

Să se determine soluția/le optimă/e a problemei de transport determinând soluția inițială \bar{X}_0 cu:

• metoda costurilor minime;

• metoda diagonalei (colțul de N-V).

Nu putem rezolva PTN, fără să le aducem la PTE (similar cu $(PPL)_g \rightarrow (PPL)_s$). Deoarece, "cererea < oferta", echilibrăm problema prin introducerea unui nou centru de desfacere "fictiv", " C_4^f ", , care va conține cantitatea „fictivă” de marfă " $b_4 = \sum_{i=1}^3 a_i - \sum_{j=1}^3 b_j = 45 - 40 = 5$ " și care va avea costurile de transport aferente egale cu zero. Așadar, **tabelul PTE** este următorul:

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3	3	2	0	20
	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	
D_2	1	2	4	0	15
	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	
D_3	4	1	4	0	10
	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	
	10	20	10	5	

Modelul matematic asociat **PTE** este:

$$\begin{cases}
 (1) (\min) f(x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) = 3x_{11} + 3x_{12} + 2x_{13} + 0 \cdot x_{14} + x_{21} + 2x_{22} + 4x_{23} + 0 \cdot x_{24} + 4x_{31} + x_{32} + 4x_{33} + 0 \cdot x_{34} \\
 (2) \begin{cases}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 20 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 15 \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10 \\
 x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\
 x_{21} + x_{22} + x_{32} = 20 \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} = 10 \\
 x_{14} + x_{24} + x_{34} = 0
 \end{cases} \\
 (3) x_{ij} \geq 0; \quad i \in \overline{1,3}, j \in \overline{1,4}
 \end{cases}$$

Numărul total al soluțiilor de bază pentru o PTE este de cel mult: $C_{m \cdot n}^{m+n-1} = C_{3 \cdot 4}^{3+4-1} = C_{12}^6 = \frac{12!}{6!6!} = 924$

Etapele algoritmului de rezolvare a PTE

1. Se determină \bar{X}_0 – S.B.A.I. cu:



metoda diagonalei (a colțului de N-V);



metoda costurilor minime.



2. Se aplică criteriul de optim (verificăm dacă soluția \bar{X}_0 este sau nu optimă);

3. (Evident, în cazul în care soluția nu este optimă) Se aplică criteriul de intrare în bază (se determină ce variabilă nebazică devine bazică);

4. Se aplică criteriul de ieșire din bază (se determină care dintre variabilele bazice devine nebazică);

5. Se face schimbarea de bază, determinându-se o nouă S.B.A. \bar{X}_1 mai “bună” decât vechea soluție \bar{X}_0 ($f(\bar{X}_1) \leq f(\bar{X}_0)$) construindu-se un nou tabel al PTE;

