Seminar 1+2 Rezolvarea probl. de transport echilibrate (PTE)

Să se determine soluția(-ile) optimă(-e) a următoarelor P.T.E.

I)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	2	3	1	15
D_2	1	4	2	15
D_3	3	1	2	15
	10	15	20	

Obs: deoarece avem:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{3} a_i = 15+15+15 = 45}_{\text{oferta}} = \underbrace{\sum_{j=1}^{3} b_j = 10+15+20}_{\text{cererea}}$$

avem o P.T.E

I.1) cu metoda diagonalei

① Determinarea $\overline{X}_0$ - S.B.A.I cu metoda diagonalei (a colțului de N-V)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	10 [2]	5 [3]	* [1]	~~15~~, ~~5~~, 0
D_2	* [1]	10 [4]	5 [2]	~~15~~, ~~5~~, 0
D_3	* [3]	* [1]	15 [2]	~~15~~, 0
	~~10~~, 0	~~15~~, ~~10~~, 0	~~20~~, ~~15~~, 0	

Obs: ordinea determinării valorilor x_{ij} este: $\overline{x}_{11}, \overline{x}_{12}, \overline{x}_{22}, \overline{x}_{23}, \overline{x}_{33}$

$\mapsto \overline{X}_0 \begin{cases} \overline{x}_{11}=10, \overline{x}_{12}=5, \overline{x}_{22}=10, \overline{x}_{23}=5, \overline{x}_{33}=15 & \to \text{variabile bazice (principale) în nr. de } m+n-1 = 3+3-1=5, \text{ toate } \neq 0. \\ \overline{x}_{13}=\overline{x}_{21}=\overline{x}_{31}=\overline{x}_{32}=0 \ (\text{"*"}) & \to \text{var. secundare} \end{cases}$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \overline{X}_0 = (10,5,0,0,10,5,0,0,15)^T \in \mathbb{R}^9 \to \text{SBAI } \underline{\text{nedegenerată}} \\ f(\overline{X}_0) = 2\cdot 10 + 3\cdot 5 + 4\cdot 10 + 2\cdot 5 + 2\cdot 15 = \underline{115 \text{ (u.m)}} \end{cases}$$

② Aplicăm criteriul de optim (verificăm dacă soluția găsită $\overline{X}_0$ este optimă sau nu)

Determinăm ciclurile celulelor nebazice (secundare, libere) (i,j) și calculăm cantitățile δ_{ij} corespunzătoare acestora:

$$\begin{cases} \delta_{13} = -1+2-4+3 = 0 \\ \delta_{21} = -1+2-3+4 = \underline{2>0} \\ \delta_{31} = -3+2-3+4-2+2 = 0 \\ \delta_{32} = -1+4-2+2 = \underline{3>0} \end{cases} \quad \Bigg| \xRightarrow{(\exists)\,\delta_{ij}>0} \ \overline{X}_0 \text{ - } \underline{\text{nu este}} \text{ soluția optimă a P.T.E.}$$

③ Aplicăm criteriul de intrare în bază (determinăm variabila nebazică $x_{kl} = x = 0$ (↓))

Calculăm:

$$\delta_{kl} \stackrel{def}{=} \max\{\delta_{ij}>0\} = \max\{\underbrace{\delta_{21}}_{=2}, \underbrace{\delta_{32}}_{=3}\} = \delta_{32} \Rightarrow \text{variabila } \overset{\text{secundară/nebazică}}{\text{"}x_{32}\text{"}} (\downarrow) \text{ intră în bază (devine variabilă bazică/principală)}$$

④ Aplicăm criteriul de ieșire din bază (determinăm variabila bazică/principală $x_{ps}>0$ care iese din bază (devine nebazică/secundară)) (⟶)

④.1) Desenăm ciclul celulei "x_{32} ↓"

$$\begin{array}{ccc} 10-\theta & & 5+\theta \\ ②\ (2,2) & \longrightarrow & (2,3)\ ③ \\ \uparrow & & \downarrow \\ ①\ \underline{(3,2)} & \longleftarrow & (3,3)\ ④ \\ \theta = 10 & & 15-\theta \end{array}$$

