

BAZELE STATISTICII

6. Testarea statistică

6.1. Aspecte generale ale testării statistice

6.1.1. Obiectivele testării statistice

6.1.2. Demersul testării statistice

6.1.3. Teste parametrice și teste neparametrice

6.2. Testarea ipotezelor asupra unui eșantion

6.2.1 Testarea ipotezelor asupra mediei: testul t, testul Z

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporției

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporției

Demersul testării:

a) *Formularea ipotezelor statistice*

$$H_0 : \pi = \pi_0$$

π - parametrul proporție

$$H_1 : \pi \neq \pi_0$$

π_0 - valoarea considerată în testare

□ sau $H_0 : \pi = 0.5$
 $H_1 : \pi \neq 0.5$

(cele două categorii ale variabilei au șanse egale să apară)

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporției

b) Alegerea pragului de semnificație α

c) Testul statistic

$$t_{\text{calculat}} = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{p(1-p)} / \sqrt{n}}$$

d) Regula de decizie

Dacă $|t_{\text{calculat}}| > t_{\alpha/2; n-1}$ se respinge ipoteza nulă, pentru un risc α și se acceptă ipoteza alternativă.

Dacă $|t_{\text{calculat}}| \leq t_{\alpha/2; n-1}$ ipoteza nulă nu se respinge.

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporției

Problemă

O firmă dorește să evalueze procentul de produse defecte de pe o linie de producție. Pentru aceasta, se cunoaște că aceste produse au reprezentat în ultimii ani 2 % din totalul produselor fabricate. Pentru linia de producție curentă, se extrage un eșantion format din 500 unități și se găsesc 21 produse defecte.

Să se testeze ipoteza potrivit căreia calitatea produselor a rămas aceeași, pentru un risc de 5%.

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporției

1. Formularea ipotezelor

$$\begin{array}{ll} H_0 : \pi = \pi_0 & H_0 : \pi = 0,02 \\ H_1 : \pi \neq \pi_0 & \text{sau} \quad H_1 : \pi \neq 0,02 \end{array}$$

2. Alegerea pragului de semnificație

$$\alpha = 0,05$$

3. Alegerea și calcularea statisticii test

$$p = \frac{n_A}{n} = \frac{21}{500} = 0,042$$

$$t_{calc} = \frac{p - \pi_0}{\sqrt{p(1-p)} / \sqrt{n}} = \frac{0,042 - 0,02}{\frac{\sqrt{0,042(1-0,042)}}{\sqrt{500}}} \quad t_{calc} = \frac{0,022}{\frac{0,20589}{22,36068}} = \frac{0,022}{0,009207} = 2,389$$

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporției

Atenție: În aceste calcule, numărul de zecimale luat în considerare, poate determina obținerea unor rezultate diferite. Luați în considerare cât mai multe zecimale posibile (dat totuși, nu mai mult de 6).

4. Regula de decizie

Dacă $|t_{calc}| \leq t_{\alpha/2; n-1}$ nu se respinge ipoteza H_0 .

Dacă $|t_{calc}| > t_{\alpha/2; n-1}$ cu un risc asumat α se respinge ipoteza nulă și se acceptă ipoteza alternativă.

6.2.2 Testarea ipotezelor asupra proporției

5. Decizia statistică

Deoarece $(|t_{calc}| = 2,389) > (t_{0,025;499} = 1,96)$

cu un risc de 0,05 se respinge ipoteza nulă și se acceptă ipoteza alternativă. Deci, calitatea produselor nu a rămas aceeași. Procentul actual al rebuturilor este diferit de procentul rebuturilor cunoscut anterior.

6.3. Testarea diferenței dintre două medii

- În cazul eșantioanelor independente, statistica test folosită în testarea ipotezelor statistice este statistica Z sau t .
- *Ipoteze statistice*

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$$

$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$$

- Aplicarea testului presupune testarea egalității varianțelor populațiilor din care au fost extrase eșantioanele (testul Levene).

6.3. Testarea diferenței dintre două medii

- atunci când $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, statistica test este:

$$t_{calculat} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1'^2}{n_1} + \frac{s_2'^2}{n_2}}}$$

- atunci când $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, statistica test este:

$$t_{calculat} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s'_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

6.3. Testarea diferenței dintre două medii

□ unde:

$$s'_p = \sqrt{\frac{s'^2_1 (n_1 - 1) + s'^2_2 (n_2 - 1)}{n_1 + n_2 - 2}}$$

Regula de decizie:

Dacă $|t_{calc}| > t_{\alpha/2; n_1 + n_2 - 2}$ cu un risc α respingem ipoteza H_0 și acceptăm ipoteza H_1 .

Dacă $|t_{calc}| \leq t_{\alpha/2; n_1 + n_2 - 2}$ nu se respinge ipoteza H_0 .

6.3. Testarea diferenței dintre două medii

Exemplu

- Pentru două eșantioane extrase aleator simplu de volum $n_1=n_2=625$ persoane s-a înregistrat vârsta și s-au obținut următoarele rezultate:

$$\bar{x}_1 = 35 \text{ ani}, \bar{x}_2 = 32 \text{ ani} \quad ;$$

$$s'_1 = 2 \text{ ani}, s'_2 = 4 \text{ ani}$$

- Să se testeze ipoteza potrivit căreia între vârstele medii ale celor două populații din care au fost extrase eșantioanele observate există diferențe semnificative. **Varianțele populațiilor diferă între ele.** Se consideră un risc de 0,05.

