Curs 10 IV.2 Funcţii de n-variabile. Limite şi continuitate

Extrem de multe dintre funcţiile (matematice) care apar în descrierea fenomenelor economice depind nu o singură variabilă ci de 2, 3, ..., n variabile (economice). De exemplu:

a) funcţia care descrie PIB-ul (produsul intern brut) al unei ţări depinde de extrem de multe variabile (volumul investiţiilor noi, inflaţia, cursul valutar, productivitatea muncii, gradul de tehnologizare, consumul intern, exportul, etc.)

$$P = P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \text{ – funcţia P.I.B}$$

b) $F(x,y) = A x^a y^b$ (cu $a, b, A \in \mathbb{R}$ constante) – funcţia (de producţie) Cobb-Douglas (pentru două variabile) descrie/modelează procesul de producţie/fabricaţie al anumitor procese economice (x, y sunt cantităţile de materiale folosite în procesul de fabricaţie iar $F(x,y)$ reprezintă nr. de unităţi produse) (propusă în anul 1927)

$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$ (cu $A, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \to$ constante) – funcţia Cobb-Douglas pt. „n" variabile

c) $z(p,i,t) = 108{,}83 - 6{,}0294\,p + 0{,}164\,i - 0{,}4217\,t$ (c. $f(x,y,z) = a - bx + cy - dz$) $\to$ este funcţia lui T.W. Schultz care estimează cererea de zahăr în S.U.A. pentru perioada 1929–1935, unde

- p = preţul zahărului
- i = indicele (mediu) al producţiei
- t = timpul (în anul 1929 $\to t = 0$)

d) $G(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1{,}058\, x_1^{0,136} \cdot x_2^{-0,727} \cdot x_3^{0,914} \cdot x_4^{0,816}$ $\to$ funcţia lui R. Stone care descrie cererea de bere în U.K. (Marea Britanie) unde

- x_1 = venitul mediu al populaţiei
- x_2 = preţul berii
- x_3 = indicele mediu al preţurilor (altele decât berea)
- x_4 = gradul de alcool (tăria) berii

e) toate funcţiile de tip costuri/profit care apar în problemele de programare liniară.

IV.2.1) Limite pentru funcții de „n" variabile (definite pe $\mathbb{R}^n$)

a) $\mathbb{R}^n \overset{n=1}{=} \mathbb{R}$ (liniar)

Fie $\begin{cases} f: D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f = f(x) \end{cases}$ (D = domeniul de definiție al funcției)

și $x_0 \in D$ un punct de acumulare $\{ \Leftrightarrow (\exists)(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ a.î. $x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x_0 \}$

Obs: dacă x_0 nu este pct. de acumulare $\Rightarrow x_0$ este punct izolat $\{$ex: $D = [-3, 2) \cup \{5\}$ $\}$ (pct. de acum.; pct. izolat)

Def: Spunem că funcția $f(x)$ are limită finită ($\overset{not}{=} \ell$) în pct. x_0, dacă:

$\begin{cases} \text{a) } (\forall)(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D \text{ a.î. } x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\mathbb{R}} \ell \in \mathbb{R} \text{ - definiția cu șiruri} \\ \text{b) } (\forall)\varepsilon > 0, (\exists)\delta_\varepsilon > 0 \text{ a.î. } |f(x) - \ell| < \varepsilon \text{ pentru } (\forall) x \in D \text{ care verifică } |x - x_0| < \delta_\varepsilon \to \text{definiția cu } \varepsilon \text{ și } \delta_\varepsilon \text{ (cu vecinătăți)} \end{cases}$

not: $\ell = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

b) $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$

Fie $\begin{cases} f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) (\equiv f(X)) \end{cases}$ (D = domeniul n-dimensional al funcției)

și $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$ un punct de acumulare $\{ \Leftrightarrow (\exists)(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D$ a.î. $X_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} X_0 \}$

Def 1: Spunem că funcția $f(X)$ are limită globală finită ($\overset{not}{=} \ell_g = L$) în pct. $X_0 \in D$, dacă:

$\begin{cases} \text{a) } (\forall)(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset D \text{ cu } X_k \xrightarrow{\mathbb{R}^n} X_0 \Rightarrow f(X_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} L = \ell_g \to \text{definiția } \text{cu șiruri} \\ \text{b) (D.1) } (\forall)\varepsilon > 0, (\exists)\delta_\varepsilon > 0 \text{ a.î. } |f(X) - L| < \varepsilon, (\forall) X \in D \text{ care verifică: } \|X - X_0\| < \delta_\varepsilon \end{cases}$

definiția limitei cu vecinătăți (ε și δ_ε)

