Curs 7: II.7) Metoda celor două faze

Obs:

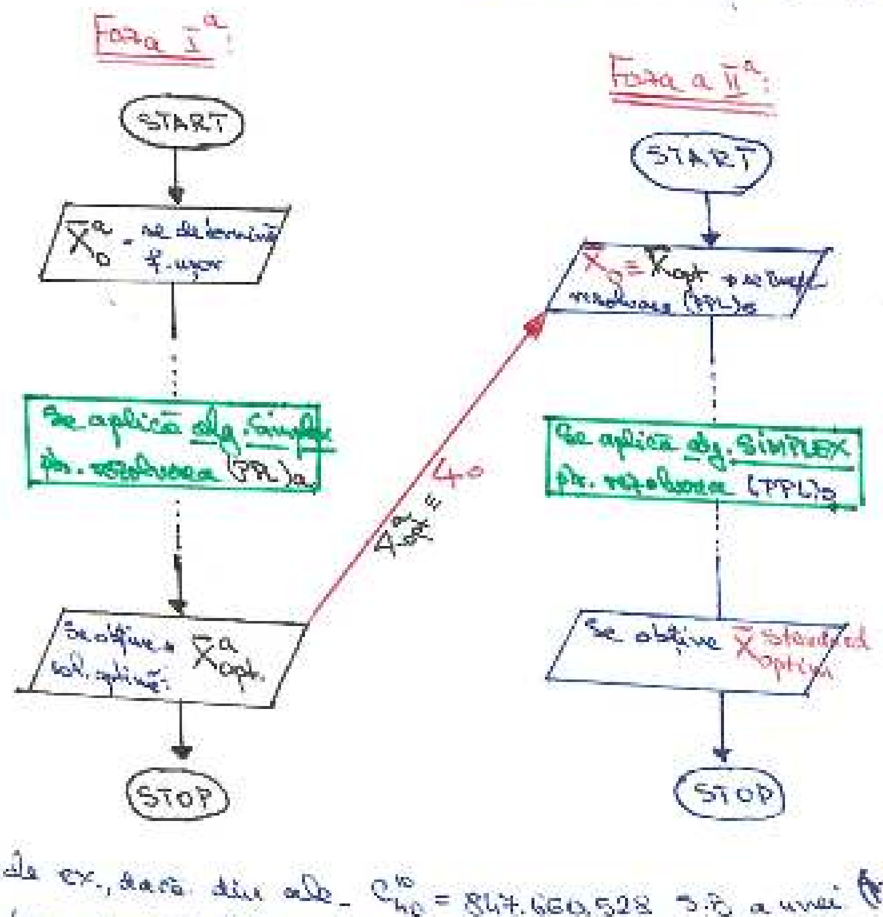
i) Pentru a începe aplicarea alg. Simplex, avem nevoie de o S.B.A.I $\overline{X}_0$ a sistemului liniar (2s). Determinarea acesteia cu ajutorul metodei lui Gauss (de rezolvare a sist. liniare) nu este "cea mai bună idee", deoarece este posibil ca să obținem mai întâi f.f. multe soluții neadmisibile (zeci de mii, sute de mii, milioane, etc.) până determinăm prima soluție admisibilă (not $\overline{X}_0$).

ii) Metoda celor două faze elimină acest inconvenient major, astfel:

1) În faza I^a, se atașează (PPL)$_s$ o nouă problemă (PPL)$_a$ numită problemă artificială a cărei soluție de bază admisibilă inițială ($\stackrel{not}{=} \overline{X}^a_0$ - SBAI$_a$) este obținută direct (fără calcule) din forma sistemului liniar (2a). Se aplică alg. Simplex și se rezolvă (PPL)$_a$ obținându-se soluția optimă a problemei artificiale ($\stackrel{not}{=} \overline{X}^a_{optim}$)

2) În faza a II^a se rezolvă (PPL)$_s$ cu alg. Simplex, având ca S.B.A.I tocmai soluția optimă găsită a (PPL)$_a$, adică: $\overline{X}_0 \equiv \overline{X}^a_{opt.}$

iii) schematic, metoda celor două faze este reprezentată mai jos:



iii) De ex., dacă din cele $C_{40}^{10} = 847.660.528$ S.B a unei (PPL)$_s$, pp. că 500.000.000 sunt S.B.N. (neadmisibile), putem fi suficient de "ghinioniști" să determinăm mai întâi 100-200-300 de milioane de S.B.N până obținem pe $\overline{X}_0$-SBAI. Cu metoda celor două faze (PPL)$_s$ se rezolvă cazul în cel mult 60+50=110 pași și 11 S.B.

