Curs 5

II.3) Tipuri (clase) de soluții a unei $(PPL)_s$ în forma standard

În continuare, vom presupune că $(PPL)_g$ inițială (generală) a fost adusă la forma standard (având "$x_1, x_2, \dots, x_k$" variabile inițiale și „$x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$" variab. de compensare):

$$
(PPL_s^e)\begin{cases}
(1_s)\ (\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
(2_s)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \\
(3_s)\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
(1_s)\ (\min) f(X) = CX \\
(2_s)\ A \cdot X = B \\
(3_s)\ X \geq 0
\end{cases}
$$

(scrisă explicit) (scrisă matricial)

Vom mai presupune că întotdeauna sistemul de ecuații (restricții economice) (2_s) verifică următoarele condiții inițiale:

$$(5.1)\ \begin{cases} m < n \\ \operatorname{rang} A = m \end{cases} ;\ A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$$

→ aceste condiții asigură că sistemul liniar (2_s) este un sist. compatibil nedeterminat (are o ∞ de soluții) și nu are ecuații secundare (restricțiile/ec. sunt indep.)

Def 1: Fie o $(PPL)_s$ de forma (1_s)–(3_s) care verifică condițiile inițiale (5.1). Atunci, numim:

a) soluție (oarecare, generală) a $(PPL)_s$, un vector $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T \in \mathbb{R}^n$ care verifică (este soluție) sistemul de ecuații (2_s). Notăm cu:

$$(5.2)\ S = \{X_0 \in \mathbb{R}^n \,/\, (2_s)\ A \cdot X_0 = B\}$$ → mulțimea soluțiilor (oarecare, generale) ale $(PPL)_s$

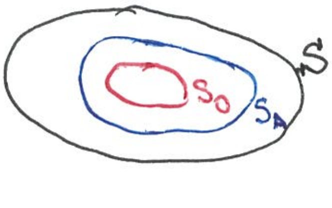
b) soluție admisibilă a $(PPL)_s$, un vector $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T \in \mathbb{R}^n$ care este soluție a $(PPL)_s$ (verifică sist. (2_s)) și verifică condițiile de nenegativitate (3_s). Notăm cu:

$$(5.3)\ S_A = \{X_0 \in \mathbb{R}^n \,/\, (2_s)\ A \cdot X_0 = B,\ (3_s)\ X_0 \geq 0\}$$ → mulțimea soluțiilor admisibile a $(PPL)_s$

c) soluție optimă a $(PPL)_s$, un vector $X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T \in \mathbb{R}^n$ care este soluție admisibilă a $(PPL)_s$ (verifică $(2_s)+(3_s)$) dar satisface și condiția de optim (1_s). Notăm cu:

$$(5.4)\ S_0 = \{X_0 \in \mathbb{R}^n \,/\, (1_s)\ (\min) f(X) = f(X_0),\ (2_s)\ A X_0 = B,\ (3_s)\ X_0 \geq 0\}$$ → mulțimea soluțiilor optime a $(PPL)_s$

Obs: i) conform definițiilor de mai sus, pentru orice $(PPL)_s$ avem următoarea relație între cele 3 mulțimi de soluții: $(*)\ S_0 \subset S_A \subset S$ care poate fi reprezentată grafic astfel:



ii) evident, în ~~scrierea~~ definirea mulțimilor de soluții (5.2)–(5.4) am folosit scrierea sub formă matricială a unei $(P.P.L)_S$;

iii) în condițiile inițiale (5.1) satisfăcute, o $(PPL)_S$ are întotdeauna:

$$(**)\begin{cases} \text{(i) card } S = +\infty & \text{(}PPL_S\text{ are o „}\infty\text{" de sol. gen. } \Leftrightarrow \text{ sist. } (\Sigma_S) \text{ are o „}\infty\text{" de sol. } (\Leftrightarrow \text{comp. nedet.})\text{)} \\ \text{(ii) card } S_A = \begin{cases} 0 & \text{(}\cancel{\text{toate}}\text{ sol. generale sunt neadmisibile } \Leftrightarrow \text{ au măcar o componentă negativă)} \\ +\infty & \text{(există o „}\infty\text{" de sol. adm. } \Leftrightarrow \text{ sist. } (\Sigma_S) \text{ are o „}\infty\text{" de sol. cu comp. } \geq 0\text{)} \end{cases} \\ \text{(iii) card } S_O = \begin{cases} 0 & \text{(nu are sol. optimă } \rightarrow \text{ caz extrem de rar)} \\ 1 & \text{(are soluție optimă unică } \rightarrow \text{ cel mai des întâlnit)} \\ +\infty & \text{(are o „}\infty\text{" de soluții optime } \rightarrow \text{ foarte rar întâlnit)} \end{cases} \end{cases}$$

Deoarece am presupus (cf. (5.1)) că rang $A=m \Rightarrow$ între cei „n" vectori P_j, $j=\overline{1,n}$ (definiți în scrierea vectorială de coloanele matricei A) va exista măcar un set de „m" vectori L.i, fie aceștia: $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m} \in \mathbb{R}^m$, adică:

$$\{P_1, P_2, \dots, P_{i_1}, \dots, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}, \dots P_n\} \subset \mathbb{R}^m$$

L.i

deci mulțimea $B=\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}\} \subseteq \mathbb{R}^m$ formează o bază în $\mathbb{R}^m$, deoarece satisface condițiile:
$$\begin{cases} \text{(i) card } B = m = \dim \mathbb{R}^m \ (A) \\ \text{(ii) } B - \text{L.i} \end{cases}$$

not: $\begin{cases} \dot{I} = \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \rightarrow \text{mulțimea indicilor bazici} \\ J = \{1,2,\dots,n\} \setminus \dot{I} \rightarrow \text{mulțimea indicilor nebazici} \end{cases}$

Obs: evident avem: $\begin{cases} \dot{I} \cap J = \emptyset \\ \dot{I} \cup J = \{1,2,\dots,n\} \end{cases}$

