

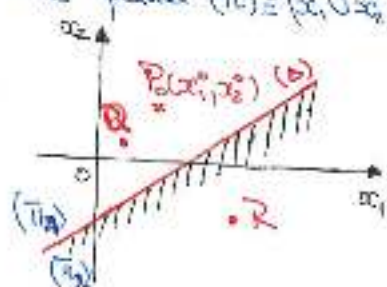
Seminar 5 Rezolvarea problemelor de programare liniară (PPL) cu 2 variabile (în două dimensiuni) cu metoda grafică

Fie (P.P.L) de forma:

$$\begin{cases} (1) \text{ (min/max) } f(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ (2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 & (R_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 & (R_2) \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m & (R_m) \end{cases} \\ (3) x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

I) Separarea planului în regiuni de către o dreaptă. Soluția geometrică a unei inecuații liniare cu două variabile.

Fie planul $(\pi) \equiv (x_1, O, x_2)$ și o dreaptă $(\Delta) ax_1 + bx_2 + c = 0$ inclusă în plan ($\Delta \subset \pi$).



Asociem dreptei (Δ) funcția liniară:

$$\begin{cases} g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x_1, x_2) \stackrel{\text{def}}{=} ax_1 + bx_2 + c \end{cases} \Rightarrow (\Delta) g(x_1, x_2) = 0 \quad \begin{array}{l} \text{ec. dreptei } (\Delta) \\ \text{as. egalitatii} \\ \text{funcției } g. \end{array}$$

Obs: i) $(\forall) P(x_1, x_2) \in \pi$ avem: $\begin{cases} g(P) = g(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow P \in (\Delta) \\ g(P) \neq 0 \Leftrightarrow P \notin (\Delta) \end{cases}$

ii) deci, dacă $P(x_1, x_2) \notin (\Delta) \Rightarrow \begin{cases} g(P) > 0 \\ \text{sau} \\ g(P) < 0 \end{cases}$

ii) $\begin{cases} (\pi) = (\pi_1) \cup (\pi_2) \cup (\Delta) \\ (\pi_1) \cap (\pi_2) = \emptyset \end{cases}$
cele 2 semiplane delimitate de dr. (Δ) .

II) (de separare a planului în regiuni de către o dreaptă)

Fie punctul $P_0(x_1^0, x_2^0) \in \pi_1$ (sau π_2) a.f. $g(P_0) = g(x_1^0, x_2^0) > 0$ (sau < 0). Atunci:

$$\begin{cases} g(Q) > 0 & ; (\forall) Q(x_1, x_2) \in \pi_1 \\ g(R) < 0 & ; (\forall) R(x_1, x_2) \in \pi_2 \end{cases}$$

Obs: totuși așăm că dacă funcția g are o valoare pozitivă (negativă) într-un punct P_0 dintr-unul din cele două semiplane π_1, π_2 determinate de dreapta (Δ) , atunci va avea tot valori pozitive (negative) în toate celelalte puncte din semiplanul lui P_0 (și negative în celălalt semiplan).

