Curs 4 (1)

I.5) Forme liniare

Def. Fie $(V,+,\cdot)$ un spațiu liniar oarecare și corpul comutativ al nr. reale $(\mathbb{R},+,\cdot)$. Numim formă liniară pe V aplicația: $\begin{cases} f: V \to \mathbb{R} \\ f(u) = a \in \mathbb{R} \end{cases}$ care satisface proprietățile:

$$(4.1)\begin{cases} (i)\ f(u+v) = f(u)+f(v) \\ (ii)\ f(\alpha u) = \alpha\cdot f(u) \end{cases};\ (\forall)\, u,v\in V,\ (\forall)\,\alpha\in\mathbb{R} \iff (4.1')\ f(\alpha u+\beta v) = \alpha f(u)+\beta f(v);\ (\forall)\, u,v\in V;\ (\forall)\,\alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Obs:

i) proprietatea de liniaritate (4.1') se poate generaliza pentru cazul a „n" vectori, adică:

$$(4.1'')\ f(\alpha_1 u_1+\alpha_2 u_2+\dots+\alpha_n u_n) = \alpha_1 f(u_1)+\alpha_2 f(u_2)+\dots+\alpha_n f(u_n);\ (\forall)\, u_1,u_2,\dots,u_n\in V;\ (\forall)\,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$$

ii) în cazul particular $V\equiv\mathbb{R}^n$ (singurul care ne interesează), avem următoarea teoremă de caracterizare a formelor liniare:

Teoremă (de caract. a formelor liniare def. pe $\mathbb{R}^n$)

O aplicație $\begin{cases} f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \\ f(u) = a\in\mathbb{R}\end{cases}$ este formă liniară $\iff$ (4.2) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \\ f(X)\equiv f(x_1,x_2,\dots,x_n) \overset{def}{=} c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n \end{cases}$

cu $c_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}$ și $(\forall)\, X=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$

Obs: i) nr. reale $c_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n}$ → coeficienții formei liniare „f"

ii) $(\forall)\, f$ – formă lin. pe $\mathbb{R}^n$, avem: $f(0_n)\equiv f(0,0,\dots,0)=0$

iii) dacă notăm: $C=(c_1\ c_2\ \dots\ c_n)\in\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\equiv(x_1,x_2,\dots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$ $\overset{(4.2)}{\Longrightarrow}$ (4.2') $f(X)=C\cdot X$ → scrierea sub formă matricială a unei forme liniare.

Ex:

1) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R} \\ f(x_1,x_2)=2x_1-3x_2\end{cases}$; $\begin{cases} C=(2\ \ {-3}) \to \text{matricea coeficienților formei liniare} \\ X=(x_1,x_2)^T=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\end{cases}$

$$f(X)=C\cdot X=(2\ \ {-3})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=2x_1-3x_2$$

2) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \\ f(x_1,x_2,x_3)=3x_1+2x_2-4x_3\end{cases}$; $\begin{cases} C=(3\ \ 2\ \ {-4}) \\ X=(x_1,x_2,x_3)\end{cases}$ $\Rightarrow f(X)=C\cdot X=(3\ \ 2\ \ {-4})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=3x_1+2x_2-4x_3$

3) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R} \\ f(x)=2x_1+3x_2x_3-4\end{cases}$ → nu este formă liniară (!!) {avem produsul „$3x_2x_3$"}

4) Analog, nu sunt forme liniare, următoarele aplicații (funcții)

$$\begin{cases} i)\ f_1:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R};\ f_1(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2-x_1x_3+4 \\ ii)\ f_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R};\ f_2(x_1,x_2)=4x_1+x_2-1 \\ iii)\ f_3:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R};\ f_3(x_1,x_2,x_3)=x_1+\sqrt{x_2}+4x_3\end{cases}$$

II: Elemente de programare liniară

- algoritmul Simplex
- metoda celor două faze
- probleme de transport

II.1 Noțiuni introductive. Modele economice generale.

