Metoda celor două faze (exemple)

I

$$\begin{cases} (1)\ (\min)\ f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ (2)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 10 \end{cases} \\ (3)\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{forma generală a (P.P.L)}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (1_s)\ (\min)\ f(x_1,x_2,x_3; x_4^c, x_5^c) = 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 0\cdot x_4^c + 0 x_5^c \\ (2_s)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4^c = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5^c = 10 \end{cases} \\ (3_s)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{forma standard a (P.P.L)}$$

$$\Downarrow$$

$$(2_s) \rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \end{array}\right) \begin{array}{l} /\cdot(-1) \\ /\cdot(-1) \end{array} \sim \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 1 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow \bar{X}_1 = (0,0,0,-6,-10)^T$$

x_1, x_2, x_3: v.sec.$=0$; x_4^c, x_5^c: v.princ.

$\bar{X}_1$ → sol. de bază neadmisibilă

Obs: i) $\bar{X}_1$ - sol a sist. (2), dar nu verif. rel. (3) !! ((∃) componente strict negative)

ii) sist. (2) are cel mult $C_5^2 = 10$ soluții de bază, am găsit (foarte repede) o soluție ($\bar{X}_1$) dar nu ne folosește (este neadmisibilă), vom căuta alta, luând de exemplu x_3 și x_4^c variabile principale:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & \boxed{-1} & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \end{array}\right) /\cdot(-1) /\cdot 2 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 5 & 5 & 0 & \boxed{-2} & -1 & 22 \end{array}\right) \left(-\tfrac{1}{2}\right) /\cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\sim \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1/2 & 3/2 & 1 & 0 & -1/2 & 5 \\ -5/2 & -5/2 & 0 & 1 & 1/2 & -11 \end{array}\right) \Rightarrow \bar{X}_2 = (0,0,5,-11,0)^T \rightarrow \text{S.B. neadmisibilă}$$

x_1, x_2: v.s$=0$; x_3, x_4^c: v.p; x_5^c: v.s$=0$

(deci nu verif. condiția (3)) nu avem ce face cu ea

iii) căutăm alta (cu x_1 și x_4^c v. principale → de ce??)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \end{array}\right) /\cdot\tfrac{1}{2} /\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 5/2 & 5/2 & \boxed{1/2} & -1 & \boxed{7} \end{array}\right) /\cdot 2 \sim$$

$$\sim \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_0 \end{array} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & -2 & 14 \end{array}\right) \Rightarrow \bar{X}_0 = (10,0,0,14,0)^T \rightarrow \text{S.B.A.};$$

$x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c$ — x_1, x_4^c: v.princ.; x_2, x_3, x_5^c: v.sec.$=0$

este sol. de bază admisibilă (verif (2)+(3)) deci putem începe alg. Simplex.

B	c_B	P_0	P_1 (3)	P_2 (−1)	P_3 (−2)	P_4^c (0)	P_5^c (0)	$\theta_i \overset{def}{=} \frac{C_B}{P_k}$	
P_1	3	10	1	3	2	0	−1	10/3	
P_4^c	0	14	0	$\boxed{5}$	5	1	−2	14/5	$/5$ / $\cdot(-3/5)$
	$f(\overline{X}_0)=$	30	0	10	8	0	−3		
P_1	3	8/5	1	0	−1	−3/5	$\boxed{1/5}$	8	$\cdot 5$ / $\cdot 2$
P_2	−1	14/5	0	1	1	1/5	−2/5	*	
	$f(\overline{X}_1)=$	2	0	0	−2	−2	1		
P_5^c	0	8	5	0	−5	−3	1		
P_2	−1	6	2	1	−1	−1	0		
	$f(\overline{X}_2)=$	−6	−5	0	3	1	0		

pe col. lui P_0 $\Rightarrow$ $\begin{cases} \overline{X}_0 = (10,0,0,14,0)^T \\ f(\overline{X}_0) = 30 \end{cases}$

pe col. lui P_0 $\Rightarrow$ $\begin{cases} \overline{X}_1 = (8/5, 14/5, 0, 0, 0)^T \\ f(\overline{X}_1) = 2 \end{cases}$

pe col. lui P_0 $\Rightarrow$ $\begin{cases} \overline{X}_2 = (0, 6, 0, 0, 8)^T \\ f(\overline{X}_2) = -6 \end{cases}$