Obs: ciclul celulei (3,2)↓ este format din 4 celule, numerotate astfel: ①(3,2) ⟶ ②(2,2) ⟶ ③(2,3) ⟶ ④(3,3)

celule cu nr. impar

celule cu nr. par

4.2) Determinăm variabila „$x_{ij} \rightarrow$" care iese din bază

Determinăm: $\theta \stackrel{def}{=} \min\{x_{ij} \geq 0 \,/\, x_{ij}$ aflată în celula (i,j) cu nr. par$\}$

$\equiv \min\{\underbrace{x_{22}}_{=10}, \underbrace{x_{33}}_{=15}\} = 10 \Rightarrow$ variabila bazică/principală „$x_{22}=10$" devine variabilă nebazică/secundară ($x_{22}=0=*$)

5) Determinăm noua soluție $\overline{X}_1$ - SBA, făcând schimbarea de bază:

Desenăm un nou tabel al PTE care va conține valorile x_{ij} ale noii soluții (obținute cf. rel. (2.8) din curs) care se obțin astfel:
- valorile x_{ij} din ciclul celulei „x_{32}" se modifică ca în 4.1
- restul valorilor x_{ij} din tabel se copie din vechiul tabel

	C_1	C_2	C_3	
D_1	10 [2]	5 [3]	* [1]	15
D_2	* [1]	* [4]	15 [2]	15
D_3	* [3]	10 [1]	5 [2]	15
	10	15	20	

$\longmapsto \begin{cases} \overline{X}_1 = (10,5,0,0,0,15,0,10,5)^T \in \mathbb{R}^9 \text{ - S.B.A. nedegenerată} \\ f(\overline{X}_1) = 2\cdot 10 + 3\cdot 5 + 2\cdot 15 + 1\cdot 10 + 2\cdot 5 = 85\,(u.m.) < f(\overline{X}_0) = 115\,(u.m.) \end{cases}$

costul total de transport este mai mic (=85) în noua soluție $\overline{X}_1$ decât pt. vechea soluție $\overline{X}_0$

Se reiau etapele 2)-5) până la obținerea soluției optime X_{optim}.

2) $\begin{cases} \delta_{13} = -1+2-1+3 = 3 > 0 \\ \delta_{21} = -1+2-3+1-2+2 = -1 \\ \delta_{22} = -4+2-2+1 = -3 \\ \delta_{31} = -3+2-3+1 = -3 \end{cases}$ $\Big| \xRightarrow{(\exists)\delta_{ij}>0}$ $\overline{X}_1$ - nu este S.O. pt. PTE (putem transporta cu mai puțini bani decât 85 u.m.)

3) $\delta_{ke} \stackrel{def}{=} \max\{\delta_{ij} > 0\} \equiv \max\{\underbrace{\delta_{13}}_{=3}\} = \delta_{13} \Rightarrow x_{13} = * = 0\,(+)$ - intră în bază

4)
$$\begin{array}{ccc} 5-\theta & & \theta=5 \\ (4)\ (1,2) & \longrightarrow & (1,3)\ (1) \\ \uparrow & & \downarrow \\ (3)\ (3,2) & \longleftarrow & (3,3)\ (2) \\ 10+\theta & & 5-\theta \end{array}$$

$\theta \stackrel{def}{=} \min\{x_{ij} \geq 0 \,/$ din celulele cu nr. par$\} \equiv \min\{\underbrace{x_{33}}_{=5}, \underbrace{x_{12}}_{=5}\} = 5 \Rightarrow$ „$x_{12} \rightarrow$" părăsește baza (1) aleg eu!

5)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	10 [2]	* [3]	5 [1]	15
D_2	* [1]	* [4]	15 [2]	15
D_3	* [3]	15 [1]	0 [2]	15
	10	15	20	

$\longmapsto \begin{cases} \overline{X}_2 = (10,0,5,0,0,15,0,15,0)^T \in \mathbb{R}^9 \text{ - SBA degenerată} \\ f(\overline{X}_2) = 70\,(u.m.) < f(\overline{X}_1) = 85\,(u.m.) \end{cases}$

Se reiau etapele 2-5:

2) $\begin{cases} \delta_{12} = -3+1-2+1 = -3 \\ \delta_{21} = -1+2-1+2 = 2 > 0 \\ \delta_{22} = -4+2-2+1 = -3 \\ \delta_{31} = -3+2-1+2 = 0 \end{cases}$ $\Big| \xRightarrow{(\exists)\delta_{ij}>0}$ $\overline{X}_2$ - nu este S.O. (prețul de transport poate să mai scadă)

3) - - -

q.e.d.

