Algoritmul SIMPLEX
(exemplu)

I) Să se rezolve (P.P.L) :

$$(P.P.L)_g \begin{cases} (1_g)\ (\min)\ f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ (2_g)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \le 8 \end{cases} \\ (3_g)\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \rightarrow \text{forma generală}$$

1) aducem (P.P.L) la forma standard :

$$(PPL)_S \begin{cases} (1_S)\ (\min)\ f(x_1,x_2,x_3; x_4^c, x_5^c) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 0\cdot x_4^c + 0\cdot x_5^c \\ (2_S)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^c = 10 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5^c = 8 \end{cases} \\ (3_S)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c \ge 0 \end{cases} \rightarrow \text{forma standard}$$

2) determinăm o soluție de bază admisibilă inițială (S.B.A.i) $\overline{X}_0$ a $(PPL)_S$ (adică a sistemului (2_S)) cu metoda lui Gauss.

$$(2_S) \xrightarrow{\text{scriem}} \overline{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 10 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 8 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccccc} \underbrace{x_1 \quad x_2 \quad x_3}_{v.\text{sec.} = 0} & \underbrace{x_4^c \quad x_5^c}_{v.\text{princ.}} \end{array} \end{array} \Rightarrow \overline{X}_0 = (0,0,0,10,8)^T \text{ - S.B.A.i}$$

3) Construim tabelul simplex (corespunzător soluției $\overline{X}_0$)

B	CB	P_0	P_1 (2)	P_2 (−1)	P_3 (−3)	P_4^c (0)	P_5^c (0)	$\theta_i = \frac{P_0}{P_j}$
P_4^c	0	10	1	1	2	1	0	$10/2 = 5$
← P_5^c	0	8	3	−1	$\boxed{2}$	0	1	$8/2 = 4$
		$f(\overline{X}_0) = 0$	−2	1	3	0	0	$z_j - c_j$
⇐ P_4^c	0	2	−2	$\boxed{2}$	0	1	−1	$2/2 = 1$
P_3	−3	4	3/2	−1/2	1	0	1/2	$4/-1/2 = ?$
		$f(\overline{X}_1) = -12$	−13/2	5/2	0	0	−3/2	$z_j - c_j$
P_2	−1	1	−1	1	0	1/2	−1/2	
P_3	−3	9/2	1	0	1	1/4	1/4	
		$f(\overline{X}_2) = -\frac{29}{2}$	−4	0	0	−5/4	−1/4	$z_j - c_j$

$= \frac{P_0}{P_3\downarrow}$ $/ \cdot \frac{1}{2} / (-1)$ +

$= \frac{P_0}{P_2\downarrow}$ $/ \cdot \frac{1}{2} / \cdot \left(\frac{1}{4}\right)$ +

pe col. lui P_0 $\rightarrow \begin{cases} \overline{X}_0 = (0,0,0,10,8)^T \\ f(\overline{X}_0) = 0 \end{cases}$

pe col. lui P_0 $\rightarrow \begin{cases} \overline{X}_1 = (0,0,4,2,0)^T \\ f(\overline{X}_1) = -12 \end{cases}$

pe col. lui P_0 $\rightarrow \begin{cases} \overline{X}_2 = (0,1,9/2,0,0)^T \\ f(\overline{X}_2) = -\frac{29}{2} \end{cases}$

4a) $\Downarrow$ crit. de optim (toate dif. $z_j - c_j \le 0$)

soluția găsită (pe coloana lui P_0) este optimă și unică :

$$\begin{cases} \overline{X}^{\text{standard}}_{\text{optim}} = (0,1,9/2,0,0)^T \\ (\min) f = -29/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{X}^{\text{inițială}}_{\text{optim}} = (0,1,9/2)^T \\ (\min) f = -29/2 \end{cases}$$

II)

$$\begin{cases} (1_g)\ (\max)\ f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + 3x_3 \\ (2_g)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_3 \le 6 \end{cases} \\ (3_g)\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$\to$ forma inițială (generală)

$\Downarrow$

$$\begin{cases} (1_s)\ (\min)\ (-f)(x_1,x_2,x_3;\ x_4^c) = -x_1 - x_2 - 3x_3 + 0 \cdot x_4^c \\ (2_s)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_3 + x_4^c = 6 \end{cases} \\ (3_s)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_0 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 2 & 0 & 10 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \bar{X}_0 = (0, 10, 0, 6)^T - \text{SBAi}$$

V.sec = 0   V.prin.

