CAPITOLUL 4
MODELE NELINIARE

4.1. INTRODUCERE

Pentru modelele liniare, viteza de variație a variabilei dependente în raport cu cea independentă este constantă pe întreg câmpul de variație a variabilei predictor.

Teoria şi practica economică însă arată că modelele liniare nu sunt şi cel mai frecvent utilizate. În multe situaţii, cercetarea impune apelul la modele neliniare, caz în care *variația variabilei dependente* nu depinde doar de variația variabilei independente, ci și de valoarea variabilei factoriale la care se înregistrează această variație.

Cu alte cuvinte, *viteza de variație a variabilei dependente* nu mai este constantă, ci depinde de valorile variabilei independente, de valorile variabilei dependente sau simultan de ambele.

Din punct de vedere econometric, aceste modele prezintă elemente specifice, atât în privinţa posibilităţilor de estimare a parametrilor, cât şi de aplicare practică a modelelor.

În cele ce urmează, sunt prezentate o serie de modele de regresie neliniară care permit estimarea parametrilor prin metoda celor mai mici pătrate (MCMMP).

În această categorie se include modelele care pot fi *liniarizabile*, de regulă, cu ajutorul funcţiei logaritm, dar și modele *neliniarizabile*, precum cele polinomiale şi cel reciproc.

1. Modele liniarizabile

1.1. Modele cu ambele variabile logaritmate

a. Modelul de tip putere simplu sau modelul log-liniar simplu

b. Modelul de tip putere multiplu sau modelul log-liniar multiplu (Funcţia de producţie Cobb-Douglas)

1.2. Modele cu variabila independentă (X) logaritmată

a. Modelul Logarithmic

1.3. Modele cu variabila dependentă (Y) logaritmată

a. Modelul Compound (compus)

b. Modelul Growth (de creştere)

c. Modelul Exponential (exponenţial)

2. Modele neliniarizabile (modelele polinomiale)

2.1. Modelul Quadratic sau parabolic

2.2. Modelul cubic

Observaţie:

Pentru fiecare model în parte, trebuie să ştiţi:

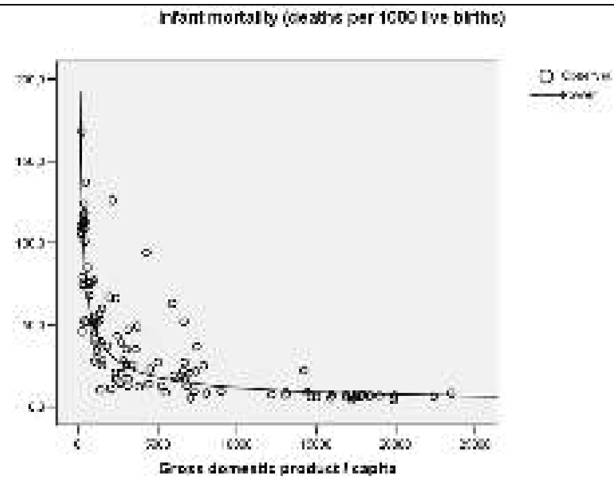
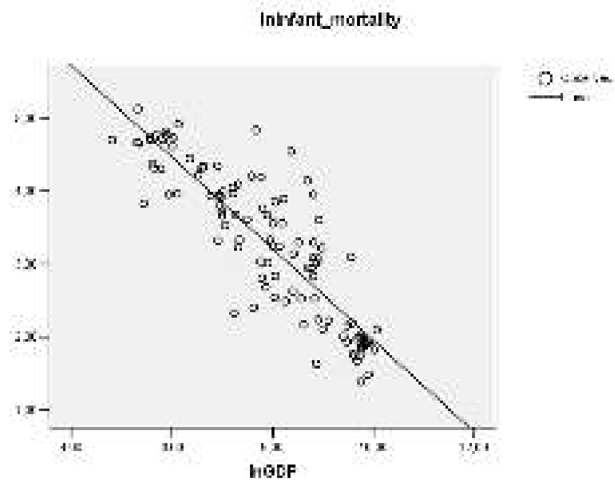
- identificarea modelului pe baza informaţiilor din tabelul de coeficienţi (pentru toate modelele) şi pe baza reprezentărilor grafice (pentru modelele polinomiale);
- ecuaţia modelului neliniarizat şi a modelului liniarizat prin funcţia logaritm (pentru modelele care pot fi transformate cu ajutorul funcției logaritm sau liniarizate);
- ecuaţia estimată a modelului neliniarizat şi a modelului liniarizat (scrisă atât teoretic, cât şi pe baza estimaţiilor coeficienţilor de regresie din tabelul *Coefficients*);
- restricţiile asupra componentelor fiecărui model (variabile şi/sau parametri), precum şi particularităţile corespunzătoare fiecărui model cu privire la interpretarea parametrilor;
- definirea parametrilor modelului (β_0 - ca medie; β_1 - ca raport de variaţii);
- interpretarea estimaţiilor parametrilor modelului de regresie (b_0; b_1) – mare atenţie la particularităţile corespunzătoare fiecărui model cu privire la interpretarea estimaţiilor parametrilor modelului, adică la transformările aduse asupra estimaţiilor b_0 şi b_1 în funcţie de fiecare model în parte.

4.2. MODELE LINIARIZABILE

Modelul log-liniar este un model neliniar în care variabilele apar prin funcţia logaritm.

Relaţia dintre variabilele logaritmate este de tip liniar (*modelul este liniar în parametri*), ceea ce permite utilizarea proprietăților modelelor liniare pentru estimarea şi testarea parametrilor modelului.

Acest tip de model poate fi considerat un rezultat al procesului de liniarizare, cu ajutorul funcţiei logaritm aplicate unui model neliniar de tip putere.

1. MODELE LINIARIZABILE	**1.1(a) Modelul de regresie cu ambele variabile logaritmate (Y şi X)**	
	Modelul de tip putere (*Power*)	**Modelul log-liniar (liniarizat)**
Reprezentarea grafică		
Forma generală a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor	Considerăm modelul de regresie cu două variabile (X, Y) de forma: $$Y = \beta_0 X^{\beta_1} e^{\varepsilon}$$ $$y_i = \beta_0 {x_i}^{\beta_1} e^{\varepsilon_i}$$	Prin logaritmare, se obţine modelul: $$lnY = ln\beta_0 + \beta_1 lnX + \varepsilon$$ $$lny_i = ln\beta_0 + \beta_1 lnx_i + \varepsilon_i$$ Modelul obţinut este un model log-liniar, adică un model de tip liniar, în care ambele variabile apar prin funcţia logaritm.
Restricţii şi observaţii	Variabila dependentă Y are doar valori pozitive, aşadar $\beta_0 > 0$. Variabila independentă X are doar valori pozitive. Parametrul $\beta_1 \in \mathbb{R}$, semnul indicând sensul legăturii dintre cele două variabile.	
Interpretarea coeficienţilor de regresie sau a	$\beta_0 = E(Y)_{\vert X=1} \Leftrightarrow \beta_0 = E(Y)_{\vert lnX=0}$ Parametrul β_0 reprezintă ***valoarea medie*** a variabilei dependente (Y), atunci când variabila independentă (X) este egală cu ***1 unitate***.	

