

II.6) Algoritmul SIMPLEX (al îmbunătățirilor succesive) p.r. rezoluția (PPL)₃

Fie (PPL)₃ scrisă sub formă explicită:

care verifică rel. (X) $\begin{cases} m < n \\ r_A = m \end{cases}$

$$\begin{cases} (1s) \text{ (min)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ (2s) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \\ (3s) x_j \geq 0, j = \overline{1, n} \end{cases}$$

Conform T_5 și T_6 enunțate (și dem.) în cursul 5:

T_5 : " $\bar{X} \in S_{AB} \Leftrightarrow \bar{X}$ este punct extrem (vârf) al mulțimii S_A "

T_6 : " $X_0 \in S_0 \Rightarrow (\exists) \bar{X} \in S_{AB}$ a.r. $f(X_0) = m = f(\bar{X})$ " unde $m = \min_{X \in S_A} f(X) = f(X_0)$

ne putem imagina următorul algoritm pentru determinarea soluției (-lor) optime ale unei (PPL)₃ care admite optim finit ($m < +\infty$):

- 1) Determinăm toate soluțiile de bază (cu metoda lui Gauss) ale sistemului (2s) (sunt cel mult C_n^m);
 - 2) Eliminăm dintre acestea pe cele inadmisibile (care nu verifică condițiile de nenegativitate (3s)) și obținem mulțimea S_{AB} ;
 - 3) Calculăm valoarea funcției obiectiv „f” în toate elementele lui S_{AB} . Soluția optimă X_0 va fi cea s.b.a. $\bar{X}_k \in S_{AB}$ unde funcția ia valoarea minimă (= m).
- Obs: Dacă există mai multe s.b.a. în care „f” are aceeași valoare minimă „m”, atunci (PPL)₃ va avea o infinitate de soluții optime, determinate de conv. liniar convexă a acestora, adică:
- $$\begin{cases} X_N^{\text{optimă}} = \lambda \bar{X}_k + (1-\lambda) \bar{X}_r; \lambda \in [0,1] \text{ și } \bar{X}_k, \bar{X}_r \in S_{AB} \\ f(X_N^{\text{optimă}}) = m = f(\bar{X}_k) = f(\bar{X}_r) \end{cases}$$

Dar, procedura de mai sus are două „defecte” mari:

- 1) nu poate fi aplicată când (PPL)₃ are optim „infinit” (și cum știm noi „dinainte” dacă are optim finit sau nu!!);
- 2) numărul foarte mare de s.b. ale sist. lin. (2s) care apar în problemele reale economice.

Ex Să pp. să sistemul liniar (2s) are:

- a) $\begin{cases} m = 10 \text{ (ecuații/restricții economice)} \\ n = 40 \text{ (necunoscuta inițiale + de compensare)} \end{cases} \Rightarrow (\exists) \text{ cel mult } C_{40}^{10} = 847.660.528 \text{ - soluții de bază (vârfuri ale lui } S_A)$
 - b) $\begin{cases} m = 30 \\ n = 100 \end{cases} \Rightarrow (\exists) \text{ cel mult } C_{100}^{30} = 29.342.339.821.610.944.823.963.760 \text{ (!!!) - soluții de bază}$
- ↓
numărul are 26 de cifre (!!!)

Matematicianul și economistul **George Bernard DANTZIG (1914-2005)** a dezvoltat în 1947 (fiind colonel în U.S. Air Force) un algoritmul numit **SIMPLEX** pentru a rezolva o **unică problemă** de alocări de resurse militare (oameni, echipamente, armament, hrană, munii, etc.) pe durata de operațiuni din al doilea război mondial. Acest algoritmul pornește de la o S.B.A. inițială (\bar{x}_0) a sistemului (2) pe care o îmbunătățește succesiv (valoarea funcției director scade/cresce în noile soluții obținute) până ajunge la soluția optimă. Conform aprecierii jurnalului științific "Computing in Science and Engineering" este unul dintre primii 10 algoritmi inventați în secol și este al mai folosit algoritmul în artă (într-un timp au mai apărut și alte metode de rezolvare a (PPL)). Numărul de îmbunătățiri (de determinare a noi S.B.A./de setări/de iterații) este în imensa majoritate a cazurilor $\leq m+n$ (!!!).