$\Downarrow$ 4c)

$(\min) f = -\infty$ (PPL are optim infinit, deci nu are S.O)

Obs: - am putut aplica alg. simplex, doar după ce am determinat cu met. lui Gauss o S.B.A.i ($\overline{X}_0$) !!!

- pentru a evita calculul multor sol. de bază neadmisibile până găsim una admisibilă, ~~aplicăm~~ aplicăm metoda celor 2 faze.

Atașăm $(P.P.L)_s$ $(1_s)-(3_s)$ problema artificială

$$\begin{cases} (1a)\ (\min) f_a(x_6^a, x_7^a) = x_6^a + x_7^a \{+0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 \cdot 0\cdot x_3 + 0 x_4^c + 0\cdot x_5^c\} \\ (2a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4^c + x_6^a = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5^c + x_7^a = 10 \end{cases} \\ (3a)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c, x_6^a, x_7^a \geq 0 \end{cases} \longmapsto \text{problema artificială } (PPL)_a$$

Din sist. (2a) $\Rightarrow$

$$\overline{A}_a = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_6^a & P_7^a & P_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \overline{X}_0^a = (0,0,0,0,0,6,10)^T$$

v. sec. = 0 v. princ.

$\searrow$ S.B.A.i a {sol. de bază adm. inițială ptr. probl. artificială}

Obs: i) adunând în fiecare ecuație câte o variabilă artificială, ne-au apărut coloanele matricii unitate (nu a fost nevoie să aplicăm metoda lui Gauss)

ii) aplicăm alg. simplex ptr. a rezolva $(P.P.L)_a$ cu soluția inițială găsită (imediat) X_0^a:

			0	0	0	0	0	1	1		
B	C_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4^c	P_5^c	P_6^a	P_7^a	$\theta_i = \frac{C_B}{P_j}$	
P_6^a	1	6	2	1	-1	-1	0	1	0	6/1	
P_7^a	1	10	1	$\boxed{3}$	2	0	-1	0	1	10/3	$/\cdot\frac{1}{3}$ $/(-\frac{1}{3})$
	$f_a=$	16	3	4	1	-1	-1	0	0		
P_6^a	1	8/3	$\boxed{5/3}$	0	-5/3	-1	1/3	1	-1/3	8/5	$/\cdot\frac{3}{5}$ $/\cdot(-\frac{1}{5})$
P_2	0	10/3	1/3	1	2/3	0	-1/3	0	1/3	10	
	$f_a=$	8/3	5/3	0	-5/3	-1	1/3	0	-4/3		
P_1	0	8/5	1	0	-1	-3/5	1/5	3/5	-1/5		
P_2	0	14/5	0	1	1	1/5	-2/5	-1/5	2/5		
	$f_a=$	0	0	0	0	0	0	-1	-1		

→ coef. funcției artificiale „f_a"

← Faza I^a

pe col. lui P_0

(1,4,5)

$\overline{X}^{artif}_{optim} = (8/5, 14/5, 0, 0, 0, 0, 0)^T$ → sol. optimă (dar nu este unică) ptr. $(PPL)_a$.