<table>
<tr>
<td rowspan="3">parametrilor modelului</td>
<td colspan="2">

$$\beta_1 = \frac{dlnY}{dlnX} = \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dX}{X}}$$

Parametrul β_1 reprezintă raportul dintre ***variaţia medie relativă*** a variabilei dependente şi ***variaţia relativă*** a variabilei independente. Această variaţie se poate exprima şi procentual:

$$\beta_{1(\%)} = dlnY_{(\%)}\ _{|dlnX=1\%}$$

Exprimat în procente, $\beta_1\%$ arată că la o creştere a variabilei independente (X) cu 1%, variabila dependentă (Y) variază, în medie, cu $\beta_1\%$.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Viteza de variaţie a variabilei dependente în raport cu cea independentă ***nu este constantă***, ci depinde şi de valorile celor două variabile, adică de punctul în care se calculează. Aceasta reprezintă tangenta la curba de regresie în fiecare punct:

$$\beta_1 = \frac{dlnY}{dlnX} = \frac{\frac{dY}{Y}}{\frac{dX}{X}} = \frac{dY}{dX}\frac{X}{Y} \Longrightarrow \frac{dY}{dX} = \beta_1\frac{X}{Y}$$

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Elasticitatea unei variabile Y în raport cu o altă variabilă X reprezintă ***modificarea relativă (procentuală)*** a variabilei Y ***la o modificare relativă (procentuală)*** dată a lui X, de obicei mică, de o unitate. Formalizând, elasticitatea E este dată prin relaţia:

$$\boldsymbol{E} = \frac{\%modif\ Y}{\%modif\ X} = \frac{\frac{\Delta Y}{Y}}{\frac{\Delta X}{X}} = \frac{\Delta Y}{\Delta X}\frac{X}{Y}$$

Unde Δ semnifică modificările sau diferenţele realizate la nivelul unei variabile (operatorul diferenţial).

$$E = \frac{dlnY}{dlnX} = \beta_1$$

Prin urmare, pentru modelul log-liniar, ***elasticitatea*** **(*E*)** este tocmai parametrul β_1 şi este constantă. De aceea interpretarea parametrului β_1 se poate face şi astfel: $\boldsymbol{\beta_1}$ reprezintă şi ***elasticitatea*** **(*E*)** variabilei dependente (Y) în raport cu variabila independentă (X).

</td>
</tr>
<tr>
<td>Ecuaţia estimată a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare</td>
<td>

$$Y_X = b_0 X^{b_1}$$

$$y_{x_i} = b_0 {x_i}^{b_1}$$

</td>
<td>

$$lnY_X = lnb_0 + b_1 lnX$$

$$lny_{x_i} = lnb_0 + b_1 lnx_i$$

</td>
</tr>
</table>

valoarea a variabilelor		
Interpretarea estimaţiilor parametrilor modelului	$\boldsymbol{b_0}$ indică ***valoarea medie estimată*** a variabilei dependente (Y), atunci când variabila independentă (X) este egală cu ***1 unitate***.	
	$\boldsymbol{b_1}\%$ arată cu cât ***variază, în medie, variabila dependentă*** (Y), atunci când variabila independentă (X) ***creşte cu 1%***. **SAU** $\boldsymbol{b_1}\%$ reprezintă ***elasticitatea*** ***(E)*** variabilei dependente (Y) în raport cu variabila independentă (X) și arată că la o creştere a variabilei independente (X) cu **1%**, variabila dependentă (Y) variază (**scade** sau **creşte** în funcție de semnul lui b_1), în medie, cu $\boldsymbol{b_1}\%$.	
Exemple din economie	Analiza *mortalităţii infantile* (Y) în funcţie de *Produsul Intern Brut* - PIB (X). Analiza relației dintre *salariul*, ca variabilă dependentă, și *nivelul de educație*, ca variabilă independentă.	

Aplicaţia 1

Pentru un eşantion format din 109 ţări ale lumii, s-au înregistrat date pentru *mortalitatea infantilă* (decese la o mie de născuţi vii) şi *PIB pe locuitor* (dolari).

Tabelul *Coefficients* ne oferă rezultatele estimării şi testării parametrilor modelului.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	8,231	,274		30,016	,000
	lnGDP	-,628	,034	-,871	-18,337	,000

a. Dependent Variable: lnInfant_mortality

Modelul estimat este de forma:

$$y_{x_i} = 8,231 x_i^{-0,628}$$
$$\ln y_{x_i} = \ln(8,231) - 0,628 \ln x_i$$

Interpretarea estimaţiilor coeficienţilor de regresie:

- $b_0 = 8{,}231$ **decese** indică nivelul mediu estimat al ratei mortalității infantile când valoarea PIB pe locuitor este egală cu 1**dolari**. Evident, această valoare este una pur ipotetică.
- $b_1 = -0{,}628\,\%$ reprezintă elasticitatea mortalităţii infantile în raport cu PIB pe locuitor şi arată că la o creştere cu **1%** a PIB/locuitor, rata mortalității infantile scade, în medie, cu **0,628%**.

Interpretarea rezultatelor testării semnificaţiei parametrilor modelului de regresie:

Testul Student bilateral indică rezultate semnificative statistic pentru parametrii modelului, deoarece $Sigt$ are valori mai mici decât riscul de 0,05. În concluzie, se consideră că între cele două variabile există o legătură (neliniară) semnificativă ce poate fi modelată cu ajutorul modelului de tip putere (sau al modelului log-liniar).

Tabelul *Model Summary* include estimaţia raportului de corelaţie şi a raportului de determinaţie.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,871[a]	,759	,756	,50820

a. Predictors: (Constant), lnGDP

Interpretarea estimaţiei raportului de determinație

Observăm că estimația raportului de determinație este $R^2 = 0{,}759$. Acest rezultat arată că variația variabilei dependente (ratei mortalității infantile) este explicată în proporție de $75{,}9\%$ de variația variabilei independente (PIB pe locuitor) prin intermediul modelului de tip putere (modelului log-liniar).

Tabelul *Anova* ne oferă rezultatele testării modelului putere.

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	86,842	1	86,842	336,253	,000[a]
	Residual	27,634	107	,258		
	Total	114,476	108			

a. Predictors: (Constant), lnGDP

b. Dependent Variable: lnInfant_mortality

Interpretarea rezultatului testării modelului (în funcție de Sig comparat cu riscul α)

Rezultatul testului Fisher, ce testează semnificația modelului sau a raportului de corelație, ne conduce la decizia de a respinge ipoteza nulă (care afirmă că între cele două variabile nu există o legătură semnificativă explicată de modelul de tip putere). Cu alte cuvinte, modelul de tip putere este corect specificat pentru a explica dependența neliniară dintre rata mortalității infantile și PIB pe locuitor.

<table>
<tr><td rowspan="2">1. MODELE LINIARIZABILE</td><td colspan="2">1.1(b) Modelul funcţiei de producţie (Funcţia Cobb Douglas)</td></tr>
<tr><td>Modelul de tip putere multiplu</td><td>Modelul log-liniar multiplu</td></tr>
<tr><td>Caracterizarea modelului</td><td colspan="2">Funcţia de producţie este un model de regresie neliniară multiplă de tip log-liniar, care generalizează modelul log-liniar la un număr de p variabile independente. Denumirea acestui model derivă de la utilizarea specifică a acestuia pentru a explica relaţia dintre producţie (output) şi factorii principali de producţie (input).</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Forma generală a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor</td><td colspan="2">Pentru un număr de p factori sau variabile independente, modelul are următoarea formă:</td></tr>
<tr><td>$Y = \beta_0 X_1{}^{\beta_1} X_2{}^{\beta_2} \dots X_p{}^{\beta_p} e^{\varepsilon}$
$y_i = \beta_0 x_{1i}{}^{\beta_1} x_{2i}{}^{\beta_2} \dots x_{pi}{}^{\beta_p} e^{\varepsilon_i}$</td><td>$lnY = ln\beta_0 + \beta_1 lnX_1 + \cdots + \beta_p lnX_p + \varepsilon$
$lny_i = ln\beta_0 + \beta_1 lnx_{1i} + \cdots + \beta_p lnx_{pi} + \varepsilon_i$</td></tr>
<tr><td colspan="2">În practică, se utilizează frecvent doi factori de producţie: munca (labor – L) şi capitalul (K). Modelul de regresie este următorul:</td></tr>
<tr><td>$Y = \beta_0 L^{\beta_1} K^{\beta_2} e^{\varepsilon}$
$y_i = \beta_0 L_i{}^{\beta_1} K_i{}^{\beta_2} e^{\varepsilon_i}$</td><td>$lnY = ln\beta_0 + \beta_1 lnL + \beta_2 lnK + \varepsilon$
$lny_i = ln\beta_0 + \beta_1 lnL_i + \beta_2 lnL_i + \varepsilon_i$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Restricţii şi observaţii</td><td>Variabila dependentă Y are doar valori pozitive, aşadar $\beta_0 > 0$.
Variabilele independente X_1 şi X_2 au doar valori pozitive.
Parametrii β_1 şi $\beta_2 \in \mathbb{R}$, semnul indicând sensul legăturii dintre variabila dependentă şi cele independente.</td></tr>
<tr><td>Interpretarea coeficienţilor de regresie sau a</td><td>$\beta_0 = E(Y)_{\,|X_1=1 \text{ și } X_2=1}$
Parametrul β_0 reprezintă media variabilei dependente (Y), atunci când variabilele independente X_1 şi X_2 sunt egale cu 1 unitate.
Parametrul β_0 este nivelul mediu al producţiei la un input $K = 1$ și $L = 1$.</td></tr>
</table>