Not:

$\begin{cases} \text{i) } L = \lim\limits_{X \to X_0} f(X) \\ \text{ii) } L = \lim\limits_{(x_1,\dots,x_n) \to (x_1^0,\dots,x_n^0)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \text{iii) } L = \lim\limits_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ \vdots \\ x_n \to x_n^0}} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$

Def 2: Spunem că funcția $f(X) \equiv f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ are limită parțială finită în raport cu variabila x_i ($\overset{not}{=} \ell_p^i$) în punctul $X_0 = (x_1^0, \dots, x_i^0, \dots, x_n^0)$ dacă:

(D.2) $(\exists) \ell_p^i \in \mathbb{R}$ a.î.: $\lim\limits_{x_i \to x_i^0} f(x_1^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0) = \ell_p^i$

Obs: Unei funcții cu „n" variabile i se pot asocia într-un punct „n" limite parțiale: $\ell_p^1, \ell_p^2, \dots, \ell_p^n$

Def 3: Numim limită iterată (not l_{it}) a funcției $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ în punctul $(x_1^0, x_2^0, \dots x_n^0)$ o limită de tipul:

(3) $l_{it} \overset{def}{=} \lim\limits_{x_{i_1} \to x_{i_1}^0} \left(\lim\limits_{x_{i_2} \to x_{i_2}^0} \left(\dots \left(\lim\limits_{x_{i_n} \to x_{i_n}^0} f(x_1, x_2, \dots, x_n) \right) \dots \right) \right)$ unde indicii $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ reprezintă o permutare a indicilor $(1, 2, \dots, n)$

Obs: unei funcții cu „n" variabile i se pot asocia $n!$ limite iterate: $l_{it}^1, l_{it}^2, \dots, l_{it}^{n!}$

Cazuri particulare:

a) $n=2$ $\begin{cases} f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f = f(x,y) \end{cases}$ și $x_0 = (x_0, y_0) \in D$

i) $l_g \equiv L = \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y) \equiv \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ → limită globală

ii) $\begin{cases} l_p^1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x, y_0) \\ l_p^2 = \lim\limits_{y \to y_0} f(x_0, y) \end{cases}$ limite parțiale

iii) $\begin{cases} l_{it}^1 = \lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x,y) \right) \\ l_{it}^2 = \lim\limits_{y \to y_0} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x,y) \right) \end{cases}$ limite iterate

Exemplu:

① $\begin{cases} f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f(x,y) = \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x+y} \end{cases}$ cu $X_0 \equiv O(0,0)$

i) $l_g(0,0) = \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x+y} \overset{0}{\underset{0}{=}} ?$

ii) $l_p^1(0)$: $\lim\limits_{x \to 0} f(x,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cancel{x}(1+x)}{\cancel{x}} = \lim\limits_{x \to 0}(1+x) = 1$

$l_p^2(0)$: $\lim\limits_{y \to 0} f(0,y) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-y + y^2}{y} = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\cancel{y}(-1+y)}{\cancel{y}} = \lim\limits_{y \to 0}(-1+y) = -1$

$\Rightarrow l_p^1(0) \neq l_p^2(0) \Rightarrow \cancel{\exists}\, l_g(0)$

iii) $l_{it}^1(0) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to 0} f(x,y) \right) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x+y} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x + x^2}{x} = 1$

$l_{it}^2(0) = \lim\limits_{y \to 0} \left(\lim\limits_{x \to 0} f(x,y) \right) = \lim\limits_{y \to 0} \left(\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - y + x^2 + y^2}{x+y} \right) = \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{-y + y^2}{y} = -1$

$\Rightarrow l_{it}^1(0) \neq l_{it}^2(0)$ $\Downarrow$ $(\cancel{\exists})\, l_g(0)$

Obs: (!!)

$l_g(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y) \overset{y = mx}{\underset{m \in \mathbb{R}^*}{=}} \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - mx + x^2 + m^2x^2}{x + mx} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(1 - m + x + m^2 x)}{x(1+m)} = \dfrac{1-m}{1+m} (!)$ → depinde de „m" !!

