11. Fie sistemul de ecuaţii liniare: (*) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + 3x_5 = -6 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}$. Aplicând metoda lui Gauss, determinaţi **forma explicită** şi **soluţia de bază** corespunzătoare acesteia, considerând variabile principale pe x_3 si x_4. Stabiliţi tipul soluţiei de bază găsite (şi explicaţi/justificati de ce este de acest tip).

Dem:

$$(*) \to \bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & \boxed{-2} & 3 & -6 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right) \end{array} \Big| \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \Big| \cdot \tfrac{3}{2} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 1 & -3/2 & 3 \\ 1 & -1/2 & 1 & 0 & 9/2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \equiv A_{G-J} \xrightarrow[x_3=\gamma]{x_1=\alpha,\ x_2=\beta}$$

v. princ. v.sec.

$\Rightarrow X_E = \left(\alpha, \beta, -\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{9}{2}\gamma, 3 + \alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{2}\gamma, \gamma\right)^T \in \mathbb{R}^5 \to$ forma explicită coresp. v.p. x_3, x_4

$\Downarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$\bar{X} = (0,0,0,3,0)^T \in \mathbb{R}^5 \to$ soluţia de bază corespunzătoare $<$ admisibilă (toate componentele sunt ≥ 0); degenerată (var. princ. $x_3 = 0$)

q.e.d.

Obs: aveaţi de făcut o singură coloană a matricei unitate (I_2)!!! În 4-5 minute obţineaţi minim nota 4 (patru) la subiectul scris $\{(10+1+1):3 = 12:3 = 4\}$

12. Fie mulţimea de vectori $B = \{x_1, x_2, x_3\} \subset R^3$ de forma: $\begin{cases} x_1 = (-2,2,-1)^T \\ x_2 = (0,-1,1)^T \\ x_3 = (-1,1,0)^T \end{cases}$. Se cere:

a) arătaţi că $B \leq R^3$ (B este bază în R^3);

b) dacă $y = (3,0,-2)^T$ determinaţi numai cu **lema substituţei** coordonatele acestuia în baza B: $y_B = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$;

c) dacă $z_B = [2,1,-2]$ determinaţi coordonatele acestuia în baza canonică din R^3: $z_{B_C} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$.

Dem:

a) $B \leq \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) card } B = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \text{ (A)} \\ \text{(ii) } B - \text{L.i} \Leftrightarrow r_A = 3 = \text{nr. vect., unde} \end{cases}$

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \boxed{1} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Big|\cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv A_{G-J} \Rightarrow$$

$\Rightarrow r_A = 3 \Leftrightarrow B - \text{L.i} \Leftrightarrow B \leq \mathbb{R}^3$.

b)

B	y	x_1	x_2	x_3
e_1	3	-2	0	-1
e_2	0	2	-1	1
e_3	-2	-1	$\boxed{1}$	0
e_1	3	-2	0	-1
e_2	-2	1	0	$\boxed{1}$
x_2	-2	-1	1	0
e_1	1	$\boxed{-1}$	0	0
x_3	-2	1	0	1
x_2	-2	-1	1	0
x_1	-1	1	0	0
x_3	-1	0	0	1
x_2	-3	0	1	0

$\Downarrow$

$y = -x_1 - 3x_2 - x_3 \Leftrightarrow y_B = [-1, -3, -1]$

Verificare calcule:

$y = -x_1 - 3x_2 - x_3 = -(-2,2,-1)^T - 3(0,-1,1)^T - (-1,1,0)^T = (3,0,-2)^T$ (adev.)

c) $z_B = [2,1,-2] \Leftrightarrow z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2(-2,2,-1)^T + (0,-1,1)^T - 2(-1,1,0)^T = (-2,1,-1)^T \Leftrightarrow z_{B_c} = [-2,1,-1]$

$\Downarrow$

$z = -2e_1 + e_2 - e_3$

q.e.d.

13. Fie bazele din $\mathbb{R}^2$: $(B)\begin{cases} u_1 = (5,-3)^T \\ u_2 = (-2,1)^T \end{cases}$ şi $(B')\begin{cases} v_1 = (-3,-1)^T \\ v_2 = (7,2)^T \end{cases}$. Se cere:

a) dacă $w = (-1,3)^T$ aflaţi <u>cu ajutorul lemei substituţiei</u> coordonatele $w_B = [\alpha_1, \alpha_2]$ şi $w_{B'} = [\beta_1, \beta_2]$;

b) dacă $x_B = [-1,-2]$ determinaţi vectorul $x = (a_1, a_2)^T$;

c) dacă $y_B = [2,4]$ determinaţi, <u>cu ajutorul lemei substituţiei</u>, coordonatele $y_{B'} = [\gamma_1, \gamma_2]$;

d) determinaţi, <u>cu lema substituţiei</u>, matricea schimbării de bază: $S_{B'|B}$;

e) rezolvaţi punctul c) folosind <u>formulele de schimbare a coordonatelor unui vector la schimbarea bazei</u> (prin intermediul matricii schimbării de bază).

