Curs 5

II.3) Tipuri (clase) de soluţii a unei $(PPL)_S$ în forma standard

În continuare, vom presupune că $(PPL)_g$ iniţială (generală) a fost adusă la forma standard (având "$x_1, x_2, \dots, x_k$" variabile iniţiale şi „$x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$" variab. de compensare):

$$
(PPL_S^e)\begin{cases}
(1_S)\ (\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
(2_S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \\
(3_S)\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
(1_S)\ (\min) f(X) = CX \\
(2_S)\ A \cdot X = B \\
(3_S)\ X \geq 0
\end{cases}
$$

(scrisă explicit) (scrisă matricial)

Vom mai presupune că întotdeauna sistemul de ecuaţii (restricţii canonice) (2_S) verifică următoarele condiţii iniţiale:

$$(5.1)\ \begin{cases} m < n \\ \operatorname{rang} A = m \end{cases} ;\ A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

→ aceste condiţii asigură că sistemul liniar (2_S) este un sist. compatibil nedeterminat (are o ∞ de soluţii) şi nu are ecuaţii secundare (restricţiile/ec. sunt indep.)

Def 1: Fie o $(PPL)_S$ de forma (1_S)-(3_S) care verifică condiţiile iniţiale (5.1). Atunci, numim:

a) soluţie (oarecare, generală) a $(PPL)_S$, un vector $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T \in \mathbb{R}^n$ care verifică (este soluţie) sistemul de ecuaţii (2_S). Notăm cu:

$$(5.2)\ S = \{X_0 \in \mathbb{R}^n \,/\, (2_S)\ A \cdot X_0 = B\}$$ → mulţimea soluţiilor (oarecare, generale) ale $(PPL)_S$

b) soluţie admisibilă a $(PPL)_S$, un vector $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T \in \mathbb{R}^n$ care este soluţie a $(PPL)_S$ (verifică sist. (2_S)) şi verifică condiţiile de nenegativitate (3_S). Notăm cu:

$$(5.3)\ S_A = \{X_0 \in \mathbb{R}^n \,/\, (2_S)\ A \cdot X_0 = B,\ (3_S)\ X_0 \geq 0\}$$ → mulţimea soluţiilor admisibile a $(PPL)_S$

c) soluţie optimă a $(PPL)_S$, un vector $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T \in \mathbb{R}^n$ care este soluţie admisibilă a $(PPL)_S$ (verifică $(2_S)+(3_S)$) dar satisface şi condiţia de optim (1_S). Notăm cu:

$$(5.4)\ S_0 = \{X_0 \in \mathbb{R}^n \,/\, (1_S)\ (\min) f(X) = f(X_0),\ (2_S)\ A X_0 = B,\ (3_S)\ X_0 \geq 0\}$$ → mulţimea soluţiilor optime a $(PPL)_S$

Obs: i) conform definiţiilor de mai sus, pentru orice $(PPL)_S$ avem următoarea relaţie între cele 3 mulţimi de soluţii: $(*)\ S_0 \subset S_A \subset S$ care poate fi reprezentată grafic astfel:

(i) evident, în ~~scrierea~~ definirea mulțimilor de soluții (5.2)–(5.4) am folosit scrierea sub formă matricială a unei $(P.P.L)_S$;

(ii) în condițiile inițiale (5.1) satisfăcute, o $(PPL)_S$ are întotdeauna:

$$(**)\begin{cases} (i)\ \text{card } S = +\infty & \text{((PPL)}_S \text{ are o „}\infty\text{" de sol. gen.} \Leftrightarrow \text{sist. } (\Sigma_S) \text{ are o „}\infty\text{" de sol. (}\Leftarrow\text{ comp. nedet.))} \\ (ii)\ \text{card } S_A = \begin{cases} 0 & \text{(}\sout{\text{toate}}\text{ sol. generale sunt neadmisibile} \Leftrightarrow \text{au măcar o componentă negativă)} \\ +\infty & \text{(există o „}\infty\text{" de sol. adm.} \Leftrightarrow \text{sist. } (\Sigma_S) \text{ are o „}\infty\text{" de sol. cu comp. } \geq 0\text{)} \end{cases} \\ (iii)\ \text{card } S_O = \begin{cases} 0 & \text{(nu are sol. optimă} \rightarrow \text{caz extrem de rar)} \\ 1 & \text{(are soluție optimă \underline{unică}} \rightarrow \text{cel mai des întâlnit)} \\ +\infty & \text{(are o „}\infty\text{" de soluții optime} \rightarrow \text{foarte rar întâlnit)} \end{cases} \end{cases}$$

Deoarece am presupus (cf. (5.1)) că $\text{rang}\,A = m \Rightarrow$ între cei „n" vectori P_j, $j=\overline{1,n}$ (definiți în scrierea vectorială de coloanele matricii A) va exista <u>măcar</u> un set de „m" vectori L.i, fie aceștia: $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m} \in \mathbb{R}^m$, adică:

$$\{P_1, P_2, \dots, P_{i_1}, \dots, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}, \dots P_n\} \subset \mathbb{R}^m$$

L.i

Deci mulțimea $B = \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}\} \subseteq \mathbb{R}^m$ formează <u>o bază în $\mathbb{R}^m$</u>, deoarece satisface condițiile:

$$\begin{cases} (i)\ \text{card } B = m = \dim \mathbb{R}^m \ (A) \\ (ii)\ B - \text{L.i} \end{cases}$$

<u>not</u>: $\begin{cases} \dot{I} = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \rightarrow \text{mulțimea indicilor bazici} \\ J = \{1, 2, \dots, n\} \setminus \dot{I} \rightarrow \text{mulțimea indicilor nebazici} \end{cases}$ <u>Obs:</u> evident avem: $\begin{cases} \dot{I} \cap J = \emptyset \\ \dot{I} \cup J = \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}$

