Metoda celor două faze (exemple)

1)

$$\begin{cases} (1)\ (\min)\ f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ (2)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \geq 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 10 \end{cases} \\ (3)\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{forma generală a (P.P.L)}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (1_S)\ (\min)\ f(x_1,x_2,x_3; x_4^c, x_5^c) = 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 0\cdot x_4^c + 0 x_5^c \\ (2_S)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4^c = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5^c = 10 \end{cases} \\ (3_S)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c \geq 0 \end{cases} \rightarrow \text{forma standard a (P.P.L)}$$

$$\Downarrow$$

$$(2_S) \rightarrow \bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & b \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ /(-1) \\ /(-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 1 & \textcircled{1} & 0 & -6 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & \textcircled{1} & -10 \end{array}\right) \Rightarrow \bar{X}_1 = (0,0,0,-6,-10)^T$$

x_1, x_2, x_3: v. sec. $=0$; x_4^c, x_5^c: v. princ.

$\bar{X}_1$ → sol. de bază neadmisibilă ((3) componente strict negative)

Obs: i) $\bar{X}_1$ - sol a sist. (2), dar nu verif. rel. (3)!!!

ii) sist. (2) are cel mult $C_5^2 = 10$ soluții de bază, am găsit (foarte repede) o soluție ($\bar{X}_1$) dar nu ne folosește (este neadmisibilă), vom căuta alta, luând de exemplu x_3 și x_4^c variabile principale:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & \boxed{-1} & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \end{array}\right) \begin{matrix} /(-1)/\cdot 2 \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -2 & -1 & 1 & 1 & 0 & -6 \\ 5 & 5 & 0 & \boxed{-2} & -1 & 22 \end{array}\right) \begin{matrix} + \\ (-\frac{1}{2})/\cdot\frac{1}{2} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & \\ 1/2 & 3/2 & \textcircled{1} & 0 & -1/2 & 5 \\ -5/2 & -5/2 & 0 & \textcircled{1} & 1/2 & -11 \end{array}\right) \Rightarrow \bar{X}_2 = (0,0,5,-11,0)^T \rightarrow \text{S.B. neadmisibilă}$$

x_1, x_2: v.s. $=0$; x_3: v.p; x_5^c: v.s. $=0$

(deci nu verif. condiția (3)) nu avem ce face cu ea

iii) căutăm altă (cu x_1 și x_4^c v. principale → de ce??)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{2} & 1 & -1 & -1 & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \end{array}\right) \begin{matrix} /\cdot\frac{1}{2} \\ /(-\frac{1}{2}) \\ + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 0 & \boxed{3} \\ 0 & 5/2 & 5/2 & \boxed{1/2} & -1 & 7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ /\cdot 2 \\ + \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_0 \\ \textcircled{1} & 3 & 2 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 5 & 5 & \textcircled{1} & -2 & 14 \end{array}\right) \Rightarrow \bar{X}_0 = (10,0,0,14,0)^T \rightarrow \text{S.B.A.}$$

x_1, x_4^c: v. princ.; x_2, x_3, x_5^c: v. sec. $=0$

$\bar{X}_0$ este sol. de bază admisibilă (verif (2)+(3)) deci putem începe alg. Simplex.

			3	-1	-2	0	0	
B	c_B	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4^c	P_5^c	$\theta_i = \frac{def\, c_B}{P_{jk}}$
P_1	3	10	1	3	2	0	-1	10/3
P_4^c	0	14	0	[5]	5	1	-2	14/5 ; 1/5 / (-3/5)
	$f(\bar{X}_0)=30$		0	10	8	0	-3	
P_1	3	8/5	1	0	-1	-3/5	[1/5]	8 ; /·5 /·2
P_2	-1	14/5	0	1	1	1/5	-2/5	*
	$f(\bar{X}_1)=2$		0	0	-2	-2	1	
P_5^c	0	8	5	0	-5	-3	1	
P_2	-1	6	2	1	-1	-1	0	
	$f(\bar{X}_2)=-6$		-5	0	3	1	0	

pe col. ⟹ lui P_0 $\begin{cases} \bar{X}_0 = (10,0,0,14,0)^T \\ f(\bar{X}_0) = 30 \end{cases}$

pe col. ⟹ lui P_0 $\begin{cases} \bar{X}_1 = (8/5, 14/5, 0,0,0)^T \\ f(\bar{X}_1) = 2 \end{cases}$

pe col. ⟹ lui P_0 $\begin{cases} \bar{X}_2 = (0,6,0,0,8)^T \\ f(\bar{X}_2) = -6 \end{cases}$