Modelul matematic al metodei celor două faze:

Fie $(PPL)_s$ de forma:

$$(PPL)_s \begin{cases} (1_s)\ (\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ (2_s) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \geq 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \geq 0 \\ \text{— — — — — — —} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \geq 0 \end{cases} \\ (3_s)\ x_j \geq 0\ ;\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

verificând condițiile $(*) \begin{cases} m < n \\ r_A = m \\ b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m} \end{cases}$

Obs:

Dacă am aplica metoda lui Gauss, atunci lui $(2_s) \longrightarrow \bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} P_1 & P_2 & \dots & P_n & P_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \end{array} \sim \dots \sim \underbrace{\bar{A}_{e_1}}_{\text{(!!!) e multe calcule}} \Rightarrow \bar{X}_0 = ??$

Faza I^a:

① Atașăm $(PPL)_s$: (1_s)–(3_s) problema artificială:

$$(PPL)_a \begin{cases} (1_a)\ (\min) f_a(x_1, x_2, \dots, x_n; x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) \overset{def}{=} x_1^a + x_2^a + \dots + x_m^a \quad (= 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \dots + 0x_n + x_1^a + x_2^a + \dots + x_m^a) \\ (2_a) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_1^a = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_2^a = b_2 \\ \text{— — — — — — —} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_m^a = b_m \end{cases} \\ (3_a)\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}\ \text{și}\ x_i^a \geq 0,\ i = \overline{1,m} \end{cases}$$

$$\longmapsto \bar{A}_a = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc|c} P_1 & P_2 & \dots & P_n & P_1^a & P_2^a & \dots\ P_m^a & P_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots\ 0 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots\ 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots\ 1 & b_m \end{array}\right) \end{array}$$

vectori artificiali P_i^a, $i = \overline{1,m}$

↓ (direct, fără calcule)

② Determinăm $\bar{X}_0^a$–SBAi_a direct din $\bar{A}_a$: $\longrightarrow$

$$\bar{X}_0^a = (\underbrace{\underset{x_1}{0}, \underset{x_2}{0}, \dots, \underset{x_n}{0}}_{\text{componente secundare}}, \underbrace{\underset{x_1^a}{\overset{\geq 0}{b_1}}, \underset{x_2^a}{\overset{\geq 0}{b_2}}, \dots, \underset{x_m^a}{\overset{\geq 0}{b_m}}}_{\text{componente/variabile principale}})^T \in \mathbb{R}^{n+m} \text{ – SBA}i_a$$

③ Rezolvăm $(PPL)_a$ cu Alg. Simplex. La finalul algoritmului putem avea una din următoarele 3 situații:

a) $(\min) f_a(\bar{X}_{opt.}^a) = 0$, și în baza finală B nu mai există vectori artificiali (P_i^a), atunci se trece la faza a II^a (utilizând ca $\bar{X}_0 \equiv \bar{X}_{opt.}^a$)

b) $(\min) f_a(\bar{X}_{opt}^a) = 0$, dar în baza finală B mai există vectori artificiali (P_i^a), atunci se trece la faza a II^a (utilizând ca SBAi pe $\bar{X}_0 = \bar{X}_{opt}^a$)

c) $(\min) f_a(\bar{X}_{opt}^a) > 0$, în acest caz nu există faza a II^a, $(PPL)_s$ nu are soluție (restricțiile sistemului sunt contradictorii $(S = \emptyset)$ sau $S_{AS} = \emptyset$ (toate sol. de bază sunt neadmisibile)).