Fie o soluție $X_0 \in S$ (sau $X_0 \in S_A$, sau $X_0 \in S_O$) de forma:

$$\begin{cases} X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i_1}^0, \dots, x_{i_2}^0, \dots, x_j^0, \dots, x_{i_m}^0, \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n \\ \text{și:} \\ B = \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}\} \subseteq \mathbb{R}^m \end{cases}$$

atunci numim componentele (variabilele):

$$\begin{cases} x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_m}^0 \rightarrow \text{\underline{componente} (variabile) \underline{bazice}/\underline{principale}} \\ x_1^0, x_2^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0 \rightarrow \text{\underline{componente} (variabile) \underline{nebazice}/\underline{secundare}} \end{cases}$$

Obs:

Putem nota prescurtat cele două tipuri de componente astfel:

$$\begin{cases} x_i^0, \ i \in \dot{I} \rightarrow \text{componente bazice} \\ x_j^0, \ j \in J \rightarrow \text{componente nebazice} \end{cases}$$

Def 2 Fie o $(PPL)_s$: $(1_s)-(3_s)$ verificând condițiile (5.1) și $B=\{P_{i_1},P_{i_2},\dots,P_{i_m}\}\subseteq\mathbb{R}^m$ vectori bazici.

Numim:

a) <u>soluție de bază (S.B)</u> a $(PPL)_s$ corespunzătoare bazei B, o soluție $X_0\in S$ care are toate componentele nebazice nule ($x_j^0=0,\ j\in J$), adică are forma:

$$\text{(i)}\quad X_0=(0,0,\dots,\underbrace{x_{i_1}^0}_{\in\mathbb{R}},0,\dots,0,\underbrace{x_{i_2}^0}_{\in\mathbb{R}},0,0,\dots,0,\underbrace{x_{i_m}^0}_{\in\mathbb{R}},0,\dots,0)^T\in\mathbb{R}^n\ (\subset S)$$

b) <u>soluție de bază admisibilă (S.B.A)</u> a $(PPL)_s$ corespunzătoare bazei B, o soluție $X_0\in S_A$ care are toate componentele nebazice nule ($x_j^0=0,\ j\in J$), adică este de forma:

$$\text{(ii)}\quad X_0=(0,\dots,0,\underbrace{x_{i_1}^0}_{\geq 0},0,\dots,0,\underbrace{x_{i_2}^0}_{\geq 0},0,\dots,0,\underbrace{x_{i_m}^0}_{\geq 0},0,\dots,0)^T\subset S_A\ (\in\mathbb{R}^n)$$

<u>Obs</u>: a) o S.B $\overline{X}_0$ este <u>neadmisibilă</u> $\Leftrightarrow$ cel puțin o componentă bazică este negativă ($\exists\, x_i^0<0,\ i\in I$);
b) notăm cu:

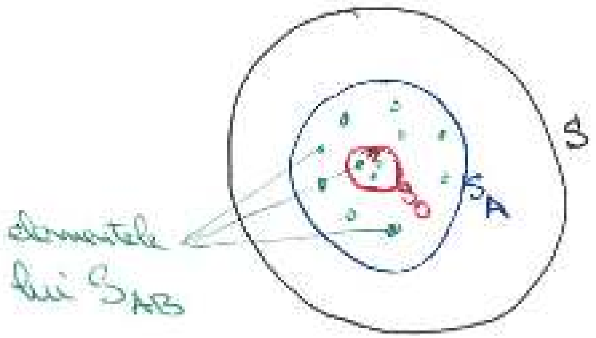
$$(5.5)\quad S_{AB}=\{X_0\in S_A \,/\, \text{componentele nebazice } x_j^0=0,\ (\forall)\, j\in J\}\subset S_A$$ → <u>mulțimea soluțiilor de bază admisibile a unei (PPL)</u>

<u>Obs</u>:

i) $\operatorname{card} S_{AB}\leq C_n^m \overset{def}{=} \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (S_{AB} este mulțime finită)

ii) $\begin{cases} S_{AB}\subset S_A\subset S \\ S_{AB}\cap S_0\neq\emptyset\ ;\ S_0\not\subset S_{AB} \text{ și } S_{AB}\not\subset S_0\end{cases}$

iii) reprezentarea geometrică de mai jos a celor 4 mulțimi de soluții (S, S_A, S_0 și S_{AB}) "clarifică" relațiile existente între acestea:



II.4) Elemente de topologia mulțimilor convexe

Def. 3 Numim <u>combinație liniar convexă</u> a vectorilor $X_1, X_2, \dots, X_m \in \mathbb{R}^n$, expresia

$$(5.6)\quad "\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m" \quad \text{a.î.} \begin{cases} (1)\ \lambda_i \in [0,1]\ ;\ i=\overline{1,m} \\ (2)\ \sum_{i=1}^{m} = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1 \end{cases}$$

Obs: pentru $m=2$, <u>combinația liniar convexă a 2 vectori</u> se scrie sub forma:

$$(5.6')\quad "\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2" \quad \text{cu } \lambda \in [0,1]$$

Dem:

Din relația $(5.6) \overset{m=2}{\Longrightarrow}$ combinația "$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$" cu $\begin{cases} (i)\ \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1] \\ (ii)\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1 \end{cases} \Big| \Rightarrow$

combinația "$\lambda_1 X_1 + (1-\lambda_1) X_2$" $\xrightarrow[\lambda_1 \equiv \lambda]{\text{renotând}}$ "$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$" cu $\lambda \in [0,1]$

q.e.d.

