II.6) Algoritmul SIMPLEX (al îmbunătăţirilor succesive) pentru rezolvarea $(PPL)_S$

Fie $(PPL)_S$ scrisă sub formă explicită:
$$\begin{cases} (1_S)\ (\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ (2_S) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \\ (3_S)\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n} \end{cases}$$
care verifică rel. $(*)\begin{cases} m < n \\ r_A = m \end{cases}$

Conform $\underline{\underline{T_5}}$ şi $\underline{\underline{T_6}}$ enunţate (şi date) în cursul 5:

$\underline{\underline{T_5}}$: "$\overline{X} \in S_{AB} \Leftrightarrow \overline{X}$ este punct extrem (vârf) al mulţimii S_A"

$\underline{\underline{T_6}}$: "$X_0 \in S_0 \Rightarrow (\exists)\ \overline{X} \in S_{AB}$ a.î. $f(X_0) = m = f(\overline{X})$" (unde $m = \min\limits_{X \in S_A} f(X) = f(X_0)$)

se poate imagina următorul algoritm pentru determinarea soluţiei(-lor) optime ale unei $(PPL)_S$ care admite optim finit $(m < +\infty)$:

① Determinăm toate soluţiile de bază (cu metoda lui Gauss) ale sistemului (2_S) (sunt cel mult C_n^m);

② Eliminăm dintre acestea pe cele neadmisibile (care nu verifică condiţiile de nenegativitate $(3)_S$) şi obţinem mulţimea S_{AB};

③ Calculăm valoarea funcţiei obiectiv „f” în toate elementele lui S_{AB}. Soluţia optimă X_0 va fi acea S.B.A. $\overline{X}_k \in S_{AB}$ unde funcţia ia valoarea minimă $(= m)$

Obs: Dacă există mai multe S.B.A. în care „f” are aceeaşi valoare minimă „m”, atunci $(PPL)_S$ va avea o infinitate de soluţii optime, determinate de comb. liniar convexă a acestora, adică: $\begin{cases} X_\lambda^{optimă} = \lambda \overline{X}_k + (1-\lambda)\overline{X}_r \ ;\ \lambda \in [0,1] \text{ şi } \overline{X}_k, \overline{X}_r \in S_{AB} \\ f(X_\lambda^{optimă}) = m = f(\overline{X}_k) = f(\overline{X}_r) \end{cases}$

Dar, procedura de mai sus are două "defecte" mari:

① nu poate fi aplicată când $(PPL)_S$ are optim „infinit” (şi cum ştim noi "dinainte" dacă are optim finit sau nu!!);

② numărul foarte mare de S.B. ale sist. lin. (2_S) care apar în problemele reale economice

Ex Să pp. că sistemul liniar (2_S) are:

a) $\begin{cases} m = 10 \text{ (ecuaţii / restricţii economice)} \\ n = 40 \text{ (necunoscute iniţiale + de compensare)} \end{cases} \Rightarrow (\exists)$ cel mult $C_{40}^{10} = 847.660.528$ - soluţii de bază (vârfuri ale lui S_A)

b) $\begin{cases} m = 30 \\ n = 100 \end{cases} \Rightarrow (\exists)$ cel mult $C_{100}^{30} = 29.372.339.821.610.944.823.963.760$ (!!!) - soluţii de bază

$\Downarrow$

numărul are 26 de cifre (!!!)

Matematicianul şi economistul George Bernard DANTZIG (1914–2005) a dezvoltat în 1947 (fiind colonel în U.S. Air Force) un algoritm numit SIMPLEX pentru a rezolva o uriaşă problemă a alocării de resurse militare (oameni, echipamente, armament, hrană, muniţie, etc.) pe teatrele de operaţiuni din cel de-al doilea război mondial. Acest algoritm porneşte de la o S.B.A iniţială ($\overset{not}{=} X_0$) a sistemului (23) pe care o îmbunătăţeşte succesiv (valoarea funcţiei obiectiv scade/creşte în noile soluţii obţinute) până ajunge la soluţia optimă. Conform aprecierii jurnalului ştiinţific "Computing in Science and Engineering" este unul dintre primii 10 algoritmi inventaţi în secol şi este cel mai folosit algoritm şi astăzi (între timp au mai apărut şi alte metode de rezolvare a (PPL)). Numărul de îmbunătăţiri (de determinare a noi S.B.A / de salturi / de iteraţii) este în imensa majoritate a cazurilor $\leq m+n$ (!!!).