3

I.2) cu metoda costurilor minime

① Determinăm SBAI $\overline{X}_0$ cu metoda costurilor minime:

	C_1	C_2	C_3	
D_1	* [2]	* [3]	15 [1]	15, 0
D_2	10 [1]	* [4]	5 [2]	15, 5, 0
D_3	* [3]	15 [1]	0 [2]	15, 0
	10, 0	15, 0	20, 5, 0	

Obs: deoarece sunt mai multe celule cu același cost minim (=1) am ales următoarea ordine în determinarea componentelor $\overline{x}_{ij}$ a soluției $\overline{X}_0$:
$\overline{x}_{13}, \overline{x}_{21}, \overline{x}_{32}$ (aici am ales $\overline{x}_{33}$ - var. princ.) apoi $\overline{x}_{23}$.

$$\begin{cases} \overline{X}_0 = (0,0,15,10,0,5,0,15,0)^T \in \mathbb{R}^9 \to \text{SBAI degenerată} \\ f(\overline{X}_0) = 50 \ (u.m) \end{cases}$$

② $$\begin{cases} \delta_{11} = -2+1-2+1 = -2 \\ \delta_{12} = -3+1-2+1 = -3 \\ \delta_{22} = -4+2-2+1 = -3 \\ \delta_{31} = -3+1-2+2 = -2 \end{cases}$$

$(\forall)\ \delta_{ij} < 0 \Longrightarrow \overline{X}_0$ este soluție optimă și unică (!!!) (dar și degenerată)

Obs: deci costul total minim de transport este egal cu 50 (u.m) și poate fi atins doar dacă transportul cantităților de marfă se face conform tabelului corespunzător soluției optime și unice $\overline{X}_0$.

q.e.d

II)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	[2]	[1]	[4]	20
D_2	[3]	[2]	[2]	10
D_3	[1]	[3]	[3]	10
D_4	[5]	[1]	[2]	20
	35	12	13	

Obs: i) avem oferta totală (din depozite) egală cu cererea totală (a centrelor de desfacere), deci P.T este echilibrată

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{4} a_i = 20+10+10+20}_{\text{oferta}} = 60 = \underbrace{\sum_{j=1}^{3} b_j = 35+12+13}_{\text{cererea}}$$

ii) $\begin{cases} m = 4 \to \text{nr. de depozite} \\ n = 3 \to \text{nr. de magazine (centre de desfacere)} \end{cases}$

II.1) Determinăm $\overline{X}_0$ cu metoda diagonalei (a colțului de N-V)

① Determinăm $\overline{X}_0$ - SBAI (cu metoda diagonalei)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	20 [2]	* [1]	* [4]	20, 0
D_2	10 [3]	* [2]	* [2]	10, 0
D_3	5 [1]	5 [3]	* [4]	10, 5, 0
D_4	* [5]	7 [1]	13 [2]	20, 13, 0
	35, 15, 5, 0	12, 7, 0	13, 0	

Obs: cf. metodei, ordinea determ. variabilelor este: $x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{32}, x_{42}, x_{43}$.

componente (variabile) secundare, egale cu 0 $\forall$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \overline{X}_0 = (20,0,0,10,0,0,5,5,0,0,7,13)^T \in \mathbb{R}^{12} \to \text{SBAI nedeg.} \end{cases}$$

componente (variabile) principale, în nr. de $m+n-1 = 4+3-1 = 6$ (toate nenule $\Rightarrow \overline{X}_0$ - nedegenerată)

$f(\overline{X}_0) = 2\cdot 20 + 3\cdot 10 + 1\cdot 5 + 3\cdot 5 + 1\cdot 7 + 2\cdot 13 = 123\ (u.m)$

costul total de transport pt. a transporta marfa cf. lui $\overline{X}_0$

2 Aplicăm criteriul de optim

Vom calcula valorile „δ_{ij}" corespunzătoare ciclurilor celulelor nebazice/libere/secundare $(i,j) \to$ „*"

