Curs 12 IV.4.2) Aducerea formelor pătratice la forma canonică

I) Metoda lui Iacobi

① Scriem matricea coeficienților (11.7) $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ atașată formei pătratice definită în (11.6")

② Calculăm minorii diagonali principali: $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ai matricii A, cu relațiile:

$$\begin{array}{c} \quad \Delta_1 \quad \Delta_2 \;\cdots\; \Delta_i \;\cdots\; \Delta_n \\ A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \longmapsto (12.1) \begin{cases} \Delta_0 \overset{def}{=} 1 \\ \Delta_1 = a_{11} \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ \vdots \\ \Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \\ \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ii} \end{vmatrix} \\ \vdots \\ \Delta_n = \det A \end{cases}$$

→ minorii diagonali principali de ordinul $1, 2, \dots, n$ ai matricei A.

③ Dacă:

3.1) $(\forall)\ \Delta_i \neq 0,\ i=\overline{1,n}$, obținem forma canonică asociată formei pătratice „f" cu formula lui Iacobi

(12.2) $$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underbrace{\frac{\Delta_0}{\Delta_1}}_{\overset{not}{=}\alpha_1} y_1^2 + \underbrace{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}}_{\overset{not}{=}\alpha_2} y_2^2 + \dots + \underbrace{\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}}_{\overset{not}{=}\alpha_i} y_i^2 + \dots + \underbrace{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}_{\overset{not}{=}\alpha_n} y_n^2$$ → formula lui Iacobi

3.2) $(\exists)\ \Delta_i = 0,\ i \in \{1, 2, \dots, n\}$, nu putem obține forma canonică asociată formei pătratice „f"
(în acest caz metoda lui Iacobi nu "funcționează")

Obs:

a) Metoda lui Iacobi are două neajunsuri (limite):
 (1) nu "funcționează" întotdeauna (dacă $(\exists)\ \Delta_i=0$, nu putem aplica formula lui Iacobi (11.11))
 (2) nu ne "spune" cine sunt formele liniare $y_i, i=\overline{1,n}$ (11.9) (dar nici nu ne interesează !!!)

b) conform „T1" și relațiilor (12.2) observăm că metoda lui Iacobi nu va funcționa pentru:
 (i) formele pătratice semipozitiv și seminegativ definite [cf. „T1" $(\exists)\ \alpha_i=0 \overset{(12.2)}{\Longrightarrow} (\exists)\ \Delta_i=0$!!!)
 (ii) o parte a formelor pătratice nedefinite ca semn (cele cu $\alpha_i<0; \alpha_j>0$ și $\alpha_k=0$!!! $\overset{(12.2)}{\Longrightarrow} \Delta_k=0$)

Teorema 2:

Fie o formă pătratică „f" definită de rel. (11.6") a cărei formă canonică asociată este dată de formula lui Iacobi (12.2). Atunci, dacă:

a) $\Delta_1>0; \Delta_2>0; \dots; \Delta_n>0$ $(+, +, \dots +)$ $\Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este pozitiv definită

b) $\Delta_1<0,\ \Delta_2<0,\ \Delta_3>0, \dots$ $(-, +, -, +, \dots)$ $\Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este negativ definită

c) $(\forall)\ \Delta_i \neq 0, i=\overline{1,n}$ și în orice altă combinație de semne decât în cazul a) sau b) $\Rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este nedefinită ca semn

d) $(\exists)\ \Delta_i=0,\ i\in\{1, 2, \dots, n\}$ $\Rightarrow$ nu putem preciza tipul (semnul/natura) formei pătratice $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

(metoda lui Iacobi nu "funcționează" în acest caz → putem în schimb să aplicăm următoarea metodă, a lui Gauss, care "funcționează" întotdeauna)

Exemple:

(1) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + x_2x_3 \end{cases}$

Dem:

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(11.10)}{\Longrightarrow} (*) \begin{cases} \Delta_0 \overset{\text{not}}{\equiv} 1 \\ \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \\ \Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{13}{2} \end{cases} \xrightarrow[\text{conf. } (11.11)]{(\forall)\Delta_i \neq 0,\ i=\overline{1,3}}$$

$$f(x_1,x_2,x_3) \overset{(11.11)}{=} \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 \overset{(*)}{=} \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{2}{-2} y_2^2 + \frac{-2}{-\frac{13}{2}} y_3^2 = \frac{1}{2} y_1^2 - y_2^2 + \frac{4}{13} y_3^2, \text{ cu } \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} > 0 \\ \alpha_2 = -1 < 0 \\ \alpha_3 = \frac{4}{13} > 0 \end{cases}$$

deci conf. T_1 forma pătratică este nedefinită ca semn ($(\exists)\ \alpha_1 > 0$ și $(\exists)\ \alpha_2 < 0$).

(2) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2x_3 \end{cases}$

Dem:

$$A = \begin{array}{ccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -3/2 \\ 1 & -3/2 & -1 \end{pmatrix} \overset{(11.10)}{\Longrightarrow} (*) \begin{cases} \Delta_0 \overset{\text{def}}{\equiv} 1 \\ \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0\ (!) \\ \Delta_3 = \det A = \ ? \quad \text{(nu are rost să-l calculăm)} \end{cases} \xrightarrow[\text{conform (2)}]{(\exists)\ \Delta_i = 0} \text{ nu putem}$$

afla forma canonică asociată (metoda lui Iacobi nu "merge") deci nu putem afla tipul formei pătratice (semnul).

(3) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3 + 3x_2x_3 \end{cases}$

Dem:

$$A = \begin{array}{ccc} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 3/2 \\ 1/2 & 3/2 & 3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} \Delta_0 \overset{\text{def}}{\equiv} 1 \\ \Delta_1 = 1 \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \\ \Delta_3 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & 2 & 3/2 \\ 1/2 & 3/2 & 3 \end{vmatrix} = \frac{7}{4} \end{cases} \xrightarrow[\text{conf. } (11.11)]{(\forall)\Delta_i \neq 0,\ i=\overline{1,3}}$$

$$f(x_1,x_2,x_3) \overset{(11.11)}{=} \frac{\Delta_0}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} y_3^2 = y_1^2 + y_2^2 + \frac{4}{7} y_3^2$$

, cu $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = \frac{4}{7} > 0 \overset{(T_1)}{\Longrightarrow}$ forma pătratică este pozitiv definită (sau, deoarece $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0 \overset{(T_2)}{\Longrightarrow}$ forma pătratică este poz. def.)

q.e.d

II) Metoda lui Gauss

① scriem matricea coeficienților (11.7) $A=(a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ asociată formei pătratice definită de (11.6'');

② folosind a doua transf. elementară $T_2)$ (și eventual $T_3)$ dar <u>nu</u> $T_1)$) aducem matricea coeficienților A la forma <u>triunghiular superioară</u> A', adică:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} & A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{array} \underset{T_3)}{\overset{T_2)}{\sim}} \cdots\cdots \underset{T_3)}{\overset{T_2)}{\sim}} \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{matrix} & A'=\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \boxed{0} & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{pmatrix} \end{array}$$

⑤ **Obs:** i) pentru a obține matricea A' <u>nu avem voie</u> să folosim transf. elem. $T_1)$ (adică înmulțirea unei linii cu un scalar nenul ($\neq 0$) și alt);

ii) transf. elem. $T_3)$ (schimbarea liniilor între ele $L_i \leftrightarrow L_j$) se folosește <u>numai</u> pentru a aduce un pivot $\neq 0$, dar <u>automat</u> și <u>obligatoriu</u> trebuie să schimbăm între ele și coloanele corespunzătoare $C_i \leftrightarrow C_j$.