⟹ 4c)

$(\min) f = -\infty$ (PPL are optim infinit, deci nu are S.O)

Obs: - am putut aplica alg. simplex, doar după ce am determinat cu met. lui Gauss o S.B.A.i ($\bar{X}_0$) !!!

- pentru a evita calculul multor sol. de bază neadmisibile până găsim una admisibilă, aplicăm metoda celor 2 faze.

Atașam (P.P.L)$_s$ (1$_s$)–(3$_s$) problema artificială

$$\begin{cases} (1a)\ (\min) f_a(x_6^a, x_7^a) = x_6^a + x_7^a \{+ 0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 \cdot 0\cdot x_3 + 0 x_4^c + 0\cdot x_5^c\} \\ (2a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4^c + x_6^a = 6 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_5^c + x_7^a = 10 \end{cases} \\ (3a)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c, x_6^a, x_7^a \geq 0 \end{cases}$$

⟼ problema artificială (PPL)$_a$

Din sist. (2a) ⟹ $\bar{A}_a = \left(\begin{array}{ccccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_6^a & P_7^a & P_0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & 0 & (1) & 0 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & -1 & 0 & (1) & 10 \end{array}\right)$ ⟹ $\bar{X}_0^a = (0,0,0,0,0,6,10)^T$

(v. sec. = 0 ; v. princ.)

↘ S.B.A.i$_a$ {sol. de bază adm. init. ptr. probl. artificială}

Obs: i) adunând în fiecare ecuație câte o variabilă artificială, ne-au apărut coloanele matricii unitate (nu a fost nevoie să aplicăm metoda lui Gauss)

ii) aplicăm alg. simplex ptr. a rezolva (P.P.L)$_a$ cu soluția inițială găsită (imediat) $\bar{X}_0^a$:

coef. funcției artificiale „f_a"

B	C_B	P_0	P_1 (0)	P_2 (0)	P_3 (0)	P_4^e (0)	P_5^e (0)	P_6^a (1)	P_7^a (1)	$\theta_i = \frac{C_B}{P_j}$	
P_6^a	1	6	2	1	-1	-1	0	1	0	6/1	
← P_7^a	1	10	1	[3]	2	0	-1	0	1	10/3	$/\cdot\frac{1}{3}$ / $(-1/3)$
	$f_a=$	16	3	4	1	-1	-1	0	0		
← P_6^a	1	8/3	[5/3]	0	-5/3	-1	1/3	1	-1/3	8/5	$/\cdot\frac{3}{5}$ / $\cdot(-\frac{1}{5})$
P_2	0	10/3	1/3	1	2/3	0	-1/3	0	1/3	10	
	$f_a=$	8/3	5/3	0	-5/3	-1	1/3	0	-4/3		
P_1	0	8/5	1	0	-1	-3/5	1/5	3/5	-1/5		
P_2	0	14/5	0	1	1	1/5	-2/5	-1/5	2/5		
	$f_a=$	0	0	0	0	0	0	-1	-1		

← Faza I^a

pe col. lui P_0 (⇓, ≥)

$$\overline{X}^{artif}_{optim} = (8/5, 14/5, 0, 0, 0, 0, 0)^T \rightarrow \text{sol. optimă (dar nu este unică) ptr. (PPL)}_a.$$

$$(\min) f_a = 0$$

Rezolvăm acum probl. inițială în formă standard cu soluția inițială $\overline{X}_0 \equiv \overline{X}^{artif}_{optim}$ (fără variabilele artif.), aplicând alg. simplex:

coef. funcției „f" din forma standard.