Obs: i) not: $(5.7)\quad X_\lambda = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \rightarrow$ <u>vectorul X_λ este combinația liniar convexă a vect. X_1 și X_2</u>

ii) dacă interpretăm geometric vectorii $\begin{cases} X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})^T \in \mathbb{R}^n \\ X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})^T \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ ca fiind două "puncte" în spațiul n-dimensional $\mathbb{R}^n$: $\begin{cases} P_1(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \\ P_2(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) \end{cases}$ atunci vectorul X_λ va fi un "punct" de pe segmentul (n-dimensional) determinat de $X_1(P_1)$ și $X_2(P_2)$ adică:

Obs: pt. $\begin{cases} a)\ \lambda = 0 \Rightarrow X_\lambda \equiv X_2 \\ b)\ \lambda = 1 \Rightarrow X_\lambda \equiv X_1 \\ c)\ \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow X_\lambda = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \rightarrow \text{mijlocul segm. } [X_1, X_2] \end{cases}$

Def. 4:

Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime (poligonală) oarecare. Spunem că:

a) <u>M este o mulțime (poligonală) convexă</u> dacă:

$$(5.8)\quad (\forall)\ X_1, X_2 \in M \text{ și } (\forall)\ \lambda \in [0,1] \Rightarrow X_\lambda \overset{def}{=} \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in M$$

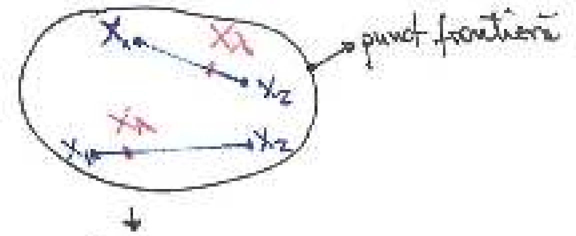
b) <u>$X_0 \in M$ este punct extrem (vârf)</u> al mulțimii poligonale convexe M, dacă:

$$(5.9)\quad (\nexists)\ X_1, X_2 \in M \text{ cu } X_1 \neq X_2 \text{ și } (\nexists)\ \lambda \in (0,1) \Rightarrow X_0 \neq \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \quad (\Leftrightarrow X_0 \neq X_\lambda)$$

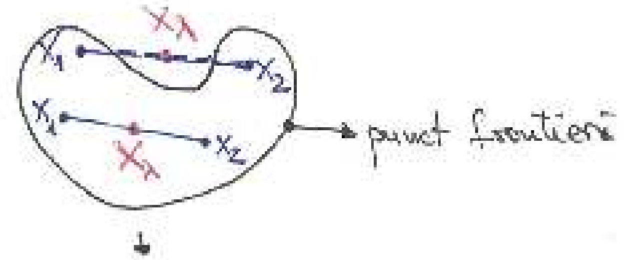
$\Updownarrow$

$$(5.9')\quad (\nexists)\ X_1, X_2 \in M \text{ cu } X_1 \neq X_2 \text{ și } (\nexists)\ \lambda \in (0,1) \text{ a.î.: } X_0 = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \quad (\Leftrightarrow X_0 = X_\lambda)$$

a)

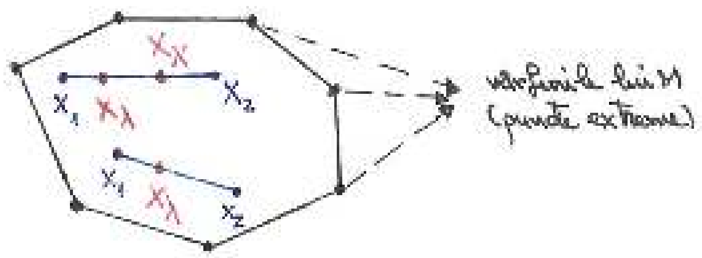


Mulțimea „M” convexă oarecare

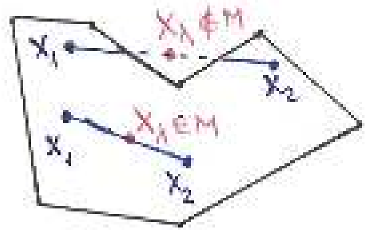


Mulțimea „M” oarecare neconvexă (concavă)

b)



Mulțimea poligonală convexă M



Mulțime poligonală neconvexă (concavă) M

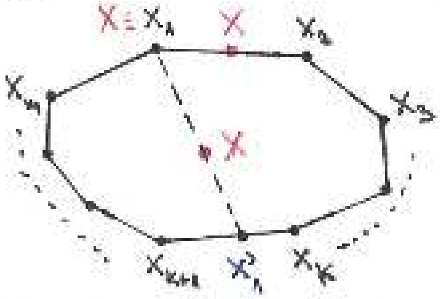
Teorema 1 (de caracterizare a mulțimilor poligonale convexe)

Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime poligonală convexă și $X_1, X_2, \dots, X_m$ punctele extreme (vârfurile) acesteia.
Atunci:

(5.10) $(\forall)\, X \in M,\ (\exists)\, \lambda_i \in [0,1]$ cu $i=\overline{1,m}$ și $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ a.î.: $X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m \ \left(= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i\right)$

(adică, orice punct X al mulțimii M (punct interior, frontieră sau extrem) poligonale convexe se poate întotdeauna scrie ca "o combinație liniar convexă de punctele extreme (vârfurile) acestei mulțimi.)