Se numește problemă de programare matematică (P.P.M) o problemă de forma:

$$\begin{cases} (1_M)\ (\min/\max)\ f = f(x_1, x_2, \dots, x_k) \\ (2_M) \begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_k) \lesseqgtr b_1 \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_k) \lesseqgtr b_2 \\ - - - - - - - - \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_k) \lesseqgtr b_m \end{cases} \\ (3_M)\ x_j \in \mathbb{R},\ j = \overline{1,k} \end{cases}$$

→ funcția obiectiv (este o funcție oarecare)

↦ restricții impuse necunoscutelor (variabilelor) sub formă de inecuații/ecuații (funcțiile $g_1, g_2, \dots, g_m$ sunt funcții oarecare)

A rezolva (P.P.M) înseamnă a afla toate soluțiile sistemului de restricții (2_M) (acesta admite în general o infinitate de soluții) și apoi să o determinăm (dintre acestea) pe aceea (acelea pot fi mai multe) care face ca funcția obiectiv din (1_M) să ia valoarea minimă/maximă. O astfel de soluție se numește soluție optimă a (P.P.M)

Dacă într-o (P.P.M) atât funcția obiectiv „f" cât și funcțiile „$g_1, g_2, \dots, g_m$" care definesc restricțiile (2_M) sunt forme liniare, obținem cazul particular (dar extrem de important și foarte des întâlnit în aplicațiile economice) al problemelor de programare liniară (PPL) având forma următoare:

$$\begin{cases} (1_L)\ (\min/\max)\ f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k \\ (2_L) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \lesseqgtr b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \lesseqgtr b_2 \\ - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \lesseqgtr b_m \end{cases} \\ (3_L)\ x_1, x_2, \dots, x_k \geq 0 \end{cases}$$

→ funcția obiectiv (funcție cost/profit)

↦ restricții economice

→ condiții de nenegativitate

Obs:

Funcțiile „$g_1, g_2, \dots, g_m$" care definesc restricțiile din sistemul (2_M) au în acest caz, următoarele expresii:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \\ - - - - - - - - - - - - \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_k) = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \end{cases}$$

→ forme liniare (cf (4.2))

În continuare vom prezenta câteva fenomene (probleme) economice generale al căror model matematic este (P.P.L)

1) Problema planificării producției (folosirea optimă/eficientă a resurselor limitate)

"O companie / firmă dispune de resursele limitate (materii prime, forță de muncă, bani, etc.):
$R_1, R_2, \dots, R_m$ $\{R_i, i=\overline{1,m}\}$ în cantitățile: $b_1, b_2, \dots, b_m$ $\{b_i, i=\overline{1,m}\}$
și dorește să fabrice (obțină) produsele (obiecte, mașini, servicii, etc.):
$P_1, P_2, \dots, P_k$ $\{P_j, j=\overline{1,k}\}$ în cantitățile: $x_1, x_2, \dots, x_k$ $\{x_j, j=\overline{1,k}\}$ necunoscute inițial
știind că:

a) consumul unitar din resursa „R_i" pentru a se fabrica un produs „P_j" este cantitatea „a_{ij}", $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,k}$

b) profitul (net/brut) unitar ~~pentru~~ din vânzarea unui produs „P_j" este „c_j", $j=\overline{1,k}$

să se determine un plan de producție optim (cât să se fabrice din fiecare produs a.î. profitul total realizat să fie maxim și să se încadreze în cantitățile limitate de resurse avute la dispoziție)

Modelul matematic al acestei probleme economice este o (P.P.L) de forma:

$$
\begin{cases}
(1)\ (\max)\, f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k & \rightarrow \text{valoarea profitului (funcția profit)} \\
(2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \le b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \le b_m \end{cases} \quad (4.1) & \rightarrow \text{restricții economice (nu pot folosi mai mult dintr-o resursă decât am la dispoziție)} \\
(3)\ x_j \ge 0,\ j=\overline{1,k} & \rightarrow \text{cantitățile care urmează a fi produse nu pot lua valori negative.}
\end{cases}
$$