B	C_B	P_0	P_1 (3)	P_2 (-1)	P_3 (-2)	P_4^e (0)	P_5^e (0)	$\theta_i = \frac{C_B}{P_j}$	
← P_1	3	8/5	1	0	-1	-3/5	[1/5]	8	$/\cdot 5$ / $\cdot 2$
P_2	-1	14/5	0	1	1	1/5	-2/5	*	
	$f=$	2	0	0	-2	-2	1/5		
P_5^e	0	8	5	0	-5	-3	5		
P_2	-1	6	2	1	-1	-1	0		
	$f=$	-6	-5	0	3	1	0		

Obs: primul tabel simplex al fazei II^a se obține din ultimul tabel simplex al fazei I^a (eliminând coloanele vectorilor artificiali și completând noile valori pe coloana C_B)

→ Faza II^a

(⇓, ≤)

$$(\min) f = -\infty$$

(∃) diferența $z_j - c_j > 0$ ($z_3 - c_3 = 3 > 0$), dar componentele vectorului P_j corespunzător sunt toate ≤ 0 {$P_3 = (-5, -1)^T$ are ambele componente negative}

(II)

$$(PPL)\begin{cases}(1)(\max)\ f(x_1,x_2,x_3)=2x_1+2x_2-x_3\\ (2)\begin{cases}x_1+2x_2+x_3\geq 8\\ 2x_1+x_2+3x_3\leq 12\end{cases}\\ (3)\ x_1,x_2,x_3\geq 0\end{cases}
\iff (PPL)_s\begin{cases}(1s)(\min)(-f)=-2x_1-2x_2+x_3+0x_4^c+0x_5^c\\ (2s)\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4^c=8\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_5^c=12\end{cases}\\ (3s)\ x_1,x_2,x_3,x_4^c,x_5^c\geq 0\end{cases}$$

Atașam $(PPL)_s$ o nouă problemă (artificială) $(PPL)_a$ [adunând în ecuațiile din sistemul (2s) variabilele artificiale (în ecuațiile unde am scăzut var. de compensare sau nu am introdus var. de compensare)]

$$(PPL)_a\begin{cases}(1a)(\min)\ f_a(x_1,x_2,x_3,x_4^c,x_5^c,x_6^a)=0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4^c+0\cdot x_5^c+x_6^a\\ (2a)\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4^c+x_6^a=8\\ 2x_1+x_2+3x_3+x_5^c=12\end{cases}\\ (3a)\ x_1,x_2,x_3,x_4^c,x_5^c,x_6^a\geq 0\end{cases}$$

$$[f_a(x_6^a)=x_6^a] \xrightarrow{(2s)} \bar{A}=\left(\begin{array}{cccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_6^a & P_0\\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 8\\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 12\end{array}\right)$$

v.sec. = 0; v.prin.

$\Downarrow$ $X_0^{artif.}=(0,0,0,0,12,8)^T \to SBAI_a$

Faza I

B	C_B	P_0	P_1 (0)	P_2 (0)	P_3 (0)	P_4^c (0)	P_5^c (0)	P_6^a (1)	$\theta_i=\frac{P_0}{P_j}$	
P_6^a	1	8	1	[2]	1	−1	0	1	8/2=4	$\cdot\frac{1}{2}$ / $(-\frac{1}{2})$
P_5^c	0	12	2	1	3	0	1	0	12/1=12	+
	$f_a=$	8	1	2	1	−1	0	0	z_j-c_j	
P_2	0	4	1/2	1	1/2	−1/2	0	1/2		
P_5^c	0	8	3/2	0	5/2	1/2	1	−1/2		
	$f_a=$	0	0	0	0	0	0	−1	z_j-c_j	

(4s) → sol. este optimă (dar nu este unică)

atenție, în bază se scriu vectorii în ordinea coloanelor matricei unitate [adică $\{P_6^a, P_5^c\}$ și nu $\{P_5^c, P_6^a\}$]

$$\begin{cases}X_{optim}^{artif.}=(0,4,0,0,8,0)^T \to \text{sol. optimă a } (PPL)_a \text{ (dar nu este unică)}\\ (\min) f_a=0\end{cases}$$

