BAZELE STATISTICII

Programa analitică

1. Noţiuni introductive

2. Analiza unei serii statistice univariate, folosind metode grafice şi numerice (*variabile cantitative*: indicatori ai tendinţei centrale, indicatori ai dispersiei, indicatori ai formei şi ai concentrării; *variabile calitative*).

3. Analiza unei serii statistice bivariate.

Programa analitică

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice
5. Estimarea parametrilor unei populații
6. Testarea statistică
7. Indici statistici

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

- 4.1. Probabilităţi
- 4.2. Variabile aleatoare
- 4.3. Distribuţii teoretice

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

- **4.1. Probabilităţi**

  Plan empiric vs. Plan teoretic

- plan empiric

O variabilă statistică X:(x_i) cu frecvențele n_i sau f_i formează o distribuție statistică.

x_{i-1}-x_i	n_i	f_i	F_i
0-10	10	0.125	0.125
10-20	20	0.250	0.375
20-30	30	0.375	**0.750**
30-40	15	0.188	0.938
40-50	5	0.062	1.000
Total	80	1.000	-

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

Plan teoretic

X – variabilă aleatoare

p_i - probabilitate de apariție

$\sum p_i = 1\ (100\%)$

O variabilă aleatoare și probabilitatea de apariție corespunzătoare formează o distribuție teoretică

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

4.1.1. Concepte

a) *Experienţa aleatoare* - o acţiune care conduce la un ansamblu de rezultate posibile, fiecare rezultat fiind supus întâmplării, adică neputând fi anticipat.

b) *Evenimentul elementar* - rezultatul posibil al experienţei aleatoare, este notat cu ω .

Mulţimea evenimentelor elementare posibile este Ω.

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

Exemplu

- Un exemplu clasic de experienţă aleatoare este aruncarea unui zar. Evenimentul elementar este apariţia unei feţe.
- Să se precizeze mulţimea evenimentelor elementare.

$$\Omega = \{ 1,2,3,4,5,6 \}$$

c) Evenimentul aleator – este un eveniment definit printr-o proprietate, care poate fi îndeplinită sau nu în urma realizării experienţei aleatoare.

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

Exemplu

- În cazul aruncării zarului, un eveniment aleator îl constituie apariţia unei feţe cu număr par.
- Submulţimea care corespunde acestei proprietăţi este $A = \{2, 4, 6\}$.

d) Evenimentele favorabile - evenimentele care compun submulţimea evenimentelor elementare care îndeplinesc proprietatea de definire a evenimentului aleator. Mulţimea acestor evenimente se numeşte *mulţimea evenimentelor favorabile.*

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

4.1.2. Definiţii

a. Definiţia clasică a probabilităţii (Bernoulli şi Laplace)

- Probabilitatea ca un eveniment să se realizeze reprezintă raportul dintre numărul de evenimente elementare favorabile realizării evenimentului şi numărul evenimentelor egal posibile.

$$p = \frac{m}{n}$$

- unde m este numărul cazurilor favorabile şi n este numărul cazurilor posibile, unde $0 \leq m \leq n$, ceea ce implică

4. Probabilități și distribuții teoretice

$0 \leq p \leq 1$

- Valoarea $p=0$ corespunde imposibilității realizării evenimentului sau evenimentul imposibil, iar valoarea $p=1$ corespunde evenimentului cert sau sigur.

Exemplu

- În cazul aruncării zarului, să se calculeze probabilitatea de apariție a unei fețe cu număr par.

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ $A = \{2, 4, 6\}$. (6 cazuri posibile, 3 cazuri favorabile

$$p = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = 0,5$$

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

b. Definiţia probabilităţii bazată pe frecvenţă

- Probabilitatea este definită ca un caz limită al frecvenţei, atunci când numărul de experienţe tinde la infinit.

$$p = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

- unde m este numărul efectiv de realizări ale unui eveniment dintr-un număr n de experienţe realizate, adică este frecvenţa relativă de apariţie a unui eveniment.

Exemplu.

- În cazul aruncării zarului, să se afle probabilitatea de apariție a fiecărei fețe și să se prezinte distribuția de probabilitate corespunzătoare.

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

xi	pi
1	1/6
2	1/6
3	…
4	…
5	
6	
	1,00

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

4.2. Variabile aleatoare

4.2.1. Definire

O experienţă aleatoare este descrisă prin mulţimea evenimentelor elementare $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\omega_n, ...\}$.

- Variabila aleatoare este o funcţie care asociază fiecărui eveniment elementar o măsură, un număr real: $X : \Omega \rightarrow R$, adică $\omega_i \rightarrow X(\omega_i) = x_i \in R$

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

- X este o funcţie definită pe Ω, cu valori în mulţimea numerelor reale R.