Teoreme care fundamentează algoritmul SIMPLEX

Aplicând metoda lui Gauss pentru a rezolva sist. lin. (2), vom presupune că am determinat (17) o soluție de bază admisibilă inițială (S.B.A.i) a (PPL)₂, notată cu $\bar{x} \in S_{AB}$, adică:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \sim \dots \sim \bar{A}_{GJ} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{i_1} & p_{i_2} & \dots & p_{i_m} & p_n & p_0 \\ d_{11} & d_{12} & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 & d_{1n} & p_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 & d_{2n} & p_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & d_{in} & p_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & d_{mn} & p_m \end{pmatrix}$$

deci \bar{x} va fi de forma:

$$(6.1) \bar{x} = (0, 0, \dots, 0, \underbrace{p_1}_{\bar{x}_{i_1}}, 0, \dots, \underbrace{p_2}_{\bar{x}_{i_2}}, 0, \dots, \underbrace{p_m}_{\bar{x}_{i_m}}, 0, \dots, 0)^T \in S_{AB}$$

$$\text{cu: } \begin{cases} \bar{x}_{i_j} = p_{i_j} \geq 0; \quad \forall i \in I \text{ și } j \in J \rightarrow \text{componente bazice (principale)} \\ \bar{x}_j = 0; \quad \forall j \in J^c \text{ și } j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus I \rightarrow \text{componente nebazice (secundare)} \end{cases}$$

Conf. matricii \bar{A}_{GJ} , vectorii corespunzători variabilelor principale $p_i, i \in I$ sunt de fapt vectorii bazei canonice din \mathbb{R}^m , adică:

$$B_c = \{ \underbrace{p_{i_1}}_{=e_1}, \underbrace{p_{i_2}}_{=e_2}, \dots, \underbrace{p_{i_m}}_{=e_m} \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

iar ceilalți vectori $p_j, j \in J^c$ au componenta în această bază „ d_{ij} ” adică:

$$(8.2) p_j = (d_{1j}, d_{2j}, \dots, d_{mj})^T = d_{1j} p_{i_1} + d_{2j} p_{i_2} + \dots + d_{mj} p_{i_m}$$

Valoarea funcției director „ f ” în soluția de bază admisibilă inițială găsită (\bar{x}) este egală cu $f(\bar{x}) = f(1, 1)$ cu:

(6.3) $f(\bar{x}) = f(c_0, p_1, \dots, p_m, 0) = c_0 + c_1 p_1 + c_2 p_2 + \dots + c_m p_m$ (not $f(\bar{x}) = \sum c_B \cdot p_0$) (3)

Fie cantitatile $z_j, j=\overline{1, n}$ definite astfel:

(6.4) $z_j \stackrel{\text{def}}{=} c_{i_1} a_{1j} + c_{i_2} a_{2j} + \dots + c_{i_m} a_{mj}$ (not $z_j = \sum c_B \cdot p_j$)

Not: i) $c_B = \begin{pmatrix} c_{i_1} \\ c_{i_2} \\ \vdots \\ c_{i_m} \end{pmatrix} \rightarrow$ coeficientii funcției obiectiv în corespunderea variabilelor bazice (principale) din soluția \bar{x} ii) $p_0 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_m \end{pmatrix} \rightarrow$ valorile variabilelor bazice (principale) din sol. \bar{x} (formele stau din A_{B_j})

iii) $p_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, j=\overline{1, n} \rightarrow$ coloanele matricii $A_{B_j} (=)$ vectorii p_1, p_2, \dots, p_n care apar în soluția \bar{x} găsită.

Următoarele 3 teoreme fundamentale etapele algoritmului Simplex de rezolvare a (PPL)_s:

Teorema 1 (criteriul de optim finit)

Fie $\bar{x} \in S_{AB}$ o sol de bază admisibilă a sist. (P_s). Dacă toate diferențele $z_j - c_j \leq 0, j=\overline{1, n}$ corespunzătoare acestei soluții, atunci \bar{x} este soluție optimă a (PPL)_s, adică:

(6.5) $\bar{x} \in S_{AB}$ a.ș. $z_j - c_j \leq 0, j=\overline{1, n} \Leftrightarrow \bar{x} \in S_0$