Fie o soluție $X_0 \in S$ (sau $X_0 \in S_A$, sau $X_0 \in S_O$) de forma:

$$\begin{cases} X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i_1}^0, \dots, x_{i_2}^0, \dots, x_j^0, \dots, x_{i_m}^0, \dots x_n)^T \in \mathbb{R}^n \\ \text{și:} \\ B = \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}\} \subseteq \mathbb{R}^m \end{cases}$$

atunci numim componentele (variabilele):

$$\begin{cases} x_{i_1}^0, x_{i_2}^0, \dots, x_{i_m}^0 \rightarrow \text{componente (variabile) bazice/principale} \\ x_1^0, x_2^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0 \rightarrow \text{componente (variabile) nebazice/secundare} \end{cases}$$

Obs:

Putem nota prescurtat cele două tipuri de componente astfel:

$$\begin{cases} x_i^0, \ i \in \dot{I} \rightarrow \text{componente bazice} \\ x_j^0, \ j \in J \rightarrow \text{componente nebazice} \end{cases}$$

Def 2 Fie o $(PPL)_s$: (1_s)–(3_s) verificând condițiile (5.1) și $B=\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}\} \subseteq \mathbb{R}^m$ vectori bazici.

Numim:

a) ***soluție de bază (S.B)*** a $(PPL)_s$ corespunzătoare bazei B, o soluție $X_0 \in S$ care are toate componentele nebazice nule ($x_j^0 = 0$, $j \in J$), adică are forma:

(i) $X_0 = (0, 0, \dots, \underbrace{x_{i_1}^0}_{\in \mathbb{R}}, 0, \dots, 0, \underbrace{x_{i_2}^0}_{\in \mathbb{R}}, 0, 0, \dots 0, \underbrace{x_{i_m}^0}_{\in \mathbb{R}}, 0, \dots 0)^T \in \mathbb{R}^n \ (\subset S)$

b) ***soluție de bază admisibilă (S.B.A)*** a $(PPL)_s$ corespunzătoare bazei B, o soluție $X_0 \in S_A$ care are toate componentele nebazice nule ($x_j^0 = 0$, $j \in J$), adică este de forma:

(ii) $X_0 = (0, \dots, 0, \underbrace{x_{i_1}^0}_{\geq 0}, 0, \dots, 0, \underbrace{x_{i_2}^0}_{\geq 0}, 0, \dots, 0, \underbrace{x_{i_m}^0}_{\geq 0}, 0, \dots, 0)^T \subset S_A \ (\in \mathbb{R}^n)$

Obs:
- a) o S.B $\overline{X_0}$ este ***neadmisibilă*** $\Leftrightarrow$ cel puțin o componentă bazică este negativă ($(\exists) x_i^0 < 0$, $i \in I$);
- b) notăm cu:

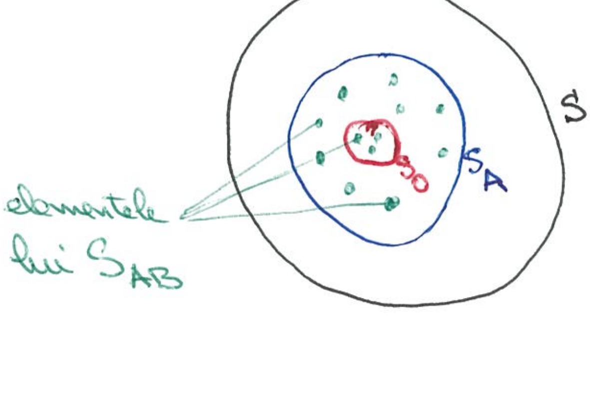
(5.5) $S_{AB} = \{X_0 \in S_A \mid$ componentele nebazice $x_j^0 = 0$, $(\forall) j \in J\} \subset S_A$ $\rightarrow$ ***mulțimea soluțiilor de bază admisibile a unei (PPL)***

Obs:

i) $\operatorname{card} S_{AB} \leq C_n^m \overset{def}{=} \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ (S_{AB} este mulțime finită)

ii) $\begin{cases} S_{AB} \subset S_A \subset S \\ S_{AB} \cap S_0 \neq \emptyset \ ; \ S_0 \not\subset S_{AB} \text{ și } S_{AB} \not\subset S_0 \end{cases}$

iii) reprezentarea geometrică de mai jos a celor 4 mulțimi de soluții (S, S_A, S_0 și S_{AB}) "clarifică" relațiile existente între acestea:



II.4) Elemente de topologia mulțimilor convexe

Def 3 Numim *combinație liniar convexă* a vectorilor $X_1, X_2, \dots, X_m \in \mathbb{R}^n$, expresia

(5.6) "$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m$" a.î. $\begin{cases} i) & \lambda_i \in [0,1] \ ; \ i=\overline{1,m} \\ 2) & \sum\limits_{i=1}^{m} \equiv \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = 1 \end{cases}$

Obs: pentru $m=2$, combinația liniar convexă a 2 vectori se scrie sub forma:

(5.6') "$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$" cu $\lambda \in [0,1]$

Dem:

Din relația (5.6) $\xRightarrow{m=2}$ combinație "$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2$" cu $\begin{cases} (i) & \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1] \\ (ii) & \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \Leftrightarrow \lambda_2 = 1 - \lambda_1 \end{cases} \Bigg| \Rightarrow$

combinația "$\lambda_1 X_1 + (1-\lambda_1) X_2$" $\xrightarrow[\lambda_1 \equiv \lambda]{\text{renotând}}$ "$\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$" cu $\lambda \in [0,1]$

q.e.d

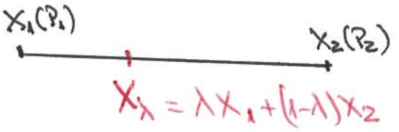
Obs: i) not: (5.7) $X_\lambda = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$ → vectorul X_λ este combinația liniar convexă a vect. X_1 și X_2

ii) dacă interpretăm geometric vectorii $\begin{cases} X_1 = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})^T \in \mathbb{R}^n \\ X_2 = (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)})^T \in \mathbb{R}^n \end{cases}$ ca fiind două

