

Seminar 3 4) Determinarea soluțiilor de bază (S.B.) ale unui sistem liniar compatibil nedeterminat cu f.e.

Fie sistemul de ec. liniare (\equiv sist. liniar) : (3.1)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

care verifică următoarele condiții: (*) $\begin{cases} m < n \\ r_A = m (= r_B) \end{cases}$

\rightarrow înseamnă că sist. (3.1) este un sistem compatibil nedeterminat în care există soluțiile !!

Obs:

Deoarece am presupus că sist. lin. (3.1) + (*) este compatibil nedeterminat (\Rightarrow are o infinitate de soluții particulare). Vom numi mulțimea (totalitatea) acestor soluții particulare, soluția generală a sistemului: $S = \{x_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) / x_0 \text{ soluție particulară a sist. (3.1)}\}$



$\rightarrow S \equiv$ sol. gen. a sistemului (3.1)

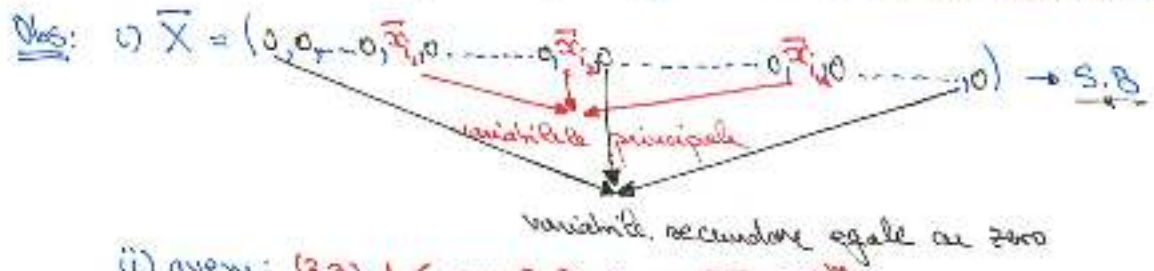
Def 1: Numim Formă explicită (\equiv F.E.) a sist. (3.1) care verifică condițiile (*), în raport cu variabilele principale $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$, scrierea soluției generale a sistemului în raport cu acestea (adică rezolvarea sistemului în raport cu variabilele principale $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$)

Obs: i) recunoașterea $\begin{cases} x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m} \rightarrow \text{variabile principale sau baze} \\ \text{restul } x_{i_{m+1}}, \dots, x_{i_n} \rightarrow \text{variabile secundare sau nebazice} \end{cases}$

ii) nr. formelor explicite ale lui (3.1) + (*) este: (3.2) $1 \leq \text{nr. F.E.} \leq C_n^m$ ($C_n^m \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{m!(n-m)!}$)

iii) not: $x = (x_1, x_2, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_n) \rightarrow$ F.E.

Def 2: Numim soluție de bază (\equiv S.B.) a sist. lin. (3.1) + (*), o soluție particulară obținută dintr-o formă explicită prin egalarea cu zero a variabilelor secundare



ii) avem: (3.3) $1 \leq \text{nr. S.B.} \leq \text{nr. F.E.} \leq C_n^m$

iii) se poate ca forme explicite distincte ($x \neq x_0$) sol. de bază corresp. să coincidă ($x_0 = x_0$)

Def 3: O soluție de bază a (3.1) + (*) se numește:

- admisibilă (S.B.A.), dacă are toate componentele (principale) nenegative (≥ 0); în caz contrar (dacă \exists componente (prinip.) negative (< 0)) se numește neadmisibilă (S.B.N)
- nedegenerată (S.B.N₀), dacă are toate componentele principale nenule ($\neq 0$); în caz contrar (dacă \exists comp. principale nule ($= 0$)) soluția se numește degenerată

Obs: ordinul de degenerare al unei S.B = nr. de comp. prinip. egale cu zero

Ex: Determinați toate (F.F) și (S.B) corespunzătoare, pentru următoarele sist. liniare:

a)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right)$$

Dem: Obs: evident condițiile (a) sunt verificate: $\begin{cases} m=2 < 3=n \\ r_A=2=m \end{cases}$ Nr. max. de F.F resp. S.B

este $C_3^2 = 3$, corespunzător următoarelor cazuri:

V. princ.	V. sec.
1) x_1, x_2	x_3
2) x_1, x_3	x_2
3) x_2, x_3	x_1

i) x_1, x_2 - variabile principale

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + 3\alpha \\ x_2 = 3 - \alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow (S.B.) \begin{cases} \bar{x}_1 = -1 \\ \bar{x}_2 = 3 \\ \bar{x}_3 = 0 \end{cases}$$

$$x_1 = (-1 + 3\alpha, 3 - \alpha, \alpha)^T \xrightarrow{\alpha=0} \bar{x}_1 = (-1, 3, 0)^T \in \mathbb{R}^3$$

(sol. de bază neadmisibilă în vedere la S.B.N.N.)

ii) x_1, x_3 - variabile principale

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow x_2 = (8 - 3\alpha, \alpha, 3 - \alpha)^T \xrightarrow{\alpha=0} \bar{x}_2 = (8, 0, 3)^T \text{ sol. de bază admisibilă în vedere la S.B.N.N.}$$

iii) x_2, x_3 - variabile principale

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \Rightarrow x_3 = \left(\alpha, \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\alpha \right)^T \xrightarrow{\alpha=0} \Rightarrow \bar{x}_3 = \left(0, \frac{8}{3}, \frac{1}{3} \right)^T \rightarrow \text{S.B.A.N.N. (sol. de bază admisibilă, nedegenerată)}$$

Obs: putem să procedăm în altfel (folosind ca pivot inițial pe $a_{21} = -1$):

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{3} \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array} \right)$$

obținut același rezultat (dar cu calcule "inițiale" mai simple!).

b)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_4 = -6 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right)$$

Obs: avem $\begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; evident cond. (a) $\begin{cases} m < n \\ r_A = m = 2 \end{cases}$

sunt verificate. Nr. max. de F.F (S.B) este $C_4^2 = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$

i) x_1, x_2 - v.p. (respectiv x_3, x_4 - v.s.)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{+} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow x_1 = (4\alpha - 3\beta, 3 - 2\alpha - \beta, \alpha, \beta)^T$$

$\alpha = \beta = 0 \Rightarrow \bar{x}_1 = (0, 3, 0, 0)^T \in \mathbb{R}^4$ - S.B.A.D. (sol. de bază admisibilă (baza compozabilă ≥ 0) și degenerată (există o comp. princ. egală cu zero $\rightarrow x_i = 0$))

ii) $x_2, x_4 - v.p. (x_1, x_3 - v.s.)$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ -3 \\ -6 \end{array} \xrightarrow{R_2 + R_1} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ -3 \\ 3 \end{array} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1/5)} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 1 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 4/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ -3 \\ 3 \end{array} \xrightarrow{R_2 - R_1} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 4/3 & 1 \\ 0 & 1 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ 0 \\ 3 \end{array}$$

$$\Rightarrow X_2 = (\alpha, 3 - \alpha - \frac{2}{3}\beta, \beta, -\alpha - \frac{4}{3}\beta)^T \xrightarrow{\alpha=\beta=0} \bar{X}_2 = (0, 3, 0, 0)^T \rightarrow \text{S.B.A.D.}$$

Obs: formula explicite sunt diferite ($X_1 \neq X_2$) dar sol. de baza corespundătoare, cînd $\bar{X}_1 = \bar{X}_2$

iii) $x_3, x_4 - v.p. (x_1, x_2 - v.s.)$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ -3 \\ -6 \end{array} \xrightarrow{R_2 + R_1} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{array} \begin{array}{c} | \\ -3 \\ -3 \end{array} \xrightarrow{R_2 \cdot (-1)} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array} \begin{array}{c} | \\ -3 \\ 3 \end{array} \xrightarrow{R_1 + R_2} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \end{array} \begin{array}{c} | \\ 0 \\ 3 \end{array}$$

$$\xrightarrow{\alpha=\beta=0} \bar{X}_3 = (0, 0, \frac{3}{2}, -6)^T \rightarrow \text{S.B.N.N.}_3 \text{ (sol. de baza inadmisibilă și nedegenerată)}$$

Obs: determinati voi FE și SB în cel puțin 3 (posibile) cazuri.