Faza II

B	C_B	P_0	P_1 (−2)	P_2 (−2)	P_3 (1)	P_4^c (0)	P_5^c (0)	$\theta_i=\frac{C_B}{P_{ik}}$	
P_2	−2	4	1/2	1	1/2	−1/2	0	4/½=8	+
P_5^c	0	8	[3/2]	0	5/2	1/2	1	8/(3/2)=16/3	$\cdot\frac{2}{3}$ / $(-\frac{1}{3})$
	$-f=$	−8	1	0	0	1	0	z_j-c_j	
P_2	−2	4/3	0	1	−1/3	−2/3	−1/3	*	+
P_1	−2	16/3	1	0	5/3	[1/3]	2/3	16	$\cdot 3$ / $(\cdot 2)$
	$-f=$	−40/3	0	0	−11/3	2/3	−2/3	z_j-c_j	
P_2	−2	12	2	1	3	0	1		
P_4^c	0	16	3	0	5	1	2		
	$-f=$	−24	−2	0	−7	0	−2	z_j-c_j	

[în primul tabel simplex: avem 2 diferențe $z_j-c_j>0$ și maxime ($z_1-c_1=z_4-c_4=1$) și l-am ales pe P_1 (puteam să-l introducem și pe P_4^c)]

(4a) și P_0 sol. →

$$\begin{cases}X_{optim}^{standard}=(0,12,0,16,0)^T - \text{S.O. unică}\\ \min(-f)=-24\end{cases}$$

$\Downarrow$

$$\begin{cases}X_{optim}^{init.}=(0,12,0)^T \to \text{S.O. unică}\\ (\max) f=24\end{cases}$$

(III)

$$(PPL)_i \begin{cases} (1)\ (\min) f(x_1,x_2,x_3) = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ (2)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 10 \end{cases} \\ (3)\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (PPL)_S \begin{cases} (1_S)\ (\min) f = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 0x_4^c \\ (2_S)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4^c = 10 \end{cases} \\ (3_S)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Obs

$(2_S) \to \bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 10 \end{array}\right)$ nu are nici o coloană a matricii unitate deci ar trebui să facem cu met. lui Gauss 2 col. ale I_2

$$\Rightarrow (PPL)_a \begin{cases} (1_a)\ (\min) f_a(x_5^a, x_6^a) = x_5^a + x_6^a \\ (2_a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5^a = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4^c + x_6^a = 10 \end{cases} \\ (3_a)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^a, x_6^a \geq 0 \end{cases}$$

$(2_a) \Rightarrow \bar{A}_a = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow X_0^a = (0,0,0,0,4,10)^T$ – SBAI$_a$

(v. sec. = 0; v. princ.)

Faza I

B	C_B	P_0	P_1 (0)	P_2 (0)	P_3 (0)	P_4^c (0)	P_5^a (1)	P_6^a (1)	θ_i	
P_5^a	1	4	1	1	[2]	0	1	0	4/2=2	$/\cdot\frac{1}{2}$ $/(-\frac{3}{2})$
P_6^a	1	10	2	-1	3	-1	0	1	10/3	+
	$f_a=$	14	3	0	5	-1	0	0		
P_3	0	2	[1/2]	1/2	1	0	1/2	0	2/(1/2)=4	$/\cdot 2$ $/(-1)$
P_6^a	1	4	1/2	-5/2	0	-1	-3/2	1	4/(1/2)=8	+
	$f_a=$	4	1/2	-5/2	0	-1	-5/2	0		
P_1	0	4	1	1	2	0	1	0		
P_6^a	1	2	0	-3	-1	-1	-2	1		
	$f_a=$	2	0	-3	-1	-1	-3	0		

(→ coef. lui „f_a")

$\Downarrow h_a$

$$\begin{cases} X_{opt.}^{artif} = (4,0,0,0,0,2)^T \to \text{sol. opt. unică} \\ (\min) f_a = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (PPL)_S \text{ nu are sol. de bază admisibile}$$

(toate ale $C_4^2 = 6$ S.B ale lui (2_S) sunt neadmisibile)

