# Derivate parțiale de ordinul I și II pentru funcții de „n" variabile

**Obs:** reguli de derivare uzuale și necesare:

$$\begin{cases}(f+g)' = f' + g' \\ (\lambda f)' = \lambda f'\end{cases} \qquad \begin{cases}(x^n)' = n\,x^{n-1} \\ x' = 1 \\ c' = 0 \quad \text{(derivata unei constante)}\end{cases}$$

Să se determine derivatele parțiale de ord. I și II, diferențialele de ord. I și II și hessiana următoarelor funcții în punctele indicate:

I) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ f(x,y) = 3x^3y + xy^2 - 2x^2y + 1 \end{cases}$ ; $P_0(-1,2)$

1) calculăm derivatele parțiale de ord. I $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 9x^2y + y^2 - 4xy$ → se derivează $f(x,y)$ în raport cu „x" ca și cum „y" este o constantă

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^3 + 2xy - 2x^2$ → se derivează $f(x,y)$ în raport cu „y" ca și cum „x" este o constantă

$$\begin{cases}\frac{\partial f}{\partial x}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2) = 9(-1)^2\cdot 2 + 2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 2 = \underline{30} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2) = \underline{-9}\end{cases}$$

2) scriem diferențiala de ord. I $(df(x,y))$:

$$\begin{cases} df(x,y) \overset{def}{=} \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (9x^2y + y^2 - 4xy)dx + (3x^3 + 2xy - 2x^2)dy \\ df(P_0) = df(-1,2) = 30dx - 9dy \end{cases}$$

3) calculăm derivatele parțiale de ordinul II $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(9x^2y + y^2 - 4xy\right) = 18xy - 4y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(3x^3 + 2xy - 2x^2\right) = 2x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(3x^3 + 2xy - 2x^2\right) = 9x^2 + 2y - 4x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(9x^2y + y^2 - 4xy\right) = 9x^2 + 2y - 4x \end{cases}$$

} trebuie obligatoriu să fie egale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 18\cdot(-1)\cdot 2 - 4\cdot 2 = 28 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = -2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) = 17 \end{cases}$$

$\dfrac{\partial}{\partial x}(\ldots) \rightarrow$ derivata $(\ldots)$ în raport cu „x"

$\dfrac{\partial}{\partial y}(\ldots) \rightarrow$ derivata $(\ldots)$ în raport cu „y"

4.) scriem diferențiala de ordinul II $(d^2 f(x,y))$

$$d^2 f(x,y) \overset{def}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx\, dy = (18xy - 4y)dx^2 + 2x\, dy^2 + 2(9x^2 + 2y - 4x)\cdot dx\, dy$$

$$d^2 f(P_0) = d^2 f(-1,2) = 28\, dx^2 - 2\, dy^2 + 34\, dx\, dy$$

5) scriem matricea hessiană $(H(x,y))$

$$H(x,y) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18xy & 9x^2 + 2y - 4x \\ 9x^2 + 2y - 4x & 2x \end{pmatrix}$$

$$H(P_0) = H(-1,2) = \begin{pmatrix} 28 & 17 \\ 17 & -2 \end{pmatrix}$$

II) $\begin{cases} f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} \\ f(x,y,z) = x^3y^2z + 2xy^2 - 3yz + 4 \end{cases}$ ; $P_0(1,1,1)$

1) $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^2z + 2y^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x^3yz + 4xy - 3z \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} = x^3y^2 - 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(P_0) = 5 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(P_0) = 3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}(P_0) = -2 \end{cases}$

2) $\underbrace{df(x,y,z)}_{4} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz = \underbrace{(3x^2y^2z+2y^2)dx + (2x^3yz+4xy-3z)dy}_{4}$
$\underbrace{+(x^3y^2-3y)dz}_{4}$

$df(P_0) = 5dx + 3dy - 2dz$

3) $\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy^2z \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x^3z + 4x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(P_0) = 6 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(P_0) = 6 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(P_0) = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = 6x^2yz + 4y \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x} = 3x^2y^2 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial y} = 2x^3y - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(P_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(P_0) = 10 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(P_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(P_0) = 3 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(P_0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}(P_0) = -1 \end{cases}$

4) $\underbrace{d^2f(x,y,z)}_{4} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2 + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}dxdz + 2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}dydz$

$\cancel{=(6x^2yz+4y)dx^2+}$

$\underbrace{= 6xy^2z\,dx^2 + (2x^3z+4x)dy^2 + 2(6x^2yz+4y)dxdy + 6x^2y^2dxdz +}_{4}$
$\underbrace{+ 2(2x^3y-3)dydz}_{4}$

$d^2f(P_0) = 6dx^2 + 6dy^2 + 20dxdy + 6dxdz - 2dydz$

5)

$$H(x,y,z) \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy^2z & 6x^2yz+4y & 3x^2y^2 \\ 6x^2yz+4y & 2x^3z+4x & 2x^3y-3 \\ 3x^2y^2 & 2x^3y-3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H(P_0) = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 3 \\ 10 & 6 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

q.e.d

Obs: ① În suportul de curs (cap. 5) aveți alte două exemple rezolvate

② tot acolo aveți și două exemple pentru determinarea punctelor de extrem local $\begin{cases} f(x,y) \\ f(x,y,z) \end{cases}$