6. Se repetă etapele 2.– 5. până la obținerea (unei) soluției optime $\bar{X}_{optimă}$.

Tabelul PTE	 metoda diagonalei (a colțului de N-V);	 metoda costurilor minime.																																				
<div><div><div><div><div>C_1</div><div>C_2</div><div>C_3</div><div>C_4^f</div></div><table><tr><td>D_1</td><td><div><div>3</div><div>3</div><div>2</div><div>0</div></div></td><td>20</td></tr><tr><td>D_2</td><td><div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>0</div></div></td><td>15</td></tr><tr><td>D_3</td><td><div><div>4</div><div>1</div><div>4</div><div>0</div></div></td><td>10</td></tr><tr><td></td><td><div><div>10</div><div>20</div><div>10</div><div>5</div></div></td><td></td></tr></table></div></div></div>	D_1	<div><div>3</div><div>3</div><div>2</div><div>0</div></div>	20	D_2	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>0</div></div>	15	D_3	<div><div>4</div><div>1</div><div>4</div><div>0</div></div>	10		<div><div>10</div><div>20</div><div>10</div><div>5</div></div>		<div><div><div><div><div>C_1</div><div>C_2</div><div>C_3</div><div>C_4^f</div></div><table><tr><td>D_1</td><td><div><div>3</div><div>3</div><div>2</div><div>0</div></div></td><td>20</td></tr><tr><td>D_2</td><td><div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>0</div></div></td><td>15</td></tr><tr><td>D_3</td><td><div><div>4</div><div>1</div><div>4</div><div>0</div></div></td><td>10</td></tr><tr><td></td><td><div><div>10</div><div>20</div><div>10</div><div>5</div></div></td><td></td></tr></table></div></div></div>	D_1	<div><div>3</div><div>3</div><div>2</div><div>0</div></div>	20	D_2	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>0</div></div>	15	D_3	<div><div>4</div><div>1</div><div>4</div><div>0</div></div>	10		<div><div>10</div><div>20</div><div>10</div><div>5</div></div>		<div><div><div><div><div>C_1</div><div>C_2</div><div>C_3</div><div>C_4^f</div></div><table><tr><td>D_1</td><td><div><div>3</div><div>3</div><div>2</div><div>0</div></div></td><td>20</td></tr><tr><td>D_2</td><td><div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>0</div></div></td><td>15</td></tr><tr><td>D_3</td><td><div><div>4</div><div>1</div><div>4</div><div>0</div></div></td><td>10</td></tr><tr><td></td><td><div><div>10</div><div>20</div><div>10</div><div>5</div></div></td><td></td></tr></table></div></div></div>	D_1	<div><div>3</div><div>3</div><div>2</div><div>0</div></div>	20	D_2	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>0</div></div>	15	D_3	<div><div>4</div><div>1</div><div>4</div><div>0</div></div>	10		<div><div>10</div><div>20</div><div>10</div><div>5</div></div>	
D_1	<div><div>3</div><div>3</div><div>2</div><div>0</div></div>	20																																				
D_2	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>0</div></div>	15																																				
D_3	<div><div>4</div><div>1</div><div>4</div><div>0</div></div>	10																																				
	<div><div>10</div><div>20</div><div>10</div><div>5</div></div>																																					
D_1	<div><div>3</div><div>3</div><div>2</div><div>0</div></div>	20																																				
D_2	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>0</div></div>	15																																				
D_3	<div><div>4</div><div>1</div><div>4</div><div>0</div></div>	10																																				
	<div><div>10</div><div>20</div><div>10</div><div>5</div></div>																																					
D_1	<div><div>3</div><div>3</div><div>2</div><div>0</div></div>	20																																				
D_2	<div><div>1</div><div>2</div><div>4</div><div>0</div></div>	15																																				
D_3	<div><div>4</div><div>1</div><div>4</div><div>0</div></div>	10																																				
	<div><div>10</div><div>20</div><div>10</div><div>5</div></div>																																					
<div><div>Pasul1: \bar{X}_0— SBAI</div></div>	<div><div>$\{\bar{X}_0 = (10,10,0,0,0,10,5,0,0,0,5,5)$ $f(\bar{X}_0) = 120$ u. m. (mii dolari)</div></div>	<div><div>$\{\bar{X}_0 = (0,5,10,5,10,5,0,0,0,10,0,0)$ $f(\bar{X}_0) = 65$ u. m. (mii dolari)</div></div>																																				

Atenție, la finalul procedurii, trebuie:

- să avem **$m+n-1$** componente **bazice**, la noi, $3 \text{ (depozite)} + 4 \text{ (centre)} - 1 = 6$;
- restul de **$mn - (m+n-1)$** sunt componente **nebazice**, la noi, $12 - 6 = 6$;
- toate cantitățile de marfă rămase în depozite trebuie să fie egale cu 0;
- toate cantitățile solicitate de centre toate îndeplinite (valorile cerute rămase=0);
- să vedem dacă sunt verificate toate ecuațiile din modelul matematic (**sume pe linii și pe coloane**).

Toate cele 7 ecuații sunt verificate de cele 12 numere, deci este o soluție:

- **de bază**, căci variabilele secundare sunt 0,
- **admisibilă**, căci toate componentele sunt ≥ 0 ,
- **nedegenerată**, căci toate cele 6 componente principale sunt $\neq 0$.

