Curs 11 IV.3.2) Derivate parțiale de ordinul II. Diferențiala de ord. II. Hessiana atașată unei funcții de „n" variabile

Def 1 Fie $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcție care admite toate cele „n" derivate parțiale de ord I: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,n}$. Numim derivata parțială de ordinul II a funcției „f" în raport cu variabilele „x_i" respectiv „x_j", expresia:

$$(11.1)\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \quad ; \quad (\forall)\, i,j=\overline{1,n}$$

Obs:

i) funcția $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ admite „n^2" derivate parțiale de ord. II;

ii) $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \stackrel{not}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) ; (\forall)\, i=\overline{1,n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) ; \; i,j=\overline{1,n},\; i \neq j \end{cases}$

→ derivate parțiale de ord. II pătratice (sunt în număr de „n": $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$)

→ derivate parțiale de ord II mixte / dreptunghiulare {sunt în nr. de: $n^2 - n = n(n-1)$ }

Cazuri particulare

a) $\underline{n=1}$: $f''(x) = \left(f'(x)\right)'$

Ex: $f(x) = x^2 e^x$; $x_0 = 1$

$f'(x) = (x^2+2x)e^x \Rightarrow \begin{cases} f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = \underline{(x^2+4x+2)e^x} \\ f''(x_0) = f''(1) = \underline{7e} \end{cases}$

b) $\underline{n=2}$: $f = f(x,y)$

$f(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \equiv f''_{xx}$

$f(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \equiv f''_{yx}$

$f(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \to \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \equiv f''_{xy}$

$f(x,y) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \to \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv f''_{yy}$

f''_{yx}, f''_{xy} → derivate mixte

derivate pătratice: f''_{xx}, f''_{yy}

Ex: $f(x,y)=3x^2y-6xy^3+3x-2y+1$; $P_0(1,1)$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=6xy-6y^3+3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=3x^2-18xy^2-2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(6xy-6y^3+3)=6y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(3x^2-18xy^2-2)=-36xy \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}(3x^2-18xy^2-2)=6x-18y^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial}{\partial y}(6xy-6y^3+3)=6x-18y^2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ observăm că: $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$

Atunci, în punctul $P_0(1,1)$ avem: $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0)=6 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0)=-36 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_0)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(P_0)=-12 \end{cases}$

c) $n=3$: $f=f(x,y,z)$

$f(x,y,z)$ $\rightarrow$

- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)$ $\rightarrow$
  - $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\overset{not}{=}f''_{xx}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}\overset{not}{=}f''_{zx}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)$ $\rightarrow$
  - $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\overset{not}{=}f''_{xy}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\overset{not}{=}f''_{yy}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\overset{not}{=}f''_{zy}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)$ $\rightarrow$
  - $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\overset{not}{=}f''_{xz}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\overset{not}{=}f''_{yz}$
  - $\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)=\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}\overset{not}{=}f''_{zz}$

Ex $f(x,y,z)=x^2yz^3+2xy^3z^2-3yz^3$; $P_0(1,1,1)$ $\rightarrow$ $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}=2xyz^3+2y^3z^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=x^2z^3+6xy^2z^2-3z^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}=3x^2yz^2+4xy^3z-9yz^2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(2xyz^3+2y^3z^2\right) = 2yz^3 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^2z^3+6xy^2z^2-3z^3\right) = 12xyz^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(3x^2yz^2+4xy^3z-9yz^2\right) = 6x^2yz+4xy^3-18yz \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^2z^3+6xy^2z^2-3z^3\right) = 2xz^3+6y^2z^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(2xyz^3+2y^3z^2\right) = 2xz^3+6y^2z^2 \end{cases}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x^2yz^2+4xy^3z-9yz^2\right) = 6xyz^2+4y^3z \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(2xyz^3+2y^3z^2\right) = 6xyz^2+4y^3z \end{cases}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$$

$$\left.\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x^2yz^2+4xy^3z-9yz^2\right) = 3x^2z^2+12xy^2z-9z^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(x^2z^3+6xy^2z^2-3z^3\right) = 3x^2z^2+12xy^2z-9z^2 \end{cases}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$$