② $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -1 \\ -x_1 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Obs: cond. (*) $\begin{cases} m=3 < 5=n \\ r_A=3 (=m) \rightarrow \text{trebuie verificat prin calcul} \end{cases}$
 ii) (3) ad mult $\binom{3}{5} = \frac{5!}{3!2!} = 10$ FE (S.B.)

Dem: voi determina doar una din cele (maxim) 10 S.B. Determinati voi cele SB.

i) $x_2, x_3, x_5 - v.p. (x_1, x_4 - v.s.)$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{array} \xrightarrow{R_2 + R_3} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \begin{array}{c} | \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{array} \xrightarrow{R_1 \cdot (-1/2)} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \begin{array}{c} | \\ 3/2 \\ 2 \\ 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -5/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ 3/2 \\ 2 \\ 0 \end{array} \xrightarrow{R_3 - R_2} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -5/2 \\ 0 & 1/2 & 3/2 & 0 & 5/2 \end{array} \begin{array}{c} | \\ 3/2 \\ 2 \\ 0 \end{array} \xrightarrow{R_4 \cdot (-1/2)} \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 1 & 1/2 & -1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 3/2 & 3 & -5/2 \\ 0 & 0 & 3/2 & 3 & -5/2 \end{pmatrix} \begin{array}{c} | \\ 3/2 \\ 2 \\ 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow X_1 = (\alpha, 7 - 9\alpha - \beta, 6 - 11\alpha - 5\beta, \beta, 2 - 4\alpha - 2\beta)^T \in \mathbb{R}^5 \text{ - formulă explicită coresp. v.p. fixe: } x_2, x_3, x_5$$

$$\text{Obs: } \bar{X}_1 = (0, 7, 6, 0, 2)^T \in \mathbb{R}^5 \rightarrow \text{S.B.A.N.}_4 \text{ (sol. de bază admis. și nedeg.)}$$

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 = 7 \\ 11x_1 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ 4x_1 + 2x_5 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 7 - 9\alpha - \beta \\ x_3 = 6 - 11\alpha - 5\beta \\ x_5 = 2 - 4\alpha - 2\beta \end{cases} \begin{matrix} x_1 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{matrix}$$

se face cu semn schimbat în membrul stînga al egalității și se atribuie valori reale oarecare variabilelor secundare: $\begin{cases} \alpha = \alpha \in \mathbb{R} \\ \beta = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

q.e.d.

I.1) Dependenta și independența liniară a vectorilor

Noțiuni teoretice:

i) Fie vectorii $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$. Dacă, din combinația liniară a lor:

$$\begin{cases} \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m = 0_v \\ \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0, \text{ atunci } u_1, u_2, \dots, u_m \text{ (L.I.)} \\ \neq \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0 \text{ (} \exists \alpha_i \neq 0 \text{)}, \text{ atunci } u_1, u_2, \dots, u_m \text{ (L.D.)} \end{cases}$$

ii) Dacă $V = \mathbb{R}^n$, fie $A \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ matricea componentelor vectorilor u_1, u_2, \dots, u_m (scris pe coloane). Atunci, dacă:

$$\begin{cases} a) \text{rang } A = m \text{ (=nr. vect.)} \Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m \text{ (L.I.)} \\ b) \text{rang } A < m \text{ (nr. vect.)} \Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m \text{ (L.D.)} \end{cases}$$

Obs: dacă $m > n$ (nr. vectori $>$ $\dim \mathbb{R}^n$) $\Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m$ (L.D.)
 b) dacă $m \leq n$ (nr. vect. $\leq \dim \mathbb{R}^n$) $\Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m$ (L.I.) (?)