parametrilor modelului	**Interpretarea coeficienților de regresie parțiali:** Parametrul β_1 reprezintă raportul dintre ***variația medie relativă*** a variabilei dependente și ***variația relativă*** a variabilei independente (X_1), în condițiile în care variabila independentă (X_2) rămâne constantă. Parametrul β_2 reprezintă raportul dintre ***variația medie relativă*** a variabilei dependente și ***variația relativă*** a variabilei independente (X_2), în condițiile în care variabila independentă (X_1) rămâne constantă. **Exprimați în procente:** $\beta_1\%$ arată că, la o creștere a variabilei independente (X_1) cu **1%**, variabila dependentă (Y) variază, în medie, cu $\boldsymbol{\beta_1}$**%**, în condițiile în care variabila dependente (X_2) rămâne constantă. $\beta_2\%$ arată că, la o creștere a variabilei independente (X_2) cu **1%**, variabila dependentă (Y) variază, în medie, cu $\boldsymbol{\beta_2}$**%**, în condițiile în care influența variabilei independente (X_2) rămâne constantă. **În termeni de elasticitate:** Parametrul β_1 indică ***elasticitatea parţială*** a variabilei dependente (Y) în raport cu variabila independentă (X_1). Parametrul β_1 indică ***elasticitatea parţială*** a producţiei în raport cu factorul muncă. Parametrul β_2 reprezintă elasticitatea variabilei dependente (Y) în raport cu variabila independentă (X_2), ***în condițiile în care variabila dependente*** $\boldsymbol{(X_1)}$ ***rămâne constantă***. Parametrul β_2 indică ***elasticitatea parţială*** producţiei în raport cu factorul capital. **Elasticitatea totală:** $(\beta_1+\beta_2)$ reprezintă ***elasticitatea totală*** numită şi ***randament de scară*** a producţiei. În funcţie de valorile pe care le poate lua elasticitatea totală, există următoarele situaţii: - $(\beta_1+\beta_2)>1$: ***randament de scară crescător***, situaţie care corespunde unei variaţii mai accelerate a producţiei, în raport cu variaţia factorilor - $(\beta_1+\beta_2)<1$: ***randament de scară descrescător***, situaţie care corespunde unei variaţii mai reduse a producţiei (de exemplu, dacă se dublează inputul, atunci outputul creşte într-o măsură mai mică, adică nu se realizează o dublare a producţiei) - $(\beta_1+\beta_2)=1$: ***randament de scară constant***, situaţie care corespunde unei variaţii constante a producţiei în raport cu factorii (de exemplu, dacă se dublează inputul, atunci se dublează şi outpul).

<table>
<tr><td>Ecuaţia estimată a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor</td><td>$Y_X = b_0 X_1^{b_1} X_2^{b_2}$
SAU
$Y_X = b_0 L^{b_1} K^{b_2}$

$y_{x_i} = b_0 {x_{1i}}^{b_1} {x_{2i}}^{b_2}$
SAU
$y_{x_i} = b_0 {L_i}^{b_1} {K_i}^{b_2}$</td><td>$lnY_X = lnb_0 + b_1 lnX_1 + b_2 lnX_2$
SAU
$lnY_X = lnb_0 + b_1 lnL + b_2 lnK$

$lny_{x_i} = lnb_0 + b_1 lnx_{1i} + b_2 lnx_{2i}$
SAU
$lny_{x_i} = lnb_0 + b_1 lnL_i + b_2 lnK_i$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Interpretarea estimaţiilor parametrilor modelului</td><td colspan="2">$\boldsymbol{b_0}$ indică valoarea medie estimată a producției (Y), atunci când factorii muncă și capital iau valoarea 1 ($K = 1$ şi $L = 1$).</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boldsymbol{b_1}\%$ reprezintă elasticitatea parțială a producției (Y) în raport cu factorul muncă (L) și arată că la o creștere a factorului muncă (L) cu 1%, producția (Y) variază, în medie, cu $\boldsymbol{b_1}\%$, în condițiile în care factorul capital (K) rămâne constant.

$\boldsymbol{b_2}\%$ reprezintă elasticitatea parțială a producției (Y) în raport cu factorul capital (K) și arată că la o creștere a factorului capital (K) cu 1%, producția (Y) variază, în medie, cu $\boldsymbol{b_2}\%$, în condițiile în care factorul muncă (L) rămâne constant.

$(\boldsymbol{b_1} + \boldsymbol{b_2})$ indică elasticitatea totală a producției (Y) în raport cu factorii muncă și capital (X_1 $și$ X_2).</td></tr>
<tr><td>Exemple din economie</td><td colspan="2">Analiza producţiei (Y) în funcţie de factorii de producţie muncă L (X_1) şi capital K (X_2).</td></tr>
</table>

Aplicația 2

Pentru exemplificarea modelului funcţiei de producţie, se consideră variabila dependentă, *volum de lemn recoltat* (mii m^3), şi variabilele independente, *numărul mediu de salariaţi din sivicultură* (persoane) şi *suprafaţa forestieră* (ha), înregistrate la nivelul judeţelor din România, în anul 2012.

Tabelul *Coefficients* ne oferă rezultatele estimării şi testării parametrilor modelului.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	5,338	1,540		3,466	,000
	ln(Numar_angajati)	,437	,133	,204	3,295	,002
	ln(Suprafata_forestiera)	1,112	,069	,999	16,160	,000

a. Dependent Variable: ln(Volum_lemn_recoltat)

Modelul estimat este de forma:

$$\boldsymbol{y_{x_i} = 5,338 {x_{1i}}^{0,437} {x_{2i}}^{1,112}}$$

$$\boldsymbol{ln y_{x_i} = ln(5,338) + 0,628 ln x_{1i} + 1,112 ln x_{2i}}$$

SAU respectând notațiile modelului economic privind producția și factorii de producție, cele două ecuații pot fi rescrise astfel:

$$\boldsymbol{y_{x_i} = 5,338 {L_i}^{0,437} {K_i}^{1,112}}$$

$$\boldsymbol{ln y_{x_i} = ln(5,338) + 0,628 ln L_i + 1,112 ln K_i}$$

Interpretarea estimaţiilor punctuale ale coeficienţilor de regresie:

- $b_0 = 5{,}338$ **mii m^3** indică volumul mediu estimat de lemn recoltat când numărul de salariați ($\boldsymbol{L}$) este egal cu **1 persoană** și suprafața forestieră ($\boldsymbol{K}$) egală cu **1 ha**;
- $b_1 = 0{,}437\,\%$ este elasticitatea parțială a volumului de lemn recoltat în raport cu numărul de salariați ($\boldsymbol{L}$) şi arată că la o creştere cu **1%** a numărului de salariați ($\boldsymbol{L}$), volumul de lemn recoltat creşte, în medie, cu **0,437%**, în condițiile în care suprafața forestieră (K) se menține constantă;
- $b_2 = 1{,}112\,\%$ este elasticitatea parțială a volumului de lemn recoltat în raport cu suprafața forestieră (K) și arată că la o creştere cu **1%** a suprafeței forestiere ($\boldsymbol{K}$), volumul de lemn recoltat creşte, în medie, cu **1,112%**, în condițiile în care numărul de salariați (L) se menține constant;
- $b_1 + b_1 = 0{,}437 + 1{,}112 = 1{,}549$ este elasticitatea totală a volumului de lemn recoltat în raport cu numărul de salariați ($\boldsymbol{L}$) și suprafața forestieră ($\boldsymbol{K}$) și indică un

randament de scară crescător ($b_1 + b_1 > 1$), adică variația producției, volumul de lemn recoltat, este mai accelerată decât variația factorilor de producție, numărul de salariați (***L***) şi suprafața forestieră (***K***).