Teoremă (Crit. lui Schwarz) → caz particular al teoremei lui Young

Fie $\begin{cases} f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$ o funcție de clasă $C^2(D)$ {funcția admite derivate parțiale de ord. 2 care sunt continue global pe mulțimea D}. Atunci, au loc relațiile (egalitățile):

$$(11.2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \; ; \; (\forall)\, i,j = \overline{1,n} \text{ cu } i \neq j$$

Obs i) criteriul lui Schwarz ne spune că în condițiile teoremei (care vor fi întotdeauna satisfăcute în exemplele noastre) nu contează ordinea în care se face derivarea: mai întâi în raport cu necunoscuta "x_j" și apoi în raport cu "x_i" sau viceversa;

ii) cf. crit. lui Schwarz pentru a determina toate cele "n^2" derivate parțiale de ord. II, este suficient să calculăm (bine!) doar "$\underbrace{n}_{\text{pătratice}} + \underbrace{\frac{n^2-n}{2}}_{\text{mixte}}$" derivate parțiale.

Ex $\begin{cases} f: \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R} \\ f = f(x_1, \dots, x_{10}) \end{cases}$ are $n^2 = 10^2 = 100$ deriv. parțiale de ord II. Dar este suficient să calculăm doar $n + \frac{n^2-n}{2} = 10 + \frac{100-10}{2} = 10 + \frac{90}{2} = 10+45 = 55$ deriv. parțiale de ord. II

Def 2: Numim (matricea) hessiana atașată funcției $f: D\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, matricea pătratică formată cu derivatele parțiale de ord. II ale funcției „f”, adică:

$$(13.3)\ H(x_1,x_2,\dots,x_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n^S(\mathcal{F}(x_1,x_2,\dots,x_n))$$

simetrice

mulț. funct. de „n” variab.

matrici pătratice de ord „n”, simetrice, cu elemente în mulț. funcțiilor de "n" variabile

Obs:

i) conf. Crit. lui Schwarz $\Rightarrow$ (13.4) $H = H^T$ (H este matrice simetrică)

ii) Fie $X_0 \in D$ și notăm cu: (13.5) $a_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_0) = a_{ji}$. Atunci, obținem:

$$(13.6)\ H(X_0) \equiv H(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n^S(\mathbb{R})$$

Cazuri particulare

a) $n=2$: $f = f(x,y)$; $X_0 = (x_0, y_0)$

$$(13.3')\ H(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^S(\mathcal{F}(x,y)) \Rightarrow (13.6')\ H(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2^S(\mathbb{R})$$

Ex pt. $f(x,y) = 3x^2y - 6xy^3 + 3x - 2y + 1$ și $P_0(1,1)$ avem (cf. calculelor precedente făcute):

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} 6y & 6x-18y^2 \\ 6x-18y^2 & -36xy \end{pmatrix} \Rightarrow H(P) \equiv H(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & -36 \end{pmatrix}$$

b) $n=3$: $f = f(x,y,z)$; $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$(13.3'')\ H(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3^S(\mathcal{F}(x,y,z)) \Rightarrow (13.6'')\ H(x_0,y_0,z_0) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Ex: ptr: $f(x,y,z)=x^2yz^3+2xy^3z^2-3yz^3$ și $P_0(1,1,1)$ avem (cf. calculelor precedente):

$$H(x,y,z)=\begin{pmatrix} 2yz^3 & 2xz^3+6y^2z^2 & 6xyz^2+4y^3z \\ 2xz^3+6y^2z^2 & 12xy & 3x^2z^2+12xy^2z-9z^2 \\ 6xyz^2+4y^3z & 3x^2z^2+12xy^2z-9z^2 & 6x^2yz+4xy^3-18yz \end{pmatrix} \Rightarrow H(P_0)\equiv H(1,1,1)=\begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 8 & 12 & 6 \\ 10 & 6 & -8 \end{pmatrix}$$

