ECONOMETRIE

Planul cursului

1. Introducere
2. Modelul de regresie liniară simplă
3. Modelul de regresie liniară multiplă
4. Modele de regresie neliniară
5. Ipoteze statistice: normalitatea erorilor, homoscedasticitatea, necorelarea erorilor, multicoliniaritatea.

4. Modele de regresie neliniară

4.1. Tipuri de modele

4.2. Modele liniarizabile

4.3. Modele polinomiale

4.4. Modele neliniare multiple

4.1. Tipuri de modele neliniare

- Putem distinge două mari clase de modele neliniare:

I. ***Modelele liniarizabile*** sunt acele modele neliniare care se pot transforma în modele liniare prin logaritmare sau alte transformări: modele semi-logaritmice şi modelul putere.

.

II. ***Modele polinomiale*** sunt acele modele care exprimă relația dintre variabilele X şi Y cu ajutorul unui polinom de gradul 2, 3, etc.

4.2. Modele liniarizabile

a. Modele semi-logaritmice

a.1 Modele cu variabila dependentă logaritmată

I. Modelul *Compound (compus)*

II. Modelul *Growth (de creştere)*

III. Modelul exponențial

a.2 Modele cu variabila independentă logaritmată: modelul Logarithmic.

a.1 Modele cu variabila dependentă (*Y*) logaritmată

I. <u>Modelul *Compound (compus)*</u>

1. ***Forma generală a modelului*:**

$$Y = \beta_0 \cdot \beta_1^{\,X} \cdot e^{\varepsilon}$$

Ecuația se liniarizează prin logaritmare:

$$\ln Y = \ln \beta_0 + X \cdot \ln \beta_1 + \varepsilon$$

Parametrii modelului:

- β_0 este valoarea lui Y pentru X=0. Variabila Y are numai valori pozitive, deci β_0 satisface condiția $\beta_0 > 0$.
- β_1 arată *variația medie procentuală* a lui Y la o *variație absolută* a lui X cu o unitate. Reprezintă rata de creştere sau reducere a variabilei Y în raport cu variabila X.

Observații:

- Dacă $\beta_1 > 1$, atunci legătura dintre cele două variabile este directă.

- Dacă $0 < \beta_1 < 1$, atunci legătura dintre cele două variabile este indirectă.

2. Estimarea parametrilor modelului

Se face prin MCMMP: $\sum e_i^2 = minim$

Sistemul de ecuații normale:

$$n \ln b_0 + \ln b_1 \sum x_i = \sum \ln y_i, \quad i = \overline{1,n}$$

$$\ln b_0 \sum x_i + \ln b_1 \sum x_i^2 = \sum x_i \ln y_i$$

$$\ln b_1 = \frac{n\sum x_i \ln y_i - \sum x_i \sum \ln y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2};$$

$$\ln b_0 = \frac{\sum \ln y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i \ln y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}$$

- Valorile estimațiilor b_0 şi b_1 sunt prezentate în output-ul *Coefficients*, coloana *Unstandardized Coefficients*.

3. Testarea semnificației parametrilor (similar modelului de regresie liniară)

- Ipoteze
- Interpretare

4. Intensitatea legăturii dintre variabile

Exemplu: raportul de determinație (*R square*).

5. Exemplu

În urma analizei legăturii dintre valoarea investițiilor (mii lei) şi valoarea producției (mil. lei) înregistrate pe un eşantion de 5 firme, folosind modelul *Compound*, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
X	1.139	.039	2.488	29.566	.000
(Constant)	15.175	2.726		5.568	.011

The dependent variable is ln(Y).

Rezolvare:

Ecuația estimată a legăturii dintre cele două variabile este:

$$y_{x_i} = 15{,}175 \cdot 1{,}139^{x_i}$$

Logaritmând ecuația de mai sus, se obține:

$\ln y_{xi} = \ln 15{,}175 + x_i \ln 1{,}139 = 2{,}719 + 0{,}13 x_i$

Interpretare:

- valoarea parametrului β_1 arată că la o creştere cu o mie de lei a investiţiilor (*X*), producţia (*Y*) creşte în medie cu o rată de 0,13 sau cu 13%.