"puncte" în spațiul n-dimensional $\mathbb{R}^n$: $\begin{cases} P_1(x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}) \\ P_2(x_1^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) \end{cases}$ atunci vectorul X_λ va

fi un "punct" de pe segmentul (n-dimensional) determinat de $X_1(P_1)$ și $X_2(P_2)$

adică:



Obs: pt. $\begin{cases} a) & \lambda = 0 \Rightarrow X_\lambda \equiv X_2 \\ b) & \lambda = 1 \Rightarrow X_\lambda \equiv X_1 \\ c) & \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow X_\lambda = \frac{1}{2}(X_1 + X_2) \to \text{mijlocul segm. } [X_1, X_2] \end{cases}$

Def 4:

Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime (poligonală) oarecare. Spunem că:

a) *M este o mulțime (poligonală) convexă* dacă:

(5.8) $(\forall)\ X_1, X_2 \in M$ și $(\forall)\ \lambda \in [0,1] \Rightarrow X_\lambda \overset{\text{def}}{\equiv} \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in M$

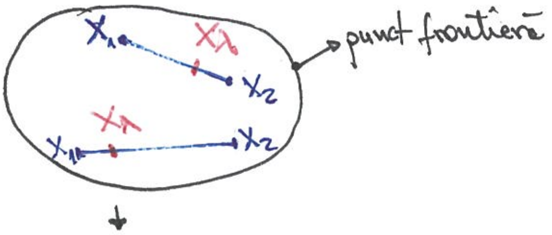
b) *$X_0 \in M$ este punct extrem (vârf)* al mulțimii $\underbrace{\text{convexe}}_{}$ poligonal M, dacă:

(5.9) $(\forall)\ X_1, X_2 \in M$ cu $X_1 \neq X_2$ și $(\forall)\ \lambda \in (0,1) \Rightarrow X_0 \neq \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$ $(\Leftrightarrow X_0 \neq X_\lambda)$

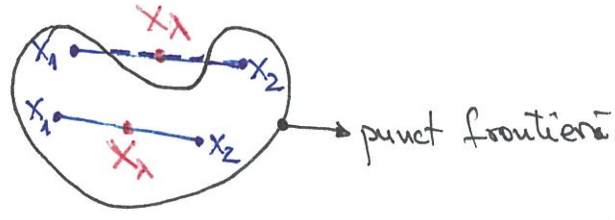
$\Updownarrow$

(5.9') $(\not\exists)\ X_1, X_2 \in M$ cu $X_1 \neq X_2$ și $(\not\exists)\ \lambda \in (0,1)$ a.î.: $X_0 = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$ $(\Leftrightarrow X_0 = X_\lambda)$

a)

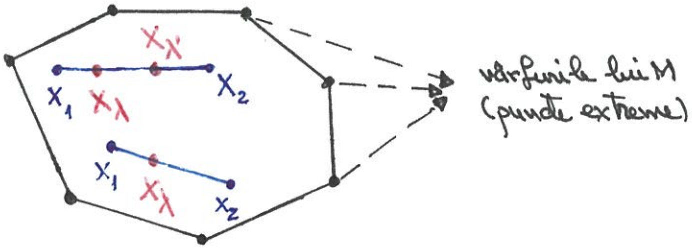


Mulțimea „M" convexă oarecare

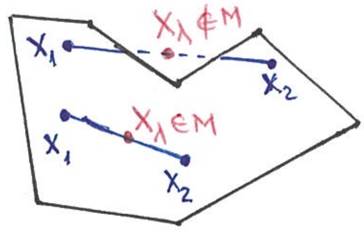


Mulțimea „M" oarecare neconvexă (concavă)

b)



Mulțimea poligonală convexă M



Mulțime poligonală neconvexă (concavă) M

Teorema 1 (de caracterizare a mulțimilor poligonale convexe)

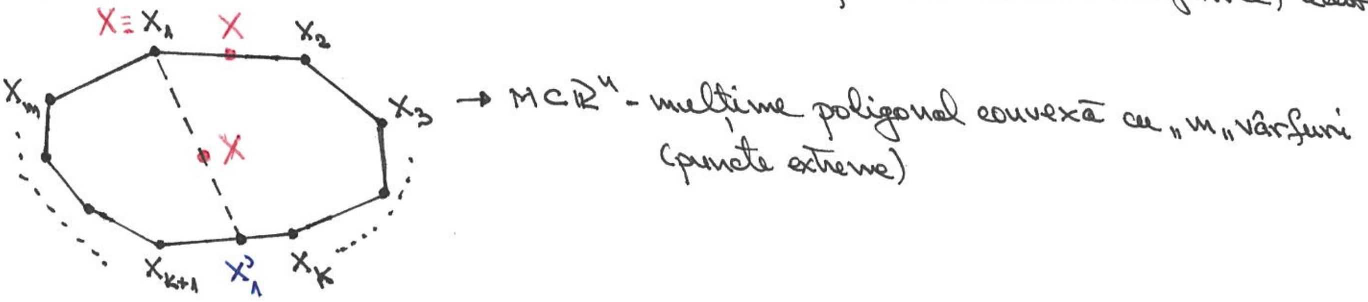
Fie $M \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime poligonală convexă și $X_1, X_2, \dots, X_m$ punctele extreme (vârfurile) acesteia.

Atunci:

$$(5.10)\quad (\forall)\, X \in M,\ (\exists)\, \lambda_i \in [0,1] \text{ cu } i=\overline{1,m} \text{ și } \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \text{ a.î.: } X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m \left(\equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i\right)$$

(adică, orice punct X al mulțimii M (punct interior, frontieră sau extrem) poligonale convexe se poate întotdeauna scrie ca "o combinație liniar convexă de punctele extreme (vârfurile) acestei mulțimi.)