Dem:



→ $M \subset \mathbb{R}^n$ - mulțime poligonal convexă cu „m” vârfuri (puncte extreme)

a) $X \equiv X_i$ (X este un punct extrem)

Pp. că $X \equiv X_i$ cu $i \in \{1,2,\dots,m\}$. Pentru simplitate luăm $i=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{X \equiv X_1}}$. Luăm scalarii λ_i, $i=\overline{1,m}$ de forma: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_m = 0 \end{cases}$ Evident satisfac relațiile din (5.6): $\begin{cases} i)\ \lambda_i \in [0,1];\ i=\overline{1,m} \\ ii)\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1+0+\dots+0 = 1 \end{cases}$

Avem: $X = X_1 \Leftrightarrow X = \underbrace{1}_{=\lambda_1} X_1 + \underbrace{0}_{=\lambda_2} X_2 + \dots + \underbrace{0}_{=\lambda_m} X_m \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i \Rightarrow$ relația (5.10) este satisfăcută.

b) $X \in \text{int}[X_i, X_{i+1}]$ (X este situat în interiorul unui segment de pe frontiera lui M)

Pentru simplitate pp. că $i=1 \Leftrightarrow X \in \text{int}[X_1, X_2] \equiv (X_1, X_2) \Rightarrow (\exists)\, \lambda \in (0,1)$ a.î. $X = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = \underbrace{\lambda}_{\overset{not}{=}\lambda_1} X_1 + \underbrace{(1-\lambda)}_{\overset{not}{=}\lambda_2} X_2 + \underbrace{0}_{\overset{not}{=}\lambda_3} X_3 + \dots + \underbrace{0}_{\overset{not}{=}\lambda_m} X_m = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i \Leftrightarrow$ rel. (5.10) este satisfăcută și în acest caz.

c) $X \in \text{int}\, M$ (X este punct interior al mulțimii M)

Cf. fig. de la începutul demonstrației, dacă unim un vârf (pp. că este X_1) cu punctul interior X printr-o "dreaptă n-dimensională", aceasta va intersecta frontiera lui M într-un alt punct ($\overset{not}{=} X_1'$) aflat pe unul din segmentele frontierei lui M (pp. că este $[X_k, X_{k+1}]$)

Atunci, deoarece M – mulțime poligonală convexă, avem relațiile:

$$\begin{cases} (*)\ (\exists)\,\lambda\in(0,1) \text{ a.î.}: \ X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_1' \\ (**)\ (\exists)\,\mu\in[0,1] \text{ a.î.}: \ X_1' = \mu X_k + (1-\mu)X_{k+1}\end{cases} \Bigg| \overset{(*)}{\underset{(**)}{\Longrightarrow}}$$

$$\Rightarrow X = \lambda X_1 + (1-\lambda)[\mu X_k + (1-\mu)X_{k+1}] = \underbrace{\lambda}_{\overset{not}{=}\lambda_1} X_1 + \underbrace{(1-\lambda)\mu}_{\overset{not}{=}\lambda_k} X_k + \underbrace{(1-\lambda)(1-\mu)}_{\overset{not}{=}\lambda_{k+1}} X_{k+1} =$$

$$= \underbrace{\lambda}_{\overset{not}{=}\lambda_1} X_1 + \underbrace{0}_{\overset{not}{=}\lambda_2}\cdot X_2 + \dots + \underbrace{0}_{\overset{not}{=}\lambda_{k-1}} X_{k-1} + \underbrace{(1-\lambda)\mu}_{\overset{not}{=}\lambda_k} X_k + \underbrace{(1-\lambda)(1-\mu)}_{\overset{not}{=}\lambda_{k+1}} X_{k+1} + \underbrace{0}_{\overset{not}{=}\lambda_{k+2}}\cdot X_{k+2} + \dots + \underbrace{0}_{\overset{not}{=}\lambda_m} X_m =$$

$$= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_{k-1}X_{k-1} + \lambda_k X_k + \lambda_{k+1}X_{k+1} + \dots + \lambda_m X_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i \quad (1)$$

Dar:
$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda \in (0,1) \\ \lambda_k = \underbrace{(1-\lambda)}_{\in(0,1)}\cdot\underbrace{\mu}_{\in[0,1]} \in [0,1] \\ \lambda_{k+1} = \underbrace{(1-\lambda)}_{\in(0,1)}\underbrace{(1-\mu)}_{\in[0,1]} \in [0,1] \\ \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_m = 0 \in [0,1] \end{cases} \Rightarrow \lambda_i \in [0,1],\ (\forall)\, i=\overline{1,m} \quad (2)$$

ii) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = \lambda + (1-\lambda)\mu + (1-\lambda)(1-\mu) + 0 + \dots + 0 = \lambda + \mu - \lambda\mu + 1 - \lambda - \mu + \lambda\mu = 1 \quad (3)$

Din (1) – (3) $\Rightarrow$ rel. (5.10) este verificată și în acest ultim caz.

q.e.d

II.5) Proprietăți ale soluțiilor unei $(PPL)_s$ în formă standard

Vom folosi scrierea sub formă matriceală a unei $(PPL)_s$, adică: $\begin{cases} (1s)\ (\min) f(X) = CX \\ (2s)\ A\cdot X = B \\ (3s)\ X \geq 0 \end{cases}$

Teorema 2

Mulțimea soluțiilor (generale, oarecare) ale unei $(PPL)_s$ este o mulțime (poligonală) convexă.

Dem: Avem $S \overset{def}{=} \{X_0 \in \mathbb{R}^n \,|\, (2)\ A\cdot X_0 = B\}$ $(*)$

Fie $X_1, X_2 \in S \overset{(*)}{\Longrightarrow} (1) \begin{cases} AX_1 = B \\ AX_2 = B \end{cases}$

Dar S – mulțime (poligonală) convexă $\overset{(5.3)}{\Longleftrightarrow} (\forall)\, X_1, X_2 \in S,\ (\forall)\,\lambda\in[0,1] \Rightarrow X_\lambda = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in S$.