Obs:

i) ~~Notația~~ Notația: $f_a(x_1, x_2, \dots, x_n, x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) \equiv f_a(x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a)$ deoarece variabilele x_j, $j = \overline{1,n}$ nu apar efectiv în expresia funcției artificiale „f_a" (au coeficienții egali cu 0)

ii) Deoarece: $f_a(x_1^a, x_2^a, \dots, x_m^a) = \underbrace{x_1^a}_{\geq 0} + \underbrace{x_2^a}_{\geq 0\ (cf.\ 3_a)} + \dots + \underbrace{x_m^a}_{\geq 0} \geq 0$, deci f_a are doar coef. $\begin{cases} = 0 \text{ (pt. variab. inițiale + componente)} \\ = 1 \text{ (pt. variab. artificiale)} \end{cases}$

Faza a II-a:

Corespunzător celor 3 situații din Faza I-a, vom avea 3 cazuri în faza a II-a și anume:

a) ultimul tabel Simplex al Fazei I-a (corespunzător soluției optime $\overline{X}^a_{opt}$ a $(PPL)_a$) se copie și devine primul tabel Simplex al Fazei a II-a cu următoarele modificări:

(i) se elimină cele „m" coloane corespunzătoare vectorilor artificiali P^a_i, $i=\overline{1,m}$;

(ii) se înlocuiesc coeficienții necunoscutelor funcției artificiale „f_a" (din coloana C_B și de deasupra vectorilor P_j) cu coeficienții funcției inițiale ale (1_S);

(iii) se elimină vechile diferențe $z_j - c_j$ din ultima linie a tabelului și se calculează noile diferențe $z_j - c_j$ corespunzătoare noilor coeficienți ai funcției „f".

Se aplică alg. Simplex și se obține $\overline{X}^S_{optim} \longrightarrow \overline{X}^{inițial=general}_{optim}$.

b) se procedează analog cu cazul a) dar în acest caz se păstrează în primul tabel Simplex al Fazei a II-a coloanele acelor vectori artificiali P^a_i care nu au fost eliminați din baza finală a Fazei I-a (cea care corespunde sol. optime a Fazei I: $\overline{X}^a_{opt}$)

Obs: În această situație (care în cazuri economice reale nu este întâlnită decât extrem de rar), în faza a II-a poate apărea așa-numitul fenomen de ciclaj:

$$\overline{X}^a_{opt} \equiv \overline{X}_0 \longrightarrow \overline{X}_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{X}_i \longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{X}_s \not\longrightarrow \cdots \longrightarrow \overline{X}^S_{opt}$$

ciclaj

c) nu există Faza a II-a (!!!)

În acest caz $(PPL)_S$ nu are:

(i) soluții ($S=\emptyset$) $\Leftrightarrow$ sist. (2_S) este incompatibil $\Leftrightarrow$ restricțiile econ. inițiale sunt contradictorii;

(ii) soluții de bază admisibile ($S_{AB}=\emptyset$) $\Leftrightarrow$ toate sol. de bază sunt neadmisibile (au comp. negative)

Ex: Determinați soluțiile optime ale următoarei (P.P.L):

$$(PPL)_g \begin{cases} (1_g)\ (\max) f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ (2_g) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 \geq 8 \end{cases} \\ (3_g)\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Longrightarrow (PPL)_S \begin{cases} (1_S)\ (\min)(-f) = -f(x_1,x_2,x_3,x^c_4,x^c_5) = -3x_1 + x_2 - 2x_3 + 0x^c_4 + 0x^c_5 \\ (2_S) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x^c_4 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x^c_5 = 8 \end{cases} \\ (3_S)\ x_1, x_2, x_3, x^c_4, x^c_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$\mapsto \overline{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \overline{A}_{ex} \Rightarrow \overline{X}_0 = ?$$

$$\Rightarrow (PPL)_a \begin{cases} (1_a)\ (\min) f_a(x_1,x_2,x_3,x^c_4,x^c_5,x^a_6,x^a_7) = 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + 0\cdot x^c_4 + 0\cdot x^c_5 + x^a_6 + x^a_7 = x^a_6 + x^a_7 \\ (2_a) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x^c_4 + x^a_6 = 6 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x^c_5 + x^a_7 = 8 \end{cases} \\ (3_a)\ x_1, x_2, x_3, x^c_4, x^c_5, x^a_6, x^a_7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\longmapsto \overline{A}_a = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P^c_4 & P^c_5 & P^a_6 & P^a_7 & P_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \overline{X}^a_0 = (0,0,0,0,0,6,8)^T \in \mathbb{R}^7_+ \to SBA_a$$

var. nebazice = 0 (secundare)

variabile bazice (principale)