$\Downarrow$

$(PPL)_i$ nu are soluție (nici optimă, nici altfel) – ADERANT ECONOMIC

IV

$$(PPL)_i \begin{cases} (1)\ (\max)\ f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ (2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 \le 10 \end{cases} \\ (3)\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow (PPL)_s \begin{cases} (1_s)\ (\min)(-f) = -3x_1 - x_2 - 2x_3 + 0x_4^e \\ (2_s) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^e = 10 \end{cases} \\ (3_s)\ x_1, x_2, x_3, x_4^e \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1_a)\ (\min)\ f_a(x_5^a) = x_5^a \\ (2_a) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_5^a = 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^e = 10 \end{cases} \\ (3_a)\ x_1, x_2, x_3, x_4^e, x_5^a \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{A}_a = \left(\begin{array}{ccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^e & P_5^a & P_0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 0 & 10 \end{array} \right) \Rightarrow \bar{X}_0^a = (0,0,0,10,8)^T$$

v.sec. = 0 (for P_1, P_2, P_3); v. prnc (for P_4^e, P_5^a); $\bar{X}_0^a$ ↓ SBAI$_a$

Faza I (se rezolvă probl. artificială)

coef. fct. artif. „f_a"

B	C_B	P_0	P_1 (0)	P_2 (0)	P_3↓ (0)	P_4^e (0)	P_5^a (1)	$\theta_i = \frac{C_B}{P_3}$	
← P_5^a	1	8	2	−1	[3]	0	1	8/3	·1/3 / (−2/3)
P_4^e	0	10	3	1	2	1	0	10/2=5	+
	$f_a=$	8	2	−1	3	0	0	z_j-c_j	
P_3	0	8/3	2/3	−1/3	1	0	1/3		
P_4^e	0	14/3	5/3	5/3	0	1	−2/3		
	$f_a=$	0	0	0	0	0	−1		

$\theta_i > 0$, minim → crit. de ieșire din bază

$z_j - c_j$ (> 0 și max) → crit. de intrare în bază

⇓ (4b)

$$\begin{cases} X_{optim}^{artif.} = (0,0,0,8/3,14/3,0)^T \\ (\min)\ f_a = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sol. optimă (nu este unică) ptr. } (PPL)_a$$

Faza II (se rezolvă probl. în formă standard)

coef. fct. „$-f$"

B	C_B	P_0	P_1 (−3)	P_2↓ (−1)	P_3 (−2)	P_4^e (0)	$\theta_i = \frac{C_B}{P_2}$	
P_3	−2	8/3	2/3	−1/3	1	0	*	+
← P_4^e	0	14/3	5/3	[5/3]	0	1	14/5	·3/5 / (1/5)
	$-f=$	−16/3	5/3	5/3	0	0		
P_3	−2	18/5	1	0	1	1/5		
P_2	−1	14/5	1	1	0	3/5		
	$-f=$	−10	0	0	0	−1		

→ (Puteam introduce în bază oricare dintre vectorii P_1 sau P_2. L-am ales pe P_2)

⇓ (4b)

$$\begin{cases} X_{optim}^{standard} = (0, 14/5, 18/5, 0)\ \text{(nu este unică)} \\ (\min)(-f) = -10 \end{cases} \Rightarrow$$

d: $P_1 \notin B$ și $z_1 - c_1 = 0$

$$\begin{cases} X_{optim}^{inițială} = (0, 14/5, 18/5)^T \\ (\max)\ f = 10 \end{cases}$$

↓ dar nu este unică

$(PPL)_i$ are ∞ de soluții optime

(1) (max/min) $f(x_1,x_2,x_3) = - - - -$

(2) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3 \le 12 \\ 3x_1-x_2 \ge 5 \\ 2x_1+2x_2-x_3 = 10 \\ -x_1+3x_2+4x_3 \ge 15 \\ 4x_1-x_2-x_3 \le 8 \end{cases}$

