

Def: Fie matricea $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Numim transformare elementară (t.e.) una dintre următoarele operații efectuate asupra liniilor acesteia:

(1) Înmulțirea (elementelor) unei linii cu un scalar nenul ($\alpha \neq 0$);

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \alpha \neq 0 \sim A'_{\text{not}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{i1} & \alpha a_{i2} & \dots & \alpha a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \text{not: } A \wedge A'$$

$(L_i \rightarrow \alpha L_i)$

notația $A \wedge A'$ reprezintă faptul că matricea A' a fost obținută din matricea A prin t.e. (operăm oă matricele A și A' sunt echivalente d.p.d.v al t.e.)

Ex:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \cdot 2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \cdot \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 & \frac{5}{3} \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ obs: toate cele 4 matrici sunt echivalente (d.p.d.v al t.e.)

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$

(2) Înmulțirea (elementelor) unei linii cu un scalar nenul ($\alpha \neq 0$) și adăugarea ei la o altă linie

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \alpha \neq 0 \sim A''_{\text{not}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{j1} + a_{i1} & \alpha a_{j2} + a_{i2} & \dots & \alpha a_{jn} + a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \text{not: } A \wedge A''$$

$(L_j \rightarrow L_j + \alpha L_i)$

Ex:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \cdot 2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 + 4L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \cdot \frac{1}{8}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \cdot \frac{1}{10}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Obs: putem aplica (2) simultan asupra mai multor linii:

$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \cdot 2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(13) Schimbarea (elementelor) a două linii între ele;

$$A = \begin{pmatrix} L_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ L_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_j & a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \xrightarrow{(L_i \leftrightarrow L_j)} A'' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ not } A \sim A''$$

Ex $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Obs.!!!) În toate aplicațiile de pe parcursul acestui curs/seminar, vom folosi t.e. pentru a transforma una sau mai multe coloane a unei matrice oarecare, în coloanele matricei unitate.

Obs $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ matricea unitate de ord. 2

$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ matricea unitate de ord. 3

$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$ matricea unitate de ord. n

Obs: Rezolvarea sistemelor de ec. lin. cu 2 sau 3 necunoscute (și același nr. de ecuații \rightarrow sist. potratice de tip Cramer) cu metoda eliminării, înseamnă să îmbinăm sistemul inițial (definiții) cu același sistem cu sist. inițial (sisteme echivalente) dar mai simple de rezolvat

Ex: a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ -2x_1 - 5x_2 = -1 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ -x_2 = 9 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} x_1 = 23 \\ x_2 = -9 \end{cases}$

$S = \{(23, -9)\} \rightarrow$ sol. unică

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 5 \\ -2 & -5 & | & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 1 & 2 & | & 5 \\ 0 & -1 & | & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 23 \\ 0 & -1 & | & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 23 \\ x_2 = -9 \end{cases} \rightarrow$ soluție unică (sist. comp. deter.)

b) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - x_3 = 6 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 6 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ 0 = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ -x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \xrightarrow{+} \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 3 \\ -x_2 + x_3 = 2 \\ 0 = 1 \end{cases} \Rightarrow S = \emptyset$

$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 3 \\ -1 & -2 & 3 & | & -1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & | & 3 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 5 \\ 0 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow 0=1 (F) \Rightarrow$ sist. incompatibil

Obs: În metoda eliminării (rând pe rând a necunoscutele) se aplică următoarele trei operații asupra ecuațiilor din sistemul liniar:

- (O₁) se înmulțește o ecuație (sau mai multe) cu un scalar nenul ($\neq 0$);
- (O₂) se înmulțește o ecuație cu un scalar nenul și se adună la o altă ecuație;
- (O₃) se schimbă între ele două ecuații;

Într-o astfel de operații, soluția (-ile) sist. lin. nu se modifică. Obținem alte sisteme care sunt echivalente cu sist. inițial (au același soluții) dar care au o formă mai simplă de rezolvat.

Așa cum se poate observa și din exemplul de mai sus cele trei operații efectuate asupra ec. lin. din sistem sunt de fapt cele trei transf. elem. (T₁) - (T₃) care se efectuează asupra matricii extinse \bar{A} asociată sistemului.