Construim tabelul Simplex atașat $(PPL)_a$ corespunzător S.B.A.I.: $\bar{X}_0^a$ (faza I):

coef. funcției f_a din (1a)

B	C_B	P_0	c_1: 0	c_2: 0	c_3: 0	c_4: 0	c_5: 0	c_6: 1	c_7: 1	
			P_1	P_2	P_3	P_4^e	P_5^e	P_6^a	P_7^a	$\theta_i = \frac{P_0}{P_{ik}}$
P_6^a	1	6	$\boxed{2}$	2	1	-1	0	1	0	$\theta_2 = 3$
P_7^a	1	8	1	-3	2	0	-1	0	1	$\theta_1 = 8$
	$f_a(\bar{X}_0^a) =$	14	3	-1	3	-1	-1	0	0	$z_j - c_j$
P_1	0	3	1	1	1/2	-1/2	0	1/2	0	$\frac{3}{1/2}=6$
P_7^a	1	5	0	-4	$\boxed{3/2}$	1/2	-1	-1/2	1	$\frac{5}{3/2}=\frac{10}{3}$
	$f_a(\bar{X}_1^a) =$	5	0	-4	3/2	1/2	-1	-3/2	0	$z_j - c_j$
P_1	0	4/3	1	7/3	0	-2/3	1/3	2/3	-1/3	
P_3	0	10/3	0	-8/3	1	1/3	-2/3	-1/3	2/3	
	$f_a(\bar{X}_2^a) =$	0	0	0	0	0	0	-1	-1	$z_j - c_j$

$|\cdot\frac{1}{2}|\cdot(-\frac{1}{2})$ +

$|\cdot\frac{2}{3}|\cdot(-\frac{1}{3})$ +

$\xrightarrow{\text{crit. } P_{0,1}}$ $\begin{cases} \bar{X}_0^a = (0,0,0,0,0,6,8)^T \in \mathbb{R}^7 \\ f_a(\bar{X}_0^a) = 14 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{crit. } P_{0,1}}$ $\begin{cases} \bar{X}_1^a = (3,0,0,0,0,0,5)^T \in \mathbb{R}^7 \\ f_a(\bar{X}_1^a) = 5 \end{cases}$

$\xrightarrow{\text{crit. } P_{0,1}}$ $\begin{cases} \bar{X}_2^a = (4/3,0,10/3,0,0,0,0)^T \text{ (nu-optimă)!!} \\ f_a(\bar{X}_2^a) = 0 \end{cases}$

$\Downarrow$ 4b)

$\begin{cases} X_{opt}^{artif.} = (4/3,0,10/3,0,0,0,0)^T \to \text{nu este unică!!} \\ (\min) f_a = 0 \end{cases}$ → soluția optimă a $(PPL)_a$

Construim acum tabelul atașat $(PPL)_s$, corespunzător S.B.A.I.: $\bar{X}_0 = \bar{X}_{opt}^a$ (folosind ultimul tabel din faza I) (faza II)

coef. funcției $-f_1$ din (1s)

B	C_B	P_0	-3	1	-2	0	0	
			P_1	P_2	P_3	P_4^e	P_5^e	$\theta_i = \frac{P_0}{P_{ik}}$
P_1	-3	4/3	1	7/3	0	-2/3	1/3	—
P_3	-2	10/3	0	-8/3	1	$\boxed{1/3}$	-2/3	10
	$-f(\bar{X}_0) =$	$-\frac{32}{3}$	0	-8/3	0	4/3	1/3	$z_j - c_j$
P_1	-3	8	1	-3	2	0	-1	
P_4^e	0	10	0	-8	3	1	-2	
	$-f(\bar{X}_1) =$	-24	0	8	-4	0	3	$z_j - c_j$

$|\cdot 3|\cdot 2$ +

$\xrightarrow{\text{crit. } P_{0,1}}$ $\begin{cases} \bar{X}_0 = (4/3,0,10/3,0,0)^T \in \mathbb{R}^5 \\ -f(\bar{X}_0) = -\frac{32}{3} \cong -10 \end{cases}$

$\begin{cases} \bar{X}_1 = (8,0,0,10,0)^T \in \mathbb{R}^5 \\ -f(\bar{X}_1) = -24 \end{cases}$

$\Downarrow$ 4c)

$\min(-f) = -\infty \Leftrightarrow (\max) f = +\infty$ ($(PPL)_s$ are optim infinit $\Leftrightarrow (PPL)_g$ are optim infinit)

q.e.d.