③ forma canonică (11.8) asociată formei pătratice (11.6'') se obține cu <u>formula lui Gauss</u>:

(12.3) $$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\underbrace{\frac{1}{a'_{11}}}_{\overset{not}{=}\alpha_1}y_1^2+\underbrace{\frac{1}{a'_{22}}}_{\overset{not}{=}\alpha_2}y_2^2+\dots+\underbrace{\frac{1}{a'_{ii}}}_{\overset{not}{=}\alpha_i}y_i^2+\dots+\underbrace{\frac{1}{a'_{nn}}}_{\overset{not}{=}\alpha_n}y_n^2 \rightarrow \text{formula lui Gauss}$$

în care:

(12.4) $$\begin{cases} y_1=a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+\dots+a'_{1n}x_n \\ y_2= \qquad a'_{22}x_2+\dots+a'_{2n}x_n \\ - - - - - - - - - \\ y_n= \qquad\qquad a'_{nn}x_n \end{cases} \rightarrow \text{expresiile formelor liniare } y_i,\ i=\overline{1,n} \text{ din (11.9)}$$

<u>**Obs:**</u>

i) metoda lui Gauss "funcționează" întotdeauna și în plus ne furnizează și expresiile formelor liniare "y_i, $i=\overline{1,n}$" (nu că ne-ar interesa!)

ii) dacă pe diagonala principală a matricei triunghiulare A' există elemente $a'_{ii}=0$ atunci în formula lui Gauss (11.12) termenul "$\frac{1}{a'_{ii}}y_i^2$" se înlocuiește cu termenul "$0\cdot y_i^2$", adică:

(*) $$\underbrace{\frac{1}{a'_{ii}}}_{\overset{not}{=}\alpha_i}y_i^2 \xrightarrow{\text{ptr. } a'_{ii}=0} 0\cdot y_i^2 \qquad \left(\text{mai clar: } \frac{1}{0}y_i^2 \longrightarrow 0\cdot y_i^2\right)$$

<u>Obs</u>:

$$\alpha_i=\begin{cases} \frac{1}{a'_{ii}}\ ; & a'_{ii}\neq 0 \\ 0\ ; & a'_{ii}=0 \end{cases}$$

Exemple: Vom aplica metoda lui Gauss celor 3 exemple rezolvate cu metoda lui Iacobi

① $\begin{cases} f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \\ f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2+x_2x_3 \end{cases}$

Dem:

$$A=\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & \boxed{2} & -2 & 0 \\ x_2 & -2 & 1 & 1/2 \\ x_3 & 0 & 1/2 & 3 \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 2 & -2 & 0 \\ x_2 & 0 & \boxed{-1} & 1/2 \\ x_3 & 0 & 1/2 & 3 \end{array} \Big/ \cdot\tfrac{1}{2} \sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1 & 2 & -2 & 0 \\ y_2 & 0 & -1 & 1/2 \\ y_3 & 0 & 0 & 13/4 \end{array} = A' \xRightarrow{\text{cf. }(12.3)}$$

cu: $a'_{11}=2;\ a'_{22}=-1;\ a'_{33}=\frac{13}{4}$

$$\overset{(12.3)}{\Longrightarrow} \underline{f(x_1,x_2,x_3)} \overset{(12.3)}{=} \frac{1}{a'_{11}}y_1^2+\frac{1}{a'_{22}}y_2^2+\frac{1}{a'_{33}}y_3^2=\frac{1}{2}y_1^2+\frac{1}{-1}y_2^2+\frac{1}{\frac{13}{4}}y_3^2=\underline{\frac{1}{2}y_1^2-y_2^2+\frac{4}{13}y_3^2}$$

(aceeași formă canonică ca și cea obținută cu metoda lui Iacobi!)

unde cf. (12.4): $(*)\begin{cases} y_1=2x_1-2x_2+0x_3 \\ y_2=\quad -x_2+1/2\,x_3 \\ y_3=\quad 13/4\,x_3 \end{cases}$

. Evident deoarece $\begin{cases}\alpha_1=\frac{1}{2}>0\\ \alpha_2=-1<0 \\ \alpha_3=\frac{4}{3}>0\end{cases} \Rightarrow$ $\underline{f\text{ - nedefinită ca semn.}}$