(3) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{*}\to\mathbb{R} \\ f(x,y)=x\sin\frac{1}{y} \end{cases}$ cu $X_0 \equiv O(0,0)$

i) $l_g(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\sin\frac{1}{y}=\underbrace{\left(\lim\limits_{x\to 0} x\right)}_{=0}\cdot\underbrace{\lim\limits_{y\to 0}\left(\sin\frac{1}{y}\right)}_{(\nexists),\ \text{dar } |\sin\frac{1}{y}|\le 1\ (\text{mărginită})}=0$

ii) $\begin{cases} l_p^1(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x,0)=\ ?\ (\text{nu este definită}) \\ l_p^2(0)=\lim\limits_{y\to 0} f(0,y)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} l_{it}^1(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\underbrace{\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}}_{\text{nu există}}\right)=\ ?\ (\text{nu există limita}) \\ l_{it}^2(0)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\right)=\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{y}\right)=\lim\limits_{y\to 0} 0=0 \end{cases}$

Legătura dintre limita globală, limitele parțiale și cele iterate

1) a) Dacă $(\exists)\ l_g$ și dacă $(\exists)\ l_p^i$ cu $i\in\{1,\dots,n\}$ $\Rightarrow$ $l_g=l_p^1=l_p^2=\dots=l_p^n$

b) Dacă $(\exists)\ l_p^i, l_p^j$ cu $l_p^i\neq l_p^j$ $\Rightarrow$ $(\nexists)\ l_g$

c) Se poate întâmpla ca să $(\exists)\ l_p^1=l_p^2=\dots=l_p^n$ dar să $(\nexists)\ l_g$

2) Analog pentru limitele iterate și cea globală:

a) dacă $(\exists)\ l_g$ și $(\exists)\ l_{it}^1, l_{it}^2,\dots,l_{it}^{n!}$ $\Rightarrow$ $l_g=l_{it}^1=l_{it}^2=\dots=l_{it}^{n!}$

b) dacă $(\exists)\ l_{it}^i, l_{it}^j$ cu $l_{it}^i\neq l_{it}^j$ $\Rightarrow$ $(\nexists)\ l_g$

c) se poate ca să existe toate limitele iterate și să fie egale, dar limita globală să nu existe

IV.2.2) Continuitatea funcțiilor de n-variabile

Def 4: Fie $\begin{cases} f:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \\ f=f(x_1,x_2,\dots,x_n)\equiv f(X) \end{cases}$ și $X_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\in D$ - punct de acumulare.

Spunem că:

a) funcția „f" este continuă parțial în punctul X_0 în raport cu variabila „x_i", cu $i\in\{1,2,\dots,n\}$ dacă:

$$(10.4)\quad (\exists)\ l_p^i(X_0)\overset{def}{=}\lim_{x_i\to x_i^0} f(x_1^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0)=f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_{i-1}^0,x_i^0,x_{i+1}^0,\dots,x_n^0)\equiv f(X_0)$$

$$\{\, l_p^i(X_0)=f(X_0) \,\}$$

b) funcția „f" este continuă global în punctul X_0 dacă:

$$(10.5)\quad (\exists)\ l_g(X_0)\overset{def}{=}\lim_{\substack{x_1\to x_1^0\\ x_2\to x_2^0\\ \vdots\\ x_n\to x_n^0}} f(x_1,x_2,\dots,x_n)=f(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\quad \Big(\Leftrightarrow \underbrace{\lim_{X\to X_0} f(X)}_{=l_g(X_0)}=f(X_0)\Big)$$

III.3) Derivabilitate şi diferenţiabilitate pentru funcţii de „n" variabile

"Memories" from high school (cazul funcţiilor $f = f(x)$)

Fie $\begin{cases} f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f = f(x) \end{cases}$ şi $x_0 \in D$ pct. de acumulare. Pp. că „f" este continuă în „x_0" ($(\exists) \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$)

Atunci, dacă există limita:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{not}{=}} f'(x_0) \to \text{derivata funcţiei } f(x) \text{ în } x_0$$

Obs: (i) dacă $f'(x_0) \neq \pm\infty$ (finită) $\Rightarrow$ $f(x)$ este derivabilă în x_0

(ii) $f(x)$ este derivabilă pe D $\Leftrightarrow$ $f(x)$ este derivabilă în $(\forall)\, x \in D$

(iii) $\underline{not}$ $f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$ (notaţia lui Leibniz)

$df(x_0) \overset{def}{=} f'(x_0)dx$ → diferenţiala de ordinul I a funcţiei $f(x)$ în punctul „x_0";

$df(x) \overset{def}{=} f'(x)dx$ → diferenţiala de ordinul I a funcţiei $f(x)$;