Obs:

i) (V) $\bar{x} \in S_{AB}$, înțelegându-se $z_i - c_i = 0, i \in I = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ (diferențele $z_i - c_i = 0$ p. b. $p_i \in B_c$)

ii) Pentru $j \in J = \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$ (diferențele corespunzătoare vectorilor $p_j \notin B_c$) putem avea 2 situații:

$\begin{cases} a) \underline{z_j - c_j < 0; j \in J} \Rightarrow \bar{x} \text{ este soluție optimă (finită) și unică;} \\ b) \underline{z_j - c_j \leq 0; j \in J} \wedge (\exists) z_j - c_j = 0 \Rightarrow \bar{x} \text{ este soluție optimă (finită) dar nu este unică} \end{cases}$

(PPL)_s are o infinitate de soluții optime (finite)!

iii) Evident dacă condiția de optim (6.5) nu este satisfăcută ($\Leftrightarrow (\exists) j \in J$ a.ș. $z_j - c_j > 0$ atunci

$\bar{x} \notin S_0$ (\bar{x} nu este soluție optimă) și va trebui să căutăm alte soluții de bază admisibile "mai bune" decât \bar{x} (valoarea funcției obiectiv se scade) adică: $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2 \rightarrow \dots \rightarrow \bar{x}_{opt}$

a.ș. $f(\bar{x}) > f(\bar{x}_1) > f(\bar{x}_2) > \dots > f(\bar{x}_{opt}) = \underline{m} = \min_{x \in S_A} f(x)$

Teorema 2 (criteriul de optim infinit)

Fie $\bar{x} \in S_{AB}$ pentru care $(\exists) j \in J$ a.ș. $z_j - c_j > 0$. Dacă $(\exists) p_j \notin B_c (j \in J)$, corespunzător unei diferențe $z_j - c_j > 0$, care are toate componentele $a_{ij} < 0, i=\overline{1, m}$ atunci (PPL)_s are optim infinit ($\min_{x \in S_A} f(x) = -\infty$), adică:

(6.6) $\bar{x} \in S_{AB}$ și $(\exists) p_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T$ a.ș. $\begin{cases} a_{ij} \leq 0; i=\overline{1, m} \\ z_j - c_j > 0 \end{cases} \Rightarrow \min f(\bar{x}) = -\infty$

Obs:

- i) evident că în acest caz S.B.A.: \bar{X} nu este soluție optimă; (PPL)₀ nu are soluție optimă.
- ii) dacă (PPL)₀ nu are optim finit \Rightarrow (PPL)₁ inițială nu are optim finit (în plus $\max f = +\infty$)
- iii) (!!!) d.p.d.v. economic această situație este absurdă și nu poate fi întâlnită în practică (nu poți avea obiectivul care scade spre $-\infty$ sau profit care crește la $+\infty$); dacă se găsește această situație pe un model matematic al unei probleme reale economice \Rightarrow modelul matematic este greșit/prost făcut și trebuie corectat !!!

Teorema 3 (criteriile de intrare/ieșire din bază)

Fie $\bar{X} \in S_{AB}$ o soluție a sistemului (2s) care nu este optimă \Leftrightarrow (6.7) $z_j - c_j > 0$ și vectorii $P_j \notin B$ corespunzători acestora au măcar o componentă $x_{ij} > 0$. Făcând următoarea schimbare de bază (înlocuim vectorul $P_i \in B$ cu vectorul $P_j \notin B$):

i) va intra în bază vectorul $P_j \notin B$ corespunzător diferenței:

(6.7) $z_j - c_j = \max_{k \in J} \{z_k - c_k > 0\}$ („ P_j ” dacă $z_j - c_j > 0$ și maximă)

ii) va ieși din bază vectorul $P_i \in B$ corespunzător raportului:

(6.8) $\theta_i = \min_{k \in I} \{\theta_k > 0\} = \min_{k \in I} \left\{ \frac{P_k}{x_{kj}} > 0 \right\} \left(= \frac{P_0}{P_j} \right)$ („ P_i ” dacă $\theta_i > 0$ și minim)

vom obține o nouă soluție $\bar{X}' \in S_{AB}$ a.î. $f(\bar{X}') \leq f(\bar{X})$ (adică noua S.B.A.: \bar{X}' va fi mai „bună” decât vechea S.B.A.: \bar{X} , deoarece valoarea funcției obiectiv în noua soluție este mai mică decât în vechea soluție (= valoarea funcției obiectiv scade)