$(min)\, f_a = 0$

Rezolvăm acum probl. inițială în formă standard cu soluția inițială $\overline{X}_0 \equiv \overline{X}^{artif}_{optim}$ (fără variabilele artif.), aplicând alg. simplex:

			3	-1	-2	0	0		
B	C_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4^c	P_5^c	$\theta_i = \frac{C_B}{P_j}$	
P_1	3	8/5	1	0	-1	-3/5	$\boxed{1/5}$	8	$/\cdot 5$ $/\cdot 2$
P_2	-1	14/5	0	1	1	1/5	-2/5	*	
	$f=$	2	0	0	-2	-2	1/5		
P_5^c	0	8	5	0	-5	-3	5		
P_2	-1	6	2	1	-1	-1	0		
	$f=$	-6	-5	0	3	1	0		

→ coef. funcției „f" din forma standard

Obs: primul tabel simplex al fazei II^a se obține din ultimul tabel simplex al fazei I^a (eliminând coloanele vectorilor artificiali și completând noile valori pe coloana C_B)

→ Faza II^a

(4,4c)

$(min)\, f = -\infty$

($\exists$) diferența $z_j - c_j > 0$ $(z_3 - c_3 = 3 > 0)$, dar componentele vectorului P_j corespunzător sunt toate ≤ 0 $\{P_3 = (-5, -1)^T$ are ambele componente negative$\}$

$$(PPL)\begin{cases}(1)\ (\max)\ f(x_1,x_2,x_3)=2x_1+2x_2-x_3\\ (2)\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\geq 8\\ 2x_1+x_2+3x_3\leq 12\end{cases}\\ (3)\ x_1,x_2,x_3\geq 0\end{cases}
\iff (PPL)_s\begin{cases}(1s)\ (\min)(-f)=-2x_1-2x_2+x_3+0x_4^c+0x_5^c\\ (2s)\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4^c=8\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_5^c=12\end{cases}\\ (3s)\ x_1,x_2,x_3,x_4^c,x_5^c\geq 0\end{cases}$$

Atașam $(PPL)_s$ o nouă problemă (artificială) $(PPL)_a$ {făcând adunând în ecuațiile din sistemul $(2s)$ variabile artificiale (în ecuațiile unde am scăzut var. de compensare sau nu am introdus var. de compensare)}

$$(PPL)_a\begin{cases}(1a)\ (\min)\ f_a(x_1,x_2,x_3,x_4^c,x_5^c,x_6^a)=0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4^c+0\cdot x_5^c+x_6^a\\ (2a)\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4^c+x_6^a=8\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_5^c=12\end{cases}\\ (3a)\ x_1,x_2,x_3,x_4^c,x_5^c,x_6^a\geq 0\end{cases}$$

$$\left[f_a(x_6^a)=x_6^a\right] \overset{(2s)}{\Longrightarrow} \bar{A}=\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc}P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_6^a & P_0\end{array}\\ \left(\begin{array}{cccccc|c}1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 8\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12\end{array}\right)\end{array}$$

v.sec. $=0$; v. prin

$$\Downarrow$$

$$\overline{X}_0^{artif.}=(0,0,0,0,12,8)^T \to SBAI_a$$

Faza I

B	C_B	P_0	P_1 (0)	P_2 (0)	P_3 (0)	P_4^c (0)	P_5^c (0)	P_6^a (1)	$\theta_i=\frac{P_0}{P_j}$
P_6^a	1	8	1	$\boxed{2}$	1	−1	0	1	$8/2=4$
P_5^c	0	12	2	1	3	0	1	0	$12/1=12$
	$f_a=$	8	1	2	1	−1	0	0	z_j-c_j
P_2	0	4	1/2	1	1/2	−1/2	0	1/2	
P_5^c	0	8	3/2	0	5/2	1/2	1	−1/2	
	$f_a=$	0	0	0	0	0	0	−1	z_j-c_j

$|\cdot\frac{1}{2}\ /(-\frac{1}{2})$

atenție, în bază se scriu vectorii în ordinea coloanelor matricei unitate adică $\{P_6^a, P_5^c\}$ și nu $\{P_5^c, P_6^a\}$

$\overset{(4s)}{\to}$ sol. este optimă (dar nu este unică)

$$\begin{cases}X_{optim}^{artif.}=(0,4,0,0,8,0)^T \to \text{sol. optimă a } (PPL)_a \text{ (dar nu este unică)}\\ (\min)\ f_a=0\end{cases}$$