Dem:



a) $X \equiv X_i$ (X este un punct extrem)

Pp. că $X \equiv X_i$ cu $i \in \{1,2,\dots,m\}$. Pentru simplitate luăm $i=1 \Leftrightarrow \underline{\underline{X \equiv X_1}}$. Luăm scalarii λ_i, $i=\overline{1,m}$ de forma: $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = \lambda_3 = \dots \lambda_m = 0 \end{cases}$ Evident satisfac relațiile din (5.6): $\begin{cases} (i)\ \lambda_i \in [0,1]\ ;\ i=\overline{1,m} \\ (ii)\ \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1+0+\dots+0 = 1 \end{cases}$

Avem: $X = X_1 \Leftrightarrow X = \underbrace{1}_{=\lambda_1} X_1 + \underbrace{0}_{=\lambda_2} \cdot X_2 + \dots + \underbrace{0}_{=\lambda_m} \cdot X_m \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i \Rightarrow$ relația (5.10) este satisfăcută.

b) $X \in \mathrm{int}[X_i, X_{i+1}]$ (X este situat în interiorul unui segment de pe frontiera lui M)

Pentru simplitate pp. că $i=1 \Leftrightarrow X \in \mathrm{int}[X_1, X_2] \equiv (X_1, X_2) \Rightarrow (\exists)\, \lambda \in (0,1)$ a.î. $X = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow X = \underbrace{\lambda}_{\overset{\text{not}}{=}\lambda_1} X_1 + \underbrace{(1-\lambda)}_{\overset{\text{not}}{=}\lambda_2} X_2 + \underbrace{0}_{\overset{\text{not}}{=}\lambda_3} \cdot X_3 + \dots + \underbrace{0}_{\overset{\text{not}}{=}\lambda_m} \cdot X_m = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_m X_m \equiv \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i \Leftrightarrow$ rel. (5.10) este satisfăcută și în acest caz.

c) $X \in \text{int } M$ (X este punct interior al mulțimii M)

cf. fig. de la începutul demonstrației, dacă unim un vârf (pp. că este X_1) cu punctul interior X printr-o "dreaptă n-dimensională", aceasta va intersecta frontiera lui M într-un alt punct ($\overset{not}{=} X_1'$) aflat pe unul din segmentele frontierei lui M (pp. că este $[X_k, X_{k+1}]$)

Atunci, deoarece M - mulțime poligonală convexă, avem relațiile:

$$\begin{cases} (*)\ (\exists)\ \lambda \in (0,1) \text{ a.î : } X = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_1' \\ (**)\ (\exists)\ \mu \in [0,1] \text{ a.î : } X_1' = \mu X_k + (1-\mu) X_{k+1} \end{cases} \Bigg| \overset{(*)}{\underset{(**)}{\Longrightarrow}}$$

$$\Rightarrow X = \lambda X_1 + (1-\lambda)[\mu X_k + (1-\mu) X_{k+1}] = \underbrace{\lambda}_{\overset{not}{=}\lambda_1} X_1 + \underbrace{(1-\lambda)\mu}_{\overset{not}{=}\lambda_k} X_k + \underbrace{(1-\lambda)(1-\mu)}_{\overset{not}{=}\lambda_{k+1}} X_{k+1} =$$

$$= \underbrace{\lambda}_{\overset{not}{=}\lambda_1} X_1 + \underbrace{0}_{\overset{not}{=}\lambda_2} \cdot X_2 + \dots + \underbrace{0}_{\overset{not}{=}\lambda_{k-1}} X_{k-1} + \underbrace{(1-\lambda)\mu}_{\overset{not}{=}\lambda_k} X_k + \underbrace{(1-\lambda)(1-\mu)}_{\overset{not}{=}\lambda_{k+1}} X_{k+1} + \underbrace{0}_{\overset{not}{=}\lambda_{k+2}} \cdot X_{k+2} + \dots + \underbrace{0}_{\overset{not}{=}\lambda_m} X_m =$$

$$= \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \dots + \lambda_{k-1} X_{k-1} + \lambda_k X_k + \lambda_{k+1} X_{k+1} + \dots + \lambda_m X_m = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i X_i \quad (1)$$

Dar: i) $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda \in (0,1) \\ \lambda_k = \underbrace{(1-\lambda)}_{\in(0,1)} \cdot \underbrace{\mu}_{\in[0,1]} \in [0,1] \\ \lambda_{k+1} = \underbrace{(1-\lambda)}_{\in(0,1)} \underbrace{(1-\mu)}_{\in[0,1]} \in [0,1] \\ \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = \lambda_{k+2} = \dots \lambda_m = 0 \in [0,1] \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\lambda_i \in [0,1]$, $(\forall)\ i = \overline{1,m}$ (2)

ii) $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m = \lambda + (1-\lambda)\mu + (1-\lambda)(1-\mu) + 0 + \dots + 0 = \lambda + \mu - \lambda\mu + 1 - \lambda - \mu + \lambda\mu = 1$ (3)

Din (1) - (3) $\Rightarrow$ rel. (5.10) este verificată și în acest ultim caz.

q.e.d

II.5) Proprietăți ale soluțiilor unei $(PPL)_s$ în formă standard

Vom folosi scrierea sub formă matricială a unei $(PPL)_s$, adică: $\begin{cases} (1s)\ (\min) f(X) = C \cdot X \\ (2s)\ A \cdot X = B \\ (3s)\ X \geq 0 \end{cases}$

Teorema 2.

Mulțimea soluțiilor (generale, oarecare) S a unei $(PPL)_s$ este o mulțime (poligonală) convexă.