(3) $x_1,x_2,x_3 \ge 0$

$\rightarrow (PPL)_g \Rightarrow$

(1_S) (min) $(f$ sau $(-f)) = - - - -$

(2_S) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4^c = 12 \\ 3x_1-x_2-x_5^c = 5 \\ 2x_1+2x_2-x_3 = 10 \\ -x_1+3x_2+4x_3-x_6^c = 15 \\ 4x_1-x_2-x_3+x_7^c = 8 \end{cases}$ $\rightarrow (PPL)_S$

(3_S) $x_1,x_2,x_3,x_4^c,x_5^c,x_6^c,x_7^c \ge 0$

Obs:

Sistemului în forma standard (2_S) îi corespunde matricea extinsă:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & x_6^c & x_7^c & \\ 1 & 2 & 3 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 15 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 8 \end{array}\right)$$

care are doar 2 coloane ale matricii unitate I_5

În loc să facem alte 3 coloane prin t.e. (met. lui Gauss) atașăm problema artificială (din metoda celor 2 faze) astfel:

Varianta I (se introduce în fiecare ecuație câte o variabilă artificială, deci nr. maximal.)

$(1a)$ (min) $f_a(x_8^a,x_9^a,x_{10}^a,x_{11}^a,x_{12}^a) = x_8^a+x_9^a+x_{10}^a+x_{11}^a+x_{12}^a$

$(2a)$ $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+x_4^c+x_8^a = 12 \\ 3x_1-x_2-x_5^c+x_9^a = 5 \\ 2x_1+2x_2-x_3+x_{10}^a = 10 \\ -x_1+3x_2+4x_3-x_6^c+x_{11}^a = 15 \\ 4x_1-x_2-x_3+x_7^c+x_{12}^a = 8 \end{cases}$

$(3a)$ $x_1,x_2,x_3,x_4^c,x_5^c,x_6^c,x_7^c,x_8^a,x_9^a,\dots,x_{12}^a \ge 0$

$$\rightarrow \bar{A}_a = \left(\begin{array}{cccccccccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4^c & x_5^c & x_6^c & x_7^c & x_8^a & x_9^a & x_{10}^a & x_{11}^a & x_{12}^a & \\ 1 & 2 & 3 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 10 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 15 \\ 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 8 \end{array}\right)$$

(primele 7 coloane: v.sec. $=0$; ultimele 5 coloane: v.P)

$\Downarrow$

$\bar{X}_0^a = (0,0,0,0,0,0,0,12,5,10,15,8)^T \rightarrow SBAI_a$

Obs: i) aveam nevoie de 5 coloane ale matricii unitate (I_5) și am obținut 7 coloane! (prima și a cincea în dublu exemplar!!)

ii) $(PPL)_a$ are acum 12 necunoscute

iii) nu este nevoie să introducem obligatoriu în fiecare ecuație câte o variabilă artificială, ci doar în cele în care am scăzut sau nu am introdus variabile de compensare.

Varianta II (se introduce nr. minim necesar de variabile artificiale, deci nr. optim)

$$\begin{cases} (1a)\ (\min)\ f_a(x_8^a, x_9^a, x_{10}^a) = x_8^a + x_9^a + x_{10}^a \\ (2a)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4^c = 12 \\ 3x_1 - x_2 - x_5^c + x_8^a = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_9^a = 10 \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_6^a + x_{10}^a = 15 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_7^a = 8 \end{cases} \\ (3a)\ x_1, \dots, x_{10}^a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{A}_a =$$

x_1	x_2	x_3	x_4^c	x_5^c	x_6^c	x_7^c	x_8^a	x_9^a	x_{10}^a	
1	2	3	**1**	0	0	0	0	0	0	12
3	-1	0	0	-1	0	0	**1**	0	0	5
2	2	-1	0	0	0	0	0	**1**	0	10
-1	3	4	0	0	-1	0	0	0	**1**	15
4	-1	-1	0	0	0	**1**	0	0	0	8

V. sec. = 0 ; V. princ. ($x_4^c, x_7^c, x_8^a, x_9^a, x_{10}^a$)

$$\Downarrow$$

$$X_0^a = (0,0,0,12,0,0,8,5,10,15)^T$$

↘ S.B.A. i a

Obs: În acest caz am introdus doar 3 variab. artificiale, (f.7 L) a depinzând doar de 10 variabile.