Faza II

B	C_B	P_0	P_1 (−2)	P_2 (−2)	P_3 (1)	P_4^c (0)	P_5^c (0)	$\theta_i=\frac{P_0}{P_1}$
P_2	−2	4	1/2	1	1/2	−1/2	0	$4/\frac{1}{2}=8$
P_5^c	0	8	$\boxed{3/2}$	0	5/2	1/2	1	$8/\frac{3}{2}=\frac{16}{3}$
	$-f=$	−8	1	0	0	1	0	z_j-c_j
P_2	−2	4/3	0	1	−1/3	−2/3	−1/3	*
P_1	−2	16/3	1	0	5/3	$\boxed{1/3}$	2/3	16
	$-f=$	$-\frac{40}{3}$	0	0	−11/3	2/3	−2/3	z_j-c_j
P_2	−2	12	2	1	3	0	1	
P_4^c	0	16	3	0	5	1	2	
	$-f=$	−24	−2	0	−7	0	−2	z_j-c_j

$|\cdot\frac{2}{3}\ /(-\frac{1}{3})$

$|\cdot 3\ /(-2)$

În primul tabel simplex: {avem 2 diferențe $z_j-c_j>0$ și maxime ($z_1-c_1=z_4-c_4=1$) și l-am ales pe P_1 (puteam să-l introducem și pe P_4^c)}

(4a) și P_0 sol.

$$\begin{cases}X_{optim}^{standard}=(0,12,0,16,0)^T - \text{S.O. unică}\\ \min(-f)=-24\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}X_{optim}^{init.}=(0,12,0)^T \to \text{S.O. unică}\\ (\max)\ f=24\end{cases}$$

5

III

$$(PPL)_i \begin{cases} (1)\ (\min) f(x_1,x_2,x_3) = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ (2) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \end{cases} \\ (3)\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (PPL)_S \begin{cases} (1_S)\ (\min) f = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0x_4^c \\ (2_S) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4^c = 10 \end{cases} \\ (3_S)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Obs

$(2_S) \to \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 10 \end{array}\right)$ $\underline{\underline{\text{nu}}}$ are nici o coloană a matricii unitate. Deci ar trebui să facem cu met. lui Gauss $\underline{\underline{2 \text{ col.}}}$ ale I_2

$$\Rightarrow (PPL)_a \begin{cases} (1a)\ (\min) f_a(x_5^a, x_6^a) = x_5^a + x_6^a \\ (2a) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5^a = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4^c + x_6^a = 10 \end{cases} \\ (3a)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^a, x_6^a \geq 0 \end{cases}$$

$(2a) \Rightarrow \bar{A}_a = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$ (v. sec. = 0; v. princ.) $\Rightarrow X_0^a = (0, 0, 0, \underset{4}{0}, 4, 10)^T$ – SBAi$_a$

Faza I

B	C_B	P_0	P_1 (0)	P_2 (0)	P_3 (0)	P_4^c (0)	P_5^a (1)	P_6^a (1)	θ_i	
P_5^a	1	4	1	1	$\boxed{2}$	0	1	0	$4/2 = 2$	$/\cdot\frac{1}{2}$ $/(-\frac{3}{2})$
P_6^a	1	10	2	-1	3	-1	0	1	$10/3$	+
	$f_a =$	14	3	0	5	-1	0	0		
P_3	0	2	$\boxed{1/2}$	1/2	1	0	1/2	0	$2/\frac{1}{2} = 4$	$/\cdot 2$ $/(-1)$
P_6^a	1	4	1/2	-5/2	0	-1	-3/2	1	$4/\frac{1}{2} = 8$	+
	$f_a =$	4	1/2	-5/2	0	-1	-5/2	0		
P_1	0	4	1	1	2	0	1	0		
P_6^a	1	2	0	-3	-1	-1	-2	1		
	$f_a =$	2	0	-3	-1	-1	-3	0		

(0 0 0 0 1 1 → coef. lui „f_a")