$X_\lambda \in S \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} AX_\lambda = B \Leftrightarrow A\cdot[\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] = B \Leftrightarrow \lambda\cdot\underbrace{(AX_1)}_{\overset{(1)}{=}B} + (1-\lambda)\underbrace{(AX_2)}_{\overset{(1)}{=}B} = B \overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\lambda B + (1-\lambda)B = B}_{\text{(adevărat)}}$

q.e.d

Teorema 3:

Mulțimea soluțiilor admisibile S_A a unei $(PPL)_s$ este o mulțime (poligonală) convexă

Dem: Avem $S_A = \{X_0 \in \mathbb{R}^n / (2_s)\ AX_0 = B, (3_s)\ X_0 \geq 0\} \subset S$ (*)

c.f. def. S_A - convexă $\Leftrightarrow (\forall) X_1, X_2 \in S_A$ și $(\forall) \lambda \in [0,1] \Rightarrow X_\lambda = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in S_A$

Fie $X_1, X_2 \in S_A \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (1) \begin{cases} AX_1 = B \\ X_1 \geq 0 \end{cases}$ și $(2) \begin{cases} AX_2 = B \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$

Dar $X_\lambda \in S_A \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (3) \begin{cases} AX_\lambda = B \rightarrow \text{demonstrată c.f. } T_2 \\ X_\lambda \geq 0 \end{cases}$

Dar: $X_\lambda = \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{X_1}_{\geq 0\ (1)} + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{X_2}_{\geq 0\ (2)} \geq 0 \Rightarrow X_\lambda \in S_A$.

q.e.d

Teorema 4

Mulțimea soluțiilor optime S_0 a unei $(PPL)_s$ este o mulțime poligonală convexă (în cazul în care $(PPL)_s$ are optim finit $\Leftrightarrow S_0 \neq \emptyset$)

Dem: Avem $S_0 = \{X_0 \in \mathbb{R}^n / (1_s) (\min) f(X) = f(X_0) = m; (2_s)\ AX_0 = B; (3_s)\ X_0 \geq 0\} \subset S_A$ (*)

Dar, S_0 - convexă $\Leftrightarrow (\forall) X_1, X_2 \in S_0$ și $(\forall) \lambda \in [0,1] \Rightarrow X_\lambda = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in S_0$

Fie $X_1, X_2 \in S_0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1_s) (\min) f(X) = f(X_1) = m \\ (2_s)\ AX_1 = B \\ (3_s)\ X_1 \geq 0 \end{cases}$ și $\begin{cases} (1_s) (\min) f(X_0) = f(X_2) = m \\ (2_s)\ AX_2 = B \\ (3_s)\ X_2 \geq 0 \end{cases}$

Atunci $X_\lambda \in S_0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1_s) (\min) f(X) = f(X_\lambda) = m \\ (2_s)\ A \cdot X_\lambda = B \rightarrow \text{demonstrată c.f. } T_2 \\ (3_s)\ X_\lambda \geq 0 \rightarrow \text{dem. c.f. } T_3 \end{cases}$

Dar $\underline{f(X_\lambda)} = f(\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2) \overset{(**)}{=} \lambda \underbrace{f(X_1)}_{=m} + (1-\lambda) \underbrace{f(X_2)}_{=m} = \lambda m + (1-\lambda) m = \underline{m} \Rightarrow (1_s)(A) \Rightarrow S_0$ - convexă

Obs: f - formă liniară $\Leftrightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ (**) c.f. (4.1)

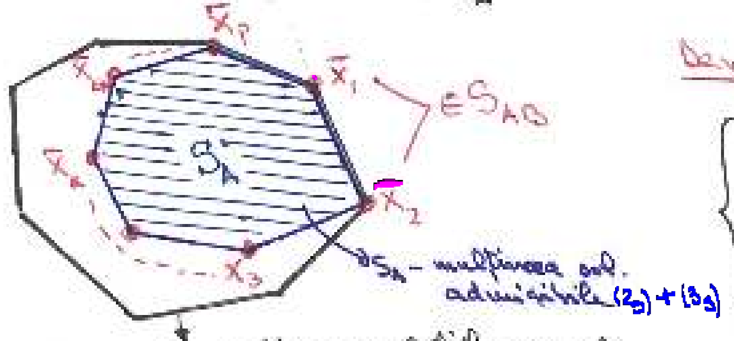
q.e.d

Teorema 5:

Fie mulțimile S_A și S_{AB} atașate unei $(PPL)_s$. Atunci soluția $\bar{X} \in S_A$:

$\bar{X} \in S_{AB} \Leftrightarrow \bar{X}$ este punct extrem (vârf) al mulțimii S_A

Obs: Teorema afirmă că soluțiile admisibile de bază ale unei $(PPL)_s$ sunt vârfurile mulțimii soluțiilor admisibile S_A



S - mulțimea soluțiilor generale a sistemului (2_s)

Dem: Fie $(PPL)_s$ scrisă sub formă vectorială:

$$\begin{cases} (1_s) (\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ (2_s)\ x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = P_0 \\ (3_s)\ x_j \geq 0;\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$

$\underset{(m \cdot c \cdot a)}{(\stackrel{a}{\Rightarrow})}$ $\overline{X} \in S_{AB} \Rightarrow \overline{X}$ punct extrem (vârf) al lui S_A

Fie $B = \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}\} \subseteq \mathbb{R}^m$ și $\overline{X} = \{0, \dots, 0, \overline{x}_{i_1}, 0, \dots, 0, \overline{x}_{i_2}, 0, \dots, 0, \overline{x}_{i_m}, 0, \dots, 0\}^T \in \mathbb{R}^n$ – S.B.A. corespunzătoare acestei baze B.