Exemple

i) vezi primul exemplu (cu gențile de laptop) din cursul introductiv (cursul 00)

ii) U.E. a lansat o competiție privind finanțarea proiectelor de cercetare privind energia alternativă (la combustibilii fosili) cu un buget total de un miliard de Euro. Comisia de evaluare a reținut din cele peste 200 de proiecte depuse doar 6 pentru a le finanța. Fiecare din cele 6 proiecte a fost evaluat și punctat în raport cu criteriul: „beneficiul (profitul) net obținut pentru fiecare Euro investit" reprezentând beneficiul (profitul) potențial pentru o perioadă de 10 ani de aplicare a proiectului. În tabelul de mai jos se găsesc proiectele, sumele maxime solicitate de autori și beneficiul net estimat de comisie:

Nr.	Tipul proiectului	Beneficiul net per 1 Euro investit	Suma maximă solicitată
1.	Energie solară (I)	4,4 E	220 milioane Euro
2.	Energie solară (II)	3,8 E	180 mil. E
3.	Combustibili sintetici	4,1 E	250 mil. E
4.	Bio-combustibili	3,5 E	150 mil. E
5.	Energie nucleară	5,1 E	400 mil. E
6.	Energie geo-termală	3,2 E	120 mil. E
		Total finanțat	= 1.320.000.000 Euro

Președintele Comisiei Europene a solicitat ca proiectul din domeniul militar să primească cel puțin 60% din suma maximă solicitată, motivând cu importanța strategică a acestuia la nivelul U.E. Datorită lobby-ului intens făcut de O.N.G-urile pe domeniul ecologic, li s-a promis acestora alocarea a minimul 250 milioane Euro pentru finanțarea proiectelor "verzi" adică a celor două proiecte de energie solară și cel privind energia geotermală. Să se determine planul optim de alocare a banilor (câți bani să primească fiecare proiect a.î. beneficiul potențial obținut prin aplicarea lor să fie maxim)

Modelul matematic

not: x_j ; $j=\overline{1,6}$ - sumele (în milioane de Euro) care urmează a fi alocate proiectului P_j

(1) $(\max) f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6) = 4{,}4x_1 + 3{,}8x_2 + 4{,}1x_3 + 3{,}5x_4 + 5{,}1x_5 + 3{,}2x_6$ (profitul total în milioane Euro)

(2)
$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 \le 1.000$ (suma totală alocată celor 6 proiecte nu poate depăși 1 miliard Euro)

$$\left.\begin{array}{l} x_1 \le 220 \\ x_2 \le 180 \\ x_3 \le 250 \\ x_4 \le 150 \\ x_5 \le 400 \\ x_6 \le 120 \end{array}\right] \to$$ sumele alocate celor 6 proiecte nu pot depăși valoarea maximă solicitată prin proiect

$x_5 \ge 240$ (suma alocată proiectului nuclear să fie minim 60% · 400 mil. E = 240 mil. Euro)

$x_1+x_2+x_6 \ge 250$ (totalul sumelor alocate proiectelor "verzi" să fie minim 250 mil. Euro)

(3) $x_j \ge 0$, $j=\overline{1,6}$ (sumele alocate nu pot avea valori negative)

2) Problema dietei

"În urma unui studiu biologic efectuat asupra animalelor de la o fermă s-a stabilit că rația zilnică de hrană a acestora trebuie să conțină elementele nutritive:

$N_1, N_2, \dots, N_m$ $\{N_i, i=\overline{1,m}\}$ în cantitățile minime $b_1, b_2, \dots, b_m$ $\{b_i, i=\overline{1,m}\}$

Ferma dispune de furajele:

$F_1, F_2, \dots, F_k$ $\{F_j, j=\overline{1,k}\}$

care (în urma analizelor de laborator efectuate) conțin pe unitatea de furaj F_j, $j=\overline{1,k}$ cantitatea a_{ij} din elementul nutritiv N_i, $i=\overline{1,m}$. Știind că prețul unitar al furajului F_j este c_j, $j=\overline{1,k}$ să se determine rația optimă zilnică a animalelor (adică să se determine componența și cantitatea necesară din fiecare furaj astfel încât aceasta să conțină <u>toate</u> elementele nutritive indicate în <u>măcar</u> cantitățile minime indicate și care să coste cât mai puțin)

not: $x_1, x_2, \dots, x_k$ → cantitatea de furaj de tipul $F_1, F_2, \dots, F_k$ care urmează a fi folosită în rația zilnică

Modelul matematic este o (P.P.L) de forma:

$$\begin{cases} (1)\ (\min) f(x_1, x_2, \dots, x_k) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k \\ (2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \geq b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \geq b_m \end{cases} \quad (4.2) \\ (3)\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,k} \end{cases}$$

(1) → costul total al rației zilnice (funcția cost)

(2) (4.2) → cantitățile de substanțe nutritive din rația zilnică (din mixul de furaje folosit) ~~să conțină~~ fie minim cantitățile indicate prin stadiul biologic.