Exemplu: Să se determine natura următoarelor mulțimi (seturi) de vectori din \mathbb{R}^2 :

a) $\begin{cases} u_1 = (1, -1)^T \\ u_2 = (-2, 3)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{dăm}} u_1, u_2 \text{ sunt L.I.}$

Dem:

a) cu definiția generală:

Fie: $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0_2 \Leftrightarrow \alpha_1 (1, -1)^T + \alpha_2 (-2, 3)^T = (0, 0)^T \Leftrightarrow (\alpha_1, -\alpha_1)^T + (-2\alpha_2, 3\alpha_2)^T = (0, 0)^T \Leftrightarrow (\alpha_1 - 2\alpha_2, -\alpha_1 + 3\alpha_2)^T = (0, 0)^T$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{a met. lui Gauss}]{\text{resolvăm}} \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{(*)} u_1, u_2 \text{ - L.I.}$

a2) cu matricea componentelor

Vom determina rangul matricei componentelor vectorilor u_1, u_2 (și îl vom compara cu nr. lor.)
 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2 \Rightarrow r_A = 2 = \text{nr. vect.} \Rightarrow u_1, u_2 \text{ - L.I.}$

a3) cu prop. 4 a vect. (L.I.) + (m.r.q.)

pp. că vectorii u_1, u_2 sunt L.I. $\Leftrightarrow (\exists) \alpha \in \mathbb{R} \text{ a.î. } u_1 = \alpha u_2 \Leftrightarrow (1, -1)^T = \alpha (-2, 3)^T \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha = 1 \\ 3\alpha = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{3} \end{cases} \nrightarrow (F) \Leftrightarrow \text{presupunerea făcută este falsă} \Rightarrow \text{vect. } u_1, u_2 \text{ sunt L.I.}$
q.e.d.

Obs: am demonstrat prin 3 metode diferite pentru a vedea asemănările respective deosebirile dintre metode; usual în cazul vectorilor din \mathbb{R}^n (cum este cazul și aici) se aplică metoda a2), care este cea mai directă.

b) $\begin{cases} v_1 = (1, 0, -1)^T \\ v_2 = (-1, -1, 2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{demon}} v_1, v_2 - \text{L.I.}$

Demon: b) cu definitia:

Fi: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_3 \Leftrightarrow \alpha_1 (1, 0, -1)^T + \alpha_2 (-1, -1, 2)^T = (0, 0, 0)^T \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \underline{v_1, v_2 - \text{L.I.}}$ (verificare de $\alpha_1 \neq 0$)

b₂) cu matricea componentelor:

Averm: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{\text{diag}} \Rightarrow r_A = 2 = \text{nr. vectorilor} \Rightarrow \underline{v_1, v_2 - \text{L.I.}}$

b₃) cu prop. 1 a vect. L.D + (n.r.a)

Pp. $v_1, v_2 - \text{L.D} \Leftrightarrow (\exists) p \in \mathbb{R}$ a.t: $v_2 = p v_1 \Leftrightarrow (-1, -1, 2)^T = p(1, 0, -1)^T \Leftrightarrow \begin{cases} p = -1 \\ 0 = -1 \\ -p = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{pp. false} \Rightarrow \underline{v_1, v_2 - \text{L.I.}}$
 q.e.d.

c) $\begin{cases} w_1 = (1, -1, 0)^T \\ w_2 = (-2, 3, -1)^T \\ w_3 = (0, -1, 2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{demon}} w_1, w_2, w_3 - \text{L.I.}$

Demon: c) cu def.

Fi: $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = 0_3 \Leftrightarrow \alpha_1 (1, -1, 0)^T + \alpha_2 (-2, 3, -1)^T + \alpha_3 (0, -1, 2)^T = (0, 0, 0)^T \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$
 Matricea de matrice
 lui Gauss
 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 + R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 + 2R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{w_1, w_2, w_3 - \text{L.I.}}$

c₂) cu matricea componentelor

determinare rangul matricei componentelor: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{\text{diag}} \Rightarrow r_A = 3 = \text{nr. vect.} \Rightarrow \underline{w_1, w_2, w_3 - \text{L.I.}}$
 sau calculul
 de mai sus

c₃) cu prop. 1 + n.r.a

pp. ca $w_1, w_2, w_3 - \text{L.D} \Leftrightarrow (\exists) \alpha, p \in \mathbb{R}$ a.t: $w_1 = \alpha w_2 + p w_3 \Leftrightarrow (1, -1, 0)^T = \alpha(-2, 3, -1)^T + p(0, -1, 2)^T \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha = 1 \\ 3\alpha - p = -1 \\ -\alpha + 2p = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow p = 0 \Rightarrow \text{pp. false} \Rightarrow \underline{w_1, w_2, w_3 - \text{L.I.}}$
 q.e.d.