III) Probleme de transport (P.T)

i) (P.P.L) sunt utilizate nu doar în analiza planurilor de investiţii respectiv analiza costurilor ci şi în probleme privind transportul bunurilor (pe: şosea, apă, aer, etc.). De fapt una din primele aplicaţii ale (P.P.L) a fost eficientizarea transporturi-lor navale între S.U.A şi Europa, Rusia, Africa de Nord, etc. în timpul celui de-al doilea război mondial (WW II)

ii) (P.T) apar în contextul planificării şi/sau determinării rutelor optime (!?) de transport, deseori utilizându-se şi elem. de teoria grafurilor, respectiv a determinării locaţiilor optime (!) la unor centre de depozitare pentru a face transportul produ-selor către consumatori cât mai "ieftin" posibil.

iii) Deoarece (P.T) sunt cazuri particulare de (PPL) teoretic ar putea fi rezolvate cu alg. simplex; dar în practică nr. de depozite respectiv centre de desfacere (magazine) care apar în aplicaţiile reale este f.f. mare ceea ce determină ca aplicarea acestuia să fie ineficientă.

iv) Deoarece (P.T) sunt cazuri particulare de (PPL), toate rezultatele valabile pentru cazul general al (PPL) rămân valabile şi pentru (P.T) (!!!)

III.1) Modelul economic şi cel matematic pentru o (P.T)

"O firmă de transport trebuie să ducă o cantitate de marfă aflată în depozitele D_i, $i=\overline{1,m}$ în care se află cantităţile de marfă $a_i>0$, $i=\overline{1,m}$ către centre de desfacere (magazinele) C_j, $j=\overline{1,n}$ care solicită cantităţile de marfă $b_j>0$, $j=\overline{1,n}$. Ştiind costurile unitare de transport $c_{ij}>0$; $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ de la depozitul D_i la centrul C_j, determinaţi un plan optim de transport (ce cantităţi de marfă se iau din fiecare depozit şi la ce centre de desfacere se livrează a.î. costul total al transportului să fie minim."

	C_1	C_2	...	C_j	...	C_n	
D_1	x_{11} $\boxed{c_{11}}$	x_{12} $\boxed{c_{12}}$	...	x_{1j} $\boxed{c_{1j}}$	...	x_{1n} $\boxed{c_{1n}}$	a_1
D_2	x_{21} $\boxed{c_{21}}$	x_{22} $\boxed{c_{22}}$	...	x_{2j} $\boxed{c_{2j}}$	...	x_{2n} $\boxed{c_{2n}}$	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
D_i	x_{i1} $\boxed{c_{i1}}$	x_{i2} $\boxed{c_{i2}}$	...	x_{ij} $\boxed{c_{ij}}$	...	x_{in} $\boxed{c_{in}}$	a_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
D_m	x_{m1} $\boxed{c_{m1}}$	x_{m2} $\boxed{c_{m2}}$	...	x_{mj} $\boxed{c_{mj}}$	...	x_{mn} $\boxed{c_{mn}}$	a_m
	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	

← Tabelul ataşat unei (P.T.)

Not: „x_{ij}; $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$" → cantitatea de marfă care urmează a fi luată din depozitul „D_i" şi transportată la centrul „C_j" (cu costul unitar „c_{ij}")

Modelul matematic al P.T

$$\begin{cases} (1)\ (\min)\ f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn}) = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \dots + c_{ij}x_{ij} + \dots + c_{mn}x_{mn} \equiv \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ (2) \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \equiv\right) x_{i1} + x_{i2} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{in} \le a_i \quad ; i=\overline{1,m} \\ \left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \equiv\right) x_{1j} + x_{2j} + \dots + x_{ij} + \dots + x_{mj} \underset{(=)}{\le} b_j \quad ; j=\overline{1,n} \end{cases} \\ (3)\ x_{11}, x_{12}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn} \ge 0 \end{cases}$$

sau (scris condensat):

$$\begin{cases} (1)\ (\min)\ f(x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ (2) \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \quad ; i=\overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \underset{(=)}{\le} b_j \quad ; j=\overline{1,m} \end{cases} \\ (3)\ x_{ij} \ge 0 \quad ; i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n} \end{cases}$$

