Seminar 2: 2) Aflarea inversei unei matrice (pătratice) cu t.e.

Def: Spunem că matricea pătratică $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ este:

a) inversabilă, dacă $(\exists)\ A' \overset{not}{\equiv} A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a.î.: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ (2.1)

b) nesingulară, dacă $\det A \overset{not}{\equiv} |A| \neq 0$ (2.2) (dacă $|A| = 0 \Rightarrow A$ - matrice singulară)

Obs:

i) A - inversabilă ($(\exists)\ A^{-1}$) $\Longleftrightarrow$ A - nesingulară ($|A| \neq 0$)

Dem: din (2.1) avem: $A \cdot A^{-1} = I_n \Leftrightarrow \det(A \cdot A^{-1}) = \det I_n \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \det A \cdot \det A^{-1} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) } \det A \neq 0;\ \det A^{-1} \neq 0 \\ \text{(ii) } \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \quad \left(|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B \\ \det I_n = 1,\ (\forall)\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

ii) formula de determ. a inversei (la liceu) este: (2.3) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A^*$; $A^* = (A_{ji})_{i,j=\overline{1,n}}$

complemenții algebrici ai elem. a_{ij}

adjuncta lui A

Pentru a determina inversa unei matrici pătratice, prin t.e., aplicăm următorul algoritm:

① asociem matricei A, matricea extinsă $\tilde{A} \overset{def}{=} (A \,\vdots\, I_n) \in \mathcal{M}_{n,2n}(\mathbb{R})$

② aducem matricea $\tilde{A}$ la forma Gauss-Jordan redusă, utilizând t.e. (adică facem primele „n" coloane, ale matricei $\tilde{A}$, coloanele matricei unitate), adică:

$$\tilde{A} = (A \,\vdots\, I_n) \sim \dots \sim \tilde{A}' = (I_n \,\vdots\, A^{-1}) \left(\equiv \tilde{A}^{R}_{GJ}\right)$$

③ scriem matricea inversă: A^{-1}

Ex: Determinați inversele (în cazul în care există!) ale următoarelor matrici:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{matricea}]{\text{asociem}} \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} \boxed{1} & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot 2 \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 2 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right)$

$= A$; $= I_2$; $= I_2$; $= A^{-1}$

Deci: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

Verificând(!): $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ (verifică rel. (2.1))

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 4 & 1 & 1 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ \cdot(-4) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \end{array}\right) \Rightarrow$

$= A$; $= I_2$; $= I_2$; $= A^{-1}$

$\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \longrightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (+1) \\ (+1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot\frac{1}{2} \end{matrix}$

$= A$; $= I_3$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array}\right) \quad \underbrace{}_{=I_3} \quad \underbrace{}_{=A^{-1}} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Obs: i) În aceeași matrice, dacă înlocuim elementul $a_{33}=-1$ cu $a_{33}=-3$, avem:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (\not\exists)\, A^{-1}$$

$= A$ $\quad = I_3$

pivot nul, nu putem obține a-a de-a treia coloană a matricii unitate $I_3 \Rightarrow A$ nu este inversabilă $((\not\exists)\, A^{-1})$

ii) din calculul de mai sus, avem: $A \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{cc|c} ① & 0 & 2 \\ 0 & ① & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow r_A = 2 < 3 \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow A$ nu are inversă.

Obs:

i) dacă matricea A este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A = n \Leftrightarrow$ forma Gauss-Jordan a lui A va fi matricea unitate I_n $(A_{GJ} = I_n) \Leftrightarrow$ cu alg. de mai sus obținem inversa A^{-1} a matricii A;

ii) dacă matricea A nu este inversabilă $\Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow \operatorname{rang} A \overset{not}{=} r < n \Leftrightarrow$ forma G-J a lui A nu este matricea I_n (nu se pot obține toate cele „n" coloane ale matricii unitate $\Leftrightarrow$ alg. de mai sus se oprește $\Rightarrow (\not\exists)\, A^{-1}$;

iii) Demonstrația algoritmului de obținere a inversei A^{-1} cu t.e. se face cu ajutorul def. inversei (2.1).

Dem: dacă A-inversabilă $\overset{(2.1)}{\Longrightarrow} (\exists) A^{-1}$ a.î.: $A^{-1} \cdot A = I_n$ (*)

Atunci, înmulțind la stânga matricea extinsă $\tilde{A}$ cu A^{-1}, obținem:

$$A^{-1} \cdot \tilde{A} = A^{-1} (A \mid I_n) = (A^{-1} \cdot A \mid A^{-1} \cdot I_n) = (I_n \mid A^{-1})$$

q.e.d

d) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ + \\ + \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & \boxed{2} & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} / (-1) \\ \\ + \\ + \end{array} \sim$

$= A$ $\quad = I_4$

cele 2 linii coincid!)