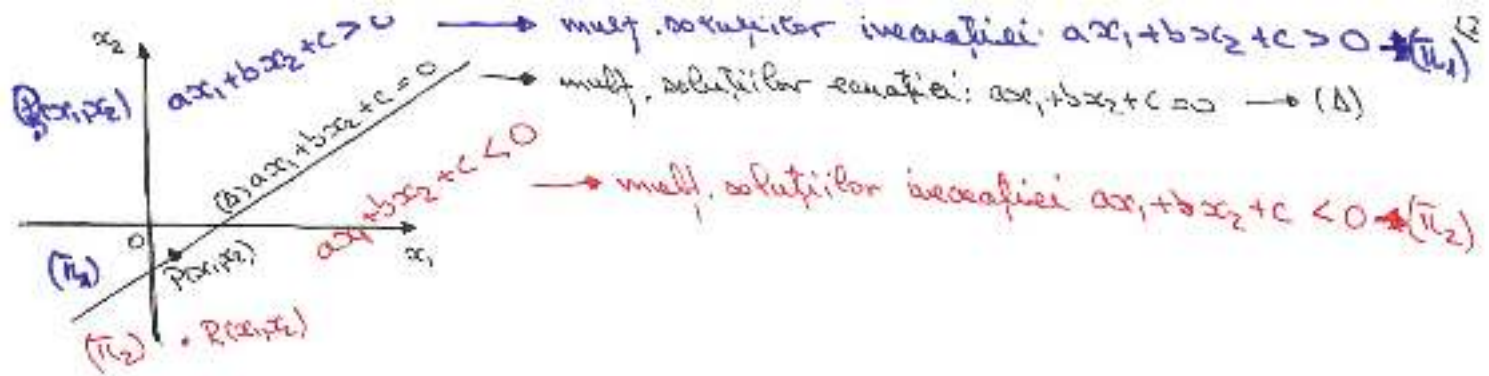
cu alte cuvinte, dacă pp. că $g(P_0) = g(x_1^0, x_2^0) > 0$ cu $P_0 \in \pi_1$, atunci:

i) $g(Q) = g(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c > 0$; $(\forall) Q(x_1, x_2) \in \pi_1$

ii) $g(P) = g(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c = 0$; $(\forall) P(x_1, x_2) \in \Delta$

iii) $g(R) = g(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c < 0$; $(\forall) R(x_1, x_2) \in \pi_2$

Din relațiile de mai sus, observăm că mulțimea soluțiilor unei inecuații liniare cu două variabile = mulțimea punctelor dintr-unul din cele două semiplane delimitate de dreapta corespunzătoare inecuației.

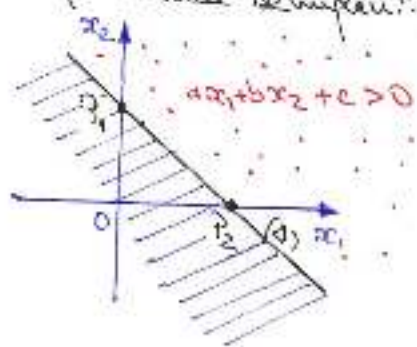


Algoritmul de lucru (ptr. determ. soluțiilor unei inec. lin. cu 2 necunoscute)

Pentru determinarea soluțiilor unei inecuații liniare de forma: $ax_1 + bx_2 + c > 0$ (I)

- 1) se atasează inec. lin. (R) $ax_1 + bx_2 + c > 0$ dreapta corespunzătoare (A) $ax_1 + bx_2 + c = 0$
- 2) se reprezintă grafic dreapta (A) (găsind în mod uzual punctele de intersecție cu axele de coordonate): $\begin{cases} x_1=0 \Rightarrow x_2 = -\frac{c}{b} \Rightarrow P_1(0, -\frac{c}{b}) \\ x_2=0 \Rightarrow x_1 = -\frac{c}{a} \Rightarrow P_2(-\frac{c}{a}, 0) \end{cases}$
- 3) se delimitează, prin desigurare, semiplanul care nu este soluție al inecuației (R)

Obs: ptr. a determina care din cele două semiplane determinate de dreapta (A) este soluție al inecuației (R) se verifică dacă originea axelor de coordonate $O(0,0)$ (care aparține unui semiplan!!) este soluție, sau nu, ptr. inec. (R).



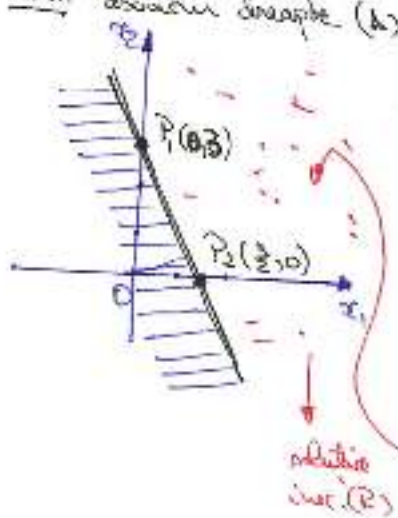
→ semiplanul soluțiilor inec. $ax_1 + bx_2 + c > 0$
(toate punctele din acest semiplan verifică inecuația!!)