Interpretarea rezultatelor testării semnificației parametrilor modelului de regresie:

Testul Student bilateral indică estimații semnificative statistic pentru parametrii modelului, deoarece $Sigt = P(> |t|)$ are valori mai mici decât pragul de 0,05:

- semnificația coeficientului parțial de regresie β_1 arată că numărul de salariați are o influență neliniară parțială semnificativă asupra variației volumului de lemn recoltat;
- semnificația coeficientului parțial de regresie β_2 arată că suprafața forestieră are o influență neliniară parțială semnificativă asupra variației volumului de lemn recoltat.

Tabelul *Model Summary* ne prezintă estimaţiile raportului de corelaţie multiplă şi a raportului de determinaţie multiplă.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,937[a]	,878	,871	,33881

a. Predictors: (Constant), lnSuprafata_forestiera, lnNumar_angajati

Estimația raportului de determinație multiplă arată că variația variabilei dependente (volumul de lemn recoltat) este explicată de variația simultană a factorilor de producție (numărul de salariați și suprafața forestieră) în proporţie de 87,8%, variaţie explicată cu ajutorul modelului log-liniar multiplu sau al funcţiei de producţie.

Tabelul *Anova* ne oferă rezultatele testării modelului de tip putere multiplu.

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	31,339	2	15,669	136,503	,000[a]
	Residual	4,362	38	,115		
	Total	35,701	40			

a. Predictors: (Constant), lnSuprafata_forestiera, lnNumar_angajati

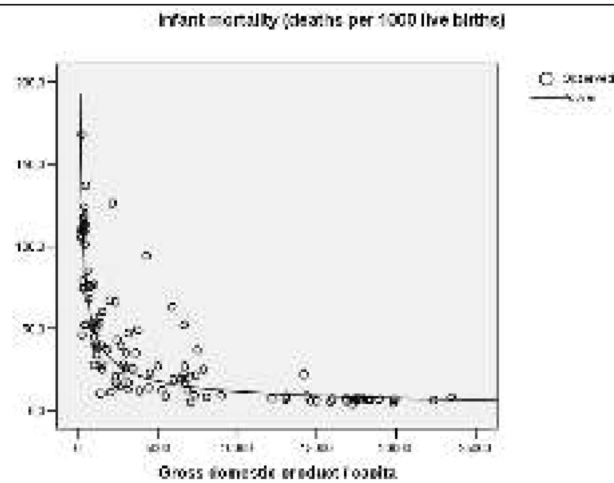
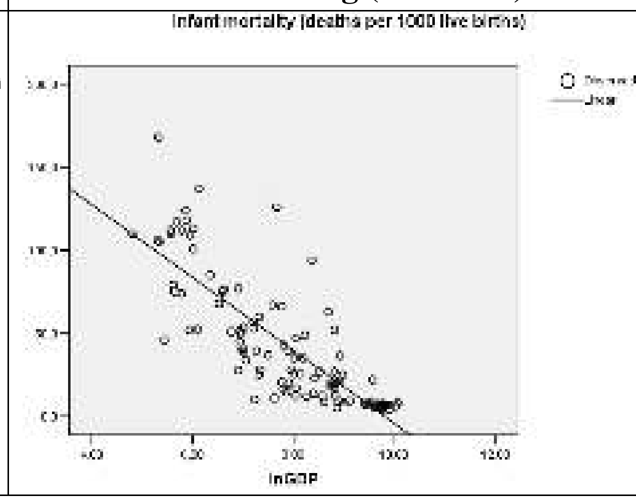
b. Dependent Variable: lnVolum_lemn_recoltat

Testul Fisher ne arată că modelul funcţiei de producţie este semnificativ statistic ($Sigt < 0{,}05$) şi explică dependenţa dintre volumul de lemn recoltat şi factorii consideraţi: numărul de salariaţi şi suprafaţa forestieră.

Modele semi-logaritmice (1)

Modelele semi-logaritmice sunt modele neliniare în care fie variabila independentă, fie variabila dependentă apare ca variabilă logaritmată.

Aceste modele sunt construite, de regulă, cu scopul de a estima variaţia ***relativă*** sau absolută a variabilei dependente la o variaţie ***absolută*** sau *relativă* a variabilei independente.

1. MODELE LINIARIZABILE	**1.2. Modelul semi-logaritmic cu variabila independentă (X) logaritmată (*Logarithmic*)**	
	Modelul Logarithmic	**Modelul lin-log (liniarizat)**
Reprezentarea grafică		
Forma generală a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor	$Y = \beta_0 + \beta_1 lnX + \varepsilon$ $y_i = \beta_0 + \beta_1 lnx_i + \varepsilon_i$	
Restricţii şi observaţii	Variabila independentă X are doar valori pozitive. Parametrul $\beta_1 \in \mathbb{R}$, semnul indicând sensul legăturii dintre cele două variabile.	
Interpretarea coeficienţilor de regresie sau a parametrilor modelului	$\beta_0 = E(Y)_{\|X=1} \Leftrightarrow \beta_0 = E(Y)_{\|lnX=0}$ Parametrul β_0 indică ***valoarea medie*** a variabilei dependente (Y), atunci când variabila independentă (X) este egală cu ***1 unitate***.	
	$\beta_1 = \frac{dY}{dlnX} = \frac{dY}{\frac{dX}{X}} = \frac{dY}{dX}X$ Parametrul β_1 exprimă ***variaţia absolută medie*** a variabilei dependente (Y) la o ***modificare relativă*** cu o unitate a variabilei independente X.	

	Pentru parametrul β_1 din acest model, în interpretare, trebuie să se ţină cont de faptul că variabila dependentă înregistrează o variaţie absolută, iar variabila independentă o variaţie relativă sau o variaţie cu o unitate în logaritmi. Pentru exprimarea procentuală, este nevoie de o împărţire a acestui coeficient cu 100: $\frac{\beta_1}{100} = dY_{\mid dlnX=1\%}$ $\boldsymbol{\beta_1/100}$ arată că, la o creștere a variabilei independente (X) cu $\mathbf{1\%}$, variabila dependentă (Y) variază, în medie, cu $\boldsymbol{\beta_1/100}$ unităţi (unitatea de măsură a lui *Y*).
Ecuaţia estimată a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor	$Y_X = b_0 + b_1 lnX$ $y_{x_i} = b_0 + b_1 lnx_i$
Interpretarea estimaţiilor parametrilor modelului	$\boldsymbol{b_0}$ indică ***valoarea medie estimată*** a variabilei dependente (Y), atunci când variabila independentă (X) este egală cu ***1 unitate***.
	$\boldsymbol{b_1/100}$ arată cu cât ***variază, în medie, variabila dependentă*** (Y), atunci când variabila independentă (X) ***creşte cu 1%***.
Exemple din economie	Analiza *Ratei mortalităţii infantile* (*Y*) în funcţie de *Produsul Intern Brut - PIB* (*X*). Analiza legăturii dintre *puterea motorului* (*Y*) şi *numărul de cilindri* (*X*).

Aplicaţia 3

Pentru un eşantion format din 109 ţări ale lumii, s-au înregistrat date pentru *mortalitatea infantilă* (decese la o mie de născuţi vii) şi *PIB/locuitor* (dolari).

Tabelul *Coefficients* ne oferă rezultatele estimării şi testării parametrilor modelului.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	215,381	11,709		18,394	,000
	lnGDP	-21,966	1,462	-,824	-15,019	,000

a. Dependent Variable: Infant mortality (deaths per 1000 live births)

Modelul estimat este de forma:

$$\boldsymbol{Y_X = 215,381 - 21,966 lnX}$$

$$\boldsymbol{y_{x_i} = 215,381 - 21,966 lnx_i}$$

Interpretarea estimaţiilor punctuale ale coeficienţilor de regresie ai modelului:

- $b_0 = 215{,}381$ decese ne indică nivelul mediu estimat al ratei mortalității infantile, atunci când valoarea PIB este egală cu 1dolari pe locuitor. Evident, această valoare este una pur ipotetică.
- $b_1/100 = -21{,}966/100 = -0{,}219$ decese arată că la o creştere cu **1%** a PIB/locuitor, rata mortalității infantile scade, în medie, cu **0,219 decese**.