2. Testarea semnificaţiei parametrilor

- pentru parametrul β_1, valoarea Sig.=0<0.05, se respinge ipoteza H_0 pentru un risc de 5%.

3. Estimarea şi testarea intensităţii legăturii dintre variabile

a.1 Modele cu variabila dependentă logaritmată

II. Modelul *Growth* (de creştere)

- Forma generală a modelului:

$$Y = e^{\beta_0 + \beta_1 \cdot X + \varepsilon}$$

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \varepsilon$$

II. Modelul *Growth* (de creştere)

Parametrii modelului:

- $e^{\beta 0}$ este valoarea medie a lui *Y* pentru *X=0*.

- β_1 arată variația medie procentuală a lui *Y* la o variație absolută a lui *X* cu o unitate.

Exemplu

În urma analizei legăturii dintre valoarea investițiilor (mii lei) şi valoarea producției (mil. lei) înregistrate pe un eşantion de 5 firme, folosind modelul *Growth*, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
X	.130	.034	.912	3.843	.031
(Constant)	2.720	.180		15.142	.001

The dependent variable is ln(Y).

Ecuația estimată a legăturii dintre cele două variabile este:

$$Y_X = e^{2,72 + 0,13 \cdot X}$$

Logaritmând ecuația de mai sus, se obține:

$lnY_X = 2,72 + 0.13X$

III. Modelul exponențial

- ***Forma generală a modelului*:**

$$Y = \beta_0 \cdot e^{\beta_1 X} \cdot e^{\varepsilon}$$

Ecuația se liniarizează prin logaritmare:

$$\ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \varepsilon$$

III. Modelul exponențial

Parametrii modelului:

- β_0 este valoarea medie a lui *Y* pentru *X=0*.

- β_1 arată variația medie <u>procentuală </u>a lui *Y* la o variație <u>absolută</u> a lui *X* cu o unitate.

III. Modelul exponențial

Exemplu

Se consideră legătura dintre valoarea investițiilor (mii lei) şi valoarea producției (mil. lei).

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
X	.130	.034	.912	3.843	.031
(Constant)	15.175	2.726		5.568	.011

The dependent variable is ln(Y).

- Ecuația estimată:

$$Y_X = 15,175 \cdot e^{0,13X}$$

Interpretare:

- La o creştere a investițiilor cu o mie de lei, producția creşte, în medie, cu 13%.

a.2 Modele cu variabila independentă logaritmată

Modelul Logarithmic

- ***Forma generală a modelului*:**

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot ln\, X + \varepsilon$$

- β_0 este valoarea medie a lui Y pentru $X=1$.
- β_1 arată variația medie <u>absolută</u> a lui Y la o variație <u>procentuală</u> a lui X cu o unitate.

Exemplu

Se consideră legătura dintre valoarea investițiilor (mii lei) şi valoarea producției (mil. lei).

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
	B	Std. Error	Beta		
ln(X)	20.535	3.396	.961	6.047	.009
(Constant)	-1.799	5.388		-.334	.760

- Ecuația estimată a legăturii dintre cele două variabile este:

$$Y_X = -1,799 + 20,535 \cdot \ln X$$

Interpretare:

- La o creştere a investițiilor cu 1 % producția creşte, în medie, cu 0,20535 mil. lei (20,535/100).

b. Modelul de tip putere (*Power*) (log-liniar)

1. ***Forma generală a modelului***:

$$Y = \beta_0 \cdot X^{\beta_1} \cdot e^{\varepsilon}$$

Ecuația se liniarizează prin logaritmare:

$$\ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln X + \varepsilon$$

- În modelul putere, parametrul β_1 este elasticitatea variabilei dependente *Y* în raport cu variabila independentă *X*.

- Elasticitatea unei variabile *Y* în raport cu o altă variabilă *X* reprezintă modificarea relativă (procentuală) a variabilei *Y* la o modificare relativă (procentuală) a lui *X* cu o unitate.