Ex: ~~Rezolvati~~ Rezolvați inecuația: (R) $2x_1 + x_2 - 3 > 0$

Solu: asociem dreapta (A) $2x_1 + x_2 - 3 = 0 \Rightarrow (A) 2x_1 + x_2 = 3 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \Rightarrow x_2=3; P_1(0,3) \\ x_2=0 \Rightarrow x_1=\frac{3}{2}; P_2(\frac{3}{2},0) \end{cases}$

Înlocuim coordonatele originii $O(0,0)$ în inec. (R): $2 \cdot 0 + 0 - 3 > 0 \Leftrightarrow -3 > 0$ (F)

deci $O(0,0)$ nu este soluție (nu verifică) a inec. (R), deci semiplanul care conține originea nu este soluția lui (R) și-l eliminăm lașărându-l. Semiplanul care nu conține originea este soluția inecuației.



1) Rezolvarea sistemelor liniare de inegalități cu două necunoscute cu metoda grafică

Pentru a determina mulțimea soluțiilor (S) unui sistem de inegalități de forma:

$$(2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1 & (R_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2 & (R_2) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m & (R_m) \end{cases}$$

vom proceda astfel:

1) asociem fiecărei inegalități (restricții) (R_i) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leq b_i$; $i = \overline{1, m}$ dreapta corespunzătoare $-(\Delta_i)$ $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$; $i = \overline{1, m}$ și o reprezentăm grafic (folosind punctele de intersecție ale dreptei cu axele de coordonate)

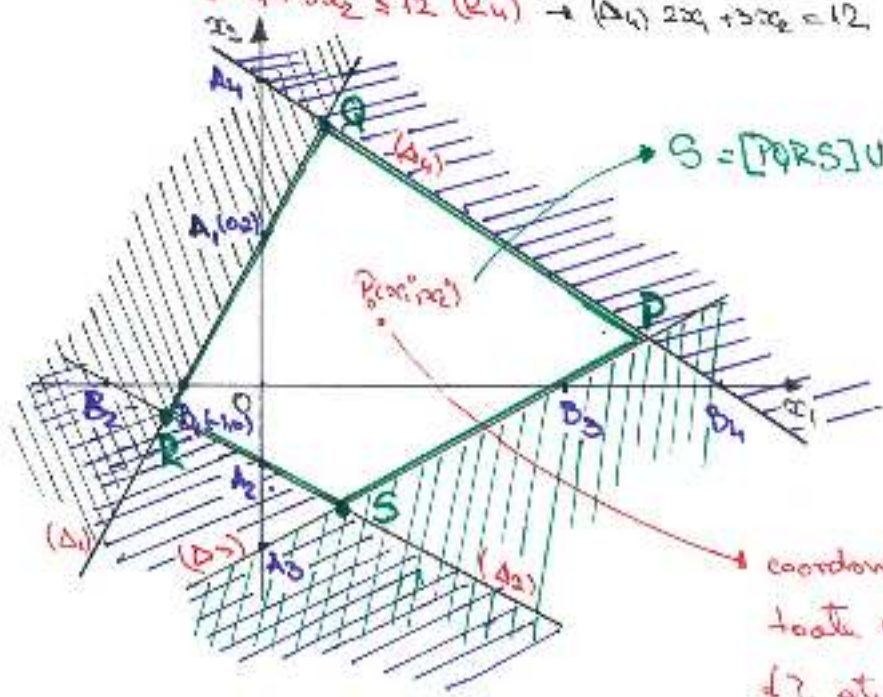
2) se delimitează (prin hachurare) unul din cele două semiplane determinate de dreapta (Δ_i) care nu este soluția (nu verifică) inegalității corespunzătoare (R_i)