Teoreme care fundamentează algoritmul SIMPLEX

Aplicând metoda lui Gauss pentru a rezolva sist. lin. (23), vom presupune că am determinat (17) o soluţie de bază admisibilă iniţială (S.B.A.i) a $(PPL)_s$, notată cu $\bar{X} \in S_{AB}$, adică:

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \end{array} \sim \cdots \sim \bar{A}_{Gj} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} P_1 & P_2 & \cdots & P_{i_1} & \cdots & P_{i_2} & \cdots & P_j & \cdots & P_{i_m} \;\cdots\; P_n \;\; P_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccccccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{1j} & \cdots & 0 \;\cdots\; \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha_{2j} & \cdots & 0 \;\cdots\; \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{ij} & \cdots & 0 \;\cdots\; \alpha_{in} & \beta_i \\ \vdots & & & & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \alpha_{mj} & \cdots & 1 \;\cdots\; \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right) \end{array}$$

deci $\bar{X}$ va fi de forma:

(6.1) $$\bar{X} = (\underset{\bar{x}_1}{0}, \underset{\bar{x}_2}{0}, \dots, 0, \underset{\bar{x}_{i_1}}{\beta_1}, 0, \dots, \underset{\bar{x}_{i_2}}{\beta_2}, 0, \underset{\bar{x}_j}{0}, 0, \underset{\bar{x}_{i_m}}{\beta_m}, 0, \dots, \underset{\bar{x}_n}{0})^T \in S_{AB}$$

cu: $$\begin{cases} \bar{x}_i = \beta_i > 0 \;;\; (\forall)\, i \in I \overset{def}{=} \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \rightarrow \text{componente bazice (principale)} \\ \bar{x}_j = 0 \;;\; (\forall)\, j \in J \overset{def}{=} \{1, 2, \dots, n\} \setminus I \rightarrow \text{componente nebazice (secundare)} \end{cases}$$

Conf. matricii $\bar{A}_{Gj}$, vectorii corespunzători variabilelor principale P_i, $i \in I$ sunt de fapt vectorii bazei canonice din $\mathbb{R}^m$, adică:

$$B_C = \{\underbrace{P_{i_1}}_{=e_1}, \underbrace{P_{i_2}}_{=e_2}, \dots, \underbrace{P_{i_m}}_{=e_m}\} \subseteq \mathbb{R}^m$$

iar ceilalţi vectori P_j, $j \in J$ au componentele în această bază „α_{ij}", adică:

(6.2) $$P_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj})^T = \alpha_{1j} P_{i_1} + \alpha_{2j} P_{i_2} + \dots + \alpha_{mj} P_{i_m}$$

Valoarea funcţiei obiectiv „f" în soluţia de bază admisibilă iniţială găsită ($\bar{X}$) este egală (cf (1s)+(6.1)) cu:

(6.3) $\underline{f(\overline{X})} \overset{(6.1)}{=} f(0,\dots,\beta_1,\dots,\beta_2,\dots,\beta_m,\dots 0) \overset{(6.4)}{=} c_{i_1}\beta_1 + c_{i_2}\beta_2 + \dots + c_{i_m}\beta_m$ $\left(\overset{not}{\Rightarrow} f(\overline{X}) = \sum C_B \cdot P_0\right)$

Fie cantitățile z_j, $j=\overline{1,n}$ definite astfel:

(6.4) $z_j \overset{def}{=} c_{i_1}\cdot \alpha_{1j} + c_{i_2}\cdot \alpha_{2j} + \dots + c_{i_m}\alpha_{mj}$ $\left(\overset{not}{\Rightarrow} z_j = \sum C_B \cdot P_j\right)$

Not: i) $C_B = \begin{pmatrix} c_{i_1} \\ c_{i_2} \\ \vdots \\ c_{i_m} \end{pmatrix}$ → coeficienții funcției obiectiv f corespunzători variabilelor bazice (principale) din soluția $\overline{X}$

ii) $P_0 = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$ → valorile variabilelor bazice (princ.) din sol. $\overline{X}$ (termenii liberi din $\overline{A}_{ex}$)

iii) $P_j = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$, $j=\overline{1,n}$ → coloanele matricei $\overline{A}_{ex}$ ⇔ vectorii $P_1, P_2, \dots, P_n$ care apar în soluția $\overline{X}$ găsită.

Următoarele 3 teoreme fundamentează etapele algoritmului Simplex de rezolvare a $(PPL)_S$:

Teorema 1 (criteriul de optim finit)

Fie $\overline{X} \in S_{AB}$ o sol. de bază admisibilă a sist. (R_S). Dacă toate diferențele $z_j - c_j \le 0$, $j=\overline{1,n}$ corespunzătoare acestei soluții, atunci $\overline{X}$ este soluție optimă a $(PPL)_S$, adică:

(6.5) $\overline{X} \in S_{AB}$ a.î. $z_j - c_j \le 0$, $j=\overline{1,n}$ $\Longleftrightarrow$ $\overline{X} \in S_0$

Obs:

i) $(\forall)\ \overline{X} \in S_{AB}$, întotdeauna $z_i - c_i = 0$, $i \in \overline{I} = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ {diferențele $z_i - c_i = 0$ pt. $P_i \in B_c$}

ii) Pentru $j \in J = \{1,2,\dots,n\} \setminus \overline{I}$ (diferențele corespunzătoare vectorilor $P_j \notin B_c$) putem avea 2 situații:

a) $z_j - c_j < 0$; $j \in J$ ⇒ $\overline{X}$ este soluție optimă (finită) și unică;

b) $z_j - c_j \le 0$; $j \in J$ și $(\exists)\ z_j - c_j = 0$ ⇒ $\overline{X}$ este soluție optimă (finită) dar nu este unică {$(PPL)_S$ are o infinitate de soluții optime (finite)}

iii) Evident dacă condiția de optim (6.5) nu este satisfăcută ⇔ $(\exists)\ j \in J$ a.î. $z_j - c_j > 0$ atunci $\overline{X} \notin S_0$ ($\overline{X}$ nu este soluție optimă) și va trebui să căutăm alte soluții de bază admisibile "mai bune" decât $\overline{X}$ (valoarea funcției obiectiv să scadă) adică: $\overline{X} \to \overline{X}_1 \to \overline{X}_2 \to \dots \to \overline{X}_{opt}$ a.î. $f(\overline{X}) > f(\overline{X}_1) > f(\overline{X}_2) > \dots > f(\overline{X}_{opt}) = \underset{\neq \pm\infty}{\underline{m}} = \min\limits_{x \in S_A} f(x)$

Teorema 2 (criteriul de optim infinit)

Fie $\overline{X} \in S_{AB}$ pentru care $(\exists)\ j \in J$ a.î. $z_j - c_j > 0$. Dacă $(\exists)\ P_j \notin B_c$ $(j \in J)$, corespunzător unei diferențe $z_j - c_j > 0$, care are toate componentele $\alpha_{ij} < 0$, $i=\overline{1,m}$ atunci $(PPL)_S$ are optim infinit $\{(\min\limits_{x\in S_A}) f(x) = -\infty\}$, adică:

(6.6) $\overline{X} \in S_{AB}$ și $(\exists)\ P_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \dots, \alpha_{mj})^T$ a.î.: $\begin{cases} \alpha_{ij} \le 0 ; i=\overline{1,m} \\ z_j - c_j > 0 \end{cases}$ ⇒ $(\min) f(\overline{X}) = -\infty$