Interpretarea rezultatelor testării semnificației parametrilor modelului de regresie:

Testul Student bilateral indică estimaţii semnificative statistic pentru parametrii modelului, deoarece $Sigt = P(> |t|)$ are valori mai mici decât pragul de 0,05. În concluzie, se consideră că între cele două variabile există o legătură (neliniară) semnificativă ce poate fi modelată cu ajutorul modelului logarithmic.

Tabelul *Model Summary* ne prezintă estimaţia raportului de corelaţie şi a raportului de determinaţie.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,824[a]	,678	,675	21,6996

a. Predictors: (Constant), lnGDP

Rezultatele de mai sus indică o legătură (neliniară) puternică între cele două variabile. Raportul de determinație este de 0,678, adică putem spune că, prin intermediul modelului logarithmic, variația ratei mortalității infantile este explicată în proporție de 67,8% de variația PIB/locuitor.

Tabelul *Anova* ne oferă rezultatele testării modelului logarithmic.

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	106219,4	1	106219,443	225,579	,000[a]
	Residual	50383,514	107	470,874		
	Total	156603,0	108			

a. Predictors: (Constant), lnGDP

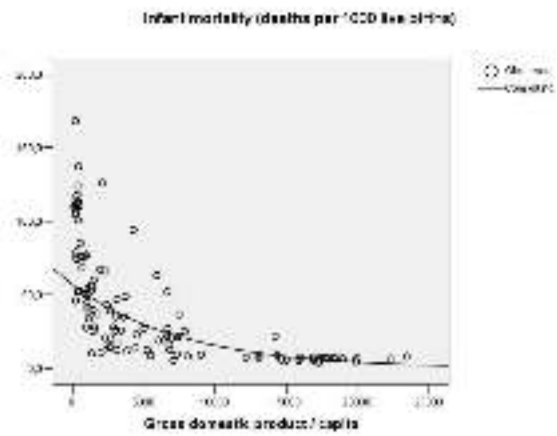
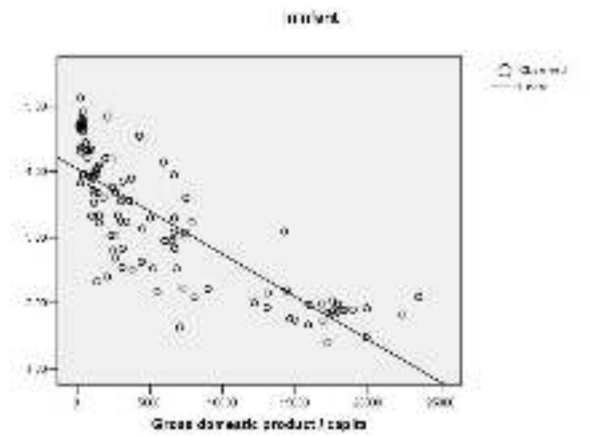
b. Dependent Variable: Infant mortality (deaths per 1000 live births)

Conform testului Fisher, raportul de determinație este semnificativ statistic, cu o probabilitate de 0,95 (probabilitatea asociată testului, $Sigt$, este mai mică de 0,05). În concluzie, legătura dintre mortalitatea infantilă și PIB explicată prin intermediul modelului logarithmic este semnificativă statistic.

Modele semi-logaritmice (2)

Modelele semi-logaritmice cu variabila dependentă transformată prin funcţia logaritm sunt construite pentru studiul legăturii dintre variabile prin utilizarea modelelor matematice de tipul funcţiilor exponenţiale.

Aceste modele se pot utiliza în practică pentru a estima modificările relative medii ale variabilei dependente la o modificare absolută cu o unitate a variabilei independente. În funcţie de expresia matematică a modelului, se întâlnesc mai multe exemple de asemenea modele semi-logaritmice.

<table>
<tr><td rowspan="2">1. MODELE LINIARIZABILE</td><td colspan="2">1.3(a) Modele semi-logaritmice cu variabila dependentă (Y) logaritmată</td></tr>
<tr><td>Modelul compus (Compound)</td><td>Modelul log-lin (liniarizat)</td></tr>
<tr><td>Reprezentarea grafică</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Forma generală a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor</td><td>Considerăm modelul de regresie de forma:
$$Y = \beta_0 {\beta_1}^X e^{\varepsilon}$$
$$y_i = \beta_0 {\beta_1}^{x_i} e^{\varepsilon_i}$$</td><td>Prin logaritmare, se obţine modelul:
$$lnY = ln\beta_0 + ln\beta_1 X + \varepsilon$$
$$lny_i = ln\beta_0 + ln\beta_1 x_i + \varepsilon_i$$
Se observă că acest model este unul liniar în care doar variabila dependentă apare logaritmată, deci este un model liniar semi-logaritmic.</td></tr>
<tr><td>Restricţii şi observaţii</td><td colspan="2">Variabila dependentă Y are doar valori pozitive, aşadar $\beta_0 > 0$.
Parametrul β_1, fiind logaritmat, nu poate lua decât valori pozitive:
- dacă $\boldsymbol{\beta_1} > 1$ $(\boldsymbol{ln\beta_1} > 0)$, adică supraunitar, atunci legătura dintre cele două variabile este directă (pozitivă).
- dacă $\mathbf{0} < \boldsymbol{\beta_1} < 1$ $(\boldsymbol{ln\beta_1} < 0)$, adică subunitar, atunci legătura dintre cele două variabile este inversă (negativă).</td></tr>
<tr><td>Interpretarea coeficienţilor de regresie sau a</td><td colspan="2">$\beta_0 = E(Y)_{|X=0}$
Parametrul β_0 indică valoarea medie a variabilei dependente (Y), atunci când variabila independentă (X) este egală cu 0.</td></tr>
</table>

parametrilor modelului	$ln\beta_1 = \frac{dlnY}{dX} = \frac{\frac{dY}{Y}}{dX} = \frac{dY}{dX}\frac{1}{Y}$ Parametrul β_1 nu are interpretare directă, ci interpretăm $\boldsymbol{ln\beta_1}$. $ln\beta_1$ exprimă ***variaţia medie relativă (modificarea medie procentuală)*** a variabilei dependente (Y) la o ***variaţie absolută*** cu o unitate a variabilei independente X.	
	Pentru parametrul β_1 din acest model, în interpretare, trebuie să se ţină cont de faptul că variabila dependentă înregistrează o variaţie relativă, iar variabila independentă o variaţie absolută. Pentru exprimarea procentuală, este nevoie de o înmulţire a $\boldsymbol{ln\beta_1}$ cu 100: $ln\beta_1 = dlnY_{\mid dX=1} \Leftrightarrow ln\beta_1 \cdot 100\% = dlnY_{(\%)\ \mid dX=1}$ Interpretat procentual, $\boldsymbol{ln\beta_1 \cdot 100\%}$ arată că la o creştere cu ***1 unitate*** a variabilei independente (X), variabila dependentă (Y) variază, în medie, cu $\boldsymbol{ln\beta_1 \cdot 100\%}$. De asemenea, $\boldsymbol{ln\beta_1 \cdot 100\%}$ reprezintă ***rata de creştere*** a variabilei Y în raport cu variabila X.	
Ecuaţia estimată a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor	$Y_X = b_0 {b_1}^X$ $y_{x_i} = b_0 {b_1}^{x_i}$	$lnY_X = lnb_0 + lnb_1 lnX$ $lny_{x_i} = lnb_0 + lnb_1 x_i$
Interpretarea estimaţiilor parametrilor modelului	$\boldsymbol{b_0}$ indică ***valoarea medie estimată*** a variabilei dependente (Y), atunci când variabila independentă (X) este egală cu **0**.	
	$[(\boldsymbol{lnb_1}) \cdot \mathbf{100}]\%$ arată că, la o creştere cu ***1 unitate*** a variabilei independente (X), variabila dependentă variază, în medie, cu $[(\boldsymbol{lnb_1}) \cdot \mathbf{100}]\%$. $[(\boldsymbol{lnb_1}) \cdot \mathbf{100}]\%$ reprezintă ***rata de creştere*** a variabilei dependente (Y) în raport cu variabila independentă (X).	
Exemple din economie	Analiza legăturii dintre *valoarea producţiei* (Y) şi *valoarea investiţiilor* (X).	