Obs: i) dacă f este derivabilă în x_0, atunci avem egalitatea

$$(*)\quad \underbrace{f(x)-f(x_0)}_{\overset{not}{=}\,\Delta f(x) \text{ (variaţia funcţiei „f" în jurul lui } x_0)} = f'(x_0)\underbrace{(x-x_0)}_{\overset{not}{=}\,\Delta x \text{ (variaţia lui } x \text{ în jurul lui } x_0)} + \underbrace{\varepsilon(x;x_0)}_{\to 0 \text{ dacă } x\to x_0}$$

ii) trecând la limită ($x \to x_0$) în (*), avem:

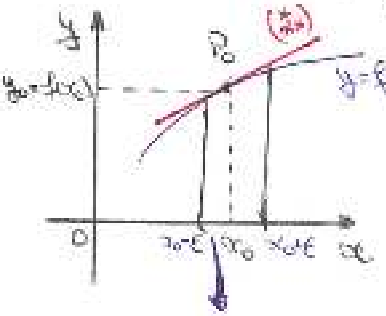
$$(**)\quad \underbrace{\lim_{x\to x_0} \Delta f(x)}_{\overset{not}{=}\, df(x_0)} = f'(x_0) \underbrace{\lim_{x\to x_0} \Delta x}_{\overset{not}{=}\, dx} \Leftrightarrow \underline{df(x_0) = f'(x_0)\,dx}$$

iii) tangenta la G_f în punctul $P(x_0, f(x_0))$ este dreapta de ecuaţie:

$$y - \underbrace{f(x_0)}_{=y_0} = f'(x_0)(x-x_0) \Leftrightarrow (**)\ y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$

$$\Downarrow x \simeq x_0$$

$$(**)\quad f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \to \text{aproximaţia liniară a lui } f(x) \text{ în "jurul" lui } x_0.$$



pe intervale "mici" în jurul lui „x_0" tangenta în x_0 la G_f aproximează "bine" valorile lui $f(x)$

Ex: $\begin{cases} f:\mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \\ f(x)=\sqrt[3]{x} \end{cases}$; $x_0=1 \Rightarrow f(1)=\sqrt[3]{1}=1$

$f'(x)=(x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(1)=\frac{1}{3}$

$\overset{(**)}{\Longrightarrow} \sqrt[3]{x} \cong f(1)+f'(1)(x-1) = 1+\frac{1}{3}(x-1)$, pt $x\cong 1$

$\overset{x=1{,}03}{\Longrightarrow} \sqrt[3]{1{,}03} \cong 1+\frac{1}{3}(1{,}03-1)=1{,}01$ (valoare aproximativă)

$\sqrt[3]{1{,}03} = 1{,}0099\ldots$ (valoare exactă)

III 3.1) Derivate parțiale de ord I. Diferențiala de ord. I

Def 1: Fie $\begin{cases} f: D\subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\equiv f(X) \end{cases}$ și $X_0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)\in D$. Dacă $f(X)$ este continuă global în X_0, numim derivata parțială de ordinul I a funcției $f(x)$ în punctul X_0 în raport cu variabila „x_i", limita:

$$(10.6)\quad \lim_{x_i\to x_i^0} \frac{f(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0)-f(x_1^0,\ldots,x_{i-1}^0,x_i^0,x_{i+1}^0,\ldots,x_n^0)}{x_i-x_i^0} \overset{not}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) \left(\overset{(not)}{\equiv} f'_{x_i}(X_0)\right)$$

Obs: funcția $f(x_1,\ldots,x_n)$ admite „n" derivate parțiale de ord. I (în raport cu fiecare necunoscută): $\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0), \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, $i=\overline{1,n}$

Cazuri particulare:

a) $\begin{cases} f: D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ f=f(x,y) \end{cases}$; $X_0=(x_0,y_0)\in D$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0} \overset{not}{\equiv} f'_x(x_0,y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim\limits_{y\to y_0}\frac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0} \overset{not}{\equiv} f'_y(x_0,y_0) \end{cases}$$

Ex: $\begin{cases} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ f(x,y)=3x^2y-6xy^3+3x-2y+1 \end{cases}$; $P_0(1,1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=6xy-6y^3+3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3x^2-18xy^2-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\equiv\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)=3 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\equiv\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)=-17 \end{cases}$$

Obs i) din (10.6) se observă că derivata: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ se obține derivând funcția „f" în raport cu variabila „x_i" ca și cum celelalte necunoscute ar fi constante (!!!)

ii) derivatele parțiale de ord I sunt funcții la rândul lor care depind de variabilele: $x_1,x_2,\ldots,x_n$; calculate într-un punct devin evident niște constante.