Obs:

i) evident că în acest caz S.B.A: $\bar{X}$ nu este soluție optimă; $(PPL)_s$ nu are soluții optime.

ii) dacă $(PPL)_s$ nu are optim finit $\Rightarrow (PPL)_g$ inițială nu are optim finit (în plus $(\max) f = +\infty$)

iii) (!!!) d.p.d.v. economic această situație este aberantă și nu poate fi întâlnită în practică (nu poți avea cheltuieli care scad spre „$-\infty$" sau profit care crește la „$+\infty$"); dacă se ajunge la această situație pe un model matematic al unei probleme reale economice $\Rightarrow$ modelul matematic este greșit/prost făcut și trebuie corectat!!!

Teorema 3 (criteriile de intrare/ieșire din bază)

Fie $\bar{X} \in S_{AB}$ o soluție a sistemului (2_s) care nu este optimă ($\exists\, z_j - c_j > 0$ și vectorii $P_j \notin B_c$ corespunzători acestora au măcar o componentă $\alpha_{ij} > 0$). Făcând următoarea schimbare de bază (înlocuim vectorul $P_i \in B_c$ cu vectorul $P_j \notin B_c$):

i) va intra în bază vectorul $P_j \notin B_c$ corespunzător diferenței:

(6.7) $z_j - c_j = \max\limits_{k \in J} \{z_k - c_k > 0\}$ („$P_j \downarrow$" dacă $z_j - c_j > 0$ și maximă)

ii) va ieși din bază vectorul $P_i \in B_c$ corespunzător raportului:

(6.8) $\theta_i = \min\limits_{k \in I} \{\theta_k > 0\} = \min\limits_{k \in I} \Big\{ \underbrace{\frac{p_k}{\alpha_{kj}}}_{\overset{not}{=}\,\theta_k} > 0 \Big\} \left(\overset{not}{=} \frac{P_0}{P_j\downarrow} \right)$ („$\leftarrow P_i$" dacă $\theta_i > 0$ și minim)

vom obține o nouă soluție $\bar{X}' \in S_{AB}$ a.î. $f(\bar{X}') \le f(\bar{X})$ (adică noua S.B.A: $\bar{X}'$ va fi mai "bună" decât vechea S.B.A: $\bar{X}$, deoarece valoarea funcției obiectiv în noua soluție este mai mică decât în vechea soluție $\Leftrightarrow$ valoarea funcției obiectiv scade)

Obs:

i) relația $\begin{cases} (6.7) \text{ se numește criteriul de intrare în bază;} \\ (6.8) \text{ se numește criteriul de ieșire din bază;} \end{cases}$

ii) cf. enunțului T_3 aplicarea acestor criterii se face întotdeauna în ordinea $\begin{cases} 1) \text{ crit. de intrare} \\ 2) \text{ crit. de ieșire} \end{cases}$ deoarece pentru a afla ce vector „$\leftarrow P_i$" părăsește baza, trebuie să știm mai întâi ce vector „$P_j \downarrow$" intră în bază (pt. a putea calcula rapoartele θ_k!!)

iii) dacă criteriile (6.7) sau (6.8) sunt satisfăcute de mai mulți vectori „P_j" respectiv „P_i" se alege la întâmplare unul dintre ei (uzual, cel mai din stânga „P_j", respectiv cel mai de sus „P_i" din tabelul Simplex atașat)

iv) aceste 3 teoreme fundamentează etapele alg. SIMPLEX (calculele se fac în tabelul următor numit tabelul SIMPLEX)