(3) → cantitățile de furaje folosite la rație nu pot lua valori negative

Obs:

i) problemele sub formă generală (4.1) și (4.2) se numesc forme canonice a unei (P.P.L); astfel probl. de
$\begin{cases} (\max) \text{ are toate restricțiile din (2) de forma } „\leq" \\ (\min) \text{ are toate restricțiile din (2) de forma } „\geq" \end{cases}$

ii) problemele reale economice nu au modelul matematic asociat lor sub formă canonică decât foarte rar (sau deloc). De obicei sistemul de restricții economice (2) are și inecuații de tip „≤" și „≥" dar și ecuații (deci cu semnul „=").

iii) în problema dietei nu este specificată cantitatea de furaj F_j, $j=\overline{1,k}$ disponibilă, este ca și cum ferma ar dispune de cantități nelimitate. Dacă notăm cu: $f_1, f_2, \dots, f_k$ cantitățile (limitate) de furaj $F_1, F_2, \dots, F_k$ pe care le are ferma la dispoziție, atunci la sistemul (2) mai trebuie adăugate și inecuațiile:

$$(2')\begin{cases} x_1 \leq f_1 \\ x_2 \leq f_2 \\ \dots \\ x_k \leq f_k \end{cases}$$

numărul restricțiilor crescând de la „m" la „m+k" !!!

3) Probleme de transport (P.T)

Acest tip de probleme este o clasă particulară de (P.P.L) și ~~care~~ vor fi prezentate la finalul acestui capitol pe larg. Modul lor de rezolvare este similar cu cel al (P.P.L) generale, dar nu identic. Diferența majoră dintre cele două clase de probleme este nr. mult mai mare de ecuații și/sau inecuații precum și de necunoscute care apar în (P.T).

II.2 Diverse forme (de scriere) a unei (P.P.L)

A) Forma generală a unei P.P.L

A₁) Forma generală scrisă explicit (sau forma generală a unei PPL scrisă sub formă explicită)

$$(PPL_g^e)\begin{cases}(1_g)\ (\min/\max)\ f(x_1,x_2,\dots,x_k)=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_kx_k\\ (2_g)\ \begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1k}x_k \lesseqgtr b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2k}x_k \lesseqgtr b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mk}x_k \lesseqgtr b_m\end{cases}\\ (3_g)\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,k}\end{cases}$$

Obs:

i) este forma uzuală a modelului unei (P.P.L) economice; se poate cere sau valoarea minimă sau cea maximă a funcției obiectiv, iar restricțiile pot avea semnele „≤", „≥" sau „=";

A₂) Forma generală scrisă matricial

$$(PPL_g^m)\begin{cases}(1_g)\ (\min/\max)\ f(X)=CX\\ (2_g)\ A\cdot X \lesseqgtr B\\ (3_g)\ X\geq 0\end{cases}$$

Am folosit următoarele notații matriciale: $A\equiv(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,m}}}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk}\end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}$; $C=(c_1\,c_2\,\dots\,c_k)$; $X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_k\end{pmatrix}$

A₃) Forma generală scrisă vectorial

$$(PPL_g^v)\begin{cases}(1_g)\ (\min/\max)\ f(x_1,x_2,\dots,x_k)=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_kx_k\\ (2_g)\ x_1P_1+x_2P_2+\dots+x_kP_k \lesseqgtr P_0\\ (3_g)\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,k}\end{cases}$$

unde am notat cu $P_1,P_2,\dots,P_k$ vectorii coloană ai matricei A, adică: $\overline{A}=\begin{array}{c}\begin{matrix}P_1 & P_2 & \dots & P_k & P_0\end{matrix}\\ \left(\begin{array}{cccc|c}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & b_2\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & b_m\end{array}\right)\end{array}$
iar cu P_0 coloana termenilor liberi din sistem.