Dem.:

a) a₁) $w = (-1,3)^T \overset{?}{\Longrightarrow} w_B \overset{not}{=} [\alpha_1, \alpha_2]$

B	w	u_1	u_2	
e_1	-1	5	-2	
e_2	3	-3	$\boxed{1}$	/·2
e_1	5	$\boxed{-1}$	0	/(-1)/(-3)
u_2	3	-3	1	
u_1	-5	1	0	
u_2	-12	0	1	

$w = -5u_1 - 12u_2 \Leftrightarrow w_B = [-5,-12]$

V: $w = -5(5,-3)^T - 12(-2,1)^T = (-1,3)^T$ (adev.)

a₂) $w = (-1,3)^T \overset{?}{\Longrightarrow} w_{B'} \overset{not}{=} [\beta_1, \beta_2]$

B	w	v_1	v_2	
e_1	-1	-3	7	
e_2	3	$\boxed{-1}$	2	/·(-1)/·(-3)
e_1	-10	0	$\boxed{1}$	/·2
v_1	-3	1	-2	
v_2	-10	0	1	
v_1	-23	1	0	

$w = -23v_1 - 10v_2 \Leftrightarrow w_B = [-23,-10]$

V: $w = -23(-3,-1)^T - 10(7,2)^T = (-1,3)^T$ (A)

b) $x_B = [-1,-2] \Leftrightarrow x = -u_1 - 2u_2 = -(5,-3)^T - 2(-2,1)^T = (-1,1)^T$

c) $y_B = [2,4] \overset{?}{\Longrightarrow} y_{B'} = [\gamma_1, \gamma_2]$

$y_B = [2,4] \Leftrightarrow y = 2u_1 + 4u_2 = 2(5,-3)^T + 4(-2,1)^T = (2,-2)^T \Rightarrow$

B	y	v_1	v_2	
e_1	2	-3	7	
e_2	-2	$\boxed{-1}$	2	/(-1)/·(-3)
e_1	8	0	$\boxed{1}$	/·2
v_1	2	1	-2	
v_2	8	0	1	
v_1	18	1	0	

$y = 18v_1 + 8v_2 \Leftrightarrow y_{B'} = [18,8]$

V: $y = 18(-3,-1)^T + 8(7,2)^T = (2,-2)^T$ (A)

d) $S_{B'|B} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$ a.î. (*) $\begin{cases} v_1 = s_{11}u_1 + s_{12}u_2 \\ v_2 = s_{21}u_1 + s_{22}u_2 \end{cases}$

B	v_1	v_2	u_1	u_2	
e_1	-3	7	5	-2	
e_2	-1	2	-3	$\boxed{1}$	/·2
e_1	-5	11	$\boxed{-1}$	0	/(-1)/·(-3)
u_2	-1	2	-3	1	
u_1	5	-11	1	0	
u_2	14	-31	0	1	

(**) $\begin{cases} v_1 = 5u_1 + 14u_2 \\ v_2 = -11u_1 - 31u_2 \end{cases}$

Din (*)+(**) $\Rightarrow S_{B'|B} = \begin{pmatrix} 5 & 14 \\ -11 & -31 \end{pmatrix}$

q.e.d

e) $y_B = [2,4] \overset{?}{\Longrightarrow} y_{B'} = (S^T)^{-1} y_B = \underbrace{(S^{-1})^T}_{=S'_{B'B'}} y_B$ (*)

$$S \to \tilde{S} = \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{5} & 14 & 1 & 0 \\ -11 & -31 & 0 & 1 \end{array}\right) \Big/ \cdot\frac{1}{5} \Big/ \cdot\frac{11}{5} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 14/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & \boxed{-1/5} & 11/5 & 1 \end{array}\right) \Big/ \cdot(-5) \Big/ \cdot 14 \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 31 & 14 \\ 0 & 1 & -11 & -5 \end{array}\right) \Rightarrow S^{-1}_{B'B} = \begin{pmatrix} 31 & 14 \\ -11 & -5 \end{pmatrix} \equiv S'_{B'B'} \text{ (**)}$$

$$\underbrace{}_{=S} \quad \underbrace{}_{=I_2} \qquad\qquad \underbrace{}_{=I_2} \quad \underbrace{}_{=S^{-1}}$$

Din (*) + (**) $\Rightarrow y_{B'} = \begin{pmatrix} 31 & -11 \\ 14 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow y_{B'} = [18, 8]$ q.e.d

Obs: am fi putut obține matricea $S' = S^{-1}$ cu lema substituției, unde:

$S'_{B'B'} = \begin{pmatrix} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{22} & s'_{22} \end{pmatrix}$ a.î.: (*) $\begin{cases} u_1 = s'_{11} v_1 + s'_{12} v_2 \\ u_2 = s'_{21} v_1 + s'_{22} v_2 \end{cases}$

B	u_1	u_2	v_1	v_2	
e_1	5	-2	-3	7	
e_2	-3	1	$\boxed{-1}$	2	/(-1)/·(-3)
e_1	14	-5	0	$\boxed{1}$	/·2
v_1	3	-1	1	-2	
v_2	14	-5	0	1	
v_1	31	-11	1	0	

(**) $\begin{cases} u_1 = 31 v_1 + 14 v_2 \\ u_2 = -11 v_1 - 5 v_2 \end{cases}$

Din (*)+(**) $\Rightarrow S'_{B'B'} = \begin{pmatrix} 31 & 14 \\ -11 & -5 \end{pmatrix} \equiv S^{-1}_{B'B}$

q.e.d