Cele „n" componente ale lui $\overline{X}$ sunt: $\begin{cases} \overline{x}_i > 0 \ ; (\forall) i \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \stackrel{not}{\equiv} I \to \text{componente bazice (principale)} \\ \overline{x}_j = 0 \ ; (\forall) j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus I \stackrel{not}{\equiv} J \to \text{componente nebazice (secundare)} \end{cases}$

Pp. că $\overline{X}$ nu este punct extrem al S_A $\Leftrightarrow (\exists) X_1, X_2 \in S_A$ cu $X_1 \neq X_2$ și $(\exists) \lambda \in (0,1)$ a.î.: (1) $\overline{X} = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$

Rel (1) scrisă pe componente devine:

$$(1') \begin{cases} \overline{x}_i = \lambda x_i^{(1)} + (1-\lambda) x_i^{(2)} \ ; (\forall) i \in I \\ 0 = \lambda x_j^{(1)} + (1-\lambda) x_j^{(2)} \ ; (\forall) j \in J \end{cases} \xrightarrow[x_j^{(1)}, x_j^{(2)} \geq 0 \ (cf. (2_2) \text{ și } (3_2))]{\lambda > 0; \ 1-\lambda > 0} (*) \ \boxed{x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0 \ ; (\forall) j \in J}$$

Deoarece $\begin{cases} a) \ X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})^T \in S_A \Leftrightarrow \begin{cases} (2_1) \ x_1^{(1)} P_1 + x_2^{(1)} P_2 + \dots + x_n^{(1)} P_n = P_0 \\ (2_2) \ x_k^{(1)} \geq 0 \ ; (\forall) k = \overline{1,n} \end{cases} \quad (2) \\ b) \ X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) \in S_A \Leftrightarrow \begin{cases} (3_1) \ x_1^{(2)} P_1 + x_2^{(2)} P_2 + \dots + x_n^{(2)} P_n = P_0 \\ (3_2) \ x_k^{(2)} \geq 0 \ ; k = \overline{1,n} \end{cases} \quad (3) \end{cases}$

Din: $\begin{cases} (2)_1 + (*) \Rightarrow (2')_1 \ x_{i_1}^{(1)} P_{i_1} + x_{i_2}^{(1)} P_{i_2} + \dots + x_{i_m}^{(1)} P_{i_m} = P_0 \\ (3)_1 + (*) \Rightarrow (3')_1 \ x_{i_1}^{(2)} P_{i_1} + x_{i_2}^{(2)} P_{i_2} + \dots + x_{i_m}^{(2)} P_{i_m} = P_0 \end{cases}$ (din membrul drept al egalităților dispar termenii corespunzători vectorilor P_j, $(\forall) j \in J$, deoarece $x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0$, $(\forall) j \in J$)

$$\overset{"-"}{\Longleftarrow} \left.\begin{aligned} &(x_{i_1}^{(1)} - x_{i_1}^{(2)}) P_{i_1} + (x_{i_2}^{(1)} - x_{i_2}^{(2)}) P_{i_2} + \dots + (x_{i_m}^{(1)} - x_{i_m}^{(2)}) P_{i_m} = 0_m \\ &\text{Dar } B \subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m} \text{ – sunt L.i} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x_{i_1}^{(1)} - x_{i_1}^{(2)} = 0 \\ x_{i_2}^{(1)} - x_{i_2}^{(2)} = 0 \\ \text{------} \\ x_{i_m}^{(1)} - x_{i_m}^{(2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{i_1}^{(1)} = x_{i_1}^{(2)} \\ x_{i_2}^{(1)} = x_{i_2}^{(2)} \\ \text{------} \\ x_{i_m}^{(1)} = x_{i_m}^{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x_i^{(1)} = x_i^{(2)} \ ; (\forall) i \in I} \ (**)$$

Din $(*) + (**) \Rightarrow x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$; $k = \overline{1,n} \Leftrightarrow \underset{\#}{X_1 = X_2}$ (F) → contrazice ipoteza făcută în (1) ($X_1 \neq X_2$) $\Leftrightarrow$

pp. făcută este falsă $\Leftrightarrow \overline{X}$ este punct extrem al S_A.

$\underset{(m \cdot c \cdot a)}{(\stackrel{b}{\Leftarrow})}$ $\overline{X}$ – punct extrem al $S_A \Rightarrow \overline{X} \in S_{AB}$

Fie $\overline{X} = (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)^T \in S_A \Leftrightarrow (1) \begin{cases} (1_1) \ \overline{x}_1 P_1 + \overline{x}_2 P_2 + \dots + \overline{x}_n P_n = P_0 \\ (1_2) \ \overline{x}_k \geq 0 \ , k = \overline{1,n} \end{cases}$

Vom presupune că $\overline{X}$ are $p \leq n$ componente nenule (>0) și fără a restrânge generalitatea le presupunem a fi ~~[illegible]~~ primele componente, adică: $(*)$ $\overline{X} = (\underset{>0}{\overline{x}_1}, \underset{>0}{\overline{x}_2}, \dots, \underset{>0}{\overline{x}_p}, 0, 0, \dots, 0)^T \in S_A$

Pentru a arăta că $\overline{X} \in S_{AB} \Leftrightarrow \overline{X}$ este vârf al S_A, trebuie să arătăm că vectorii $P_1, P_2, \dots, P_p$ (corespunzători componentelor bazice $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_p > 0$) sunt L.i ($\Rightarrow$ formează o bază)