Def 3: Numim diferențiala de ordinul II atașată funcției $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\in C^2(D)$, expresia

$$(13.4)\quad d^2f(x_1,x_2,\dots,x_n)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}dx_idx_j=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}dx_1dx_n$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}dx_2dx_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n}dx_2dx_n$$
$$- - - - - - - - - -$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_1}dx_ndx_1+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n\partial x_2}dx_ndx_2+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2$$

Aplicând crit. lui Schwarz (totdeauna valabil în exemplele voastre) obținem forma diferențialei de ord. II care apare în aplicațiile practice:

$$(13.4')\quad d^2f(X)=\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2+\dots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}dx_n^2}_{\text{„n" termeni pătratici}}+\underbrace{2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_1dx_2+\dots+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}dx_1dx_n+\dots+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_{n-1}\partial x_n}dx_{n-1}dx_n}_{\text{„}\frac{n^2-n}{2}\text{" termeni micști (dreptunghiulari) (egali doi câte doi)}}$$

Calculând $d^2f(X)$ într-un punct oarecare $X_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in D\subset\mathbb{R}^n$, obținem forma diferențialei de ord. II într-un punct fiind:

$$(13.5)\quad d^2f(X_0)\overset{def}{=}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(X_0)}_{\overset{not}{\underset{(13.5)}{=}}a_{ij}\,(=a_{ji})}dx_idx_j\equiv\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}dx_idx_j$$

sau:

$$(13.5')\quad d^2f(X_0)=a_{11}dx_1^2+a_{22}dx_2^2+\dots+a_{nn}dx_n^2+2a_{12}dx_1dx_2+\dots+2a_{1n}dx_1dx_n+\dots+2a_{n-1,n}dx_{n-1}dx_n$$

$\downarrow$

este o formă pătratică în diferențialele argumentelor (necunoscutelor) funcției

Obs (!!!) Din (13.3*) și (13.4) $\Rightarrow$ matricea asociată acestei forme pătratice este: $A\equiv H(X_0)$ tocmai hessiana calculată în pct. X_0

Cazuri particulare:

a) $n=1$: $f=f(x)$; $X=x_0$.

$$(*)\begin{cases} d^2f(x) \overset{def}{=} f''(x)\,dx^2 \\ d^2f(x_0) = \underbrace{f''(x_0)}_{\overset{not}{=}a}dx^2 = a\,dx^2 \end{cases}$$

Ex: $f(x)=x^2e^x$; $x_0=1$ $\Rightarrow \begin{cases} f'(x) = (x^2+2x)e^x \\ f''(x) = (x^2+4x+2)e^x \end{cases}$

$$(*)\begin{cases} d^2f(x) = (x^2+4x+2)e^x\,dx^2 \\ d^2f(1) = \underbrace{7e}_{=a}\,dx^2 \end{cases}$$

se ridică la puterea a II^a prin "derivare"

b) $n=2$: $f=f(x,y)$; $X_0=(x_0,y_0)$

$$(**)\begin{cases} d^2f(x,y) \overset{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy \quad \left[\overset{(!!)}{=} \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)}_{\overset{def}{=} df(x,y)}{}^{(2)}\right] \\ d^2f(x_0,y_0) = a_{11}dx^2 + a_{22}dy^2 + 2a_{12}dx\,dy \end{cases}$$