b) $\begin{cases} f: D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ f(x,y,z) \end{cases}$; $X_0 = (x_0, y_0, z_0) \in D$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{x - x_0} \overset{not}{=} f'_x(X_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{y - y_0} \overset{not}{=} f'_y(X_0) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(X_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(x_0, y_0, z) - f(x_0, y_0, z_0)}{z - z_0} \overset{not}{=} f'_z(X_0) \end{cases}$$

Ex: $\begin{cases} f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ f(x,y,z) = x^2 y z^3 + 2xy^3 z^2 - 3yz^3 \end{cases}$; $P_0(1,1,1)$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2xyz^3 + 2y^3 z^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x^2 z^3 + 6xy^2 z^2 - 3z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 3x^2 y z^2 + 4xy^3 z - 9yz^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 4 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 4 \\ \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) = -2 \end{cases}$$

Def 2. Fie $\begin{cases} f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$ și $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \in D$. Numim diferențiala de ord. I atașată funcției „f" expresia:

(12.7) $$df(x_1, x_2, \dots, x_n) \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Obs: Dacă not: (*) $a_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)$, $i = \overline{1,n}$, obținem expresia diferențialei de ord. I calculată în punctul X_0 de forma:

(12.7') $$df(X_0) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0)}_{\overset{not.}{=} a_i} dx_i = a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \dots + a_n dx_n$$ - formă liniară în diferențialele necunoscutelor

Cazuri particulare:

a) $n = 1$: $df(x) = f'(x)\,dx$

b) $n = 2$: $df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$

c) $n = 3$: $df(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

Exemple:

a) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x) = x^2 e^x \end{cases}$; $x_0 = 1$

$$\begin{cases} \underline{df(x)} \overset{def}{=} f'(x)\,dx = (2xe^x + x^2e^x)\,dx = \underline{x(2+x)e^x\,dx} \\ \underline{df(1)} \overset{def}{=} f'(1)\,dx = \underline{3e\,dx} \end{cases}$$

b) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ f(x,y) = 3x^2y - 6xy^3 + 3x - 2y + 1 \end{cases}$; $P_0(1,1)$ → vezi exemplul anterior

$$\begin{cases} \underline{df(x,y)} \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \underline{(6xy - 6y^3 + 3)\,dx + (3x^2 - 18xy^2 - 2)\,dy} \\ \underline{df(P_0)} \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,dy = \underline{3\,dx - 17\,dy} \end{cases}$$

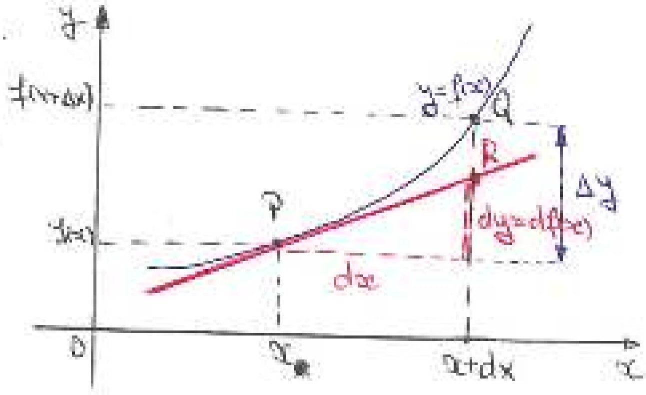
→ formă liniară în variabilele dx și dy

c) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \\ f(x,y,z) = x^2yz^3 + 2xy^3z^2 - 3yz^3 \end{cases}$; $P_0(1,1,1)$ → vezi exemplul anterior

$$\begin{cases} \underline{df(x,y,z)} \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \underline{(2xyz^3 + 2y^3z^2)\,dx + (x^2z^3 + 6xy^2z^2 - 3z^3)\,dy + (3x^2yz^2 + 4xy^3z - 9yz^2)\,dz} \\ \underline{df(P_0)} \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(P_0)\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0)\,dy + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0)\,dz = \underline{4\,dx + 4\,dy - 2\,dz} \end{cases}$$

→ formă liniară cu 3 variabile: dx, dy și dz.

Interpretare geometrică a diferențialei



$$\begin{cases} x \to x + dx \\ f(x) \to f(x+dx) \simeq f(x) + f'(x)\,dx \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{f(x+dx) - f(x)}_{\Delta f(x) \overset{not}{=} \Delta y} \simeq f'(x)\,dx$$

$$\Delta f(x) \overset{not}{=} \Delta y \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} df(x)$$

Deci $df(x)$ este o aproximare (liniară) a variației (creșterii/descreșterii) funcției $f(x)$ atunci când variabila „x" suferă o variație (f. mică) „dx".