B	C_B	P_0	P_1 (−1)	P_2 (−1)	P_3 (−3)	P_4^c (0)	$\theta_i = \frac{P_0}{P_j}$		
P_2	−1	10	2	1	$\boxed{2}$	0	$10/2 = 5$	1/2	(−1/2)
P_4^c	0	6	3	0	1	1	$6/1 = 6$		
	$-f =$	−10	−1	0	1	0	$z_j - c_j = \Sigma(c_B \cdot P_j) - c_j$		
P_3	−3	5	1	1/2	1	0			
P_4^c	0	1	2	−1/2	0	1			
	$-f =$	−15	−2	−1/2	0	0			

$\}\ \theta_i = \frac{P_0}{P_3}$

$\Downarrow$ h a) $(\forall)\ z_j - c_j \le 0$

$$\begin{cases} X^{\text{standard}}_{\text{optimă}} = (0, 0, 5, 1)^T \\ (\min)(-f) = -15 \end{cases}$$

$\to$ soluție optimă unică pt. $(PPL)_s$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} X^{\text{inițială}}_{\text{optimă}} = (0, 0, 5)^T \\ (\max)(f) = 15 \end{cases}$$

$\to$ sol. optimă unică pt. $(PPL)_g$

III
$$\left\{\begin{array}{l}(1)\ (\min)\ f(x_1,x_2,x_3)=2x_1+3x_2-x_3\\(2)\ \begin{cases}3x_1-6x_2+2x_3\le 6\\ x_1+2x_2+x_3\le 8\end{cases}\\(3)\ x_1,x_2,x_3\ge 0\end{array}\right.\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}(1_s)\ (\min)\ f=2x_1+3x_2-x_3+0x_4^c+0x_5^c\\(2_s)\ \begin{cases}3x_1-6x_2+2x_3+x_4^c=6\\ x_1+2x_2+x_3+x_5^c=8\end{cases}\\(3_s)\ x_1,\dots,x_5^c\ge 0\end{array}\right.$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{A}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc}P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_0\end{array}\\ \left(\begin{array}{ccccc|c}3 & -6 & 2 & 1 & 0 & 6\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 8\end{array}\right)\end{array}$$

$\underbrace{P_1\ P_2\ P_3}_{\text{v. sec.}=0}$ $\underbrace{P_4^c\ P_5^c}_{\text{v. princ.}}$

$$\Downarrow$$

$X_0=(0,0,0,6,8)^T$ – S.B.A.I.

B	C_B	P_0	P_1 (2)	P_2 (3)	P_3 (−1)	P_4^c (0)	P_5^c (0)	θ_i
P_4^c	0	6	3	−6	$\boxed{2}$	1	0	$6/2=3$
P_5^c	0	8	1	2	1	0	1	$8/1=1$
	$f=$	0	−2	−3	1	0	0	
P_3	−1	3	3/2	−3	1	1/2	0	
P_5^c	0	5	−1/2	5	0	−1/2	1	
	$f=$	−3	−7/2	0	0	−1/2	0	

$\theta_i=\dfrac{P_0}{P_3\downarrow}$ $\quad /\cdot\frac{1}{2}\quad /\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$ $+$

$$\Downarrow\ 4_s)$$

$$\begin{cases}X^{\text{standard}}_{\text{optimă}}=(0,0,3,0,5)^T\\ (\min)\ f=-3\end{cases}$$

– sol. optimă dar nu este unică

∄ (PPL)$_s$ are o ∞ de sol. optime ∄

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}X^{\text{inițială}}_{\text{optimă}}=(0,0,3)^T\\ (\min)\ f=-3\end{cases}$$

– sol. optimă dar nu este unică

∄ probl. inițială are o ∞ de sol. optime care conduc către aceeași valoare minimă $(=-3)$ a fct. obiectiv ∄