Obs:

- i) relația (6.7) se numește criteriul de intrare în bază;
(6.8) se numește criteriul de ieșire din bază;
- ii) c.f. enunțului T₃ aplicarea acestor criterii se face întotdeauna în ordine: 1) crit. de intrare deoarece pentru a afla a vector „ P_j ” părăsesc baza, trebuie să știm mai întâi ce vector „ P_j ” intră în bază (ptr. a putea calcula raportele θ_k !!)
- iii) dacă criteriile (6.7) sau (6.8) sunt satisfăcute de mai mulți vectori „ P_j ” respectiv „ P_i ” se alege la întâmplare unul dintre ei (usual, al mai din stânga „ P_j ”, respectiv cel mai de sus „ P_i ” din tabelul simplex atașat)
- iv) aceste 3 teoreme fundamentează etapele alg. SIMPLEX (calculule se fac în tabelul următor numit tabelul SIMPLEX)

Etapale algoritmului SIMPLEX

- Se aduce PPL₀ la forma standard PPL_s (adunăm/scădem variabile de compensare)
- Se determină o S.B.A. \bar{X}_0 folosind $\left\{ \begin{array}{l} \text{metoda lui Gauss (ineficientă în cazuri reale)} \\ \text{metoda celor două faze} \end{array} \right.$

- se construiește primul tabel SIMPLEX (corespunzător soluției inițiale găsite \bar{X}_0)

Obs: pe ultima linie a tabelului simplex, valorile lui $f(\bar{X}_0)$ și diferențele $z_j - c_j, j = \overline{1, n}$ se determină cu relațiile:

$$\begin{cases} a) f(\bar{X}_0) = \sum_{i=1}^m (c_i \cdot p_{i0}) \\ b) z_j - c_j = \sum_{i=1}^m (c_i \cdot p_{ij}) - c_j \end{cases}$$

- se aplică "Criteriul de optim"; la fiecare etapă (tabel) al alg. Simplex putem întâlni, una din următoarele 4 situații:

$$a) \begin{cases} z_j - c_j < 0; & (\forall) p_j \notin B \\ z_j - c_j = 0; & (\forall) p_j \in B \end{cases} \Rightarrow \text{soluția găsită (pe coloana } p_0) \text{ este } \underline{\text{optimă și unică}}; \text{ STOP}$$

$$b) \begin{cases} z_j - c_j \leq 0; & (\forall) p_j \notin B \text{ și } (\exists) p_j \notin B \text{ cu } z_j - c_j = 0 \\ z_j - c_j = 0; & (\forall) p_j \in B \end{cases} \Rightarrow \text{soluția găsită (pe coloana } p_0) \text{ este } \underline{\text{optimă, dar}} \\ \text{nu este unică (PPL) are o infinitate de sol. optime)} \text{ STOP}$$

$$c) (\exists) p_j \notin B \text{ a.t. } \begin{cases} (i) z_j - c_j > 0 \\ (ii) p_j \text{ are toate componentele } x_{ij} \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{soluția găsită (pe coloana } p_0) \text{ nu este} \\ \text{optimă, (PPL) are } \underline{\text{optim infinit}} \text{ (min} = -\infty, \text{ max} = +\infty) \text{ STOP}$$

$$d) (\exists) p_j \notin B \text{ a.t. } \begin{cases} (i) z_j - c_j > 0 \\ (ii) p_j \text{ are } \text{înc. componente } x_{ij} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{soluția găsită (pe coloana } p_0) \text{ nu este optimă} \\ \underline{\text{alg. continuă}}$$

Obs: în această situație trebuie să facem o schimbare de bază (cu formula substituției)

pentru a determina o nouă soluție \bar{X}_{k+1} mai "bună" decât valoarea soluției \bar{X}_k adică: $f(\bar{X}_{k+1}) < f(\bar{X}_k), (\forall) k \geq 0$.

- în cazurile b_1, b_2 și b_3 algoritmul simplex se oprește (!!). Cazul b_4 este unicul caz în care algoritmul continuă (și evident este cel mai des întâlnit).

