c = \begin{array}{c|cccccccc|c} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & x_6^c & x_7^a & x_8^a & x_9^a & x_{10}^a & \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\ 4 & -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \\ 5 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}$$

$\downarrow$   $V_{sec} = 0$   $V_{prime} = (x_4^c, x_5^c, x_6^c, x_7^a, x_8^a, x_9^a, x_{10}^a)$

$X_0^a = (9, 0, 0, 12, 0, 0, 8, 5, 10, 15)^T$   
 $\rightarrow$  S.B.A. Ia

Obs: in acest caz am introdus doar 3 variab. artificiale, (P.L.)<sub>a</sub> depinzand doar de 10 variabile.