$P_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}\equiv(a_{11},a_{21},\dots,a_{m1})^T\in\mathbb{R}^m$; $P_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{pmatrix}\equiv(a_{12},a_{22},\dots,a_{m2})^T\in\mathbb{R}^m$; ......; $P_0=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{pmatrix}=(b_1,b_2,\dots,b_m)^T\in\mathbb{R}^m$

Obs: i) Scrierea sub formă matriceală sau vectorială ne ajută doar în definirea unor concepte și în demonstrarea teoremelor care fundamentează algoritmul de rezolvare al (P.P.L)
ii) întotdeauna modelul matematic al unei probleme economice reale/concrete este scris/obținut sub formă explicită.

B) Forma standard a unei P.P.L.

B_1) Forma standard scrisă explicit (!!!)

Obs: orice inecuație (restricție economică) din sistemul liniar în forma generală (2_g), poate fi transformată într-o ecuație adunând/scăzând o nouă variabilă (necunoscută), numită variabilă de compensare (sau "écart" (fr.) sau "slack variable" (engl.)), adică:

a) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k \leq b_i \xrightarrow{+x_i^c} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k + x_i^c = b_i$

b) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k \geq b_i \xrightarrow{-x_i^c} a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k - x_i^c = b_i$

($x_i^c \to$ variabile de compensare)

Ex: $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4 \xrightarrow{+x_4^c} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4^c = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \geq 8 \xrightarrow{-x_5^c} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5^c = 8 \end{cases}$

(x_4^c și x_5^c sunt variabile de compensare)

Obs:

i) putem nota noile variabile de compensare introduse oricum dorim: x_i^c, y_i, $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots$ (în forma gen. PPL are ca variab. inițiale $x_1, \dots, x_k$)

ii) În continuare, în modelele generale (+ def, teoreme) vom utiliza notația pentru noile variabile de compensare: $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, \underbrace{x_{k+p}}_{\stackrel{not}{=} n}$, ceea ce înseamnă că (PPL) inițiale, în format generală are „k" variabile inițiale $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ și noi am mai introdus un nr. de „$p \leq m$" variabile de compensare ($x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ unde am notat $n = k+p$)

iii) $(\forall)(PPL)_g$ în forma generală ($(2_g) \to$ sistem care are m inecuații) poate fi adusă la forma standard $(PPL)_s$: $(1_s)-(3_s)$ (sistemul (2_s) devine sistem de ecuații) prin adăugarea de variabile de compensare, adică $(PPL)_s$ are forma:

$$(PPL)_s \begin{cases} (1_s)\ (\min/\max)\ f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k + \underbrace{0}_{\stackrel{not}{=} c_{k+1}} \cdot x_{k+1} + \dots + \underbrace{0}_{\stackrel{not}{=} c_n} \cdot x_n \\ (2_s) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k \pm x_{k+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k \pm x_{k+2} = b_2 \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k \pm \underbrace{x_{k+p}}_{\stackrel{not}{=} n} = b_m \end{cases} \\ (3_s)\ x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

$(2_s) \mapsto$ sistemul de restricții în formă standard (2_s)

$\downarrow$

forma standard explicită a unei (PPL)

Obs:

i) se observă din sistemul de ec. (2_s) că (PPL) în forma standard are $n=k+p$ necunoscute și anume

$$\begin{cases} -\ „k" \text{ necunoscute inițiale (cele din forma generală): } x_1, x_2, \dots, x_k \\ \text{și} \\ -\ „p" \text{ necunoscute de compensare (adăugate pentru a transforma toate inecuațiile din sist. } (2_g) \text{ în ecuații în sist. } (2_s)\text{: } x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{\underset{= n}{k+p}} = x_n \end{cases}$$

ii) dacă în sistemul (inițial) de restricții sub forma generală avem:

a) toate cele „m" restricții sub formă de inecuație, va trebui să adunăm/scădem în fiecare inecuație o variabilă de compensare (deci $p=m$) deci în sistemul sub formă standard (2_s) vom avea în total $n=k+m$ variabile;

b) dacă din cele „m" restricții din sist. (2_g) doar $p<m$ sunt inecuații (restul părților „m" fiind ecuații) atunci sist. standard (2_s) va avea: $n=k+p$ variabile;

c) dacă toate cele „m" restricții din sist. (2_g) sunt ecuații, atunci el este deja în formă standard deci nu trebuie să mai adăugăm noi variabile de compensare ($p=0$ și $k=n$)