Dem: Avem $S \overset{def}{=} \{X_0 \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot X_0 = B\}$ (*)

Fie $X_1, X_2 \in S \overset{(*)}{\Longrightarrow} (1) \begin{cases} AX_1 = B \\ AX_2 = B \end{cases}$

Dar S - mulțime (poligonală) convexă $\overset{(5.8)}{\Longleftrightarrow} (\forall)\ X_1, X_2 \in S, (\forall)\ \lambda \in [0,1] \Rightarrow X_\lambda \equiv \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2 \in S.$

$X_\lambda \in S \overset{(*)}{\Longleftrightarrow} AX_\lambda = B \Leftrightarrow A \cdot [\lambda X_1 + (1-\lambda) X_2] = B \Leftrightarrow \lambda \cdot \underbrace{(AX_1)}_{\overset{(1)}{=}B} + (1-\lambda)\underbrace{(AX_2)}_{\overset{(1)}{=}B} = B \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \lambda B + (1-\lambda) B = B$ (Adevărat)

q.e.d

Teorema 3:

Mulțimea soluțiilor admisibile S_A a unei $(PPL)_s$ este o mulțime (poligonală) convexă

Dem: Avem $S_A = \{X_0 \in \mathbb{R}^n \,/\, (2s)\ AX_0 = B,\ (3s)\ X_0 \geq 0\} \subset S$ (*)

cf. def. S_A - convexă $\Leftrightarrow (\forall)\, X_1, X_2 \in S_A$ și $(\forall)\, \lambda \in [0,1] \Rightarrow X_\lambda \equiv \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in S_A$

Fie $X_1, X_2 \in S_A \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (1)\begin{cases} AX_1 = B \\ X_1 \geq 0 \end{cases}$ și $(2)\begin{cases} AX_2 = B \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$

Dar $X_\lambda \in S_A \overset{(*)}{\Leftrightarrow} (3)\begin{cases} AX_\lambda = B \to \text{demonstrată cf. } T_2 \\ X_\lambda \geq 0 \end{cases}$

Dar: $X_\lambda = \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \underbrace{X_1}_{\geq 0\ (1)} + \underbrace{(1-\lambda)}_{\geq 0} \underbrace{X_2}_{\geq 0\ (2)} \geq 0 \Rightarrow X_\lambda \in S_A$.

q.e.d

Teorema 4

Mulțimea soluțiilor optime S_0 a unei $(PPL)_s$ este o mulțime poligonală convexă (în cazul în care $(PPL)_s$ are optim finit $\Leftrightarrow S_0 \neq \emptyset$)

Dem: Avem $S_0 = \{X_0 \in \mathbb{R}^n \,/\, (1s)\ (\min) f(X) = f(X_0) = m;\ (2s)\ AX_0 = B;\ (3s)\ X_0 \geq 0\} \subset S_A$ (*)

Dar, S_0 - convexă $\Leftrightarrow (\forall)\, X_1, X_2 \in S_0$ și $(\forall)\, \lambda \in [0,1] \Rightarrow X_\lambda \equiv \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in S_0$

Fie $X_1, X_2 \in S_0 \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1s)\ (\min) f(X) = f(X_1) = m \\ (2s)\ AX_1 = B \\ (3s)\ X_1 \geq 0 \end{cases}$ și $\begin{cases} (1s)\ (\min) f(X) = f(X_2) = m \\ (2s)\ AX_2 = B \\ (3s)\ X_2 \geq 0 \end{cases}$

Atunci $X_\lambda \in S_0 \Leftrightarrow \begin{cases} (1s)\ (\min) f(X) = f(X_\lambda) = m \\ (2s)\ A \cdot X_\lambda = B \to \text{demonstrată cf. } T_2 \\ (3s)\ X_\lambda \geq 0 \to \text{dem. cf. } T_3 \end{cases}$

Dar $f(X_\lambda) \equiv f(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) \overset{(**)}{=} \lambda \underbrace{f(X_1)}_{=m} + (1-\lambda)\underbrace{f(X_2)}_{=m} = \lambda m + (1-\lambda) m = m \Rightarrow (1s)(A) \Rightarrow S_0$ - convexă

Obs: f - formă liniară $\Leftrightarrow f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$ (**) cf. (4.1)

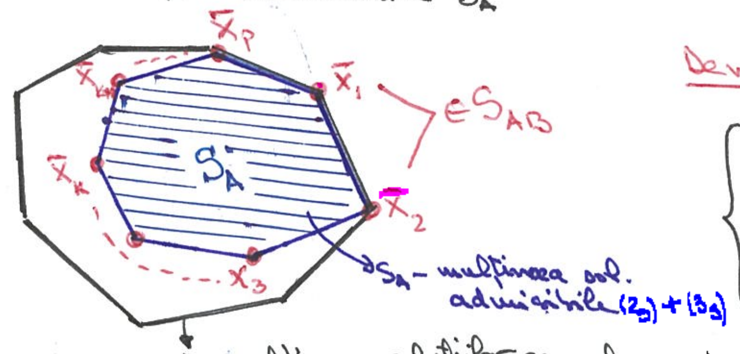
q.e.d.

Teorema 5:

Fie mulțimile S_A și S_{AB} atașate unei $(PPL)_s$. Atunci soluția $\bar{X} \in S_A$:

$$\bar{X} \in S_{AB} \Leftrightarrow \bar{X} \text{ este punct extrem (vârf) al mulțimii } S_A$$

Obs: Teorema afirmă că soluțiile admisibile de bază ale unei $(PPL)_s$ sunt vârfurile mulțimii soluțiilor admisibile S_A



S - mulțimea soluțiilor generale a sistemului (2s)

Dem: Fie $(PPL)_s$ scrisă sub formă vectorială:

$$\begin{cases} (1s)\ (\min) f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ (2s)\ x_1P_1 + x_2P_2 + \dots + x_nP_n = P_0 \\ (3s)\ x_i \geq 0;\ i = \overline{1,n} \end{cases}$$

$\overset{n}{\underset{(m.r.a)}{(\Rightarrow)}}$ $\overline{X} \in S_{AB} \Rightarrow \overline{X}$ punct extrem (vârf) al lui S_A

Fie $B=\{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}\} \le \mathbb{R}^m$ și $\overline{X} = [0,\dots,0,\overline{x}_{i_1},0,\dots,0,\overline{x}_{i_2},0,\dots,0,\overline{x}_{i_m},0,\dots,0]^T \in \mathbb{R}^n$ – S.B.A corespunzătoare acestei baze B.