Tabelul PTE

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3	3	2	0	20
D_2	1	2	4	0	15
D_3	4	1	4	0	10
	10	20	10	5	

Metoda diagonalei (a colțului de N-V)

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3	3	2	0	20
	10	10	*	*	
D_2	1	2	4	0	15
	*	10	5	*	
D_3	4	1	4	0	10
	*	*	5	5	
	10	20	10	5	

Metoda costurilor minime

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3	3	2	0	20
	*	5	10	5	
D_2	1	2	4	0	15
	10	5	*	*	
D_3	4	1	4	0	10
	*	10	*	*	
	10	20	10	5	

Pasul1: \bar{X}_0 – SBAI

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = (10, 10, 0, 0, 0, 10, 5, 0, 0, 0, 5, 5) \in \mathbb{R}^{12} \\ f(\bar{X}_0) = 120 \text{ u. m. (mii dolari)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{X}_0 = (0, 5, 10, 5, 10, 5, 0, 0, 0, 10, 0, 0) \in \mathbb{R}^{12} \\ f(\bar{X}_0) = 65 \text{ u. m. (mii dolari)} \end{cases}$$

Pasul2:
Criteriul
de optim– aplicare –
 $\forall \delta_{ij} \leq 0$,
pentru “*”

$$\begin{aligned} \delta_{13} &= -2 + 4 - 2 + 3 = 3 > 0 \\ \delta_{14} &= -0 + 0 - 4 + 4 - 2 + 3 = 1 > 0 \\ \delta_{21} &= -1 + 3 - 3 + 2 = 1 > 0 \\ \delta_{24} &= -0 + 4 - 4 + 0 = 0 \leq 0 \\ \delta_{31} &= -4 + 3 - 3 + 2 - 4 + 4 = -2 < 0 \\ \delta_{32} &= -1 + 2 - 4 + 4 = 1 > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= -3 + 3 - 2 + 1 = -1 < 0 \\ \delta_{23} &= -4 + 2 - 3 + 2 = -3 < 0 \\ \delta_{24} &= -0 + 0 - 3 + 2 = -1 < 0 \\ \delta_{31} &= -4 + 1 - 2 + 1 = -4 < 0 \\ \delta_{33} &= -4 + 1 - 3 + 2 = -3 < 0 \\ \delta_{34} &= -0 + 1 - 3 + 0 = -2 < 0 \end{aligned}$$

– concluzie –

$$\exists \delta_{ij} > 0 \Rightarrow \bar{X}_0 \not\equiv \bar{X}_{\text{optimă}}$$

Toți $\delta_{ij} < 0 \Rightarrow \bar{X}_0 \equiv \bar{X}_{\text{optimă}}^{\text{PTE}}$ (unică)
 $\xrightarrow{\text{eliminăm } C_4^f}$

$$\begin{cases} \bar{X}_{\text{optimă}}^{\text{PTN}} = (0, 5, 10, 10, 5, 0, 0, 10, 0) \in \mathbb{R}^9 \\ f(\bar{X}_{\text{optimă}}^{\text{PTN}}) = 65 \text{ u. m. (mii dolari)} \end{cases}$$

Pasul3: Criteriul de intrare

$$\delta_{kl} = \max\{\delta_{ij} > 0 / (i,j) \text{ celulă nebazică}\} \Rightarrow x_{kl} (\downarrow)$$

$$\delta_{kl} = \max\{\delta_{13}, \delta_{14}, \delta_{21}, \delta_{32}\} = \delta_{13} \Rightarrow x_{13} (\downarrow)$$

Pasul4: Criteriul de ieșire

$\theta \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\bar{x}_{ij} \geq 0 / \text{cu } x_{ij} \text{ aflate în celulele cu număr par din ciclul celulei } (k,l)\}$

Desenăm ciclul celulei $x_{13} (\downarrow)$

$$(4) \quad \begin{array}{c} 10 - \theta = 5 \\ (1,2) \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} +\theta = 5 \\ (1,3) \end{array} \quad (1)$$

$$(3) \quad \begin{array}{c} (2,2) \\ 10 + \theta = 15 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} (2,3) \\ 5 - \theta = * \end{array} \quad (2)$$

$$\theta = \min\left\{\underbrace{x_{23}}_{=5}, \underbrace{x_{14}}_{=10}\right\} \Rightarrow \theta = 5 \Rightarrow (x_{23} \rightarrow)$$

Pasul5: Schimbarea de bază

Vechea bază:

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3 10	3 10	2 ★	0 ★	20
D_2	1 ★	2 10	4 5	0 ★	15
D_3	4 ★	1 ★	4 5	0 5	10
	10	20	10	5	

În soluția veche:

{variabila nebazică " $x_{13} = 0 = *$ "
{variabila bazică " $x_{23} = 5$ "

Noua bază:

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	3 10	3 5	2 5	0 ★	20
D_2	1 ★	2 15	4 ★	0 ★	15
D_3	4 ★	1 ★	4 5	0 5	10
	10	20	10	5	

În soluția nouă:

{variabila bazică " $x_{13} = 5 (= \theta)$ "
{variabila bazică " $x_{23} = 5$ "

S-a făcut un nou tabel al PT → atenție la verificări!