$\Downarrow$ ha

$$\begin{cases} X_{opt.}^{artif} = (4, 0, 0, 0, 0, 2)^T \to \text{sol. opt. unică} \\ (\min) f_a = 2 > 0 \Rightarrow (PPL)_S\ \underline{\underline{\text{nu}}} \text{ are sol. de bază admisibile} \end{cases}$$

(toate ale $C_4^2 = 6$ S.B ale lui (2_S) sunt neadmisibile)

$\Downarrow$

$(PPL)_i$ nu are soluție (nici optimă, nici altfel) – ADERANT ECONOMIC

(IV)

$$(PPL)_i \begin{cases} (1)\ (\max) f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ (2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10 \end{cases} \\ (3)\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow (PPL)_s \begin{cases} (1_s)\ (\min)(-f) = -3x_1 - x_2 - 2x_3 + 0x_4^e \\ (2_s) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^e = 10 \end{cases} \\ (3_s)\ x_1, x_2, x_3, x_4^e \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

(6)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1_a)\ (\min) f_a(x_5^a) = x_5^a \\ (2_a) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5^a = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^e = 10 \end{cases} \\ (3_a)\ x_1, x_2, x_3, x_4^e, x_5^a \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{A}_a = \begin{array}{c} P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4^e \quad P_5^a \quad P_0 \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 10 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \underbrace{\bar{X}_0^a = (0,0,0,10,8)^T}_{SBAI_a}$$

v.sec.=0 v.princ.

Faza I (se rezolvă probl. artificială)

B	C_B	P_0	0 P_1	0 P_2	0 P_3 ↓	0 P_4^e	1 P_5^a	$\theta_i = \frac{C_B}{P_3}$ ↓
← P_5^a	1	8	2	−1	$\boxed{3}$	0	1	8/3
P_4^e	0	10	3	1	2	1	0	10/2=5
	$f_a=$	8	2	−1	3	0	0	$z_j - c_j$
P_3	0	8/3	2/3	−1/3	1	0	1/3	
P_4^e	0	14/3	5/3	5/3	0	1	−2/3	
	$f_a=$	0	0	0	0	0	−1	

→ coef. fct. artif. „f_a"

$\cdot 1/3 \,/\, \cdot(-2/3)$ } $\theta_i > 0$, minim → crit. de ieșire din bază

$z_j - c_j$ (>0 și max) → crit. de intrare în bază

III 4b)

$$\begin{cases} X_{optim}^{artif.} = (0,0,0,8/3,14/3,0)^T \\ (\min) f_a = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sol. optimă (nu este unică) ptr. } (PPL)_a$$

Faza II (se rezolvă probl. în formă standard)

B	C_B	P_0	−3 P_1	−1 P_2 ↓	−2 P_3	0 P_4^e	$\theta_i = \frac{C_B}{P_2}$ ↓
P_3	−2	8/3	2/3	−1/3	1	0	*
← P_4^e	0	14/3	5/3	$\boxed{5/3}$	0	1	14/5
	$-f=$	−16/3	5/3	5/3	0	0	
P_3	−2	18/5	1	0	1	1/5	
P_2	−1	14/5	1	1	0	3/5	
	$-f=$	−10	0	0	0	−1	

→ coef. fct. „$-f$"

$\cdot \frac{3}{5} \,/\, \cdot\left(\frac{1}{5}\right)$

→ { Puteam introduce în bază oricare dintre vectorii P_1 sau P_2. L-am ales pe P_2 }

II 4b)

$$\begin{cases} X_{optim}^{standard} = (0, 14/5, 18/5, 0) \text{ (nu este unică)} \\ (\min)(-f) = -10 \end{cases} \Rightarrow$$

deoarece $P_1 \notin B$ și $z_1 - c_1 = 0$

$$\begin{cases} X_{optim}^{inițială} = (0, 14/5, 18/5)^T \\ (\max) f = 10 \end{cases}$$

dar nu este unică

$(PPL)_i$ are o ∞ de soluții optime

(1) $(\max/\min)\, f(x_1,x_2,x_3) = - - - -$

$$(2)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 \le 12 \\ 3x_1 - x_2 \ge 5 \\ 2x_1+2x_2-x_3 = 10 \\ -x_1+3x_2+4x_3 \ge 15 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 \le 8 \end{cases} \xrightarrow{} (PPL)_g \Rightarrow$$