Elasticitatea poate fi determinată prin relația:

$$E = \frac{\%\, mod\, if.\, Y}{\%\, mod\, if.\, X} = \frac{\frac{\Delta Y}{Y} \cdot 100}{\frac{\Delta X}{X} \cdot 100} = \frac{\Delta Y}{\Delta X} \cdot \frac{X}{Y}$$

2. Estimarea parametrilor modelului

- Prin MCMMP

$$n \ln b_0 + b_1 \sum \ln x_i = \sum \ln y_i, \quad \mathrm{i} = \overline{1, \mathrm{n}}$$

$$\ln b_0 \sum \ln x_i + b_1 \sum (\ln x_i)^2 = \sum \ln x_i \ln y_i$$

3. Testarea semnificației parametrilor

4. Exemplu

În urma prelucrării datelor privind valoarea producției industriale (mil. lei) şi nivelul investițiilor nete din industrie (mii lei) în România, în perioada 1990-2010, s-au obținut următoarele rezultate:

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
ln(X)	,960	,012	,999	79,735	,000
(Constant)	1,603	,143		11,204	,000

The dependent variable is ln(Y).

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
,999	,998	,998	,116

The independent variable is X.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Regression	86,240	1	86,240	6357,625	,000
Residual	,190	14	,014		
Total	86,429	15			

The independent variable is X.

Rezolvare:

1. *Ecuația estimată a modelului putere* este:

$$Y_X = 1,603 \cdot X^{0,960}$$

Prin logaritmare se obține:

$$\ln Y_X = \ln 1,603 + 0,960 \cdot \ln X = 0,472 + 0,960 \cdot \ln X$$

Interpretare:

- Producția industrială crește în medie cu 0,96%, la o creștere cu 1% a investițiilor nete în industrie.

- Panta dreptei (parametrul β_1) reprezintă elasticitatea (*E*) investițiilor în raport cu producția.

2. Testarea semnificației parametrilor

3. Analiza de corelație

4.3. Modele polinomiale

a. **Modelul parabolic**: cel mai simplu model polinomial este modelul parabolic (*Quadratic*).

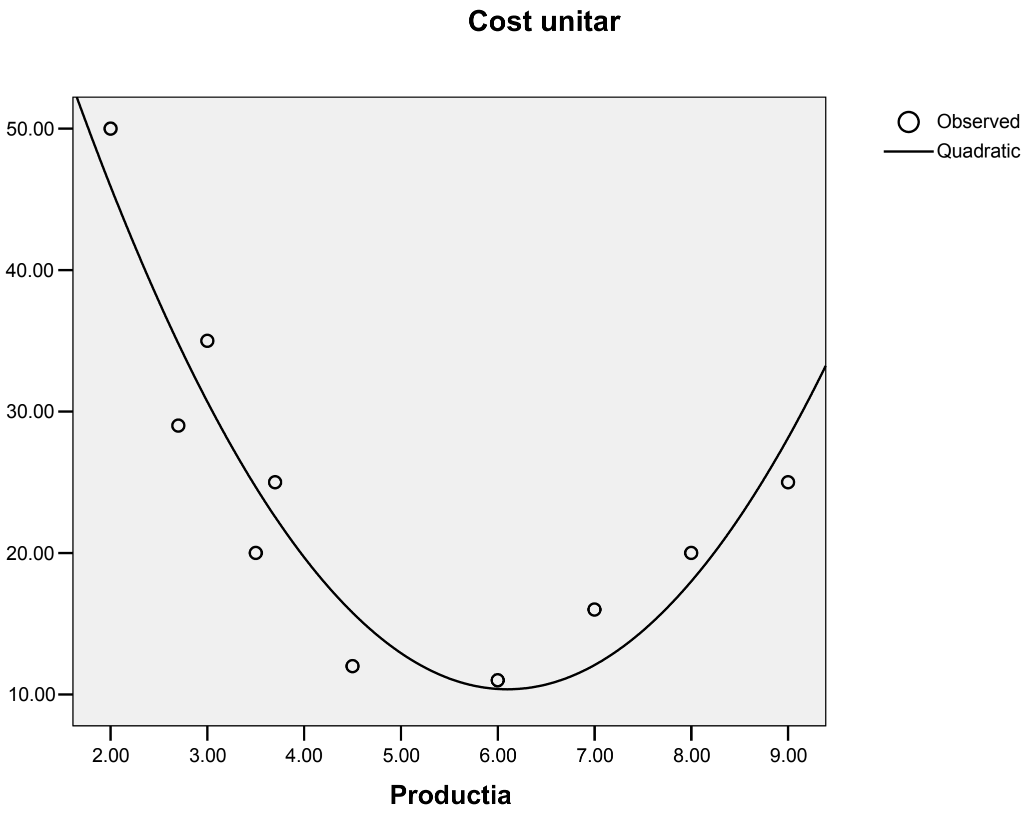
$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + \varepsilon$$