Ex: $f(x,y) = 3x^2y - 6xy^3 + 3x - 2y + 1$; $P_0(1,1)$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6y \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -36xy \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 6x - 18y^2 \end{cases}$

$$(**)\begin{cases} d^2f(x,y) = 6y\,dx^2 - 36xy\,dy^2 + 2(6x-18y^2)dx\,dy \\ d^2f(1,1) = \underbrace{6}_{=a_{11}}dx^2 \underbrace{-36}_{=a_{22}}dy^2 \underbrace{-24}_{=2a_{12}}dx\,dy \end{cases}$$
$\rightarrow$ formă pătratică (definită pe $\mathbb{R}^2$) cu necunoscutele: dx, dy

Obs $H(P_0) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = A$ $\rightarrow$ matricea asociată formei pătratice: $d^2f(X_0)$

c) $n=3$: $f=f(x,y,z)$; $X_0=(x_0,y_0,z_0)$

$$(***)\begin{cases} d^2f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx\,dy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dx\,dz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dy\,dz \quad \left[= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz\right)}_{\overset{def}{=} df(x,y,z)}{}^{(2)}\right] \\ d^2f(X_0) = a_{11}dx^2 + a_{22}dy^2 + a_{33}dz^2 + 2a_{12}dx\,dy + 2a_{13}dx\,dz + 2a_{23}dy\,dz \end{cases}$$

Ex: $f(x,y,z) = x^2yz^3 + 2xy^3z^2 - 3yz^3$; $P_0(1,1,1)$

$$(***)\begin{cases} d^2f(x,y,z) \overset{\text{vezi}}{\underset{pg.3}{=}} 2yz^3dx^2 + 12xyz^2dy^2 + (6x^2yz + 4xy^3 - 18yz)dy^2 + 2(2xz^3 + 6y^2z^2)dx\,dy + \\ \quad + 2(6xyz^2 + 4y^3z)dx\,dz + 2(3x^2z^2 + 12xy^2z - 9z^2)dy\,dz \\ d^2f(1,1,1) = \underbrace{2}_{a_{11}}dx^2 + \underbrace{12}_{a_{22}}dy^2 \underbrace{-8}_{a_{33}}dz^2 \underbrace{+16}_{2a_{12}}dx\,dy \underbrace{+20}_{2a_{13}}dx\,dz \underbrace{+12}_{2a_{23}}dy\,dz \end{cases}$$
$\Rightarrow H(P_0) = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 10 \\ 8 & 12 & 6 \\ 10 & 6 & -8 \end{pmatrix} = A$

formă pătratică (definită pe $\mathbb{R}^3$) cu necunoscutele: dx, dy, dz

IV. 4.1) Forme pătratice

Def 1: Numim formă pătratică (definită pe $\mathbb{R}^n$), funcția (aplicația) definită astfel:

$$(11.6)\ \begin{cases} f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f(x_1,x_2,\dots,x_n) \overset{def}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \quad a.\hat{\imath}: (*)\ a_{ij}=a_{ji}\ ;\ (\forall)\ i,j=\overline{1,n} \end{cases}$$

(proprietatea de simetrie a coeficienților)

Obs:

a) relația (11.6) scrisă explicit (pe larg) arată astfel:

$$(11.6')\ f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \underline{a_{11}x_1^2} + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n +$$
$$a_{21}x_2x_1 + \underline{a_{22}x_2^2} + \dots + a_{2n}x_2x_n +$$
$$- - - - - - - - - - - - - -$$
$$a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + \underline{a_{nn}x_n^2}$$

b) conform condițiilor de simetrie $(*)$ $a_{ij}=a_{ji}$ avem egalitățile: $a_{ij}x_ix_j = a_{ji}x_jx_i$; $(\forall)\ i,j=\overline{1,n}$

deci putem rescrie expresia formei pătratice „f" astfel:

$$(11.6'')\ f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \underbrace{a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\dots+a_{nn}x_n^2}_{\text{„n" termeni pătratici}} + \underbrace{2a_{12}x_1x_2+\dots+2a_{1n}x_1x_n+\dots+2a_{ij}x_ix_j+\dots+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n}_{\text{„}\frac{n^2-n}{2}\text{ termeni dreptunghiulari (micști)"}}$$

aceasta fiind forma întâlnită în aplicațiile practice (!!!)

