

Lema substituției (exemple)

①

① Fie (B) $\begin{cases} x_1 = (-1, 1, -1)^T \\ x_2 = (-1, 2, 0)^T \\ x_3 = (0, -1, 1)^T \end{cases} \leq \mathbb{R}^3$. Determinați coordonatele vectorului $y = (3, -4, 2)^T$ în această bază.

Dem

a) cu definiția (metoda lui Gauss)

Vrem să determinăm scalarii: $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ a.s.: $y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3$ (*)
Înlocuim în relația (*) expresiile vectorilor: y, x_1, x_2, x_3
și obținem:

$$(3, -4, 2)^T = \lambda_1 (-1, 1, -1)^T + \lambda_2 (-1, 2, 0)^T + \lambda_3 (0, -1, 1)^T (=)$$

$$\begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = -4 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = 2 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{care este un sistem pătratic, liniar cu 3 ec.} \\ \text{și 3 necunoscute, pe care-l rezolvăm cu metoda} \\ \text{lui Gauss.} \end{array}$$

$$\bar{A} = \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & y \\ \hline 1 & -1 & -1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \xrightarrow{\substack{(-1)/(-1) \\ (-1)/(-1)}} \sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & y \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \xrightarrow{\substack{(-1)/1 \\ (-1)/1}} \sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & y \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \xrightarrow{\substack{(-1)/1 \\ (-1)/1}} \sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & y \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{\substack{(-1)/2 \\ (-1)/2}} \sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & y \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 & y \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y = -2x_1 - x_2 + 0x_3 \quad \Rightarrow \quad y_B = [-2, -1, 0]$$

Verificare calcul

$$y = -2x_1 - x_2 = -2(-1, 1, -1)^T - (-1, 2, 0)^T = (2, -2, 2)^T - (-1, 2, 0)^T = (3, -4, 2)^T$$

(adevărat)

Obs:

matricele din

- semnificatia elementelor din metoda lui Gauss este doar
de coeficienti ai variabilelor $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

b) cu lema substituției :

(2)

Obs: deoarece știm componentele vectorilor y, x_1, x_2, x_3 (\Rightarrow știm coordonatele lor în baza canonică din \mathbb{R}^3 : (B_C) $\begin{cases} e_1 = (1, 0, 0)^T \\ e_2 = (0, 1, 0)^T \\ e_3 = (0, 0, 1)^T \end{cases}$)
(componentele \equiv coordonatele în baza canonică)

$$\text{adică : } \begin{cases} y = (3, -4, 2)^T \Leftrightarrow y = 3e_1 - 4e_2 + 2e_3 \Leftrightarrow y_{B_C} = [3, -4, 2] \\ x_1 = (-1, 1, -1)^T \Leftrightarrow x_1 = -e_1 + e_2 - e_3 \Leftrightarrow x_1 = [-1, 1, -1]_{B_C} \\ x_2 = (-1, 2, 0)^T \Leftrightarrow x_2 = -e_1 + 2e_2 \Leftrightarrow x_2 = [-1, 2, 0]_{B_C} \\ x_3 = (0, -1, 1)^T \Leftrightarrow x_3 = -e_2 + e_3 \Leftrightarrow x_3 = [0, -1, 1]_{B_C} \end{cases}$$

de aceea vom folosi ca bază inițială, baza canonică din \mathbb{R}^3

bază inițială
în care cunoaștem
coordonaatele
vectorilor

baza finală în care vrem să aflăm coordonatele vectorului y .

	y	x_1	x_2	x_3
e_1	3	-1	-1	0
e_2	-4	1	2	-1
e_3	2	-1	0	1
x_1	-3	1	1	0
e_2	-1	0	1	-1
e_3	-1	0	1	1
x_1	-2	1	0	1
x_2	-1	0	1	-1
e_3	0	0	0	2
x_1	+2	1	0	0
x_2	-1	0	1	0
x_3	0	0	0	1

$y = -3x_1 - e_2 - e_3$
 $\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \cdot x_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3 \\ x_2 = x_1 + e_2 + e_3 \\ x_3 = -e_2 + e_3 \end{cases}$
 $y = -2x_1 - x_2 + 0 \cdot e_3$
 $y = -2x_1 - x_2 + 0 \cdot x_3 \Leftrightarrow y_B = [-2, -1, 0]$

Obs: semnificația numerelor din tabel este de coordonaate ale vectorilor (y, x_1, x_2, x_3) în cele 4 baze (bază inițială, două intermediare și cea finală)!!!

(3)

② Fie $(B) \begin{cases} x_1 = (-2, 1)^T \\ x_2 = (3, -1)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^2$ și $(B') \begin{cases} y_1 = (5, 2)^T \\ y_2 = (-2, -1)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^2$

Se cere:

a) știind că $u_B = [3, -1]$ aflați $u_{B'} = ?$;

b) știind că $v_{B'} = [1, 2]$ aflați $v_B = ?$;

Dem

Vom folosi numai o singură substituție. Dacă vom încerca să folosim bazele B și B' în mod direct ca baze inițiale respectiv finale avem nevoie de matricile schimbării de bază $S_{B'/B}$ și $S'_{B/B'}$ pe care nu le cunoaștem, adică:

$B \backslash u$	y_1	y_2
x_1	3	a_{11} a_{21}
x_2	-1	a_{12} a_{22}
i	i	i

unde $\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \Rightarrow S_{B'/B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

respectiv:

$B \backslash u$	x_1	x_2
y_1	1	a'_{11} a'_{21}
y_2	2	a'_{12} a'_{22}
i	i	i

unde $\begin{cases} x_1 = a'_{11}y_1 + a'_{12}y_2 \\ x_2 = a'_{21}y_1 + a'_{22}y_2 \end{cases} \Rightarrow S'_{B/B'} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{pmatrix}$

Obs: evident $S' = S^{-1}$

Dein acest motiv (pentru a nu afla matricile S, S') vom folosi ca bază inițială, baza canonică din \mathbb{R}^2 : $(B_0) \begin{cases} e_1 = (1, 0)^T \\ e_2 = (0, 1)^T \end{cases}$ astfel:

Deoarece știm că:

$u_B = [3, -1] \Leftrightarrow u = 3x_1 - x_2 = 3(-2, 1)^T - (3, -1)^T = \underline{\underline{(-9, 4)^T}}$

$u_{B_0} = \underline{\underline{[-9, 4]}} \Leftrightarrow u = -9e_1 + 4e_2$

a)

$B \backslash u$	y_1	y_2
e_1	-9	-2
e_2	4	-1
e_1	-17	1
y_2	-4	1
y_1	-17	0
y_2	-38	1

\Downarrow

$u = -17y_1 - 38y_2 \Leftrightarrow u_{B'} = \underline{\underline{[-17, -38]}}$

b) analog : $v_B = [1, 2]$ ($\Rightarrow v = y_1 + 2y_2 = (5, 2)^T + 2(-2, -1)^T = \underline{(1, 0)^T} \equiv e_1$) ④

si avons:

B	y	x_1	x_2
e_1	1	-2	3
e_2	0	1	-1
e_1	1	0	1
x_1	0	1	-1
x_2	1	0	1
x_1	1	1	0

$v = x_1 + x_2 \Rightarrow v_B = [1, 1]$

Obs : i) $u_B \xrightarrow{S^{(?)}} u_{B'}$ (complicat, avons besoin de S)

ii) $u_B \rightarrow u_{B''} \rightarrow u_{B'}$ (simple, on a besoin de S)