3) zona rămasă nelămurată din plan, reprezintă soluția (S) sistemului de inegalități

Sol: (i) $S =$ mulțimea coordonatelor punctelor din zona nelămurată a planului x_1, x_2
 (ii) $S =$ mulțime poligonală convexă

Ex:

$$(2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 & (R_1) \rightarrow (\Delta_1) 2x_1 - x_2 = -2 : A_1(0, 2) ; B_1(-1, 0) \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 & (R_2) \rightarrow (\Delta_2) x_1 + 2x_2 = -2 : A_2(0, -1) ; B_2(-2, 0) \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 & (R_3) \rightarrow (\Delta_3) x_1 - 2x_2 = 4 : A_3(0, -2) ; B_3(4, 0) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 & (R_4) \rightarrow (\Delta_4) 2x_1 + 3x_2 = 12 : A_4(0, 4) ; B_4(6, 0) \end{cases}$$



$$S = [PQRS] \cup \text{int}[PQRS] \stackrel{\text{not}}{=} [PQRS]$$

→ închiderea patrulaterului $[PQRS]$

mulțime poligonală convexă (mulțimea soluțiilor not (2))

→ coordonatele x_1^0, x_2^0 ale punctului P_0 verifică toate cele 4 inegalități ale sist. (2)

P_0 este una din infinitatea de soluții aflate în interiorul și pe laturile patrulaterului $PQRS$

III Rezolvarea P.P.L. cu metoda grafică

Fie P.P.L. de forma (1)-(3). Algoritmul de rezolvare (de determinare a soluției optime) ~~este~~ cu metoda grafică constă în următoarele etape:

- Se determină mulțimea S a soluțiilor ^{generale a P.P.L.} ~~sist. lin. de inec. (2)~~ cu metoda grafică
- Se determină mulțimea S_A a soluțiilor ^{admisibile} ~~admisibile~~ a P.P.L. (soluțiile sist. (2) care verifică condițiile de nenegativitate (3)), astfel:

$$S_A \stackrel{\text{def}}{=} S \cap \{\text{primul cadran}\} \rightarrow \text{mulțime poligonala convexă};$$



- Se determină mulțimea S_0 a soluțiilor optime a P.P.L. astfel:

metoda I

- se determină mulțimea S_{AB} soluțiilor de bază admisibile a P.P.L. astfel:

$$S_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{vârfurilor mulțimii } S_A\}$$

obs: elementele lui S_{AB} (vârfurile lui S_A) se află la intersecția a două drepte $(\Delta_i) \cap (\Delta_j)$ de obicei există sist. linear de ecuații cu 2 necun. format din ecuațiile celor două drepte.

- se calculează valoarea funcției obiectiv în fiecare din elementele lui S_{AB} (vârfurile lui S_A)

Mulțimea S_0 este formată din coordonatele celui (-lor) vârf (-un) unde $f(x_1, x_2)$ ia valoarea

obs: este obligatoriu ca mulțimea S_A să fie un poligon (linie poligonala închisă)

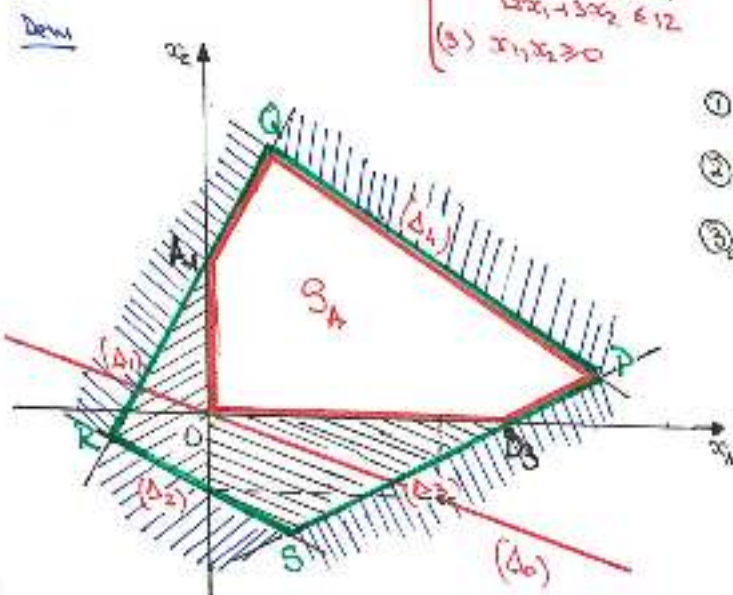
minimă
sau
maximă
(optime)