Cele „n" componente ale lui $\overline{X}$ sunt: $\begin{cases} \overline{x}_i \ge 0;\ (\forall) i \in \{i_1, i_2, \dots, i_m\} \overset{not}{\equiv} \dot{I} \to \text{componente bazice (principale)} \\ \overline{x}_j = 0;\ (\forall) j \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \dot{I} \overset{not}{\equiv} J \to \text{componente nebazice (secundare)} \end{cases}$

Pp. că $\overline{X}$ nu este punct extrem al S_A $(\Leftrightarrow)$ $(\exists) X_1, X_2 \in S_A$ cu $X_1 \ne X_2$ și $(\exists) \lambda \in (0,1)$ a.î.: (1) $\overline{X} = \lambda X_1 + (1-\lambda) X_2$

Rel (1) scrisă pe componente devine:

$$(1')\begin{cases} \overline{x}_i = \lambda x_i^{(1)} + (1-\lambda) x_i^{(2)} ;\ (\forall) i \in \dot{I} \\ 0 = \lambda x_j^{(1)} + (1-\lambda) x_j^{(2)} ;\ (\forall) j \in J \end{cases} \xrightarrow[x_j^{(1)}, x_j^{(2)} \ge 0 \ (cf. (2)_2 \text{ și } (3)_2)]{\lambda > 0;\ 1-\lambda > 0} (*) \boxed{x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0 ;\ (\forall) j \in J}$$

Deoarece $\begin{cases} a) X_1 \equiv (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots, x_n^{(1)})^T \in S_A \Leftrightarrow \begin{cases} (2_S)\ x_1^{(1)} P_1 + x_2^{(1)} P_2 + \dots + x_n^{(1)} P_n = P_0 \\ (3_S)\ x_k^{(1)} \ge 0 ;\ (\forall) k = \overline{1,n} \end{cases} \quad (2) \\ b) X_2 \equiv (x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots, x_n^{(2)}) \in S_A \Leftrightarrow \begin{cases} (2_S)\ x_1^{(2)} P_1 + x_2^{(2)} P_2 + \dots + x_n^{(2)} P_n = P_0 \\ (3_S)\ x_k^{(2)} \ge 0 ;\ k = \overline{1,n} \end{cases} \quad (3) \end{cases}$

Din: $\begin{cases} (2)_1 + (*) \Rightarrow (2')_1\ x_{i_1}^{(1)} P_{i_1} + x_{i_2}^{(1)} P_{i_2} + \dots + x_{i_m}^{(1)} P_{i_m} = P_0 \\ (3)_1 + (*) \Rightarrow (3')_1\ x_{i_1}^{(2)} P_{i_1} + x_{i_2}^{(2)} P_{i_2} + \dots + x_{i_m}^{(2)} P_{i_m} = P_0 \end{cases}$ (din membrul drept al egalităților dispar termenii corespunzători vectorilor P_j, $(\forall) j \in J$, deoarece $x_j^{(1)} = x_j^{(2)} = 0$, $(\forall) j \in J$)

„–" $(x_{i_1}^{(1)} - x_{i_1}^{(2)}) P_{i_1} + (x_{i_2}^{(1)} - x_{i_2}^{(2)}) P_{i_2} + \dots + (x_{i_m}^{(1)} - x_{i_m}^{(2)}) P_{i_m} = 0_m$

Dar $B \le \mathbb{R}^m \Rightarrow P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_m}$ – sunt L.i $\Big\} \Rightarrow \begin{cases} x_{i_1}^{(1)} - x_{i_1}^{(2)} = 0 \\ x_{i_2}^{(1)} - x_{i_2}^{(2)} = 0 \\ \dots\dots \\ x_{i_m}^{(1)} - x_{i_m}^{(2)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_{i_1}^{(1)} = x_{i_1}^{(2)} \\ x_{i_2}^{(1)} = x_{i_2}^{(2)} \\ \dots\dots \\ x_{i_m}^{(1)} = x_{i_m}^{(2)} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x_i^{(1)} = x_i^{(2)} ;\ (\forall) i \in \dot{I}}\ (**)$

Din $(*) + (**) \Rightarrow x_k^{(1)} = x_k^{(2)}$; $k = \overline{1,n} \Leftrightarrow \underline{X_1 = X_2}$ (F) → contrazice ipoteza făcută în (1) $(X_1 \ne X_2) \Leftrightarrow$

pp. făcută este falsă $\Leftrightarrow \overline{X}$ este punct extrem al S_A.

$\overset{s}{\underset{(m.r.a)}{(\Leftarrow)}}$ $\overline{X}$ – punct extrem al $S_A \Rightarrow \overline{X} \in S_{AB}$

Fie $\overline{X} \equiv (\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n)^T \in S_A \Leftrightarrow (1) \begin{cases} (2_S)\ \overline{x}_1 P_1 + \overline{x}_2 P_2 + \dots + \overline{x}_n P_n = P_0 \\ (3_S)\ \overline{x}_k \ge 0 ,\ k = \overline{1,n} \end{cases}$

Vom presupune că $\overline{X}$ are $p \le n$ componente nenule (>0) și fără a restrânge generalitatea le presupunem a fi ~~situate pe~~ primele componente, adică: $(*)\ \overline{X} = (\underset{>0}{\overline{x}_1}, \underset{>0}{\overline{x}_2}, \dots, \underset{>0}{\overline{x}_p}, 0, 0, \dots, 0)^T \in S_A$