La nivelul eşantionului:

$$Y_X = b_0 + b_1 \cdot X + b_2 \cdot X^2$$

- În economie, modelul polinomial este folosit pentru descrierea relației dintre costul unitar şi producția realizată: costul unitar scade concomitent cu creşterea producției până la un nivel optim al producției, după care, dacă producția continuă să crească, începe să crească şi costul unitar.

Exemplu



Cost unitar
50.00
40.00
30.00
20.00
10.00
2.00
3.00
4.00
5.00
6.00
7.00
8.00
9.00
Productia
Observed
Quadratic

Exemplu

- În studiul legăturii dintre costul unitar şi producţia unui bun (sute bucăţi), înregistrate pentru un eşantion de firme, s-au obţinut următoarele rezultate:

Exemplu

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
Productia	-25.795	3.895	-5.322	-6.623	.000
Productia ** 2	2.114	.351	4.842	6.026	.001
(Constant)	89.041	9.231		9.646	.000

Exemplu

Model Summary

R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
.941	.886	.853	4.484

The independent variable is Productia.

ANOVA

	Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Regression	1091.326	2	545.663	27.133	.001
Residual	140.774	7	20.111		
Total	1232.100	9			

The independent variable is Productia.

Interpretare:

- β_2>o, deci legătura de tip parabolic admite un punct de minim.

- Coordonatele punctului de minim arată nivelul producției optim pentru care costul unitar este minim. Abscisa acestui punct este:

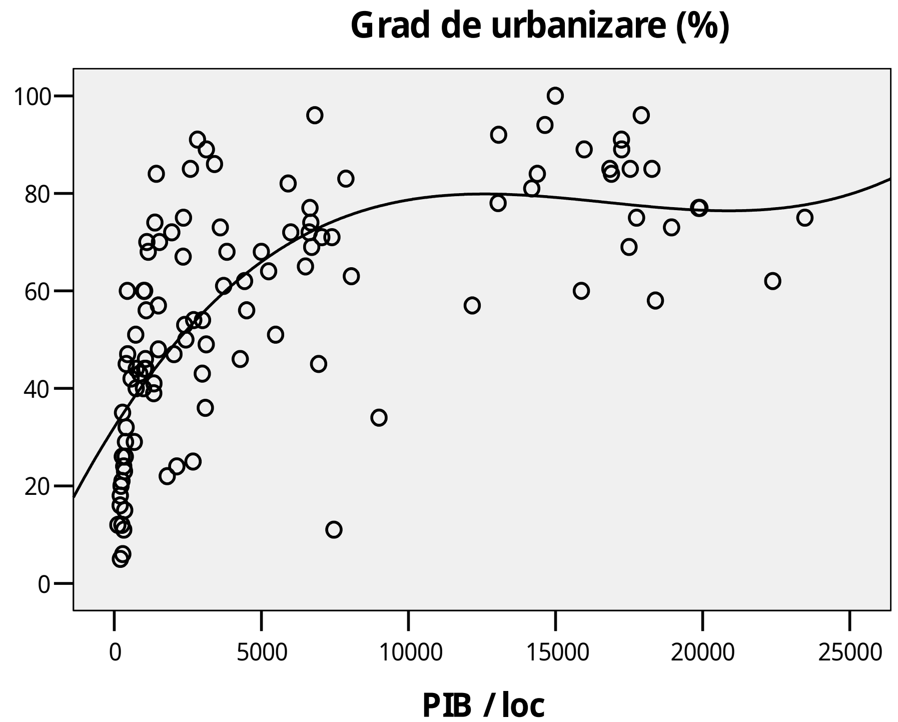
  $-b_1/2b_2=25,79/4,22=6,11$. Pentru o producție de 611 bucăți din produsul A, costul este minim.

b. **Modelul cubic**

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \cdot X + \beta_2 \cdot X^2 + \beta_3 \cdot X^3 + \varepsilon$$

În economie acest model este folosit pentru descrierea relației dintre costul total şi valoarea producției.