Pasul1': \bar{X}_1 – SBA

$$\begin{cases} \bar{X}_1 = (10, 5, 5, 0, 0, 15, 0, 0, 0, 0, 5, 5) \in \mathbb{R}^{12} \\ f(\bar{X}_1) = 105 < f(\bar{X}_0) = 120 \text{ u. m. (mii dolari)} \end{cases}$$

Pasul2':
Criteriul
de optim

– aplicare –
 $\forall \delta_{ij} \leq 0$, pentru “★”

$$\delta_{14} = -0 + 0 - 4 + 2 = -2 < 0$$

$$\delta_{21} = -1 + 3 - 3 + 2 = 1 > 0$$

$$\delta_{23} = -4 + 2 - 3 + 2 = -3 < 0$$

$$\delta_{24} = -0 + 2 - 3 + 0 = -1 < 0$$

$$\delta_{31} = -4 + 3 - 2 + 4 = 1 > 0$$

$$\delta_{32} = -1 + 3 - 2 + 4 = 4 > 0$$

– concluzie –

$$\exists \delta_{ij} > 0 \Rightarrow \bar{X}_0 \neq \bar{X}_{\text{optimă}}$$

Reluând pașii de la 2 la 5 de cinci ori am ajuns la SO a PT

Pasul5''': Schimbarea de bază

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	5	★	10	5	20
D_2	5	10	★	★	15
D_3	★	10	★	★	10
	10	20	10	5	

	C_1	C_2	C_3	C_4^f	
D_1	★	5	10	5	20
D_2	10	5	★	★	15
D_3	★	10	★	★	10
	10	20	10	5	

Pasul1''''': \bar{X}_5 – SBA

$$\begin{cases} \bar{X}_5 = (0, 5, 10, 5, 10, 5, 0, 0, 0, 10, 0, 0) \in \mathbb{R}^{12} \\ f(\bar{X}_5) = 65 < f(\bar{X}_4) = 70 \text{ u. m. (mii dolari)} \end{cases}$$

Pasul2''''':
Criteriul
de optim

– aplicare –
 $\forall \delta_{ij} \leq 0$, pentru “★”

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= -3 + 3 - 2 + 1 = -1 < 0 \\ \delta_{23} &= -4 + 2 - 3 + 2 = -3 < 0 \\ \delta_{24} &= -0 + 0 - 3 + 2 = -1 < 0 \\ \delta_{31} &= -4 + 1 - 2 + 1 = -4 < 0 \\ \delta_{33} &= -4 + 1 - 3 + 2 = -3 < 0 \\ \delta_{34} &= -0 + 1 - 3 + 0 = -2 < 0\end{aligned}$$

Toți $\delta_{ij} < 0 \Rightarrow \bar{X}_0 \equiv \bar{X}_{optimă}^{PTE}$ (unică) $\xrightarrow{\text{eliminăm } c_4^f}$

$$\begin{cases} \bar{X}_{optimă}^{PTN} = (0, 5, 10, 10, 5, 0, 0, 10, 0) \in \mathbb{R}^9 \\ f(\bar{X}_{optimă}^{PTN}) = \mathbf{65 \text{ u. m. (mii dolari)}} \end{cases}$$

(soluție optimă unică pentru PTN)

– concluzie –

	C_1	C_2	C_3	
D_1	★ 3	5 3	10 2	20
D_2	10 1	5 2	★ 4	15
D_3	★ 4	10 1	★ 4	10
	10	20	10	

Reținem: “Schema de rezolvare” a PTN:

$PTN \xrightarrow{\text{echilibrăm problema}} PTE \xrightarrow{\text{aplicăm alg.de rezolvare a PTE}} \bar{X}_{optimă}^{PTE} \xrightarrow{\text{eliminăm componentele /depozitului fictiv /centrului fictiv}} \bar{X}_{optimă}^{PTN}$