Modelul compus

Aplicația 4

În urma analizei legăturii dintre *Produsul Intern Brut* (euro) şi *Rata inflaţiei* (%), înregistrate pentru ţările Uniunii Europene, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients(a)

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	20140,640	,212		46,639	,000
	Rata inflatiei (%)	1,002	,042	,451	23,457	,000

a Dependent Variable: lnPIB

Modelul estimat este de forma:

$$y_{x_i} = 20140,64 \cdot 1,002^{x_i}$$

$$ln y_{x_i} = ln(20140,64) + ln(1,002) \cdot x_i$$

Interpretarea estimaţiilor punctuale ale coeficienţilor de regresie:

- $b_0 = 20140,64$ **euro** indică nivelul mediu estimat al PIB-ului atunci când rata inflației este egală cu 0% (atenție: % este unitatea de măsură a ratei inflației).
- $[(ln b_1) \cdot 100]\% = [(ln(1,002)) \cdot 100]\%$ este rata de creștere a PIB-ului în raport cu rata inflației și arată că la o creștere cu 1% (atenție: % este unitatea de măsură a ratei inflației) a ratei inflației, PIB-ul crește, în medie, cu $[(ln(1,002)) \cdot 100]\%$.

Model Summary

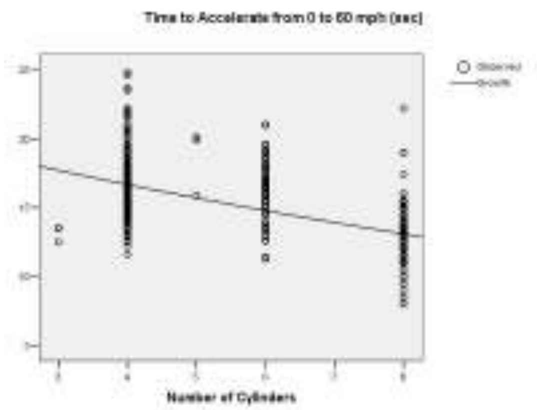
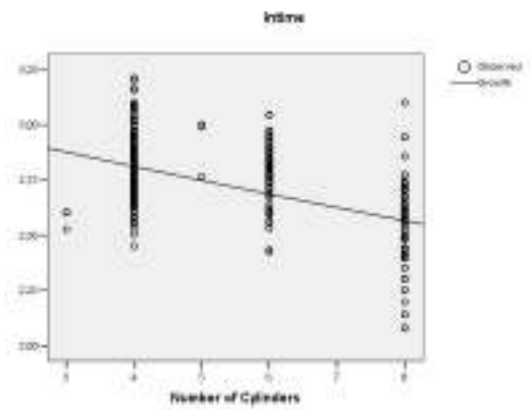
Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,004(a)	,000	-,038	,64892

a Predictors: (Constant), Rata inflatiei (%)

ANOVA(b)

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	4,439	1	4,439	54,806	,000(a)
	Residual	10,949	26	,081		
	Total	15,388	27			

a Predictors: (Constant), Rata inflatiei (%)

1. MODELE LINIARIZABILE	1.3(b) Modele semi-logaritmice cu variabila dependentă (Y) logaritmată	
	Modelul de creștere (*Growth*)	**Modelul log-lin (liniarizat)**
Reprezentarea grafică		
Forma generală a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor	Considerăm modelul de regresie de forma: $Y = e^{\beta_0+\beta_1 X+\varepsilon}$ $y_i = e^{\beta_0+\beta_1 x_i+\varepsilon_i}$	Prin logaritmare, se obţine modelul: $lnY = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ $lny_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$
Restricţii şi observaţii	Variabila dependentă Y are doar valori pozitive, însă β_0 poate lua şi valori negative. Parametrul $\beta_1 \in \mathbb{R}$, semnul indicând sensul legăturii dintre cele două variabile.	
Interpretarea coeficienţilor de regresie sau a parametrilor modelului	Parametrul β_0 nu are interpretare directă, ci interpretăm e^{β_0}. $e^{\beta_0} = M(Y)_{\mid X=0}$ e^{β_0} indică ***valoarea medie*** a variabilei dependente (Y), atunci când variabila independentă (X) este egală cu 0.	
	$\beta_1 = \frac{dlnY}{dX} = \frac{\frac{dY}{Y}}{dX} = \frac{dY}{dX}\frac{1}{Y}$ Parametrul β_1 exprimă ***variaţia medie relativă (modificarea medie procentuală)*** a variabilei dependente (Y) la o ***variație absolută*** cu o unitate a variabilei independente X.	

<table>
<tr><td></td><td colspan="2">Pentru parametrul β_1 din acest model, în interpretare, trebuie să se ţină cont de faptul că variabila dependentă înregistrează o variaţie relativă. Pentru exprimarea procentuală, este nevoie de o înmulţire a acestui coeficient $\boldsymbol{\beta_1}$ cu 100:
$\beta_1 = dlnY_{|dX=0} \Leftrightarrow \beta_1 \cdot 100\% = dlnY_{(\%)}{}_{|dX=0}$
Interpretat procentual, $\boldsymbol{\beta_1 \cdot 100\%}$ arată că la o creştere cu 1 unitate a variabilei independente (X), variabila dependentă (Y) variază, în medie, cu $\boldsymbol{\beta_1 \cdot 100\%}$.
De asemenea, $\boldsymbol{\beta_1 \cdot 100\%}$ reprezintă rata de creştere a variabilei Y în raport cu variabila X.</td></tr>
<tr><td>Ecuaţia estimată a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor</td><td>$Y_X = e^{b_0 + b_1 X}$
$y_{x_i} = e^{b_0 + b_1 x_i}$</td><td>$lnY_X = b_0 + b_1 X$
$lny_{x_i} = b_0 + b_1 x_i$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Interpretarea estimaţiilor parametrilor modelului</td><td colspan="2">$\boldsymbol{e^{b_0}}$indică valoarea medie estimată a variabilei dependente (Y), atunci când variabila independentă (X) este egală cu 0.</td></tr>
<tr><td colspan="2">$(\boldsymbol{b_1 \cdot 100})\%$ arată că, la o creştere cu 1 unitate a variabilei independente (X), variabila dependentă variază, în medie, cu $(\boldsymbol{b_1 \cdot 100})\%$.
$(\boldsymbol{b_1 \cdot 100})\%$ reprezintă rata de creştere a variabilei dependente (Y) în raport cu variabila independentă (X).</td></tr>
<tr><td>Exemple din economie</td><td colspan="2">Analiza legăturii dintre valoarea producţiei (Y) şi valoarea investiţiilor (X).</td></tr>
</table>

Modelul de creştere
Aplicația 5

Se consideră legătura dintre *Timpul de accelerare de la 0 la 100 km/h* (secunde) şi *Număr de cilindri*.

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	3,054	,026		118,715	,000
	Number of Cylinders	-,060	,004	-,556	-13,413	,000

a. Dependent Variable: lntime

Modelul estimat este de forma:

$$y_{x_i} = e^{3,054 - 0,060 \cdot x_i}$$

$$\boldsymbol{lny_{x_i} = 3,054 - 0,060 \cdot x_i}$$

Interpretarea estimaţiilor punctuale ale coeficienţilor de regresie:

- $e^{b_0} = e^{3,054}$ **secunde** indică nivelul mediu estimat al timpului de accelerare atunci când numărul de cilindri este egal cu **0 cilindri**.
- $[b_1 \cdot 100]\% = [-0,060 \cdot 100]\%$ este rata de creştere a timpului de accelerare în raport cu numărul de cilindri şi arată că la o creştere cu **1 cilindru** a numărului de cilindri, timpul de accelerare scade, în medie, cu **6%**.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,556[a]	,309	,307	,15431