Pentru a arăta că $\overline{X} \in S_{AB} \Leftrightarrow \overline{X}$ este vârf al S_A, trebuie să arătăm că vectorii $P_1, P_2, \dots, P_p$ (corespunzători componentelor bazice $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_p > 0$) sunt L.i ($\Leftrightarrow$ formează o bază)

Prin reducere la absurd vom presupune că: ~~$P_1, P_2, \dots, P_p$ sunt L.D $\Leftrightarrow$~~

$\{P_1, P_2, \dots, P_p\}$ – L.D $\Leftrightarrow (\exists) \alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,p}$ nu toți nuli a.î.: (2) $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_p P_p = 0_m$

Din (1), $((2_S)) + (*) \Rightarrow (3)\ \overline{x}_1 P_1 + \overline{x}_2 P_2 + \dots + \overline{x}_p P_p = P_0$ (deoarece $\overline{x}_{p+1} = \dots = \overline{x}_n = 0$)

Înmulțim rel. (2) cu $\lambda \neq 0$ și o adunăm/o scădem la/din (3) (adică: $(2)/\cdot\lambda \pm (3)$) obținem

$$(4)\begin{cases}(\overline{x}_1+\lambda\alpha_1)P_1+(\overline{x}_2+\lambda\alpha_2)P_2+\dots+(\overline{x}_p+\lambda\alpha_p)P_p=P_0\\(\overline{x}_1-\lambda\alpha_1)P_1+(\overline{x}_2-\lambda\alpha_2)P_2+\dots+(\overline{x}_p-\lambda\alpha_p)P_p=P_0\end{cases}$$

Fie vectorii X' și X'' de componente: $(5)\begin{cases}X'=(\overline{x}_1+\lambda\alpha_1,\overline{x}_2+\lambda\alpha_2,\dots,\overline{x}_p+\lambda\alpha_p,0,0,\dots,0)^T\in\mathbb{R}^n\\X''=(\overline{x}_1-\lambda\alpha_1,\overline{x}_2-\lambda\alpha_2,\dots,\overline{x}_p-\lambda\alpha_p,0,0,\dots,0)^T\in\mathbb{R}^n\end{cases}$

Evident, cf.(4) vectorii X' și X'' verifică ec.$(2_S)^{(**)}$ (adică: $\begin{cases}A\cdot X'=B\\A\cdot X''=B\end{cases}$ în f. matriceală)

Deoarece componentele bazice $\overline{x}_i>0$ $(\forall) i=\overline{1,p}$ vom găsi o valoare $\lambda>0$ (f.f. mică, $\lambda \xrightarrow{>} 0$) a.î. componentele lui X'' (și evident ale lui X') să fie >0 (pozitive): adică:

$$\begin{cases}\underbrace{\overline{x}_i}_{>0}-\underbrace{\lambda\alpha_i}_{\simeq 0}>0 & ; i=\overline{1,p}\\ \underbrace{\overline{x}_i}_{>0}+\underbrace{\lambda\alpha_i}_{\simeq 0}>0 & ; i=\overline{1,p}\end{cases} \Longrightarrow X' \text{ și } X'' \text{ verifică și relațiile } (3_S)\ (\overset{*}{**})$$

Din $(**)+(\overset{*}{**}) \Rightarrow \underline{X', X''\in S_A}$

Dar, cf rel. $(4)_{1+2} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \overline{X}=\frac{1}{2}X'+\frac{1}{2}X'' \Leftrightarrow \overline{X}$ se scrie ca o comb. liniar convexă de X' și X'' $(\overline{X}=\lambda X'+(1-\lambda)X'')$ cu $\lambda=\frac{1}{2}$ și $X'\neq X''$) $\Leftrightarrow \overline{X}$ __nu este__ punct extrem al S_A (F) - se contrazice ipoteza făcută $\Leftrightarrow$ presupunerea făcută (că vect $\{P_1,P_2,\dots,P_p\}$ sunt L.D) este falsă $\Leftrightarrow \{P_1,P_2,\dots,P_p\}$ sunt L.i.

Dar, deoarece $r_A=m \Rightarrow p=m \Leftrightarrow \{P_1,P_2,\dots,P_m\}\subseteq\mathbb{R}^m \Leftrightarrow \overline{X}\in S_{AB}$.

q.e.d.

Teorema 6 (!!!)

Dacă o $(PPL)_S$ admite optim finit $((\min_{X\in S_A}) f(X)=m\neq\pm\infty)$, atunci există cel puțin o soluție de bază admisibilă în care funcția obiectiv „f" ia valoarea optimă (minimă).

$$\left(\text{Dacă } (\min_{X\in S_A}) f(X)=m\neq\pm\infty \Longrightarrow (\exists)\,\underset{\Updownarrow}{\overline{X}_0}\in S_{AB} \text{ a.î. } f(\overline{X}_0)=m\ (=\min_{X\in S_A}f(X))\right)$$

$\overline{X}_0$ este un vârf al lui S_A

Dem: Fie $X_0=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)^T\in S_A$ a.î.: $\underline{f(X_0)=m}\ (\equiv\min_{X\in S_A}f(X))$. Dacă:

a) $\underline{X_0 \text{ este punct extrem (vârf) al } S_A} \overset{T_5}{\Longrightarrow} X_0\in S_{AB}$, deci teorema este demonstrată.

b) $\underline{X_0 \text{ nu este punct extrem (vârf) al } S_A}$, deci X_0 este punct de pe frontiera lui S_A sau punct interior din $S_A \underset{S_A-\text{convexă}}{\overset{(T_1)}{\Longleftrightarrow}} (\exists)\lambda_i\in[0,1]$, $i=\overline{1,m}$ cu $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$ a.î.: (1) $X_0=\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\dots+\lambda_mX_m$

($X_1,X_2,\dots,X_m \to$ vârfurile lui S_A)