② $\begin{cases} f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \\ f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+2x_2^2-x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3-3x_2x_3 \end{cases}$

Dem:

$$A=\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & \boxed{2} & -2 & 1 \\ x_2 & -2 & 2 & -3/2 \\ x_3 & 1 & -3/2 & -1 \end{array} \Big/ \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 2 & -2 & 1 \\ x_2 & 0 & \boxed{0} & -1/2 \\ x_3 & 0 & -1/2 & -3/2 \end{array} \sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_3 & x_2 \\ \hline x_1 & 2 & 1 & -2 \\ x_3 & 0 & \boxed{-3/2} & -1/2 \\ x_2 & 0 & -1/2 & 0 \end{array} \Big/ \cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) \sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_3 & x_2 \\ \hline y_1 & 2 & 1 & -2 \\ y_2 & 0 & -3/2 & -1/2 \\ y_3 & 0 & 0 & 1/6 \end{array} = A' \xRightarrow{(12.3)}$$

$a'_{11}=2;\ a'_{22}=-\frac{3}{2}$

$a'_{33}=\frac{1}{6}$

$$\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_3} \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 2 & -2 & 1 \\ x_3 & 0 & -1/2 & -3/2 \\ x_2 & 0 & 0 & -1/2 \end{array} \xrightarrow{C_2\leftrightarrow C_3}$$

(se poate face în doi pași: 1) $L_2\leftrightarrow L_3$ și 2) $C_2\leftrightarrow C_3$)

$$\overset{(12.3)}{\Longrightarrow} \underline{f(x_1,x_2,x_3)}=\frac{1}{a'_{11}}y_1^2+\frac{1}{a'_{22}}y_2^2+\frac{1}{a'_{33}}y_3^2=\underline{\frac{1}{2}y_1^2-\frac{2}{3}y_2^2+6y_3^2}$$

→ nedefinită ca semn, deoarece $(\exists)\ \alpha_1=\frac{1}{2}>0$ și $(\exists)\ \alpha_2=-\frac{2}{3}<0$.

unde: $(*)\begin{cases} y_1=2x_1+x_3-2x_2 \\ y_2=-3/2\,x_3-1/2\,x_2 \\ y_3=1/6\,x_2 \end{cases}$ cf. rel. (12.4)

③ $\begin{cases} f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R} \\ f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+x_1x_3+3x_2x_3 \end{cases}$

Dem:

$$A=\begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & \boxed{1} & 1 & 1/2 \\ x_2 & 1 & 2 & 3/2 \\ x_3 & 1/2 & 3/2 & 3 \end{array} \Big/ \cdot(-1) \Big/ \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline x_1 & 1 & 1 & 1/2 \\ x_2 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ x_3 & 0 & 1 & 11/4 \end{array} \Big/ \cdot(-1) \sim \begin{array}{c|ccc} & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline y_1 & 1 & 1 & 1/2 \\ y_2 & 0 & 1 & 1 \\ y_3 & 0 & 0 & 7/4 \end{array} = A' \xRightarrow{(12.3)}$$

$a'_{11}=1;\ a'_{22}=1;\ a'_{33}=\frac{7}{4}$

$$\overset{(12.3)}{\Longrightarrow} \underline{f(x_1,x_2,x_3)}=\frac{1}{a'_{11}}y_1^2+\frac{1}{a'_{22}}y_2^2+\frac{1}{a'_{33}}y_3^2=\underline{y_1^2+y_2^2+\frac{4}{7}y_3^2}$$

→ pozitiv definită, deoarece: $\begin{cases}\alpha_1=1>0\\ \alpha_2=1>0\\ \alpha_3=\frac{4}{7}>0\end{cases}$.