→ funcția obiectiv (liniară) = costul total al transportului

→ sistem liniar cu „$m+n$" inecuații și „$m\times n$" necunoscute (restricții economice de transport)

→ condiții de nenegativitate

Obs:

i) este evident că o P.T. este un caz particular de P.P.L; o P.T este întotdeauna o problemă de minim;

ii) dacă:

a) $\sum_{i=1}^{m} a_i \left(\equiv a_1 + a_2 + \dots + a_m\right) \ne \sum_{j=1}^{n} b_j \left(\equiv b_1 + b_2 + \dots + b_n\right)$ (oferta ≠ cerere) - vom numi problema - le Probleme de Transport Neechilibrate (PTN)

b) $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ (oferta = cererea) - le numim Probleme de Transport Echilibrate (PTE)

iii) (PTN) nu pot fi rezolvate (direct), dar (PTE) pot fi rezolvate cu ajutorul unui algoritm similar alg. Simplex (derivat din acesta)

iv) uzual, problemele reale de transport sunt neechilibrate (!).

v) vom arăta cum orice (PTN) poate fi transformată într-o (PTE) cu o metodă foarte simplă.

III.2) Probleme de transport echilibrate (PTE)

III.2.1) Considerații generale

Vom presupune că avem satisfăcută relația:

$$(*)\ \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \quad \text{(oferta = cererea)}$$

Datorită condiției (*) sistemul de inecuații liniare (2) a unei (P.T) generale devine un sistem de ecuații liniare în cazul (PTE), deci modelul matematic al acesteia va fi:

$$\begin{cases} (1)\ (\min) f(x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ (2) \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad ; i=\overline{1,m} \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad ; j=\overline{1,n} \end{cases} \\ (3)\ x_{ij} \geq 0 \ ; i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n} \end{cases}$$

→ sistem liniar (neomogen) cu $m+n$ ecuații și $m \times n$ necunoscute

Obs: i) condiția de echilibru (*) conduce la obținerea formei standard a unei PTE (privită ca și caz particular de PPL) fără a fi nevoie de introducerea unor noi variabile (de compensare) ca în cazul (general) al PPL;

ii) primele „m" ecuații din (2) reprezintă: "cantitatea totală de marfă luată dintr-un depozit trebuie să fie egală cu cantitatea existentă în acel depozit", iar celelalte „n" ecuații din (2) reprezintă: "cantitatea totală de marfă luată din toate depozitele și transportată la un centru de desfacere trebuie să fie egală cu cantitatea cerută de acel centru";

iii) condiția (*) implică că din cele „m+n" ecuații ale sist. (2) doar „m+n−1" sunt independente (principale), una dintre ele (oricare) este dependentă de celelalte (este secundară).

Dem: $\begin{cases} \text{cf. } (2)_1 \text{ avem: } \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \xRightarrow{\sum_{i=1}^{m}()} \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{m} a_i \\ \text{cf. } (2)_2 \text{ avem: } \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \xRightarrow{\sum_{j=1}^{n}()} \sum_{j=1}^{n}\left(\sum x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} b_j \end{cases} \xRightarrow{(*)} \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} x_{ij}\right)$

sau:

$$\left.\begin{array}{l} E_1 + E_2 + \dots + E_m = a_1 + a_2 + \dots + a_m \\ E_1' + E_2' + \dots + E_n' = b_1 + b_2 + \dots + b_n \end{array}\right| \xRightarrow{(*)} E_1 + E_2 + \dots + E_m = E_1' + E_2' + \dots + E_n' \Leftrightarrow$$

q.e.d. $E_1 = (E_1' + E_2' + \dots + E_n') - (E_2 + E_3 + \dots + E_m)$

Teorema 1 Orice soluție de bază a unei (PTE): $\overline{X} \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$ are $m+n-1$ componente principale (bazice), restul de $n \cdot m - (m+n-1)$ fiind componente secundare (nebazice) egale cu 0.