(3) $x_1, x_2, x_3 \ge 0$

(1s) $(\min)\big(f \text{ sau } (-f)\big) = - - - -$

$$(2s)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 + x_4^c = 12 \\ 3x_1 - x_2 - x_5^c = 5 \\ 2x_1+2x_2-x_3 = 10 \\ -x_1+3x_2+4x_3 - x_6^c = 15 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_7^c = 8 \end{cases} \rightarrow (PPL)_s$$

(3s) $x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c, x_6^c, x_7^c \ge 0$

Obs:

sistemului în forma standard (2s) îi corespunde matricea extinsă:

$$\bar A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & x_6^c & x_7^c & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 15 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \end{array}$$

care are doar 2 coloane ale matricii unitate I_5

În loc să facem alte 3 coloane prin t.e. (met. lui Gauss) atașăm problema artificială (din metoda celor 2 faze) astfel:

Varianta I (se introduce în fiecare ecuație câte o variabilă artificială), deci nr. maximal.

(1a) $(\min)\, f_a(x_8^a, x_9^a, x_{10}^a, x_{11}^a, x_{12}^a) = x_8^a + x_9^a + x_{10}^a + x_{11}^a + x_{12}^a$

$$(2a)\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 + x_4^c + x_8^a = 12 \\ 3x_1 - x_2 - x_5^c + x_9^a = 5 \\ 2x_1+2x_2-x_3 + x_{10}^a = 10 \\ -x_1+3x_2+4x_3 - x_6^c + x_{11}^a = 15 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_7^c + x_{12}^a = 8 \end{cases} \rightarrow \bar A_a =$$

$$\begin{array}{cccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & x_6^c & x_7^c & x_8^a & x_9^a & x_{10}^a & x_{11}^a & x_{12}^a & \\ \hline 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{array}$$

(3a) $x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c, x_6^c, x_7^c, x_8^a, x_9^a, \dots, x_{12}^a \ge 0$

v.sec. = 0   v.P

$$\bar X_0^a = (0,0,0,0,0,0,0,12,5,10,15,8)^T \rightarrow SBAI_a$$

Obs. i) aveam nevoie de 5 coloane ale matricii unitate (I_5) și am obținut 7 coloane (prima și a cincea în dublu exemplar!!)

ii) $(PPL)_a$ are acum 12 necunoscute

iii) nu este nevoie să introducem obligatoriu în fiecare ecuație câte o variabilă artificială, ci doar în ale în care am scăzut sau nu am introdus variabile de compensare.

Varianta II (se introduce nr. minim necesar de variabile artificiale, deci nr. optim)

$$
\begin{cases}
(1a)\ (\min)\ f_a(x_8^a, x_9^a, x_{10}^a) = x_8^a + x_9^a + x_{10}^a \\
(2a)\ \begin{cases}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4^c = 12 \\
3x_1 - x_2 - x_5^c + x_8^a = 5 \\
2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_9^a = 10 \\
-x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_6^c + x_{10}^a = 15 \\
4x_1 - x_2 - x_3 + x_7^a = 8
\end{cases} \\
(3a)\ x_1, \dots, x_{10}^a \geq 0
\end{cases}
\Rightarrow
\bar{A}_a =
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & x_6^c & x_7^c & x_8^a & x_9^a & x_{10}^a \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\
3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 \\
2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \\
-1 & 3 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 15 \\
4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 8
\end{array}\right)
\end{array}
$$

v.sec. $= 0$

v.princ. $(x_4^c, x_7^c, x_8^a, x_9^a, x_{10}^a)$

$$X_0^a = (0,0,0,12,0,0,8,5,10,15)^T$$

$\rightarrow$ S.B.A.i_a

Obs: în acest caz am introdus doar 3 variab. artificiale, $(P.P.L)_a$ depinzând doar de 10 variabile.