c) coeficienții formei pătratice $a_{ij}\in\mathbb{R}$, formează o matrice numită matricea asociată formei pătratice și anume:

$$(11.7)\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n^S(\mathbb{R})$$

și care verifică datorită condițiilor de simetrie $(*)$ relația:

$(**)$ $A = A^T$ (A este o matrice simetrică)

d) o formă pătratică „f" are „n^2" termeni
- „$a_{ii}x_i^2$" → „n" termeni pătratici ($i=\overline{1,n}$)
- „$a_{ij}x_ix_j$" → „n^2-n" termeni dreptunghiulari ($i,j=\overline{1,n}$; $i\neq j$) egali 2 câte 2.

e) $(\forall)$ f - formă pătratică avem: $f(0,0,\dots,0)=0 \iff f(0_n)=0$

f) vom nota: $f(X) \equiv f(x_1,x_2,\dots,x_n)$; $(\forall)\ X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

Def 2: Spunem că forma pătratică „f" este:

a) pozitiv definită $\iff f(X) > 0$; $(\forall) X \in \mathbb{R}^n_* = \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$;

b) semipozitiv definită $\iff f(X) \geq 0$; $(\forall) X \in \mathbb{R}^n_*$; $\{(\exists) X_0 \in \mathbb{R}^n_*$ a.î. $f(X_0) = 0\}$

c) negativ definită $\iff f(X) < 0$; $(\forall) X \in \mathbb{R}^n_*$;

d) seminegativ definită $\iff f(X) \leq 0$; $(\forall) X \in \mathbb{R}^n_*$; $\{(\exists) X_0 \in \mathbb{R}^n_*$ a.î. $f(X_0) = 0\}$

e) nedefinită ca semn $\iff (\exists) X_0, Y_0 \in \mathbb{R}^n_*$ a.î.: $f(X_0) > 0$ și $f(Y_0) < 0$;
(nu păstrează semn constant)

Def 3 Numim forma canonică asociată unei forme pătratice {definită cu (11.6) sau (11.6') sau (11.6'')} expresia:

(11.8) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2$; $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$ → coeficienții formei ~~pătratice~~ canonice

unde:

(11.9) $$\left.\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \\ \text{— — — — — — — — —} \\ y_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n \end{cases}\right\} \text{forme liniare}$$; $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,j = \overline{1,n}$ (Obs: în general $b_{ij} \neq b_{ji}$)

Stabilirea tipului (semnului) unei forme pătratice nu se poate face pe forma generală (11.6''); dacă însă se cunoaște forma canonică asociată, acest lucru este extrem de simplu de stabilit conform teoremei următoare:

Teorema 1 (de caracterizare a tipului/semnului unei forme pătratice)

Fie o formă pătratică definită de relația (11.6'') a cărei formă canonică asociată este dată de relația (11.8). Atunci forma pătratică „f" este:

a) pozitiv definită $\iff (\forall) \alpha_i > 0$, $i = \overline{1,n}$;

b) semipozitiv definită $\iff (\forall) \alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$; $\{(\exists)$ și $\alpha_i = 0\}$

c) negativ definită $\iff (\forall) \alpha_i < 0$, $i = \overline{1,n}$;

d) seminegativ definită $\iff (\forall) \alpha_i \leq 0$, $i = \overline{1,n}$; $\{(\exists)$ și $\alpha_i = 0\}$

e) nedefinită ca semn $\iff (\exists) \alpha_i > 0$ și $(\exists) \alpha_j < 0$ cu $i,j \in \{1,2,\dots,n\}$;

Vom prezenta în continuare două metode de determinare a formei canonice asociate unei forme pătratice și anume:

$\begin{cases} \text{a) metoda lui Iacobi;} \\ \text{b) metoda lui Gauss;} \end{cases}$