Obs:

a) conform obs. iii) deoarece sist. (2) are doar $m+n-1$ ecuații principale (independente) (nr. de necunoscute/componente principale = nr. de ecuații principale)

b) o soluție de baza (S.B) a sistemului de ecuații (2) este de forma:

$$\overline{X} = (0, 0, \dots, 0, \overline{x}_{i_1 j_1}, 0, \dots, 0, \overline{x}_{i_2 j_2}, 0, \dots, 0, \overline{x}_{i_{m+n-1} j_{m+n-1}}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{m \cdot n}$$

nr. total de componente este de „m·n"

componente bazice (principale) în nr. de „m+n-1";

componente nebazice (secundare) în nr. de „m·n − (m+n−1)";

b1) dacă cele „m+n-1" componente bazice (principale) sunt „>0" soluție de bază este admisibilă și nedegenerată ($\overline{X}$ - S.B.A.N)

b2) dacă cele „m+n-1" componente bazice (principale) sunt „≥0" (cel puțin una este =0) soluția de bază este admisibilă și degenerată ($\overline{X}$ - SBAD)

Obs: în această situație este foarte posibil să apară fenomenul de ciclaj

b3) dacă măcar una din cele „m+n-1" componente bazice este „<0", sol. de bază este neadmisibilă (aceste soluții nu verifică condițiile de nenegativitate (3) deci nu ne sunt de folos)

c) nr. total de S.B a unei P.T.E cu „m" depozite și „n" centre de desfacere este: $C_{mn}^{m+n-1} = \dfrac{(mn)!}{(m+n-1)!\,(mn-m-n+1)!}$ (!!!) → f.f. mare.

Ex: $\left.\begin{array}{l} m=10 \\ n=40 \end{array}\right| \Rightarrow$ nr. S.B este C_{400}^{49} = 24267664203319945041196392532865637240653271297
1517973794465600 0 → are 64 de cifre !!!

una (sau mai multe) dintre aceste S.B.A. va fi soluția optimă căutată !!!

III. 2.2) Etapele algoritmului de rezolvare a P.T.E

Deoarece o (PTE) este un caz particular de $(PPL)_s$ (în formă standard) etapele de rezolvare a acesteia vor fi aceleași cu cele enunțate ptr. Alg. Simplex, adică:

① Se determină $\overline{X}_0$ - SBAi cu: { (a) metoda diagonalei (a colțului de N-V); (b) metoda costurilor minime.

② Se aplică **criteriul de optim** (verificăm dacă soluția $\overline{X}_0$ este sau nu optimă);

③ (Evident în cazul în care soluția nu este optimă) Se aplică **criteriul de intrare în bază** (se determină ce variabilă nebazică devine bazică);

④ Se aplică **criteriul de ieșire din bază** (se determină care dintre variabilele bazice devine nebazică);

⑤ Se face schimbarea de bază, determinându-se o nouă SBA: $\overline{X}_1$ mai "bună" decât vechea soluție $\overline{X}_0$ $\left(f(\overline{X}_1) \leq f(\overline{X}_0) \right)$ construindu-se un nou tabel al PTE;

⑥ Se repetă etapele 2) – 5) până la obținerea (unei) soluției optime $\overline{X}_{opt}$

Obs: Atenție!!!

a) o P.T. are întotdeauna optim finit ($\min f(\overline{X}_{opt}) = m$ cu $m \in (0, +\infty)$)

b) o P.T are soluție optimă unică sau nu (în multe cazuri P.T are o infinitate de S.O. finite cu aceeași valoare ptr. funcția obiectiv → evident deoarece mulțimea soluțiilor optime (S_0) este mulțime convexă!! → vezi P.P.L)

c) În cazul în care soluția inițială ($\overline{X}_0$) este degenerată, sau pe parcurs se obține o SBA ($\overline{X}_k$) degenerată putem intra (extrem de rar) în fenomenul de ciclaj:

$$\overline{X}_0 \to \overline{X}_1 \to \cdots\cdots \to \overbrace{\overline{X}_k \to \overline{X}_{k+1} \to \cdots \to \overline{X}_s}^{\text{S.O degenerate}} \not\to \cdots \to \overline{X}_{optim}$$

$$f(\overline{X}_k) = f(\overline{X}_{k+1}) = \cdots = f(\overline{X}_s)\ (!)$$