Ex:

a) $$(2_g)\begin{cases} x_1+x_2+2x_3 \le 6 \\ 3x_1-x_2+x_3 \ge 8 \end{cases} \longrightarrow (2_s)\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+x_4^c = 6 \\ 3x_1-x_2+x_3-x_5^c = 8 \end{cases}$$

Aici $\begin{cases} k=3 \text{ (nr. de necun. inițiale)} \\ p=2\ (=m) \to \text{nr. de var. de compensare} \\ n=k+p=5 \to \text{nr. total de variabile} \end{cases}$

b) $$(2_g)\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3 \ge 4 \\ x_1+x_2+x_3 = 3 \\ x_1-x_2+2x_3 \le 6 \end{cases} \longrightarrow (2_s)\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_3-x_4^c = 4 \\ x_1+x_2+x_3 = 3 \\ x_1-x_2+2x_3+x_5^c = 6 \end{cases}$$

iii) expresia funcției obiectiv rămâne aceeași și în forma standard (ca și în forma generală inițială) deoarece coeficienții din funcție corespunzători variabilelor de compensare nou introduse sunt toți egali cu 0: $c_{k+1}=c_{k+2}=\dots=c_n=0$, adică:

$$\underline{f(x_1,x_2,\dots,x_k,x_{k+1},x_{k+2},\dots,x_n)} \overset{def}{=} c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_kx_k+\overset{\overset{def}{=}0}{c_{k+1}}x_{k+1}+\overset{\overset{def}{=}0}{c_{k+2}}x_{k+2}+\dots+\overset{\overset{def}{=}0}{c_n}x_n$$

$$= \underbrace{c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_kx_k}_{=f(x_1,\dots,x_k)} + \underbrace{0\cdot x_{k+1}+0\cdot x_{k+2}+\dots+0\cdot x_n}_{=0}$$

$$= \underline{f(x_1,x_2,\dots,x_k)}$$

Ex Să presupunem că funcțiile obiectiv pentru sistemele a) și b) din ex. precedent sunt:

a) $(1_g)\ f(x_1,x_2,x_3)=4x_1+3x_2-x_3 \longrightarrow (1_s)\ f(x_1,x_2,x_3,x_4^c,x_5^c)=\overset{=c_1}{4}x_1\overset{=c_2}{+3}x_2\overset{=c_3}{-}x_3\overset{=c_4}{+0}\cdot x_4^c\overset{=c_5}{+0}x_5^c$

b) $(1_g)\ f(x_1,x_2,x_3)=7x_1-6x_2-4x_3 \longrightarrow (1_s)\ f(x_1,x_2,x_3,x_4^c,x_5^c)=\underbrace{7}_{=c_1}x_1\underbrace{-6}_{=c_2}x_2\underbrace{-4}_{=c_3}x_3+\underbrace{0}_{=c_4}x_4^c+\underbrace{0}_{=c_5}x_5^c$

(iv) Sunt două cazuri pentru o (P.P.L) $\begin{cases}\text{se cere valoarea optimă minimă}\\ \text{se cere valoarea optimă maximă}\end{cases}$. Metoda de rezolvare (algoritmul Simplex) este similară dar nu identică ptr. cele două tipuri de probleme. Pentru a nu învăța 2 algoritmi diferiți (cu pericolul de a face confuzie la fiecare etapă de rezolvare) vom studia doar (P.P.L) de minim. Acest lucru este posibil, deoarece orice problemă de maxim se poate reduce la o problemă de minim conform relației:

$$(6.1)\ (\max) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -(\min) - f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad ; (\forall) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

(formă liniară)