Prin reducere la absurd vom presupune că: ~~$P_1, P_2, \dots, P_p$ sunt L.D. $\Leftrightarrow$~~

$\{P_1, P_2, \dots, P_p\}$ – L.D $\Leftrightarrow (\exists) \alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,p}$ <u>nu toți nuli</u> a.î.: (2) $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_p P_p = 0_m$

Din $(1), ((1_1)) + (*) \Rightarrow (3)$ $\overline{x}_1 P_1 + \overline{x}_2 P_2 + \dots + \overline{x}_p P_p = P_0$ (deoarece $\overline{x}_{p+1} = \dots = \overline{x}_n = 0$)

Înmulțim rel. (2) cu $\lambda \neq 0$ și o adunăm/o scădem la/din (3) (adică: $(2)\cdot\lambda \pm (3)$) obținem

$$(4)\begin{cases}(\overline{x}_1+\lambda\alpha_1)P_1+(\overline{x}_2+\lambda\alpha_2)P_2+\dots+(\overline{x}_p+\lambda\alpha_p)P_p=P_0\\(\overline{x}_1-\lambda\alpha_1)P_1+(\overline{x}_2-\lambda\alpha_2)P_2+\dots+(\overline{x}_p-\lambda\alpha_p)P_p=P_0\end{cases}$$

Fie vectorii X' și X'' de componente:

$$(5)\begin{cases}X'=(\overline{x}_1+\lambda\alpha_1,\overline{x}_2+\lambda\alpha_2,\dots,\overline{x}_p+\lambda\alpha_p,0,0,\dots,0)^T\in\mathbb{R}^n\\X''=(\overline{x}_1-\lambda\alpha_1,\overline{x}_2-\lambda\alpha_2,\dots,\overline{x}_p-\lambda\alpha_p,0,0,\dots,0)^T\in\mathbb{R}^n\end{cases}$$

Evident, cf. (4) vectorii X' și X'' verifică ec. (3_S) (**) (adică: $\begin{cases}A\cdot X'=B\\A\cdot X''=B\end{cases}$ în f. matricială)

Deoarece componentele bazice $\overline{x}_i>0$ $(\forall)\, i=\overline{1,p}$ vom găsi o valoare $\lambda>0$ (f.f. mică, $\lambda \to 0$) a.î. componentele lui X'' (și evident ale lui X') să fie >0 (pozitive); adică:

$$\begin{cases}\underbrace{\overline{x}_i}_{>0}-\underbrace{\lambda\alpha_i}_{\neq 0}>0 & ;\ i=\overline{1,p}\\\underbrace{\overline{x}_i}_{>0}+\underbrace{\lambda\alpha_i}_{\neq 0}>0 & ;\ i=\overline{1,p}\end{cases} \Rightarrow X' \text{ și } X'' \text{ verifică și relațiile } (3_0)\ (\overset{*}{**})$$

Din $(**)+(\overset{*}{**}) \Rightarrow \underline{X', X''\in S_A}$

Dar, cf. rel. $(4)_{1+2} \overset{(*)}{\Rightarrow} \overline{X}=\frac{1}{2}X'+\frac{1}{2}X''$ ($\Rightarrow \overline{X}$ se scrie ca o comb. liniar convexă de X' și X'' ($\overline{X}=\lambda X'+(1-\lambda)X''$) cu $\lambda=\frac{1}{2}$ și $X'\neq X''$) $\Rightarrow \overline{X}$ __nu este__ punct extrem al S_A (F) – se contrazice ipoteza făcută $\Rightarrow$ presupunerea făcută (că vect $\{P_1,P_2,\dots,P_p\}$ sunt L.D) este falsă $\Rightarrow \{P_1,P_2,\dots,P_p\}$ sunt L.i.

Dar, deoarece $r_A=m \Rightarrow p=m \Rightarrow \{P_1,P_2,\dots,P_m\}\subseteq\mathbb{R}^m \Rightarrow \overline{X}\in S_{AB}$.

q.e.d.

__Teorema 6 (!!!)__

Dacă o $(PPL)_S$ admite optim finit ($\underset{X\in S_A}{(\min)} f(X)=m\neq\pm\infty$), atunci există cel puțin o soluție de bază admisibilă în care funcția obiectiv „f" ia valoarea optimă (minimă).

($\text{Dacă } \underset{X\in S_A}{(\min)} f(X)=m\neq\pm\infty \Rightarrow (\exists)\, \overline{X}_0\in S_{AB}$ a.î. $f(\overline{X}_0)=m\ (=\min_{X\in S_A} f(X))$)

$\Updownarrow$

$\overline{X}_0$ este un vârf al lui S_A

__Dem:__ Fie $X_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)^T\in S_A$ a.î.: $\underline{f(X_0)=m}\ (=\min_{X\in S_A}f(X))$. Dacă:

a) $\underline{X_0 \text{ este punct extrem (vârf) al } S_A} \overset{T_5}{\Rightarrow} X_0\in S_{AB}$, deci teorema este demonstrată.

b) $\underline{X_0 \text{ nu este punct extrem (vârf) al } S_A}$, deci X_0 este punct de pe frontiera lui S_A sau punct interior din $S_A \underset{S_A\text{-convexă}}{\overset{(T_1)}{\Longleftrightarrow}} (\exists)\, \lambda_i\in[0,1]$, $i=\overline{1,m}$ cu $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$ a.î.: (1) $X_0=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\dots+\lambda_mX_m$

($X_1,X_2,\dots,X_m$ – vârfurile lui S_A)