d) $\begin{cases} x_1 = (1, -1, -2)^T \\ x_2 = (2, -1, -5)^T \\ x_3 = (0, -1, 1)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{demon}} x_1, x_2, x_3 - \text{L.D} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2x_1 - x_2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0_3 \end{cases} \Rightarrow \text{relatie de dependenta lin.}$

Demon: Avem: $x_1 x_1 + x_2 x_2 + x_3 x_3 = 0$ ($\Rightarrow x_1(1, -1, 2)^T + x_2(2, -1, -5)^T + x_3(0, -1, 1)^T = (0, 0, 0)^T$)

(\Rightarrow) (*)
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -2x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$
 - sistem. lin. omogen, deci este compatibil (are soluție)

Fie $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ - matricea coeficientilor sist. lin. (*) \equiv matricea componentelor vectorilor x_1, x_2, x_3

Calculăm r_A prin f.e.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_6$

$\Rightarrow r_A = 2 < 3 = \text{nr. vectorilor} \Rightarrow$ sist. (*) compatibil nedeterminat (\Rightarrow) are o infinitate de soluții (\Rightarrow) (\exists) $\alpha_i \neq 0, i=1,2 \Rightarrow$ vectorii x_1, x_2, x_3 - L.D. (\Rightarrow) (\exists) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.i.

$x_2 = \alpha x_1 + \beta x_3$ (de exemplu) (\Rightarrow) $(2, -1, -5)^T = \alpha(1, -1, 2)^T + \beta(0, -1, 1)^T$ (\Rightarrow)

(\Rightarrow) (*)
$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ \alpha - \beta = -1 \\ -2\alpha + \beta = -5 \end{cases} \Rightarrow \underline{\beta = -1}$$
 (\Rightarrow) $x_2 = 2x_1 - x_3$ (rel. de depend. liniară)

$2x_1 - x_2 - x_3 = 0$ ($\begin{cases} d_1=2 \\ d_2=-1 \\ d_3=-1 \end{cases}$)

q.e.d.

e)
$$\begin{cases} y_1 = (2, 3, -1)^T \\ y_2 = (1, 2, 3)^T \\ y_3 = (-2, 2, 1)^T \\ y_4 = (1, 1, 2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3$$

Demon: $A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \text{cl}_{3,4}$ (\Rightarrow) $r_A \leq \min\{3, 4\} = 3$

(\Rightarrow) $r_A \leq 3 < 4 = \text{nr. vect.} \Rightarrow y_1, y_2, y_3, y_4$ - L.D.
q.e.d.

f)
$$\begin{cases} z_1 = (2, 1, -1, 3)^T \\ z_2 = (1, 0, 0, -1)^T \\ z_3 = (3, 1, -1, 2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^4$$

Demon: matricea comp. vectorilor,
 $A = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{6,7} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_A = 2 < 3 = \text{nr. vect.} \Rightarrow z_1, z_2, z_3$ - L.D.

Obs: cf. prop. 1 (C.2) $\Rightarrow z_3 = z_1 + z_2$ (\Rightarrow) $z_1 + z_2 - z_3 = 0$ - rel. de dependență liniară cu (btri) coeficienți nonul
q.e.d.

Obs: (C.1)
 $k_1=1, k_2=1, k_3=-1$

rept, modul cel mai simplu pentru a determina natura vectorilor din \mathbb{R}^n este de a determina rangul matricei componentelor acestora și compararea cu numărul de vectori:

- (i) $\text{rang } A = \text{nr. vectori} \Rightarrow$ vectorii sunt L.I.
- (ii) $\text{rang } A < \text{nr. vectori} \Rightarrow$ vectorii sunt L.D.