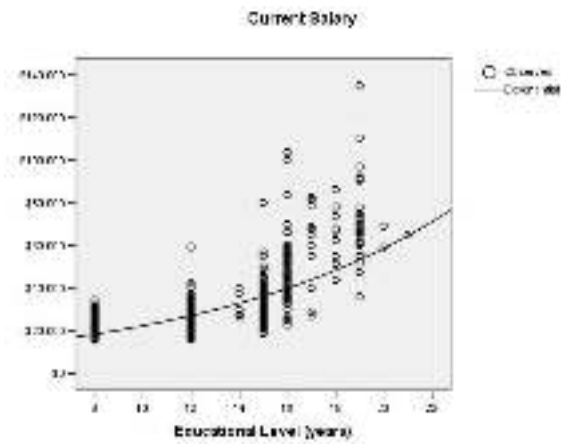
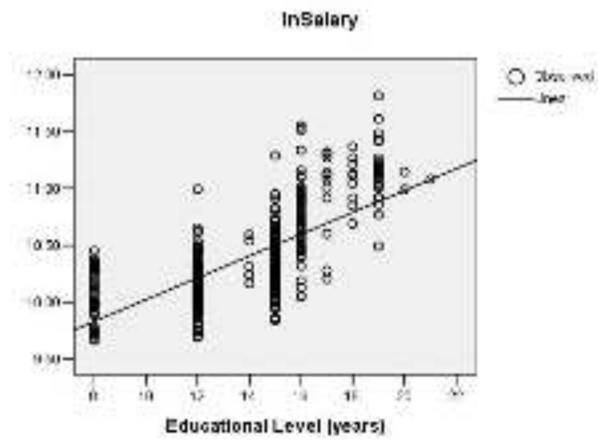
a. Predictors: (Constant), Number of Cylinders

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	4,284	1	4,284	179,898	,000[a]
	Residual	9,596	403	,024		
	Total	13,879	404			

a. Predictors: (Constant), Number of Cylinders

b. Dependent Variable: lntime

1. MODELE LINIARIZABILE	**1.3(c) Modele semi-logaritmice cu variabila dependentă (Y) logaritmată**	
	Modelul exponențial (*Exponential*)	**Modelul log-lin (liniarizat)**
Reprezentarea grafică		
Forma generală a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor	Considerăm modelul de regresie de forma: $Y = \beta_0 e^{\beta_1 X} e^{\varepsilon}$ $y_i = \beta_0 e^{\beta_1 x_i} e^{\varepsilon_i}$	Prin logaritmare, se obţine modelul: $lnY = ln\beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ $lny_i = ln\beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$
Restricţii şi observaţii	Variabila dependentă Y are doar valori pozitive, aşadar $\beta_0 > 0$. Parametrul $\beta_1 \in \mathbb{R}$, semnul indicând sensul legăturii dintre cele două variabile.	
Interpretarea coeficienţilor de regresie sau a parametrilor modelului	$\beta_0 = E(Y)_{\vert X=0}$ Parametrul β_0 indică ***valoarea medie*** a variabilei dependente (Y), atunci când variabila independentă (X) este egală cu 0.	
	$\beta_1 = \frac{dlnY}{dX} = \frac{\frac{dY}{Y}}{dX} = \frac{dY}{dX}\frac{1}{Y}$ Parametrul β_1 exprimă ***variaţia medie relativă (modificarea medie procentuală)*** a variabilei dependente (Y) la o ***variație absolută*** cu o unitate a variabilei independente X.	

	Pentru parametrul β_1 din acest model, în interpretare, trebuie să se ţină cont de faptul că variabila dependentă înregistrează o variaţie relativă. Pentru exprimarea procentuală, este nevoie de o înmulţire a acestui coeficient $\boldsymbol{\beta_1}$ cu 100: $\beta_1 = dlnY_{\vert dX=0} \Leftrightarrow \beta_1 \cdot 100\% = dlnY_{(\%)}{}_{\vert dX=0}$ Interpretat procentual, $\boldsymbol{\beta_1 \cdot 100\%}$ arată că la o creştere cu ***1 unitate*** a variabilei independente (X), variabila dependentă (Y) variază, în medie, cu $\boldsymbol{\beta_1 \cdot 100}\%$. De asemenea, $\boldsymbol{\beta_1 \cdot 100\%}$ reprezintă ***rata de creştere*** a variabilei dependente Y în raport cu variabila independentă X.	
Ecuaţia estimată a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor	$Y_X = b_0 e^{b_1 X}$ $y_{x_i} = b_0 e^{b_1 x_i}$	$lnY_X = lnb_0 + b_1 lnX$ $lny_{x_i} = lnb_0 + b_1 x_i$
Interpretarea estimaţiilor parametrilor modelului	$\boldsymbol{b_0}$ indică ***valoarea medie estimată*** a variabilei dependente (Y), atunci când variabila independentă (X) este egală cu **0**.	
	$(\boldsymbol{b_1 \cdot 100})\%$ arată că, la o creştere cu ***1 unitate*** a variabilei independente (X), variabila dependentă variază, în medie, cu $(\boldsymbol{b_1 \cdot 100})\%$. $(\boldsymbol{b_1 \cdot 100})\%$ reprezintă ***rata de creştere*** a variabilei dependente (Y) în raport cu variabila independentă (X).	
Exemple din economie	Analiza legăturii dintre *valoarea producţiei* (Y) şi *valoarea investiţiilor* (X).	

Modelul exponențial
Aplicația 6

Pentru a exemplifica modelul de regresie exponenţial, se consideră variabilele *Current salary* (dolari), ca variabilă dependentă, şi *Education level* (ani), ca variabilă independentă.

Coefficients(a)

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients		
		B	Std. Error	Beta	t	Sig.
1	(Constant)	8622,253	,063		144,445	,000
	Education level (years)	,096	,005	,697	21,102	,000

a Dependent Variable: lnsalary

Modelul estimat este de forma:

$$y_{x_i} = 8622,253 \cdot e^{0,096 \cdot x_i}$$

$$lny_{x_i} = ln(8622,253) + 0,096 \cdot x_i$$

Interpretarea estimaţiilor punctuale ale coeficienţilor de regresie:

- $b_0 = 8622,253$ **dolari** indică nivelul mediu estimat al salariului atunci când nivelul de educație este egal cu **0 ani**.
- $[b_1 * 100]\% = [0,096 \cdot 100]\%$ este rata de creștere a salariului în raport cu nivelul de educație şi arată că la o creştere cu **1 an** a nivelului de educație, salariul crește, în medie, cu **9,6%**.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,697[a]	,485	,484	,28532

a. Predictors: (Constant), Educational Level (years)

ANOVA[b]

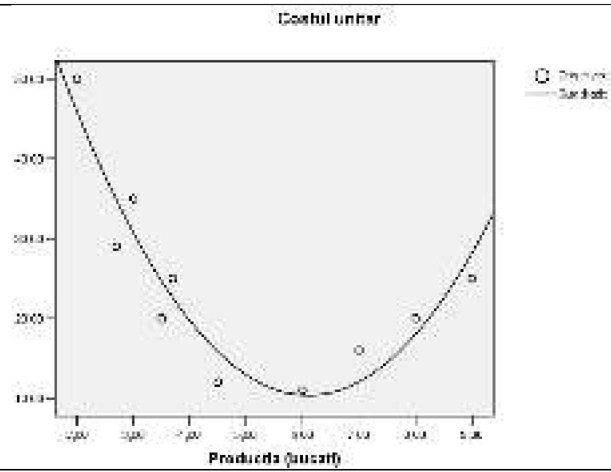
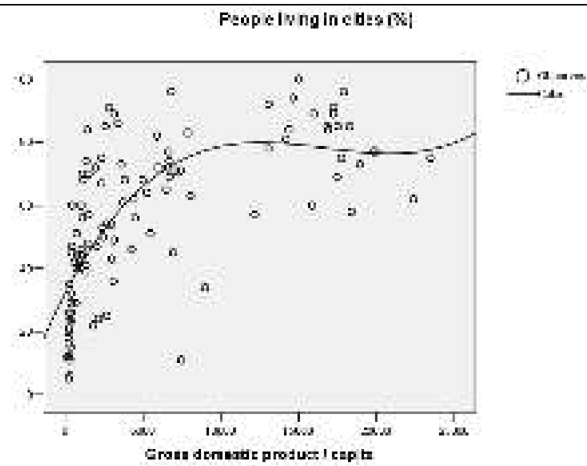
Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	36,251	1	36,251	445,300	,000[a]
	Residual	38,424	472	,081		
	Total	74,675	473			

a. Predictors: (Constant), Educational Level (years)

b. Dependent Variable: lnsalary

4.3. Modele polinomiale

Modelele polinomiale sunt modele de regresie neliniară care admit o legătură între variabila dependentă şi cea independentă ce poate fi explicată printr-o *funcţie polinomială de grad mai mare sau egal cu doi*.