Obs: pentru a înțelege modul de lucru cu t.e. vom arăta 4 aplicații ale acestora (trei dintre ele le-am întâlnit la liceu, dar alți folosit o altă metodă de rezolvare, a determinanților)

Aplicații ale T.E.

- 1) Determinarea rangului unei matrici; ~~matrice~~
- 2) Determinarea inversei unei matrici (patrice);
- 3) Rezolvarea sist. de ecuații liniare (metoda lui Gauss!!)
- 4) Determinarea soluțiilor de bază ale unui sist. liniar (compatibil nedeterminat)

1) Determinarea rangului unei matrici cu t.e.

Def: Fie matricea $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Numim rangul matricii A ($\stackrel{\text{not}}{=} \text{rang } A \equiv r_A$) numărul natural $r \in \mathbb{N}$ cu proprietățile:

- i) există un minor de ordin r ($\stackrel{\text{not}}{=} M_r$) al matricii A, nenul ($\neq 0$) $\nexists M_r \neq 0$
- ii) toți minorii de ordin superior lui r sunt nuli ($=0$) $\nexists M_{r+1} \neq 0$, $\forall r > r_A$
 $\forall r \in \{r+1, r+2, \dots\}$

Obs:

- a) $\forall A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} 0 \leq r_A \leq \min\{m, n\}$
- b) $r_A = 0 \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \stackrel{\text{not}}{=} O_{m,n} \in O$ + matricea nulă
- c) nr. minorilor de ordin sup. lui r_A este egal cu: $= C_m^{r+1} \cdot C_n^{r+1} + C_m^{r+2} \cdot C_n^{r+2} + \dots$
 ex. Fie $A \in M_{6,10}(\mathbb{R})$ cu $r_A = 4$. Cf. def. trebuie să arătem că există un $M_4 \neq 0$ și toți minorii de ord. 5 și 6 sunt zero, adică:
 - $\{ \text{nr. min. de ord. 5 este } C_6^5 \cdot C_{10}^5 = 6 \cdot 252 = 1512$
 - $\{ \text{nr. } M_6 \text{ este: } C_6^6 \cdot C_{10}^6 = 1 \cdot 210 = 210$
 deci un total de 1722 de minorii de ord. 5 și 6 !!!

T₁: $\text{rang } A = r \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } (\exists) M_r \neq 0 \\ \text{ii) } (\forall) M_{r+1} = 0 \end{cases}$ (toți minorii de ord. $r+1$, sunt nuli)

Obs: nr. minorilor de ordinul $r+1$, este egal cu: $C_m^{r+1} \cdot C_n^{r+1}$

Ex: în cazul exemplului precedent avem de calculat doar cei 1.512 minori de ord. 5 nu și pe cei de ord. 6.

T₂: $\text{rang } A = r \Leftrightarrow \begin{cases} \text{i) } (\exists) M_r \neq 0 \\ \text{ii) } (\forall) \bar{M}_{m-r} = 0 \end{cases}$ (toți minorii de ord. $r+1$, obținuți prin bordarea minorului de ord. r nulul, sunt nuli)

Obs: nr. \bar{M}_{m-r} este egal cu: $(m-r) \cdot (n-r)$

Ex: în cazul ex. precedent trebuie să calculăm: $(m-r)(n-r) = (6-4)(10-4) = 2 \cdot 6 = 12$ minori de ord. 5 obținuți prin bordarea minorului de ord. 4 nulul (și nu 1.512!!)

Obs(!!!) Rangul unei matrice se spune că este linii (respectiv coloane) sunt inde-
-pendente din totalul de linii (coloane) ale matricei, adică nu se pot scrie
ca și combinații liniare de celelalte linii (coloane).