- se aplică "Criteriul de intrare în bază"; la fiecare etapă a alg., va intra în bază vectorul $p_j \notin B$ corespunzător diferenței $z_j - c_j > 0$ și maximă $\{z_j - c_j = \max_{k \in J} \{z_k - c_k > 0\} \Rightarrow (p_j \notin B)\}$

- se aplică "Criteriul de ieșire din bază"; la fiecare etapă a alg., va ieși din bază vectorul $p_i \in B$ corespunzător raportului $\theta_i > 0$ și minim $\{\theta_i = \min_{k \in I} \{\theta_k > 0\} \Rightarrow \text{"} \leftarrow p_i \text{"} \mid \theta_k = \frac{p_{0k}}{p_{jk}}\}$

- se determină noua soluție $\bar{X}_{k+1}, k \geq 0$ făcând o schimbare de bază cu formula substituției (se construiește un nou tabel simplex)

- se repetă etapele $b_1 - b_4$ până se ajunge la unul din cazurile b_1, b_2, b_3 .

Ex: Determinați soluția optimă (în cazul în care există) a următoarei (PPL)_g:

$$(PPL)_g \begin{cases} (1_g) \text{ (min)} f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 \\ (2_g) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \leq 10 \end{cases} \\ (3_g) x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

① Aducem (PPL)_g la forma standard (PPL)_s (aici, vom adăuga variabile de compansare):

$$(PPL)_s \begin{cases} (1_s) \text{ (min)} f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5^c, x_6^c, x_7^c) = 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 0 \cdot x_5^c + 0 \cdot x_6^c + 0 \cdot x_7^c \\ (2_s) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5^c = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_6^c = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_7^c = 10 \end{cases} \\ (3_s) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5^c, x_6^c, x_7^c \geq 0 \end{cases}$$

no. S.B. $\leq C_3 = 35$ (!!!)

② Determinăm \bar{X}_0 S.B.A.i (folosind metode lui Gauss de rezolvare a sistemelor liniare)

$$(2_s) \xrightarrow{\text{atașăm}} \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \bar{X}_0 = (0, 0, 0, 0, 6, 4, 10)^T \in \mathbb{R}^7 - \text{S.B.A.i (nongenerată)}$$

v. nec. = 0 v. p. nec. = 1

③ Construim tabelul simplex aferent soluției initiale \bar{X}_0 :

		coef. funcției „f” din (1 _s)							b _i = c _B · b _i / a _{ik}}
B	C _B	P ₀	\bar{P}_1	\bar{P}_2	\bar{P}_3	\bar{P}_4	\bar{P}_5^c	\bar{P}_6^c	
\bar{P}_5^c	0	6	1	-2	1	1	1	0	$\theta_1 = 6$
\bar{P}_6^c	0	4	2	1	-3	0	0	1	$\theta_2 = 4$
\bar{P}_7^c	0	10	1	2	2	2	0	0	$\theta_3 = 5$
	$f(\bar{X}_0) = 0$		-3	-1	2	-2	0	0	$\bar{P}_0 = -5$
\bar{P}_5^c	0	1	1/2	-3	0	2	1	0	-1/2
\bar{P}_6^c	0	1/2	1	4	0	-3	0	1	3/2
\bar{P}_7	-2	5	1/2	1	1	1	0	0	1/2
	$f(\bar{X}_1) = -10$		-4	-3	0	0	0	0	$\bar{P}_0 = -8$

alegung $\bar{X}_0 = (0, 0, 0, 0, 6, 4, 10)^T$
 $f(\bar{X}_0) = 0$

alegung $\bar{X}_1 = (0, 0, 5, 0, 1, 19, 0)^T$
 $f(\bar{X}_1) = -10$

soluția \bar{X}_1 este soluție optimă dar nu este unică; (PPL) are o infinitate de S.O. (finite)

Fi: :

$$(PPL)_g \begin{cases} \bar{X}_1 = \bar{X}_{\text{optimal}} = (0, 0, 5, 0, 1, 19, 0)^T \in \mathbb{R}^7 \\ \text{(min)} f(X) = f(\bar{X}_1) = -10 \\ X \in S_A \end{cases}$$

$$\Rightarrow (PPL)_g \begin{cases} \bar{X}_{\text{optimal}} = (0, 0, 5, 0)^T \in \mathbb{R}^4 \\ \text{(min)} f(X) = -10 \\ X \in S_A \end{cases}$$

→ dar nu este unică
 (PPL)_g are o infinitate de sol. optime (finite)