Etapele algoritmului și tabelul SIMPLEX atașat unei $(PPL)_S$

Fie $(P.P.L)_S$ scrisă sub formă explicită:

$$(PPL)_S \begin{cases} (1_S)\ (\min) f(x_1,x_2,\dots,x_j,\dots,x_n)=c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_jx_j+\dots+c_nx_n \\ (2_S) \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \\ (3_S)\ x_j\geq 0,\ j=\overline{1,n} \end{cases} \quad \text{a.î.: } (*) \begin{cases} m<n \\ \operatorname{rang} A = m \end{cases}$$

Aplicând metoda lui Gauss(!?) determinăm pe $\bar{X}_0 \in S_{AB}$ - S.O.A.I a sistemului (2_S):

$$\bar{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \end{array} \sim \dots \sim \bar{A}_{Gauss} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc|c} P_1 & P_2 & P_{i_1} & P_{i_2} & P_j & P_{i_m} & P_n & P_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 1 & 0 & \alpha_{1j} & 0 & \alpha_{1n} & \beta_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 1 & \alpha_{2j} & 0 & \alpha_{2n} & \beta_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & 0 & 0 & \alpha_{ij} & 0 & \alpha_{in} & \beta_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & 0 & 0 & \alpha_{mj} & 1 & \alpha_{mn} & \beta_m \end{array}\right) \end{array}$$

adică:

$$\bar{X}_0=(\underset{x_1^0}{0},\underset{x_2^0}{0},\dots,\underset{x_{i_1}^0}{\overset{\geq 0}{\beta_1}},\dots,\underset{x_{i_2}^0}{\overset{\geq 0}{\beta_2}},\dots,\underset{x_{i_m}^0}{\overset{\geq 0}{\beta_m}},0,\dots,\underset{x_n^0}{0})^T \in \mathbb{R}^n \text{ - S.O.A.I}$$

Atașăm acestei soluții următorul tabel (numit tabelul simplex):

B	C_B	P_0	c_1 / P_1	c_2 / P_2	c_{i_1} / P_{i_1}	c_{i_2} / P_{i_2}	c_j / P_j ↓	c_{i_m} / P_{i_m}	c_n / P_n	$\theta_k^{(*)}=\frac{P_0}{P_j}$
P_{i_1}	c_{i_1}	β_1	α_{11}	α_{12}	1	0	α_{1j}	0	α_{1n}	$\theta_1=\beta_1/\alpha_{1j}$
P_{i_2}	c_{i_2}	β_2	α_{21}	α_{22}	0	1	α_{2j}	0	α_{2n}	$\theta_2=\beta_2/\alpha_{2j}$
← P_i	c_i	β_i	α_{i1}	α_{i2}	0	0	$\boxed{\alpha_{ij}}>0$	0	α_{in}	$\theta_i=\beta_i/\alpha_{ij}>0$ (min)
P_{i_m}	c_{i_m}	β_m	α_{m1}	α_{m2}	0	0	α_{mj}	1	α_{mn}	$\theta_m=\beta_m/\alpha_{mj}$
		$f(\bar{X}_0)$	z_1-c_1	z_2-c_2	0	0	z_j-c_j >0 (max)	0	z_n-c_n	z_j-c_j
P_{i_1}	c_{i_1}	β_1'	α_{11}'	α_{12}'	1	0	0	0	α_{1n}'	θ_1'
P_{i_2}	c_{i_2}	β_2'	α_{21}'	α_{22}'	0	1	0	0	α_{2n}'	θ_2'
P_j	c_j	β_j'	α_{i1}'	α_{i2}'	0	0	1	0	α_{in}'	θ_i'
P_{i_m}	c_{i_m}	β_m'	α_{m1}'	α_{m2}'	0	0	0	1	α_{mn}'	θ_m'
		$f(\bar{X}_1)$	z_1-c_1	z_2-c_2	0	0	0	0	z_n-c_n	$z_j'-c_j'$

Etapele algoritmului SIMPLEX

① Se aduce $(PPL)_g$ la forma standard $(PPL)_s$ (adunăm/scădem variabile de compensare)

② Se determină o S.B.A.I.: $\overline{X}_0$ folosind
- metoda lui Gauss (ineficientă în cazuri reale)
- metoda celor două faze