metoda II

- se reprezintă grafic dreapta: $(\Delta_0) f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow (\Delta_0) c_1 x_1 + c_2 x_2 = 0$ (care este o dreaptă care trece prin $O(0,0)$)
- mulțimea S_0 este formată din coordonatele punctului (vârfului) din S_{AB} care se află la distanța optimă (min/max) de dreapta (Δ_0) .

Ex: să se rezolve (P.P.L.):

$$\begin{cases} (1) (\max) f(x_1, x_2) = x_1 + 3x_2 \\ (2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 3x_2 \leq 12 \end{cases} \\ (3) x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{este material care l-am rezolvat în capitoul anterior}$$



$$① S = [PQRS]$$

$$② S_A = [OB_3PQA_1]$$

$$③ S_{AB} = \{O, B_3, P, Q, A_1\} \quad \text{metoda I}$$

$$O(0,0) \Rightarrow f(O) = f(0,0) = 0$$

$$B_3(4,0) \Rightarrow f(B_3) = f(4,0) = 4$$

$$A_1(0,2) \Rightarrow f(A_1) = f(0,2) = 6$$

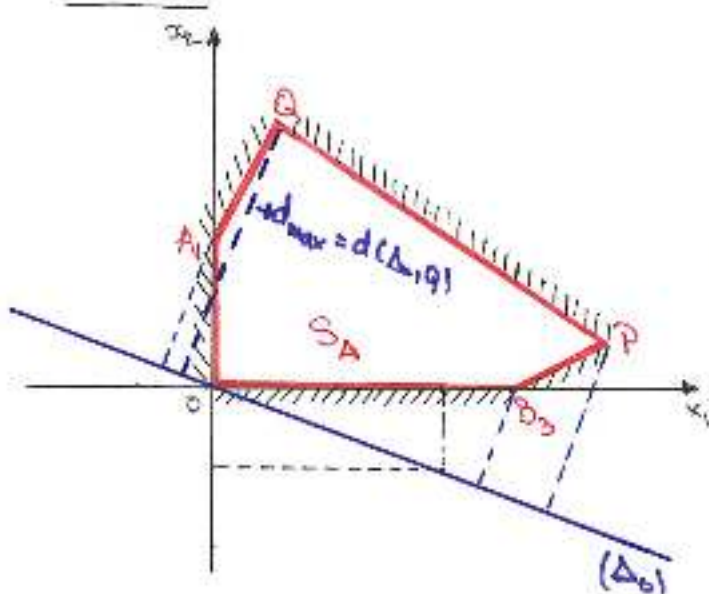
$$P(2,2) = \Delta_3 \cap \Delta_4: \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{36}{5} \\ x_2 = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow f(P) = f(\frac{36}{5}, \frac{4}{5}) = \frac{116}{5} = 23.2$$

$$Q(0,4) = \Delta_1 \cap \Delta_4: \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f(Q) = f(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{15}{2} = 7.5$$

b) deoarece valoarea maximă a funcției obiectiv este atinsă în punctul $Q \Rightarrow$

$$S_0 = \{Q\} \text{ deci } \begin{cases} x_1^{\text{optim}} = \frac{3}{4} \\ x_2^{\text{optim}} = \frac{7}{2} \\ (\max) f(x_1, x_2) = \frac{45}{4} \end{cases}$$