Exemplu

- Un exemplu de variabilă aleatoare este cea asociată experienţei aleatoare a aruncării pe o masă a două zaruri.
- Funcţia care se poate asocia experienţei este aceea a atribuirii unui număr real fiecărui eveniment elementar egal cu suma punctelor obţinute la fiecare aruncare.

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

- Spunem că probabilitatea ca variabila aleatoare X să ia o anumită valoare este:

$$p_i = \mathrm{P}(X = x_i) = P\{\omega \in \Omega,\ X(\omega) = x_i,\ i = \overline{1,n}\}$$

4.2.2. Tipuri de variabile aleatoare (discrete şi continue)

O *variabilă aleatoare discretă* ia valori distincte pe o mulţime a valorilor sale *I*, care este o mulţime cel mult numărabilă.

Variabila aleatoare discretă este definită prin: $X : \begin{pmatrix} x_i \\ p_i \end{pmatrix}_{i \in I}$

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

4.2.3. Distribuţia unei variabile aleatoare. Funcţia de repartiţie

- *Distribuţia sau legea de probabilitate* a unei variabile aleatoare este dată prin funcţia sa de probabilitate *P(X)*.
- Pe baza funcţiei de probabilitate a unei variabile aleatoare, se determină funcţia sa de repartiţie.

În general, *funcţia de repartiţie* este definită prin relaţia:

$$F(x) = P(X < x),\ (\forall)\ \ x \in R$$

4. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

- Funcţia de repartiţie are următoarele proprietăţi:

$$(\forall)\ \ x \in R,\ 0 \leq F(x) \leq 1$$

$$(\forall)\ \ a,b \in R,\ \ a < b,\ \ F(a) \leq F(b)$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$$

5. Probabilități și distribuții teoretice

- Pentru variabila discretă, funcția de repartiție este $F(x)=\sum_{\{x_i<x\}} p_i$

- Pentru variabila continuă, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot dt\,,\ (\forall)\ x\in R$

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

5.2.4. Caracteristici numerice ale unei variabile aleatoare

Media unei variabile aleatoare

$$\mu = M(X)$$

- Dacă variabila *X* este discretă, atunci: $M(X) = \sum_{i \in I} x_i \cdot p_i$

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

- Dacă variabila *X* este o variabilă continuă:

$$M(X) = \int_R x \cdot f(x) \cdot dx$$

Dispersia sau varianţa unei variabile aleatoare

$$\sigma^2 = V(X)$$

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

- **5.3. Distribuţii utilizate în statistică**

5.3.1. Distribuţii pentru variabile discrete – OPȚIONAL

a. Distribuţia Bernoulli **:** $X \sim B(p)$.

Se prezintă astfel: $X : \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q & p \end{pmatrix}$

- unde: $p = P(X = 1)$ $q = P(X = 0)$

Parametrii acestei repartiţii sunt:

- $M(X) = p;$
- $V(X) = pq.$,

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

Exemplu:

- Dacă se aruncă o monedă există două posibilități: moneda să cadă “cap” sau “pajură”.

- Probabilitatea ca moneda să cadă “cap” sau “pajură” este distribuită egal , și anume ½.

- Suma probabilităților este egală cu 1

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

b. Distribuţia binomială **:** *X~ B(n, p)*

- Se obţine prin generalizarea repartiţiei Bernoulli. Prin însumarea unui număr de n variabile aleatoare Bernoulli identic repartizate, se obţine o variabilă binomială.
- Poate fi simbolizată astfel:

$$X : \begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k q^{n-k} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}$$

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

- unde $p + q = 1$, iar k reprezintă numărul de realizări ale evenimentului favorabil, în condiţiile repetării de n ori a experienţei Bernoulli.

  Parametrii acestei repartiţii sunt:
- $M(X) = np$;
- $V(X) = npq$.

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

5.3.2. Distribuţii pentru variabile continue

a. *Distribuţia normală generalizată*

Repartiţia normală generalizată se simbolizează $N(\mu,\sigma^2)$.