③ se construiește primul tabel SIMPLEX (corespunzător soluției inițiale găsite $\overline{X}_0$)

Obs: pe ultima linie a tabelului simplex, valorile lui $f(\overline{X}_0)$ și diferențele $z_j - c_j$, $j=\overline{1,n}$ se determină cu relațiile:

$$\begin{cases} a)\ f(\overline{X}_0) = \sum_{i=1}^{m} (C_B \cdot P_0) \\ b)\ z_j - c_j = \sum_{i=1}^{m} (C_B \cdot P_j) - c_j \end{cases}$$

④ se aplică "Criteriul de optim": la fiecare etapă (tabel) al alg. simplex putem întâlni, una din următoarele 4 situații:

a) $\begin{cases} z_j - c_j < 0 \ ; (\forall) P_j \notin B \\ z_j - c_j = 0 \ ; (\forall) P_j \in B \end{cases}$ $\Rightarrow$ soluția găsită (pe coloana P_0) este optimă și unică ; STOP

b) $\begin{cases} z_j - c_j \leq 0 \ ; (\forall) P_j \notin B \ \text{și} \ (\exists) P_j \notin B \ \text{cu} \ z_j - c_j = 0 \\ z_j - c_j = 0 \ ; (\forall) P_j \in B \end{cases}$ $\Rightarrow$ soluția găsită (pe coloana P_0) este optimă, dar nu este unică ((PPL) are o infinitate de sol. optime) STOP

c) $(\exists) P_j \notin B$ a.î. $\begin{cases} (i)\ z_j - c_j > 0 \\ (ii)\ P_j \text{ are toate componentele } \alpha_{ij} \leq 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ soluția găsită (pe coloana P_0) nu este optimă, (PPL) are optim infinit $\begin{cases} \min f = -\infty \\ \max f = +\infty \end{cases}$ STOP

d) $(\exists) P_j \notin B$ a.î. $\begin{cases} (i)\ z_j - c_j > 0 \\ (ii)\ P_j \text{ are și componente } \alpha_{ij} > 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ soluția găsită (pe coloana P_0) nu este optimă alg. continuă

Obs: i) în această situație trebuie să facem o schimbare de bază (cu lema substituției) pentru a determina o nouă soluție $\overline{X}_{k+1}$ mai "bună" decât vechea soluție $\overline{X}_k$ adică: $f(\overline{X}_{k+1}) < f(\overline{X}_k)$, $(\forall) k \geq 0$.

ii) în cazurile 4a), 4b) și 4c) algoritmul simplex se oprește (!!). Cazul 4d) este unicul caz în care algoritmul continuă (și evident este cel mai des întâlnit).

⑤ se aplică "Criteriul de intrare în bază": la fiecare etapă a alg., va intra în bază vectorul $P_j \notin B$ corespunzător diferenței $z_j - c_j > 0$ și maximă $\{z_j - c_j = \max_{k \in J} \{z_k - c_k > 0\} \Rightarrow (P_j \downarrow)\}$

⑥ se aplică "Criteriul de ieșire din bază": la fiecare etapă a alg., va ieși din bază vectorul $P_i \in B$ corespunzător raportului $\theta_i > 0$ și minim $\{\theta_i = \min_{k \in I} \{\theta_k > 0\} \Rightarrow \text{"} \leftarrow P_i \text{"}\}$ $\left(\theta_k = \frac{P_0}{P_j \downarrow}\right)$

⑦ se determină noua soluție X_{k+1}, $k \geq 0$ făcând o schimbare de bază cu lema substituției (se construiește un nou tabel simplex)

⑧ se repetă etapele 4d) – 7) până se ajunge la unul din cazurile 4a), 4b), 4c).