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} ① & 0 & 2 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & ① & -1/2 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow r_A = 2 \Leftrightarrow \det A = 0 \Leftrightarrow (\not\exists)\, A^{-1}$

3) Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare cu T.E. Metoda lui Gauss

Un sistem de ec. liniare oarecare (cu „m" ecuații și „n" necunoscute) are forma

$$(2.4)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Notăm cu:

$$(*)\quad A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots\cdots & x_n \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{m,n}^{(\mathbb{R})} \to \text{matricea coeficienților sistemului liniar}$$

$$(**)\quad \overline{A} = (A \,\vdots\, B) = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{m,n+1}^{(\mathbb{R})} \to \text{matricea extinsă atașată sistemului}$$

$$(***)\quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,1}^{(\mathbb{R})} \to \text{matricea (de tip coloană) a termenilor liberi atașată sistemului}$$

Obs:

i) dacă: $\begin{cases} m \neq n, & \text{sist. (2.4) se numește dreptunghiular;} \\ m = n, & \text{—"— —"— pătratic;} \end{cases}$

ii) dacă: $\begin{cases} b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0 \ ((\forall)\, b_i = 0,\ i = \overline{1,m}) \Rightarrow \text{sist. (2.4) se numește omogen;} \\ (\exists)\, b_i \neq 0,\ i = \overline{1,m} \Rightarrow \text{sist. (2.4) se numește neomogen;} \end{cases}$

Obs: un sist. liniar omogen ($b_i = 0$, $i = \overline{1,m}$) este întotdeauna compatibil (are măcar o soluție și anume soluția banală: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$

iii) matricial, sist. (2.4) poate fi scris sub forma: (2.4') $A \cdot X = B$ cu $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}^{(\mathbb{R})}$

iv) modalitatea de rezolvare învățată în liceu se bazează pe calculul rangului și a lucrului cu determinanți. Alg. de rezolvare este:

① se calculează r_A și $r_{\overline{A}}$

② dacă $\begin{cases} (2^1)\ r_A \neq r_{\overline{A}}\ (\Leftrightarrow r_A < r_{\overline{A}}) \Rightarrow \text{sist. lin. este incompatibil} \\ (2^2)\ r_A = r_{\overline{A}} \Rightarrow \text{sist. lin. este compatibil (determinat sau nedeterminat)} \end{cases}$

a) $r_A = r_{\overline{A}} = n$ (nr. de necunoscute) $\Rightarrow$ sist. este comp. determinat (soluție unică) și se rezolvă cu metoda lui Cramer:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \quad (\Delta \overset{not}{=} \det A \neq$$

b) $r_A = r_{\overline{A}} < n \Rightarrow$ sist. este compatibil nedeterminat (are o infinitate de soluț

se rezolvă cu metoda lui Cramer, păstrând doar ecuațiile principale și necunoscutele principale (variabilele secundare se trec în membrul drept al egalității și li se atribuie valori oarecare)

(*) met. lui Cramer implică lucrul cu determinanți (grei, f. multe calcule), de aceea vom prezenta o nouă metodă (a lui Gauss) bazată pe transf. elem. (mai simplă, mult mai puține calcule) și care este bazată pe următoarea teoremă:

I: Transformările elementare, aplicate asupra matricei extinse $\bar{A}$ atașate unui sistem de ecuații liniare, nu modifică soluția(-ile) sistemului (în cazul în care aceasta există)

{Fie $\bar{A}$ matricea extinsă atașată sist. lin. (2.4). Aplicând t.e. lui $\bar{A}$ vom obține o nouă matrice $\bar{A}'$ căreia îi va corespunde un nou sistem liniar (2.4') care este echivalent cu (2.4) {adică are aceleași soluții cu (2.4)}:

$$\begin{tikzcd} (2.4) \arrow[r] \arrow[rr, leftrightarrow, bend right, "\text{au aceleași soluții}"'] & \bar{A} \sim \dots \sim \bar{A}' \arrow[r] & (2.4') \end{tikzcd}$$

Metoda lui Gauss (alg. de lucru)

① Scriem matricea extinsă $\bar{A} \overset{def}{=} (A \vdots B)$ asociată sist. lin. (2.4)

② Aplicăm t.e. pentru a aduce matricea extinsă $\bar{A}$ la (una din) forma Gauss-Jordan (în exemplificarea de mai jos, se aduce la forma G-J redusă (canonică)), adică:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \sim \dots \sim \bar{A}^{R}_{G-J} = \left(\begin{array}{cccc|ccc|c} x_1 & x_2 & \dots & x_r & x_{r+1} & \dots & x_n & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{array}\right)$$

variabile princ. variabile secundare

Obs:

Matricei extinse $\bar{A}_{G-J}$ îi corespunde noul sistem liniar (2.4') {(2.4) ~ (2.4')} de forma:

$$(2.4')\ \left\{\begin{array}{l} x_1 + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ x_2 + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{rn}x_n = b'_r \\ 0 = b'_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = b'_m \end{array}\right.$$

$\{x_1, x_2, \dots, x_r \to$ variab. principale

$x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n \to$ variab. secundare

③ Dacă:

ⓐ $b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0$, atunci sist. (2.4') (deci și sist. inițial (2.4)) este compatibil cu soluția (aceeași cu a lui (2.4)) de forma:

$$(2.5)\ \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x_1 = b'_1 - a'_{1,r+1}\alpha_{r+1} - \dots - a'_{1n}\alpha_n \\ x_2 = b'_2 - a'_{2,r+1}\alpha_{r+1} - \dots - a'_{2n}\alpha_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = b'_r - a'_{r,r+1}\alpha_{r+1} - \dots - a'_{rn}\alpha_n \end{array}\right\} \text{variabilele principale (a căror valoare depinde de valoarea variabilelor sec.)} \\ \left.\begin{array}{l} x_{r+1} = \alpha_{r+1} \\ \dots\dots \\ x_n = \alpha_n \end{array}\right\} \text{variabilele secundare } (\in \mathbb{R}, \text{ nr. reale oarecare}) \end{array}\right.$$

ⓑ $(\exists)\ b'_i \neq 0,\ i = \overline{r+1,m}$, atunci sist. lin. (2.4') (deci și (2.4)) este incompatibil (nu are soluție)

Exemple: Rezolvați sist. liniare următoare cu metoda lui Gauss și scrieți soluția (în cazul în care există):

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases}$

Dem:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \boxed{1} & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 \end{array}\right) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & \boxed{-5} & 5 & -10 \end{array}\right) \Big| \cdot\left(-\frac{1}{5}\right) \Big| \cdot\frac{2}{5} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \textcircled{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & -1 & 2 \end{array}\right) \overset{not}{=} \bar{A}^{R}_{GJ} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

var. prin. (x_1, x_2) var. sec. (x_3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = 2 + x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = 2 + \alpha \\ x_3 \overset{not}{=} \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \begin{matrix} \Big\} \text{v. princ.} \\ \text{— v. sec.} \end{matrix} \Leftrightarrow S = \{(-\alpha, 2+\alpha, \alpha);\ \alpha \in \mathbb{R}\} \rightarrow \text{mulț. sol. sist. lin.}$$

b) $\begin{cases} x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$

$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 + 5x_3 = 6 \\ x_2 - 2x_3 = -1 \\ 0 = 0 \end{cases}$

Dem:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \boxed{0} & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \boxed{1} & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \cdot(-1) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{cc|c|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \textcircled{1} & 0 & 5 & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 - 5\alpha \\ x_2 = -1 + 2\alpha \\ x_3 = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases} \begin{matrix} \text{}\rightarrow \text{v. princ.} \\ \\ \rightarrow \text{v. sec.} \end{matrix}$$

Obs: Dacă schimbăm termenul liber al celei de-a treia ec. $b_3 = 3$ cu $b_3 = 2$ (poate fi orice valoare $\neq 3$), atunci am avea sistemul liniar cu matricea extinsă:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{0} & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{array}\right) \cdot(-2) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \textcircled{1} & 0 & 5 & 6 \\ 0 & \textcircled{1} & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \Rightarrow 0 = -1\ (F) \Rightarrow \text{sist. incom}$$

c) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -5 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -7 \end{cases}$

Dem:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 2 & \boxed{1} & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -5 \\ 4 & -1 & 3 & 1 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 \\ 6 & 0 & 2 & 4 & -4 \end{array}\right) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ 5 & \textcircled{1} & 0 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & \textcircled{1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 - 5\alpha - 5\beta \\ x_3 = -2 - 3\alpha - 2\beta \\ x_1 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_4 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases} \begin{matrix} \Big\} \text{v. princ.} \\ \Big\} \text{v. sec.} \end{matrix} \Leftrightarrow$$

v. sec. (x_1, x_4) v. princ. (x_2, x_3)

$$S = \{(\alpha, 1 - 5\alpha - 5\beta, -2 - 3\alpha - 2\beta, \beta);\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} \rightarrow \text{mulț. sol. sist. lin.}$$

Obs:
- pt. $(\forall)\ b_3 \in \mathbb{R} \setminus \{-7\} \Rightarrow$ sist. devine incompatibil (ultima ec. devine $0 = \delta^*$, cu $\delta^* \neq 0$)
- se poate observa că cea de a treia ec. este o comb. lin. a primelor două ($E_3 = E_1 + 2E_2$)

d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases} \Rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -3 & -13 \\ 0 & \boxed{-4} & 4 & 6 \end{array}\right) \cdot(-1) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & \boxed{-3} & -13 \\ 0 & 1 & -4 & 6 \end{array}\right) \Big| \cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \Big| \cdot\frac{5}{3} \Big| \cdot\left(-\frac{4}{3}\right)$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \textcircled{1} & 0 & 0 & -32/3 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 13/3 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 34/3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -32/3 \\ x_2 = 34/3 \\ x_3 = 13/3 \end{cases} \rightarrow \text{soluție unică}$$