Algoritmul SIMPLEX
(exemplu)

I) Să se rezolve (P.P.L):

$$(P.P.L)_g \begin{cases} (1_g)\ (\min) f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ (2_g) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 8 \end{cases} \\ (3_g)\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

→ forma generală

1) aducem (P.P.L) la forma standard:

$$(PPL)_s \begin{cases} (1_s)\ (\min) f(x_1,x_2,x_3; x_4^c, x_5^c) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 0\cdot x_4^c + 0\cdot x_5^c \\ (2_s) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^c = 10 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5^c = 8 \end{cases} \\ (3_s)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c \ge 0 \end{cases}$$

→ forma standard

2) determinăm o soluție de bază admisibilă inițială (S.B.A.i) $\overline{X}_0$ a $(PPL)_s$ (adică a sistemului (2_s)) cu metoda lui Gauss.

$$(2_s) \xrightarrow{\text{scriem}} \overline{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \\ \underbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3}_{\text{v.sec.}=0} \quad \underbrace{x_4^c \quad x_5^c}_{\text{v.princ.}} \end{array} \Rightarrow \overline{X}_0 = (0,0,0,10,8)^T \text{ - S.B.A.i}$$

3) Construim tabelul simplex (corespunzător soluției $\overline{X}_0$)

B	CB	P_0	P_1 (2)	P_2 (−1) ↓	P_3 (−3) ↓	P_4^c (0)	P_5^c (0)	$\theta_i = \frac{P_0}{P_j}$
P_4^c	0	10	1	1	2	1	0	$10/2 = 5$
← P_5^c	0	8	3	−1	$\boxed{2}$	0	1	$8/2 = 4$
		$f(\overline{X}_0) = 0$	−2	1	3	0	0	$z_j - c_j$
⇐ P_4^c	0	2	−2	$\boxed{2}$	0	1	−1	$2/2 = 1$
P_3	−3	4	3/2	−1/2	1	0	1/2	$4/-\frac{1}{2} = ?$
	$f(\overline{X}_1)$	$= -12$	−13/2	5/2	0	0	−3/2	$z_j - c_j$
P_2	−1	1	−1	1	0	1/2	−1/2	
P_3	−3	9/2	1	0	1	1/4	1/4	
	$f(\overline{X}_2)$	$= -\frac{29}{2}$	−4	0	0	−5/4	−1/4	$z_j - c_j$

$\Big\} = \frac{P_0}{P_3 \downarrow}$ $/\cdot\frac{1}{2}$ $/(-1)$ +

$\Big\} = \frac{P_0}{P_2 \downarrow}$ $/\cdot\frac{1}{2}$ $/\cdot\left(\frac{1}{4}\right)$ +

pe col. lui P_0 → $\begin{cases} \overline{X}_0 = (0,0,0,10,8)^T \\ f(\overline{X}_0) = 0 \end{cases}$

pe col. lui P_0 → $\begin{cases} \overline{X}_1 = (0,0,4,2,0)^T \\ f(\overline{X}_1) = -12 \end{cases}$

pe col. lui P_0 → $\begin{cases} \overline{X}_2 = (0,1,9/2,0,0)^T \\ f(\overline{X}_2) = -\frac{29}{2} \end{cases}$

4a) ⇓ crit. de optim (toate dif. $z_j - c_j \le 0$)

soluția găsită (pe coloana lui P_0) este optimă și unică:

$$\begin{cases} \overline{X}_{optim}^{\text{standard!}} = (0,1,9/2,0,0)^T \\ (\min) f = -29/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{X}_{optim}^{\text{inițială}} = (0,1,9/2)^T \\ (\min) f = -29/2 \end{cases}$$

II) $$\begin{cases} (1_g)\ (\max) f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + 3x_3 \\ (2_g) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_3 \leq 6 \end{cases} \\ (3_g)\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$ → forma inițială (generală)

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (1_s)\ (\min)(-f)(x_1,x_2,x_3; x_4^c) = -x_1 - x_2 - 3x_3 + 0 \cdot x_4^c \\ (2_s) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_3 + x_4^c = 6 \end{cases} \\ (3_s)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c \geq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_0 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 & 10 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \bar{X}_0 = (0, 10, 0, 6)^T \text{ - SBAi}$$

V. secund. V. prin.

B	c_B	P_0	-1 / P_1	-1 / P_2	-3 / P_3↓	0 / P_4^c	$\theta_i = \frac{P_0}{P_3}$↓
← P_2	-1	10	2	1	$\boxed{2}$	0	$10/2 = 5$
P_4^c	0	6	3	0	1	1	$6/1 = 6$
	$-f_0$	-10	-1	0	1	0	$z_j - c_j$
P_3	-3	5	1	$1/2$	1	0	
P_4^c	0	1	2	$-1/2$	0	1	
	$-f_0$	-15	-2	$-1/2$	0	0	

$1/2$ | $(-1/2)$ $\Big\}\ \theta_i = \frac{P_0}{P_3}$

$z_j - c_j = \Sigma(c_B \cdot P_j) - c_j$

$\Downarrow$ 4a) $(\forall)\ z_j - c_j \leq 0$

$$\begin{cases} X_{\text{optimă}}^{\text{standard}} = (0, 0, 5, 1)^T \\ (\min)(-f) = -15 \end{cases}$$ → soluție optimă unică pt. $(PPL)_s$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} X_{\text{optimă}}^{\text{inițială}} = (0, 0, 5)^T \\ (\max)(f) = 15 \end{cases}$$ → sol. optimă unică pt. $(PPL)_g$

III
$$
\begin{cases}
(1)\ (\min) f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\
(2) \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \end{cases} \\
(3)\ x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{cases}
\Longrightarrow
\begin{cases}
(1_s)\ (\min) f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 0x_4^c + 0x_5^c \\
(2_s) \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4^c = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5^c = 8 \end{cases} \\
(3_s)\ x_1, \dots, x_5^c \ge 0
\end{cases}
$$

$\Downarrow$

$$
\begin{array}{c} \\ \bar{A} = \end{array}
\begin{array}{cccccc}
P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_0 \\
\end{array}
$$
$$
\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -6 & 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right)
$$

v. sec = 0   v. princ.

$\Downarrow$

$X_0 = (0,0,0,6,8)^T$ - s.B.A.i

B	C_B	P_0	2	3	-1	0	0	θ_i
			P_1	P_2	P_3	P_4^c	P_5^c	
P_4^c	0	6	3	-6	$\boxed{2}$	1	0	$6/2 = 3$
P_5^c	0	8	1	2	1	0	1	$8/1 = 8$
	f_c	0	-2	-3	1	0	0	
P_3	-1	3	3/2	-3	1	1/2	0	
P_5^c	0	5	-1/2	5	0	-1/2	1	
	$f =$	-3	-7/2	0	0	-1/2	0	

$\theta_i = \frac{P_0}{P_3 \downarrow}$ $/2$ $\cdot(-\frac{1}{2})$ $+$

$\Downarrow$ $4_s)$

$$
\begin{cases}
X^{standard}_{optimă} = (0,0,3,0,5)^T \\
(\min) f = -3
\end{cases}
$$

- sol. optimă dar nu este unică $\Rightarrow$ (PPL)$_s$ are o ∞ de sol. optime

$\Downarrow$

$$
\begin{cases}
X^{inițială}_{optimă} = (0,0,3)^T \\
(\min) f = -3
\end{cases}
$$

- sol. optimă dar nu este unică $\Rightarrow$ probl. inițiale are o ∞ de sol. optime care conduc către aceeași valoare minimă $(=-3)$ a fct. obiectiv f