Obs:

- în cazul sist. lin. de ec., rangul matricei $A(r_s)$ respectiv rangul matricei extinse $\bar{A}(r_s)$ ne arată câte dintre ecuații sunt independente (principale) și câte, depind de aceste (seam-
-dane) adică sunt combinații (liniare) de ecuațiile principale, deci pot fi eliminate
- în ex. precedent $\begin{cases} 4 \text{ din cele } 6 \text{ linii ale matricei sunt independente} \\ 4 \text{ din cele } 10 \text{ coloane ale matricei sunt independente} \end{cases}$ restul pot fi scris
ca și combinații (liniare) de acestea.
- putem a evita calculul lungi ale rangului folosind minorii (determinanți) ne bazez
pe următoarea teoremă:

T₃: Transformările elementare aplicate unei matrice, nu modifică rangul. Adică știm:

$$(1.1) \quad A \sim B \Rightarrow r_A = r_B \quad \text{sau mai general: } (1.1') \quad A_1 \sim A_2 \sim \dots \sim A_k \Rightarrow r_{A_1} = r_{A_2} = \dots = r_{A_k}$$

Obs:

- pentru a folosi T₃, va trebui să adăugăm matricea noastră la o formă (mai simplă
pentru care rangul matricei se va trebui să fie calculat (cu T₂) și să vedem
direct din expresia acesteia. Această formă o vom numi forma Gauss-Jordan

Def: Fie matricea $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Numim forma Gauss-Jordan a acesteia, o matrice obținută din aceasta prin t.e. care cuprind nr. maxim de coloane ale matricei unitate, ~~adică~~ adică are forma:

$$(1.2) A = \begin{pmatrix} L_1 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ L_2 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightsquigarrow A_{GJ} = \begin{pmatrix} L_1 & a'_{11} & 1 & a'_{13} & \dots & 0 & a'_{1k} & \dots & a'_{1n} \\ L_2 & 0 & 0 & a'_{23} & 1 & a'_{25} & 0 & a'_{2k} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_r & 0 & 0 & 0 & 0 & a'_{rg} & 1 & a'_{rk} & \dots & a'_{rn} \\ L_{r+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L_m & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Obs:

i) un caz particular, este forma Gauss-Jordan redusă (canonică) ($\stackrel{\text{not}}{=} A_{GJ}^R$), unde coloanele matricei unitate sunt primele (sau primele r_0 pozitive), adică are forma:

$$(1.2') A_{GJ}^R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r_0+1} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a'_{2,r_0+1} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a'_{r_0,r_0+1} & \dots & a'_{r_0n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & A' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) o matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, cu $\text{rang } A = r$, nu are o unică formă Gauss-Jordan, ci poate avea maxim: $C_n \stackrel{\text{def}}{=} \frac{n!}{r!(n-r)!}$ (putem alege r_0 din cele „ n ” coloane ale matricei pentru a le transforma (cu t.e.) în coloanele matricei unitate în C_n moduri)

iii) este evident cf. def. rangului unei matrice (sau I_2) că $\text{rang } A_{GJ}^R = r = \text{rang } A_{GJ} =$
= nr. (max.) de coloane ale matricei unitate; altmuci, cf. I_3 avem:

$$\underline{r_A = \text{rang } A_{GJ} = r}$$

Ex: Determinați rangul următoarelor matrici, folosind t.e.

$$a) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

$$\underline{\text{Dum:}} \text{ evident } 0 \leq r_A \leq \min(2,3) \Rightarrow 1 \leq r_A \leq 2$$

$$\text{deoarece } (\exists) a_{ij} \neq 0 \Rightarrow r_A \geq 1$$

Aducem A la forma Gauss-Jordan, avem:

(6)

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)/\cdot 2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = A_{\text{GJ}} \Rightarrow \underline{r_A = 2 = r_A}$$

Sau:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \boxed{3} \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\cdot \frac{1}{3}} \sim \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 \\ \boxed{-1} & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1/3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1/3 & 1 \end{pmatrix} = A_{\text{GJ}} \Rightarrow \underline{r_A = 2 = r_A}$$

q.e.d

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$

Obs: evident, din forma matricii $B \Rightarrow 1 \leq r_B \leq 3$

Dem:

$$B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{\text{GJ}} \Rightarrow \underline{r_B = 2}$$

Sau:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \boxed{-1} & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B_{\text{GJ}} \Rightarrow r_B = 2$$

Obs: Se poate obs. ca $L_3 = 2L_1 + L_2$, deci una dintre linii este combinație (liniară) de celelalte două!!

q.e.d

c)

$$C = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{+} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C_{\text{GJ}}$$

\Downarrow
 $\underline{r_C = 3}$