unde: $(*)\begin{cases} y_1=x_1+x_2+1/2\,x_3 \\ y_2=x_2+x_3 \\ y_3=7/4\,x_3 \end{cases}$ conform relațiilor (12.4)

q.e.d

Obs:

i) comparând rezultatele obținute prin cele două metode (Iacobi și Gauss), pentru cele 3 exemple de mai sus, observăm că am obținut aceeași formă canonică indiferent de metoda utilizată; am putea trage concluzia, falsă, că unei forme pătratice îi corespunde o unică formă canonică asociată;

ii) în fapt unei forme pătratice, i se pot atașa o infinitate de forme canonice [redacted] distincte (în sensul că valoarea numerică a coeficienților $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ este diferită); dar semnul coeficienților $\alpha_i, i=\overline{1,n}$ și poziția lor în forma canonică nu se modifică !!!. Deci evident nu se modifică tipul/semnul formei pătratice (ar fi și absurd acest lucru!)

iii) astfel putem avea pentru o formă pătratică $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ diverse reprezentări ale formelor canonice asociate:

$$(11.4)\quad f(x_1,x_2,\dots,x_n) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2 = \alpha_1' y_1'^2 + \alpha_2' y_2'^2 + \dots + \alpha_n' y_n'^2 = \alpha_1'' y_1''^2 + \alpha_2'' y_2''^2 + \dots + \alpha_n'' y_n''^2 = \dots\dots$$

Dacă:
$$\begin{cases} \alpha_i > 0 \Longrightarrow \alpha_i' > 0, \alpha_i'' > 0, \dots \\ \alpha_i < 0 \Rightarrow \alpha_i' < 0, \alpha_i'' < 0, \dots \\ \alpha_i = 0 \Rightarrow \alpha_i' = 0, \alpha_i'' = 0, \dots \end{cases}$$

Ex: Să considerăm forma pătratică din ex. 1: $\begin{cases} f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 + x_2x_3 \end{cases}$

Cu metoda lui Gauss (și Iacobi) am obținut forma canonică asociată:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}y_1^2 - y_2^2 + \frac{4}{13}y_3^2 \quad \text{unde: } (*)\begin{cases} y_1 = 2x_1 - 2x_2 \\ y_2 = -x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ y_3 = \frac{13}{4}x_3 \end{cases} \text{ și } (**)\begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{2} > 0 \\ \alpha_2 = -1 < 0 \\ \alpha_3 = \frac{4}{13} > 0 \end{cases}$$

Atunci, putem scrie:

$$f(x_1,x_2,x_3) = \overset{=\alpha_1}{\frac{1}{2}}\Big(\underbrace{2x_1 - 2x_2}_{=y_1}\Big)^2 \overset{=\alpha_2}{-}\Big(\underbrace{-x_2 + \tfrac{1}{2}x_3}_{=y_2}\Big)^2 + \overset{=\alpha_3}{\frac{4}{13}}\Big(\underbrace{\tfrac{13}{4}x_3}_{=y_3}\Big)^2 =$$

{scoatem forțat factor comun din fiecare paranteză pe: 2; -1; $\frac{13}{4}$ și obținem:

$$= \overset{=\alpha_1'}{2}\Big(\underbrace{x_1 - x_2}_{=y_1'}\Big)^2 \overset{=\alpha_2'}{-}\Big(\underbrace{x_2 - \tfrac{1}{2}x_3}_{=y_2'}\Big)^2 + \overset{=\alpha_3'}{\frac{13}{4}}\big(\underbrace{x_3}_{=y_3'}\big)^2$$

$$= 2y_1'^2 - y_2'^2 + \frac{13}{4}y_3'^2 \quad \text{unde: } (*')\begin{cases} y_1' = x_1 - x_2 \\ y_2' = x_2 - \frac{1}{2}x_3 \\ y_3' = x_3 \end{cases} \text{ și } (**')\begin{cases} \alpha_1' = 2 > 0 \\ \alpha_2' = -1 < 0 \\ \alpha_3' = \frac{13}{4} > 0 \end{cases}$$

q.e.d