Obs: Voi prezenta câteva exemple privind L.D./L.I. a unor tipuri de vectori (matrici și polinoame);

① $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ și $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dem: pt. a verifica natura unor două matrici (sunt L.D. sau L.I.) ~~se poate~~ ^{se poate} combinația liniară a lor cu zero:

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 = O_{2,2} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1 \\ 2\alpha_1 & 3\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2\alpha_2 \\ -\alpha_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 & 3\alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow A_1, A_2 \text{ L.I.}$$

g.e.d

② $B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; $B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; $B_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}$

Dem: Dem:

$\alpha_1 B_1 + \alpha_2 B_2 + \alpha_3 B_3 = O_{2,3} \Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

met. lui
Gauss

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)/(-1) \\ (-2)/(-1) \\ (-2)/(-1) \\ (-1)/(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1)/(-1) \\ (-2)/(-1) \\ (-3)/(-1)}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

↑
(măsură de 6 ec. cu 3 nec.)
Owgey

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{A} \xrightarrow{R} \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_3 \\ \alpha_2 = -\alpha_3 \end{cases} \Rightarrow \alpha_3 = p \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -p \\ \alpha_2 = -p \\ \alpha_3 = p \end{cases} \Leftrightarrow S = \{(-p, -p, p)^T \mid p \in \mathbb{R}\}$$

Deci sistemul este compus dintr-unul determinat (are o infinitate de soluții) deci relația (1) este satisfăcută și ptr. $\alpha_i \neq 0 \Leftrightarrow B_1, B_2, B_3$ L.D.

De exemplu, pt. variabile secundare $p=1$, avem soluția particulară $(-1, -1, 1)^T$, adică

$$\Leftrightarrow -B_1 - B_2 + B_3 = O_{2,3} \Leftrightarrow B_3 = B_1 + B_2 \text{ (se poate observa și prin calcul direct)}$$

g.e.d.

③ $P_1(x) = 2x+3$; $P_2(x) = -x+1 \in \mathcal{P}(x)$

Solu: egalăm cu vectorul (polinomul) nul, combinația liniară a celor două polinoame:

$$\alpha_1 P_1(x) + \alpha_2 P_2(x) = 0(x) \Leftrightarrow \alpha_1(2x+3) + \alpha_2(-x+1) = 0x+0 \Leftrightarrow \underbrace{2\alpha_1 x + 3\alpha_1 - \alpha_2 x + \alpha_2}_{\text{sealinișcă nul}} = 0x+0$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha_1 - \alpha_2)x + (3\alpha_1 + \alpha_2) = 0x+0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow P_1(x) \text{ și } P_2(x) \text{ - L.D.}$$

g.o.d

④ $Q_1(x) = x^2+x-1$; $Q_2(x) = 2x^2-3x+2$; $Q_3(x) = -x^2+4x-3 \in \mathcal{P}_2(x)$

Solu: Avem:

$$\alpha_1 Q_1(x) + \alpha_2 Q_2(x) + \alpha_3 Q_3(x) = 0(x) \Leftrightarrow \alpha_1(x^2+x-1) + \alpha_2(2x^2-3x+2) + \alpha_3(-x^2+4x-3) = 0x^2+0x+0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)x^2 + (\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3)x + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3) = 0x^2+0x+0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

* sistemul poartăte omogen de 3 ec și 3 nec. Calculăm rangul matricii A a coef. și nr. a vectorilor nec. comp. $\begin{cases} \text{determinat } (r_A = 3) \\ \text{neterminat } (r_A < 3) \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \downarrow & & \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ + \\ + \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{B,C}$$

$$\Rightarrow r_A = 2 < 3 \text{ (nr. nec.)}$$

mat. A este comp. nedet. \Leftrightarrow

$(\exists) \alpha_i \neq 0$ soluție a comb. lin.

\Leftrightarrow polinoamele Q_1, Q_2, Q_3 - L.D.

g.o.d