Ex: Determinați soluția optimă (în cazul în care există) a următoarei $(PPL)_g$:

$$(PPL)_g \begin{cases} (1_g)\ (\min)\ f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \overset{c_1}{3x_1} + \overset{c_2}{x_2} \overset{c_3}{-2x_3} \overset{c_4}{+2x_4} \\ (2_g) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 \le 10 \end{cases} \\ (3_g)\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

① Aducem $(PPL)_g$ la forma standard $(PPL)_S$ (aici, vom adauga variabile de compensare):

$$(PPL)_S \begin{cases} (1_S)\ (\min)\ f(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5^c,x_6^c,x_7^c) = \overset{c_1}{3x_1} + \overset{c_2}{x_2} \overset{c_3}{-2x_3} \overset{c_4}{+2x_4} \overset{c_5}{+0\cdot x_5^c} \overset{c_6}{+0\cdot x_6^c} \overset{c_7}{+0\cdot x_7^c} \\ (2_S) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5^c = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_6^c = 4 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_7^c = 10 \end{cases} \\ (3_S)\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5^c, x_6^c, x_7^c \ge 0 \end{cases}$$

Obs: nr. S.B $\le C_7^3 = 35$ (!!!)

② Determinăm $\overline{X}_0$ SBAi (folosind metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor liniare)

$$(2_S) \xrightarrow{\text{atașăm}} \overline{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5^c & P_6^c & P_7^c \end{array} \quad P_0 \\ \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \\ \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{v. sec}=0} \underbrace{\qquad\qquad}_{\text{v. princ.}} \end{array} \Rightarrow \overline{X}_0 = (0,0,0,0,6,4,10)^T \in \mathbb{R}^7 - \text{S.B.A.i (nedegenerată)}$$

③ Construim tabelul simplex aferent soluției inițiale $\overline{X}_0$:

coef. funcției „f" din (1_S)

B	C_B	P_0	$c_1=3$ P_1	$c_2=1$ P_2	$c_3=-2$ P_3 ↓	$c_4=2$ P_4	$c_5=0$ P_5^c	$c_6=0$ P_6^c	$c_7=0$ P_7^c	$\theta_i = \frac{c_B}{P_3}$	
P_5^c	0	6	1	-2	1	1	1	0	0	6/1=6	
P_6^c	0	4	2	1	-3	0	0	1	0	4/-3<0	
← P_7^c	0	10	1	2	$\boxed{2}$	2	0	0	1	10/2=5	$\cdot\frac{1}{2}$ | $\cdot\frac{3}{2}$ | (-1)
	$f(\overline{X}_0)=0$		-3	-1	2	-2	0	0	0	z_j-c_j	
P_5^c	0	1	1/2	-3	0	2	1	0	-1/2		
P_6^c	0	19	7/2	4	0	-3	0	1	3/2		
P_3	-2	5	1/2	1	1	1	0	0	1/2		
	$f(\overline{X}_1)=-10$		-4	-3	0	0	0	0	0	z_j-c_j	

$(\forall, 4_b)$

$$\xrightarrow[\text{„}P_0\text{"}]{\text{coloana}} \begin{cases} \overline{X}_0 = (0,0,0,0,6,4,10)^T \\ f(\overline{X}_0) = 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{col. „}P_0\text{"}} \begin{cases} \overline{X}_1 = (0,0,5,0,1,19,0)^T \\ f(\overline{X}_1) = -10 \end{cases}$$

soluția $\overline{X}_1$ este soluție optimă dar nu este unică; (PPL) are o infinitate de S.O. (finite)

Fie:

$$(PPL)_S \begin{cases} \overline{X}_1 = \overline{X}_{optim}^{standard} = (0,0,5,0,1,19,0)^T \in \mathbb{R}^7 \\ (\min)_{x \in S_A} f(X) = f(\overline{X}_1) = -10 \end{cases} \Rightarrow (PPL)_g \begin{cases} \overline{X}_{optim}^{generală} = (0,0,5,0)^T \in \mathbb{R}^4 \\ (\min)_{x \in S_A} f(X) = -10 \end{cases}$$

+ dar nu este unică

$(PPL)_g$ are o infinitate de sol. optime (finite)