Atunci:

$$\underline{f(X_0)}\overset{(1)}{=}f(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\dots+\lambda_mX_m)\underset{\text{„f" e formă liniară}}{\overset{(4.1)}{=}}\underline{\lambda_1f(X_1)+\lambda_2f(X_2)+\dots+\lambda_mf(X_m)}\ (2)$$

Fie X_k, $1\leq k\leq m$ vârful în care funcția obiectiv $f(X)$ ia cea mai mică valoare din toate vârfurile lui S_A, adică:

$\min_{i=\overline{1,m}} f(X_i) = \min\{f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_k), \dots, f(X_m)\} = f(X_k) \Rightarrow (3)\ f(X_k) \le f(X_i);\ (\forall)\, i=\overline{1,m}$

Atunci:

$$f(X_0) \overset{(2)}{=} \lambda_1 f(X_1)+\lambda_2 f(X_2)+\dots+\lambda_m f(X_m) \overset{(3)}{\ge} \lambda_1 f(X_k)+\lambda_2 f(X_k)+\dots+\lambda_m f(X_k) = (\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_m) f(X_k) = f(X_k)$$

$\Leftrightarrow \boxed{f(X_0)\ge f(X_k)}$ (*)

Dar X_0 este punct de minim pentru funcția „f" $\Leftrightarrow f(X_0)=\min_{X\in S_A} f(X)\ (=m) \Leftrightarrow$

$f(X_0)\le f(X),\ (\forall)\, X\in S_A$
Dar $X_k\in S_A$ (este vârf al S_A) $\Bigg] \Rightarrow \boxed{f(X_0)\le f(X_k)}$ (**)

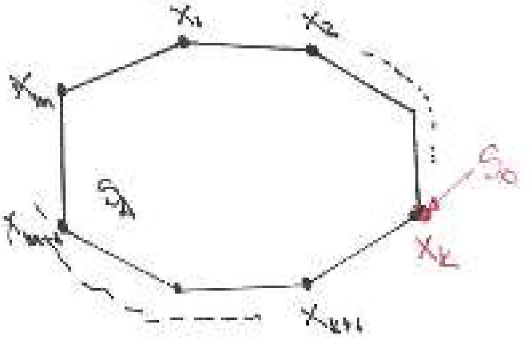
Din (*) + (**) $\Rightarrow$ $(\exists)\, X_k \in S_{AB}$ a.î.: $f(X_0)=f(X_k)=m$

q.e.d

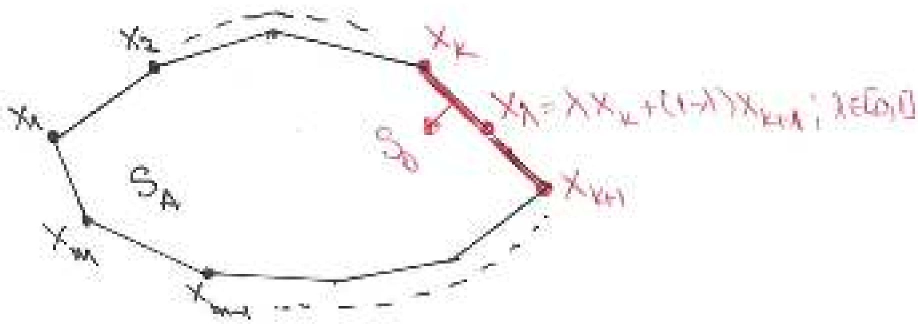
Obs: i) Th afirmă că ~~soluția optimă~~ valoarea minimă (optimă) a funcției obiectiv „f" este atinsă într-un vârf (punct extrem) al mulțimii S_A $\Leftrightarrow$ este atinsă într-un element al S_{AB}

ii) dacă valoarea minimă este atinsă nu într-un singur vârf, ci în mai multe: 2, 3, ... atunci $(P.P.L)_s$ are o „∞" de soluții deoarece S_0 este mulțime convexă (vezi fig. de mai jos.)

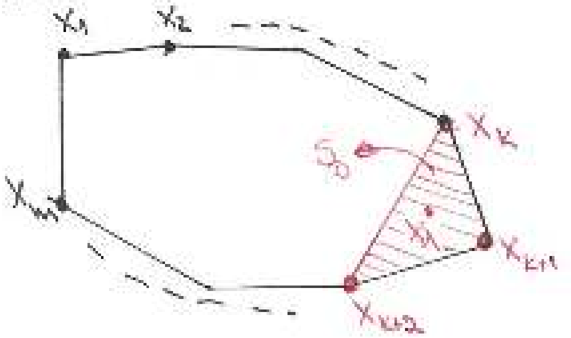
a) $\begin{cases} S_0=\{X_k\} \rightarrow \text{soluție unică} \\ \min_{X\in S_A} f(X)=f(X_k)=m \end{cases}$



b) $\begin{cases} S_0=[X_k X_{k+1}] - \text{o infinitate de sol. optime (finite)} \\ \min_{X\in S_A} f(X)=f(X_k)=f(X_{k+1})=f(X_\lambda)=m;\ (\forall)\, X_\lambda\in[X_k,X_{k+1}] \end{cases}$



c) $\begin{cases} S_0=[X_k,X_{k+1},X_{k+2}] - \text{o infinitate de sol. optime} \\ (\min_{X\in S_A}) f(X)=f(X_k)=f(X_{k+1})=f(X_{k+2})=f(X_\lambda)=m \end{cases}$



$X_\lambda=\lambda_1X_k+\lambda_2X_{k+1}+\lambda_3X_{k+2}$ a.c. $\begin{cases} (i)\ \lambda_i\in[0,1],\ i=\overline{1,3} \\ (ii)\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=1 \end{cases}$