6.3. Testarea diferenței dintre două medii

1. Formularea ipotezelor

$$\begin{array}{ll} H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 & H_0 : \mu_1 = \mu_2 \\ H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 & \text{sau} \quad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2 \end{array}$$

2. Alegerea pragului de semnificație

$$\alpha = 0,05$$

3. Alegerea și calcularea statisticii test

$$t_{\text{calculat}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1'^2}{n_1} + \frac{s_2'^2}{n_2}}}$$

$$t_{\text{calc}} = \frac{35 - 32}{\sqrt{\frac{4}{625} + \frac{16}{625}}} = 16,77$$

6.3. Testarea diferenței dintre două medii

4. Regula de decizie

Dacă $|t_{calc}| > t_{\alpha/2; n_1+n_2-2}$ cu un risc α respingem ipoteza H_0 și acceptăm ipoteza H_1 .

Dacă $|t_{calc}| \leq t_{\alpha/2; n_1+n_2-2}$ nu se respinge ipoteza H_0 .

6.3. Testarea diferenței dintre două medii

5. Decizia statistică

Deoarece $(|t_{calc}| = 16,77) > (t_{0,025;1248} = 1,96)$ cu un risc de 0,05 respingem ipoteza H_0 și acceptăm ipoteza H_1 . Există diferențe semnificative d.p.d.v. statistic între vârstele medii ale celor două populații.

Exemplu

Independent Samples Test

		Levene's Test for Equality of Variances		t-test for Equality of Means						
		F	Sig.	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Std. Error Difference	95% Confidence Interval of the Difference	
									Lower	Upper
venit	Equal variances assumed	17.482	.002	-4.929	10	.001	-6.50000	1.31867	-9.43818	-3.56182
	Equal variances not assumed			-4.929	5.572	.003	-6.50000	1.31867	-9.78764	-3.21236

6.4 Testarea egalității a trei sau mai multe medii (ANOVA)

a) Obiectiv

- procedeu de analiză a variației în funcție de sursa acesteia;
- ANOVA unifactorială / Anova bi- și multifactorială;
- permite compararea mediilor a 3 sau mai multe grupe sau populații cu scopul de a verifica dacă există diferențe semnificative între acestea.

b) Condiții de aplicare

- Condiția de independență
- Condiția de normalitate
- Condiția de homoscedasticitate

6.4 Testarea egalității a trei sau mai multe medii (ANOVA)

Se bazează pe descompunerea variației totale pe componente:

- variația explicată sau intergrupe (variația sub influența factorilor esențiali);
- variația reziduală sau intragrupă (variația sub influența factorilor întâmplători).

$$V_T = V_E + V_R$$

- La nivelul unui eșantion: $TSS = ESS + RSS$.

6.4 Testarea egalității a trei sau mai multe medii (ANOVA)

V_T , respectiv TSS reprezintă variația totală, $TSS = \sum_i^n (x_i - \bar{x})^2$

V_E , respectiv ESS - variația variabilei explicată $ESS = \sum_{j=1}^n (\bar{x}_j - \bar{x})^2$

V_R , respectiv RSS – variația reziduală $RSS = \sum_{i=1}^{n_j} \sum_{j=1}^k (x_{ij} - \bar{x}_j)^2$

c). Ipoteze statistice:

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k$$

$H_1 : \text{mediile a cel puțin două populații sunt diferite}$

6.4 Testarea egalității a trei sau mai multe medii (ANOVA)

d. Statistica test Fisher

$$F = \frac{\hat{V}_E / k - 1}{\hat{V}_R / n - k} = \frac{\hat{V}_E}{\hat{V}_R} \cdot \frac{n - k}{k - 1}$$

unde: k – numărul grupelor

6.4 Testarea egalității a trei sau mai multe medii (ANOVA)

- e. Se alege pragul de semnificație α și se citește **valoarea critică a testul F** din tabelul repartiției Fisher, pentru riscul α admis, și $v_1 = k - 1$, $v_2 = n - k$ grade de libertate,

$$F_{\alpha, v_1, v_2} \cdot$$

6.4 Testarea egalității a trei sau mai multe medii (ANOVA)

f. Valoarea statisticii F se calculează astfel:

$$F_{\text{calculat}} = \frac{ESS / k - 1}{RSS / n - k} = \frac{ESS}{RSS} \cdot \frac{n - k}{k - 1}$$

6.4 Testarea egalității a trei sau mai multe medii (ANOVA)

g. Regula de decizie:

- $F_{calculat} > F_{\alpha, v_1, v_2}$ sau $Sig < \alpha$ se respinge ipoteza nulă H_0 pentru riscul α admis
- $F_{calculat} \leq F_{\alpha, v_1, v_2}$ sau $Sig \geq \alpha$ nu se respinge ipoteza nulă H_0

6.4 Testarea egalității a trei sau mai multe medii (ANOVA)

ANOVA

venit

	Sum of Squares	df		Mean Square	F	Sig.
Between Groups	ESS 149.400	k-1	2	$\frac{ESS}{k-1}$ 74.700	$\frac{ESS}{k-1}$ 19.597	.000
Within Groups	RSS 64.800	n-k	17	$\frac{RSS}{n-k}$ 3.812	$\frac{RSS}{n-k}$	
Total	TSS 214.200	n-1	19			