Funcţia densitate este:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

b. Distribuţia normală standard

- Variabila normală standard se obţine dintr-o variabilă normală generalizată prin procedeul de standardizare:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- O variabilă aleatoare repartizată după o lege normală standard, simbolizată *N(0,1)*, are o funcţie densitate dată de relaţia:

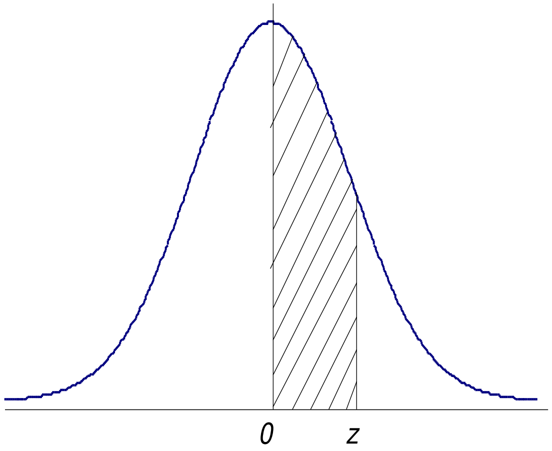
$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}}$$

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

O variabilă X poate fi transformată în variabilă Z după relația: $z_i = \dfrac{x_i - \mu}{\sigma}$

Notație $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right) \to Z \sim N\left(0,1\right)$

Valorile Z și valorile funcției Laplace sunt tabelate



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	...
0.0					
0.1			$\varphi(z)$		
0.2					
⋮					

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

Proprietățile funcției Laplace

- $\Phi(z_i)=P(0<Z<z_i)$
- $\Phi(0) = 0$
- $\Phi(-z_i) = - \Phi(z_i)$
- Dacă $z_1 < z_2$, atunci $P(z_1 < Z < z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$
- $P(Z>z_i)=1- P(Z<z_i)=\frac{1}{2}-\Phi(z_i)$
- $P(Z<z_i)= \frac{1}{2}+\Phi(z_i)$

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

- Pentru interese practice, de calcul al unor probabilităţi, se utilizează funcţia lui Laplace, definită pe baza repartiţiei normale standard. Funcţia lui Laplace este definită de relaţia:

$$\Phi(z) = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- Funcţia de repartiţie devine: $F(z) = \frac{1}{2} + \Phi(z)$

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

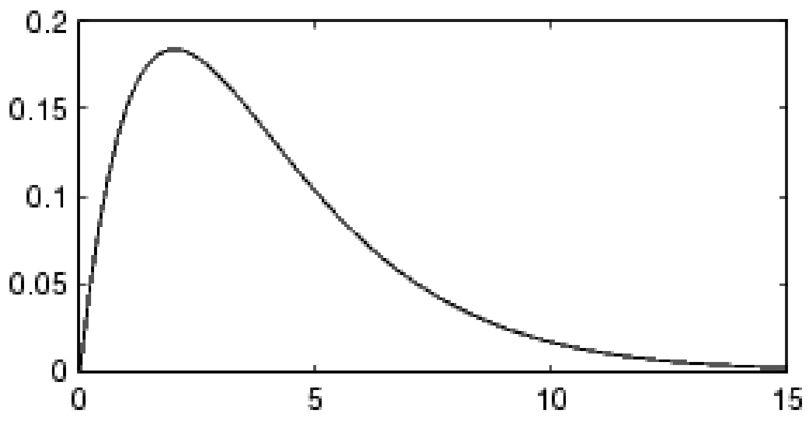
- Pe baza funcţiei lui Laplace, se poate determina, de exemplu, probabilitatea ca variabila aleatoare normală standard să ia valori într-un interval simetric de tipul (-*a*; *a*). Această probabilitate este:

$$P(-a < Z < a) = F(a) - F(-a) = \Phi(a) - \Phi(-a) = 2\Phi(a) = \int_{-a}^{a} f(t)dt$$

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

c) Distribuţia chi-pătrat

- O variabilă aleatoare repartizată după o lege chi-pătrat este simbolizată $\chi^2(n,\sigma)$.



5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

- Dacă considerăm n variabile aleatoare identic repartizate după o lege normală standard, $X_i \sim N(0,1)$, $i=\overline{1,n}$, atunci variabila

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

d). Distribuţia Student

- O variabilă aleatoare repartizată după o lege Student, simbolizată *t(n)*.

- Dacă se consideră două variabile aleatoare $X \sim N(0,1)$ şi $Y \sim \chi^2(n)$ atunci variabila aleatoare Student se obţine prin relaţia:

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n)$$

unde n reprezintă numărul de grade de libertate, parametrul acestei distribuţii.

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

e). Distribuţia Snedecor-Fisher

O variabilă aleatoare repartizată după o lege Snedecor-Fisher, simbolizată $\Im(n_1, n_2)$.

Dacă se consideră două variabile aleatoare: $X \sim \chi^2(n_1, \sigma)$ şi $Y \sim \chi^2(n_2, \sigma)$, atunci o variabilă repartizată Fisher se obţine prin relaţia:

$$F = \frac{\frac{X}{n_1}}{\frac{Y}{n_2}} \sim \Im(n_1, n_2)$$

5. Probabilităţi şi distribuţii teoretice

- unde n_1 şi n_2 reprezintă grade de libertate, parametrii repartiţiei Snedecor-Fisher.