Datorită relației (6.1) $(\max) f = -\min(-f)$ vom considera întotdeauna (P.P.L) sub formă standard de forma:

$$(PPL_s)\begin{cases}(1_s)\ (\min) f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k + \overset{=0}{c_{k+1}}x_{k+1} + \dots + \overset{=0}{c_n}x_n \\ (2_s)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + a_{2,k+1}x_{k+1} + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{-----------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mk}x_k + a_{m,k+1}x_{k+1} + \dots a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad ; a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}; (\forall) i = \overline{k+1, n} \\ \qquad\qquad (\forall) j = \overline{1, m} \\ (3_s)\ x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

Ex: Să se aducă la forma standard, următoarea $(P.P.L)_g$ scrisă explicit sub formă generală:

$$(PPL)_g\begin{cases}(1_g)\ (\max) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 \\ (2g)\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 6 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 \geq 2 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 \geq 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 \leq 3 \end{cases} \\ (3g)\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

Pentru a aduce $(PPL)_g$ la forma standard $(PPL)_s$, trebuie să transf. problema de maxim într-una de minim, iar sist. de restricții (2g) să-l aducem la forma standard (2s), adică:

$$(PPL)_s\begin{cases}(1s)\ (\min) - f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5^c, x_6^c, x_7^c, x_8^c) = 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 0\cdot x_5^c + 0\cdot x_6^c + 0\cdot x_7^c + 0\cdot x_8^c \\ (2s)\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5^c = 6 \\ 3x_1 - x_3 + 2x_4 - x_6^c = 2 \\ 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_7^c = 5 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_8^c = 3 \end{cases} \\ (3s)\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5^c, x_6^c, x_7^c, x_8^c \geq 0 \end{cases}$$

B_2) Forma standard scrisă sub formă matricială

$$\begin{cases} (1_s)\ (\min)\ f(X) = C\cdot X \\ (2_s)\ A\cdot X = B \\ (3_s)\ X \geq 0 \end{cases}$$

cu notațiile:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} P_1 & P_2 & \dots & P_k & P_{k+1} & \dots & P_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & a_{2,k+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & a_{m,k+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}; \quad B = \begin{array}{c} P_0 \\ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \end{array}$$

$$C = (c_1, c_2, \dots, c_k, \underbrace{c_{k+1}}_{=0}, \dots, \underbrace{c_n}_{=0}); \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n)^T$$

$\underline{\underline{\text{Ex}}}$ pentru exemplul anterior în forma matricială de mai sus, apar matricele:

$$A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5^c & x_6^c & x_7^c & x_8^c & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5^c & P_6^c & P_7^c & P_8^c & P_0 \end{matrix} \end{array}$$

B_3) Forma standard scrisă vectorial

$$(PPL_s)\begin{cases} (1_s)\ (\min)\ f(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_kx_k + c_{k+1}x_{k+1} + \dots + c_nx_n \\ (2_s)\ x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_nP_n = P_0 \\ (3_s)\ x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n \geq 0 \end{cases}$$

cu:

$$P_1 = \begin{array}{c} x_1 \\ \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \end{array} = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})^T \in \mathbb{R}^m$$

$$P_2 = \begin{array}{c} x_2 \\ \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} \end{array} = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})^T \in \mathbb{R}^m$$

$$P_n = \begin{array}{c} x_n \\ \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})^T \in \mathbb{R}^m$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$$

Obs: Necesitatea introducerii formei standard pentru o PPL rezidă din:

(a) imposibilitatea rezolvării $(PPL)_g$ în forma generală (inițială);

(b) teorema de mai jos

Teoremă: Soluția optimă a unei $(PPL)_g$ sub formă generală (inițială) se obține din soluția optimă a $(P.P.L)_s$ sub formă standard din care se elimină variabilele de compensare introduse.

Mai jos este prezentată „schema de rezolvare" a unei $(PPL)_g$:

$$(PPL)_g \xrightarrow{\pm x_i^c} (PPL)_s \xrightarrow[\text{(rezolvare }(PPL_s))]{\text{Alg. SIMPLEX}} X^{\text{standard}}_{\text{optimă}} \xrightarrow[\text{variabilele } x_i^c \text{ introduse}]{\text{eliminăm}} X^{\text{generală}}_{\text{optimă}}.$$