2. MODELE NELINIARIZABILE	**Modele polinomiale**	
	2.1. Modelul parabolic (*Quadratic*)	**2.2. Modelul cubic**
Reprezentarea grafică		
Interpretarea grafică	Graficul arată că între *costul unitar de producţie* şi *producţia* firmei există o legătură de tip parabolic cu un punct de minim. Cu alte cuvinte, parabola admite un punct de minim.	Graficul ne indică o legătură cubică între cele două variabile. Odată cu creşterea *gradului de dezvoltare economică*, creşte şi *ponderea populaţiei urbane* a acelei ţări. Continuarea creşterii economice poate determina şi un uşor fenomen de scădere a gradului de urbanizare, prin fenomenul de migraţie spre zonele rurale din preajma marilor aglomerări urbane. Creşterea economică poate antrena urbanizarea prin cooptarea acestor regiuni în zonele metropolitane.
Forma generală a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor	Modelul parabolic are la bază o funcţie polinomială de gradul doi și are forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \varepsilon$ $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 {x_i}^2 + \varepsilon_i$	Modelul cubic are la bază o funcţie polinomială de gradul trei și are forma: $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_2 X^2 + \beta_3 X^3 + \varepsilon$ $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 {x_i}^2 + \beta_3 {x_i}^3 + \varepsilon_i$

Interpretarea coeficienţilor de regresie sau a parametrilor modelului	Pentru identificarea ***punctului de extrem*** şi a tipului de curbă (*convexă* sau *concavă*), se utilizează condițiile matematice specifice ecuației de gradul 2. Coordonatele ***punctului critic*** - ***abscisa***: $x_i = -\beta_1/2\beta_2$ - ***ordonata***: y_{x_i}	Pe baza acestei ecuații, se pot determina abscisele pentru *trei puncte importante ale curbei* ce explică dependența dintre variabile. Coordonatele ***punctului de inflexiune*** - ***abscisa***: $x_i = -\frac{2\beta_2}{6\beta_3} \Rightarrow x_i = -\beta_2/3\beta_3$ - ***ordonata***: y_{x_i}
Ecuaţia estimată a modelului scrisă pentru toate valorile variabilelor şi pentru fiecare valoarea a variabilelor	$Y_X = b_0 + b_1X + b_2X^2$ $y_{x_i} = b_0 + b_1x_i + b_2{x_i}^2$	$Y_X = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ $y_{x_i} = b_0 + b_1x_i + b_2{x_i}^2 + b_3{x_i}^3$
Interpretarea estimaţiilor parametrilor modelului	Se obține *soluția derivatei întâi*: $y'_{x_i} = 0$, adică $b_1 + 2b_2x_i = 0$ - ***abscisa***: $x_i = -b_1/2b_2$ - ***ordonata***: y_{x_i} (înlocuim valoarea x_i în ecuaţia estimată) Se pune *condiția de extrem*: - $y''_{x_i} > 0$ sau $b_2 > 0$, pentru ***punct de minim*** - $y''_{x_i} < 0$ sau $b_2 < 0$, pentru ***punct de maxim***	Coordonatele celor două ***puncte de extrem***, ca soluții ale ecuației: $y'_{x_i} = 0$, adică $b_1 + 2b_2x_i + 3b_3{x_i}^2 = 0$ - ***abscisa***: x_i - ***ordonata***: y_{x_i} (înlocuim valoarea x_i în ecuaţia estimată) Coordonatele ***punctului de inflexiune***, ca soluție a ecuației: $y''_{x_i} = 0$, adică $2b_2 + 6b_3x_i = 0$ - ***abscisa***: $x_i = -b_2/3b_3$ - ***ordonata***: y_{x_i} (înlocuim valoarea x_i în ecuaţia estimată)
Exemple din economie	Modelul parabolic se pretează la acele aplicaţii economice care presupun o schimbare în variaţia variabilei dependente la o anumită valoare critică a variabilei independente ce corespunde unui punct de extrem (de minim sau de maxim). Un exemplu este *costului unitar al producției* (*Y*) în relație cu *valoarea producţiei* (*X*).	Modelul cubic este utilizat pentru a aprecia evoluţii mai complexe ale unor realităţi economice. Un exemplu tipic întâlnit este *costul total* (*Y*) care depinde de *valoarea producţiei* (*X*).

Aplicaţia 7

În studiul legăturii dintre *costul unitar* (unităţi monetare) şi *producţia unui bun* (bucăţi), înregistrate pentru un eşantion de firme, s-au obţinut următoarele rezultate:

Coefficients[a]

Model		Unstandardized Coefficients B	Unstandardized Coefficients Std. Error	Standardized Coefficients Beta	t	Sig.
1	(Constant)	89,041	9,231		9,646	,000
	Productia	-25,795	3,895	-5,322	-6,623	,000
	Productia**2	2,114	,351	4,842	6,026	,001

a. Dependent Variable: Costul unitar

Modelul estimat este de forma:

$$Y_X = 89,041 - 25,795 \cdot X + 2,114 \cdot X^2$$

Coordonatele punctului critic:

- abscisa:
  $x_i = -b_1/2b_2 = 6,1$ **bucăți**
- ordonata:
  $y_{x_i} = 89,041 - 25,795 \cdot x_i + 2,114 \cdot {x_i}^2 = 10,35$ **unități monetare**

Interpretarea punctului critic:

Punctul critic de minim corespunde unei ***producţii optime de* 6,1 bucăţi** din produsul, producţie pentru care ***costul unitar de* 10,35 unități monetare** este ***minim***.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,699[a]	,488	,474	17,559

a. Predictors: (Constant), Gross domestic product / capita

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	30615,972	3	10205,324	33,100	,000[a]
	Residual	32064,944	104	308,317		
	Total	62680,917	107			

a. Predictors: (Constant), Gross domestic product / capita

b. Dependent Variable: People living in cities (%)

Aplicaţia 8

Se consideră *Gradul de urbanizare* (procentul populaţiei urbane dintr-o ţară), variabila dependentă, şi *PIB/locuitor* (dolari), variabilă independentă, înregistrate pentru 195 de ţări.

Coefficients(a)

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.
		B	Std. Error	Beta		
1	(Constant)	32,036	,002	2,557	4,950	,000
	GDP	1,002	,000	-3,206	-2,652	,009
	GDP**2	-6,1E-007	,000	1,225	.	.
	GDP**3	1,21E-011	3,395		9,438	.000

The independent variable is Gross domestic product/capita.

Modelul estimat este de forma:

$$Y_X = 32,036 + 1,002 \cdot X - 6,1 \cdot 10^{-7} \cdot X^2 + 1,21 \cdot 10^{-11} \cdot X^3$$

Coordonatele punctului de inflexiune:

- abscisa:
  $$x_i = -b_2/3b_3 = 6,1 \cdot 10^{-7}/3 \cdot 1,21 \cdot 10^{-11} = 1,68 \cdot 10^4$$
- ordonata:
  $$y_{x_i} = 32,036 + 1,002 \cdot x_i - 6,1 \cdot 10^{-7} \cdot {x_i}^2 + 1,21 \cdot 10^{-11} \cdot {x_i}^3$$

Interpretarea punctului de inflexiune:

Modelul poate fi util pentru realizarea de predicții privind nivelului de urbanizare al unei ţări în funcţie de un anumit grad de dezvoltare economică sau poate permite estimarea unei anumite valori a nivelului de dezvoltare necesară pentru a putea atinge un nivel mediu de urbanizare dorit.

Model Summary

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	,699[a]	,488	,474	17,559

a. Predictors: (Constant), Gross domestic product / capita

ANOVA[b]

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	30615,972	3	10205,324	33,100	,000[a]
	Residual	32064,944	104	308,317		
	Total	62680,917	107			

a. Predictors: (Constant), Gross domestic product / capita

b. Dependent Variable: People living in cities (%)