Pentru acest tip de legătură se poate determina punctul de inflexiune al curbei, prin anularea derivatei de ordinul 2 in X.



Grad de urbanizare (%)
100
80
60
40
20
0
0
5000
10000
15000
20000
25000
PIB / loc

Coefficients

	Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
	B	Std. Error	Beta	t	Sig.
PIB	2,931	,071	1,197	41,218	,000
PIB ** 2	-3,9E-007	,000	-,361	-4,932	,000
PIB ** 3	7,73E-014	,000	,165	.	.
(Constant)	-3962,660	11506,083		-,344	,737

4.4. Modele de regresie neliniară multiplă. Modelul putere

a. Forma generală a modelului:

$$Y = \beta_0 \cdot X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot X_p^{\beta_p} \cdot e^{\varepsilon}$$

Ecuația se liniarizează prin logaritmare:

$$\ln Y = \ln \beta_0 + \beta_1 \cdot \ln X_1 + \beta_2 \cdot \ln X_2 + \ldots + \beta_p \cdot \ln X_p + \varepsilon$$

Interpretare:

- parametrul β_0 este nivelul mediu al lui Y atunci când $X_i=1$.
- parametrii β_i reprezintă elasticitatea variabilei dependente Y în raport cu variabilele independente X_i.

b. Exemplu din economie

- funcția de producție de tip Cobb-Douglas.

b.1. Prezentarea modelului

$$Y = \beta_0 \cdot X_1^{\beta_1} \cdot X_2^{\beta_2} \cdot e^{\varepsilon}$$

unde:

<u>*Variabilele modelului*</u> sunt:

Y este producția finală sau output-ul;

X_1 sunt fondurile fixe, capitalul sau input-ul;

X_2 este forța de muncă (input).

<u>*Coeficienții modelului*</u>:

$\boldsymbol{\beta_0}$ este nivelul mediu al producției (*Y*) când $X_i=1$.

β_1 este elasticitatea parțială a producției în raport cu fondurile fixe sau factorul capital.

β_2 este elasticitatea parțială a producției în raport cu forța de muncă.

$(\beta_1 + \beta_2)$ este elasticitatea totală a producției în raport cu cei doi factori. Această valoare poartă numele de randament de scară.

Interpretare:

- *$(\beta_1+\beta_2)<1$:* un spor al factorilor de producție generează o creştere a output-ului dar într-o proporție mai mică (proces de producție cu randament de scară descrescător);
- *$(\beta_1+\beta_2)>1$:* un spor al factorilor de producție generează o creştere a output-ului dar într-o proporție mai mare (proces de producție cu randament de scară crescător);
- *$(\beta_1+\beta_2)=1$:* sporul factorilor de producție generează creşterea output-ului în aceeaşi proporție (randament de scară constant).

b.2. Exemplu numeric

Să presupunem că, în urma prelucrării datelor privind valoarea input-urilor (*L*, forța de muncă; *K*, valoarea capitalului fix) şi a output-urilor obținute într-un anumit domeniu de activitate (*Y*, valoarea producției), s-au obținut următoarele rezultate:

$$\ln Y = -4{,}28 + 1{,}35 \cdot \ln L + 0{,}63 \cdot \ln K$$

R square=0,878.

Interpretare:

- pentru perioada analizată, dacă se consideră constantă valoarea capitalului fix (*K*), atunci o creştere cu un procent a nivelului variabilei *L* duce la creşterea medie cu 1,35% a valorii producției obținute.
- pentru perioada analizată, dacă se consideră constantă valoarea forței de muncă (*L*), atunci o creştere cu un procent a valorii capitalului fix (*K)* duce la creşterea medie cu 0,63% a valorii producției obținute.

- suma elasticităților parțiale este egală cu 1,98 ceea ce arată că, în perioada analizată, procesul de producție s-a caracterizat printr-un randament de scară crescător.

- 87,8% din variația producției este datorată influenței simultane a forței de muncă şi a valorii capitalului fix în domeniul considerat.