Atunci:

$$\underline{f(X_0)}\overset{(1)}{=}f(\lambda_1X_1+\lambda_2X_2+\dots+\lambda_mX_m)\underset{\text{„f" formă liniară.}}{\overset{(4.1')}{=}}\underline{\lambda_1f(X_1)+\lambda_2f(X_2)+\dots+\lambda_mf(X_m)}\ (2)$$

Fie X_k, $1\le k\le m$, vârful în care funcția obiectiv $f(X)$ ia cea mai mică valoare din toate vârfurile lui S_A, adică:

$\min\limits_{i=\overline{1,m}} f(X_i) = \min\{f(X_1), f(X_2), \dots, f(X_k), \dots, f(X_m)\} = f(X_k) \Rightarrow (3)\ f(X_k) \le f(X_i);\ (\forall)\ i=\overline{1,m}$

Atunci:

$$f(X_0) \overset{(2)}{=} \lambda_1 f(X_1) + \lambda_2 f(X_2) + \dots + \lambda_m f(X_m) \overset{(3)}{\geq} \lambda_1 f(X_k) + \lambda_2 f(X_k) + \dots + \lambda_m f(X_m) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_m) f(X_k) = f(X_k)$$

$\Leftrightarrow \boxed{f(X_0) \geq f(X_k)}\ (*)$

Dar X_0 este punct de minim pentru funcția „f" $\Leftrightarrow f(X_0) = \min\limits_{x \in S_A} f(x)\ (=m) \Leftrightarrow$

$\left.\begin{array}{l} f(X_0) \le f(x),\ (\forall)\ x \in S_A \\ \text{Dar } X_k \in S_A \text{ (este vârf al } S_A) \end{array}\right] \Rightarrow \boxed{f(X_0) \le f(X_k)}\ (**)$

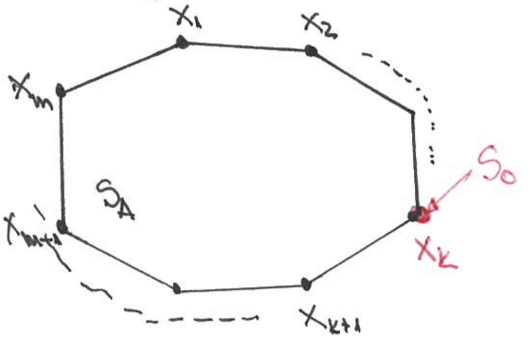
Din $(*) + (**) \Rightarrow (\exists)\ X_k \in S_{AB}$ a.î.: $f(X_0) = f(X_k) = m$

q.e.d

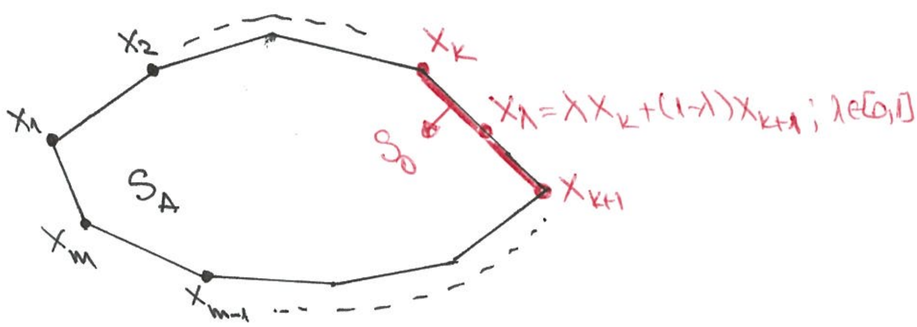
Obs: i) T_6 afirmă că ~~soluția optimă~~ valoarea minimă (optimă) a funcției obiectiv „f" este atinsă într-un vârf (punct extrem) al mulțimii $S_A \Leftrightarrow$ este atinsă într-un element al S_{AB}

ii) dacă valoarea minimă este atinsă nu într-un singur vârf, ci în mai multe: 2, 3, … atunci $(P.P.L)_s$ are o „∞" de soluții deoarece S_0 este mulțime convexă (vezi fig. de mai jos.)

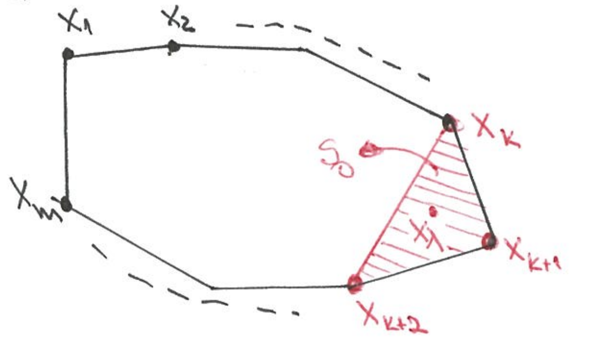
a) $\begin{cases} S_0 = \{X_k\} \to \text{soluție unică} \\ \min\limits_{x \in S_A} f(X) = f(X_k) = m \end{cases}$



b) $\begin{cases} S_0 = [X_k\ X_{k+1}] - \text{o infinitate de sol. optime (finite)} \\ \min\limits_{x \in S_A} f(X) = f(X_k) = f(X_{k+1}) = f(X_\lambda) = m\ ;\ (\forall)\ X_\lambda \in [X_k, X_{k+1}] \end{cases}$



c) $\begin{cases} S_0 = [X_k, X_{k+1}, X_{k+2}] - \text{o infinitate de sol. optime} \\ (\min\limits_{x \in S_A}) f(X) = f(X_k) = f(X_{k+1}) = f(X_{k+2}) = f(X_\lambda) = m \end{cases}$



$X_\lambda = \lambda_1 X_k + \lambda_2 X_{k+1} + \lambda_3 X_{k+2}$ cu $\begin{cases} \text{i) } \lambda_i \in [0,1],\ i=\overline{1,3} \\ \text{ii) } \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{cases}$