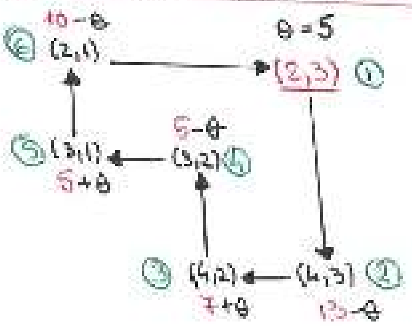
$$\begin{cases} \delta_{12} = -1+3-1+2 = 3 > 0 \\ \delta_{13} = -4+2-1+3-1+2 = 1 > 0 \\ \delta_{22} = -2+3-1+2 = 3 > 0 \\ \delta_{23} = -3+2-1+3-1+3 = 4 > 0 \\ \delta_{33} = -4+2-1+3 = 0 \\ \delta_{41} = -5+1-3+1 = -6 \end{cases} \quad \xRightarrow{(\exists)\,\delta_{ij} > 0} \bar{X}_0 \text{ nu este soluție optimă.}$$

3 Aplicăm criteriul de intrare (în bază)

$$\delta_{kl} \stackrel{def}{=} \max\{\delta_{ij} > 0\} = \max\{\underbrace{\delta_{12}}_{=3}, \underbrace{\delta_{13}}_{=1}, \underbrace{\delta_{22}}_{=3}, \underbrace{\delta_{23}}_{=4}\} = \delta_{23} \Rightarrow x_{23} = \text{"*"} = 0\ (\downarrow) \text{ intră în bază}$$

4 Aplicăm criteriul de ieșire (din bază)

4.1 Desenăm ciclul celulei „$x_{23}(\downarrow)$"



4.2 Determinăm variabila „$x_{pq}(\leftrightarrow)$" (determinăm θ)

$$\theta \stackrel{def}{=} \min\{x_{ij} > 0 \,/\, x_{ij} \text{ aflate în celulele } (i,j) \text{ cu nr. par din ciclul celulei } x_{23}(\downarrow)\} =$$
$$= \min\{\underbrace{\overset{2}{x_{43}}}_{=13}, \underbrace{\overset{4}{x_{32}}}_{=5}, \underbrace{\overset{6}{x_{21}}}_{=10}\} = 5 \Rightarrow \text{„}x_{32}(\leftrightarrow)\text{" părăsește baza} \quad (x_{32} = 5 \xrightarrow{\text{va deveni}} x_{32} = 0 = \text{"*"})$$

5 Determinăm noua soluție $\bar{X}_1$ - SBA (facem schimbarea de bază)

	C_1	C_2	C_3	
D_1	20 [2]	* [1]	* [4]	20
D_2	5 [3]	* [2]	5 [2]	10
D_3	10 [1]	* [3]	* [4]	10
D_4	* [5]	12 [1]	8 [2]	20
	35	12	13	

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{X}_1 = (20,0,0,5,0,5,10,0,0,0,12,8)^T \in \mathbb{R}^{12} \to \text{SBA nedegenerată} \\ f(\bar{X}_1) = 2\cdot 20 + 3\cdot 5 + 2\cdot 5 + 1\cdot 10 + 1\cdot 12 + 2\cdot 8 = 103 < 123 = f(\bar{X}_0) \end{cases}$$

noul cost total de transport ef. modului de transport definit de soluția $\bar{X}_1$

Obs: reluăm etapele 2 - 5 ale algoritmului de rezolvare a P.T.E.

ⓒ Crit. de optim

Calculăm „δ_{ij}":

$$\begin{cases} \delta_{12} = -1+1-2+2-3+2 = -1 \\ \delta_{13} = -4+2-3+2 = -3 \\ \delta_{22} = -2+2-2+1 = -1 \\ \delta_{32} = -3+1-2+2-3+1 = -4 \\ \delta_{33} = -4+1-3+2 = -4 \\ \delta_{43} = -3+3-2+2 = 0 \end{cases}$$

$(\forall)\delta_{ij} \leq 0 \xrightarrow[\text{cf. crit. de optim}]{}$ sol. $\overline{X}_1$ este S.O dar nu este unică $((\exists)\delta_{ij}=0) \Leftrightarrow (\exists)$ o „∞" de sol. optime cu aceeași valoare minimă a costului total de transport.

q.e.d

II.2) Determinăm soluția inițială $\overline{X}_0$ cu metoda costului minim

Rezolvați voi singuri aceasta!!!