metoda II



$$(\Delta_0) x_1 + 3x_2 = 0 \quad \begin{cases} O(0,0) \\ T(3,-1) \end{cases}$$

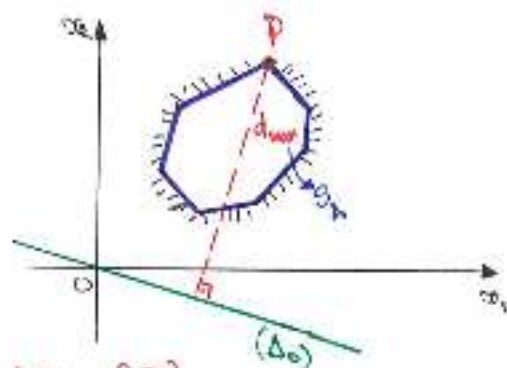
Conform figurii $d_{\max}(\Delta_0, S_A) = d(\Delta_0, Q) \Rightarrow$

$$\Rightarrow S_0 = \{Q\} \text{ cu } \begin{cases} Q(\frac{3}{4}, \frac{7}{2}) \\ f(Q) = \frac{45}{4} \end{cases}$$

IV) Tipurile de soluții ale unei P.P.L.

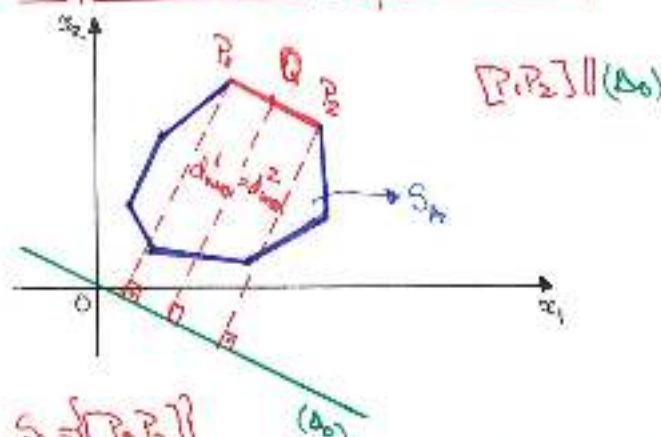
A) P.P.L. de „maximă”

a) soluție optimă unică (și finită)



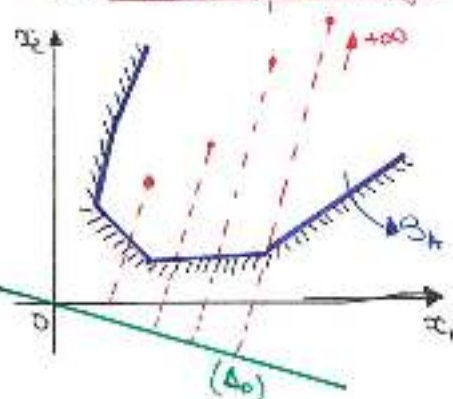
$$\begin{cases} S_0 = \{P\} \\ (\max) f(x_1, x_2) = f(P) \end{cases}$$

a_2) o infinitate de soluții optime (finite)



$$\begin{cases} S_0 = [P_1, P_2] \\ (\max) f(x_1, x_2) = f(P_1) = f(P_2) = f(Q) ; \forall Q \in [P_1, P_2] \end{cases}$$

a_3) maxim (optim) infinit



$$\begin{cases} S_0 = \emptyset \\ (\max) f(x_1, x_2) = +\infty \end{cases}$$

Obs: este posibil ca p.p.L. univ. (sau p.p.L. (cazuri particulare) să averse:

$$\begin{cases} a) S = \emptyset \Rightarrow S_A = \emptyset \Rightarrow S_0 = \emptyset \\ b) S \neq \emptyset \text{ dar } S \cap \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = f_{\max}\} = \emptyset \Rightarrow S_0 = \emptyset \end{cases}$$

B) P.P.L. de „minimă”
3 cazuri minime !!!