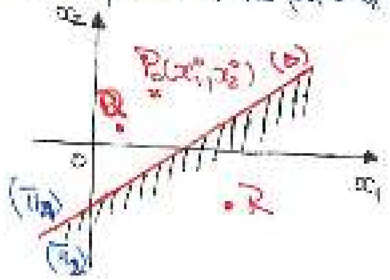
Seminar 5 — Rezolvarea problemelor de programare liniară (PPL) cu 2 necunoscute (în două dimensiuni) cu metoda grafică

Fie (P.P.L) de forma:

$$\begin{cases} (1)\ (\min/\max)\ f(x_1,x_2) = c_1x_1 + c_2x_2 \\ (2) \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \lesseqqgtr b_1\ (R_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \lesseqqgtr b_2\ (R_2) \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \lesseqqgtr b_m\ (R_m) \end{cases} \\ (3)\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

I) Separarea planului în regiuni de către o dreaptă. Soluția geometrică a unei inecuații liniare cu două necunoscute.

Fie planul $(\pi) \equiv (x_1Ox_2)$ și o dreaptă $(\Delta)\ ax_1 + bx_2 + c = 0$ inclusă în plan ($\Delta \subset \pi$).



Asociem dreptei (Δ) funcția liniară:

$$\begin{cases} g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ g(x_1,x_2) \stackrel{def}{=} ax_1 + bx_2 + c \end{cases} \Rightarrow (\Delta)\ g(x_1,x_2) = 0$$

← ec. dreptei (Δ) ca graficul funcției g.

Obs: i) $(\forall)\ P(x_1,x_2) \in \pi$ avem: $\begin{cases} g(P) \equiv g(x_1,x_2) = 0 \iff P \in (\Delta) \\ g(P) \neq 0 \iff P \notin (\Delta) \end{cases}$

ii) deci, dacă $P(x_1,x_2) \notin (\Delta) \Rightarrow \begin{cases} g(P) > 0 \\ \text{sau} \\ g(P) < 0 \end{cases}$

iii) $\begin{cases} (\pi) = (\pi_1) \cup (\pi_2) \cup (\Delta) \\ (\pi_1) \cap (\pi_2) = \emptyset \end{cases}$

cele 2 semiplane deschise determinate de dr. (Δ).

T (de separare a planului în regiuni de către o dreaptă)

Fie punctul $P_0(x_1^0, x_2^0) \in \pi_1$ (sau π_2) a.î. $g(P_0) \equiv g(x_1^0, x_2^0) > 0$ (sau < 0). Atunci:

$$\begin{cases} g(Q) \underset{(<)}{>} 0 \ ;\ (\forall)\ Q(x_1,x_2) \in \pi_1 \\ g(R) \underset{(>)}{<} 0 \ ;\ (\forall)\ R(x_1,x_2) \in \pi_2 \end{cases}$$

Obs: teorema afirmă că dacă funcția g are o valoare pozitivă (negativă) într-un punct P_0 dintr-unul din cele două semiplane π_1, π_2 determinate de dreapta (Δ), atunci va avea tot valori pozitive (negative) în toate celelalte puncte din semiplanul lui P_0 (și negative în celălalt semiplan).

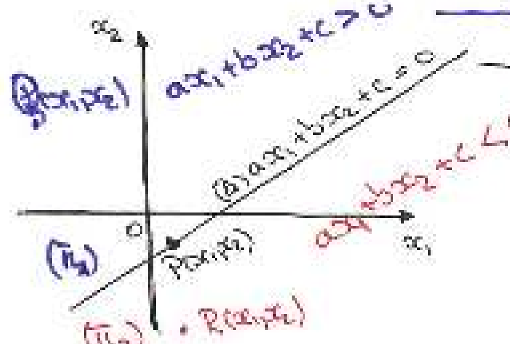
Cu alte cuvinte, dacă pp. că $g(P_0) \equiv g(x_1^0, x_2^0) > 0$ cu $P_0 \in \pi_1$, atunci:

i) $g(Q) \equiv g(x_1,x_2) \equiv ax_1 + bx_2 + c > 0$; $(\forall)\ Q(x_1,x_2) \in \pi_1$

ii) $g(P) \equiv g(x_1,x_2) \equiv ax_1 + bx_2 + c = 0$; $(\forall)\ P(x_1,x_2) \in \Delta$

iii) $g(R) \equiv g(x_1,x_2) \equiv ax_1 + bx_2 + c < 0$; $(\forall)\ R(x_1,x_2) \in \pi_2$

Din relațiile de mai sus, observăm că mulțimea soluțiilor unei inecuații liniare cu două necunoscute = mulțimea punctelor dintr-unul din cele două semiplane determinate de dreapta corespunzătoare inecuației.



→ mulț. soluțiilor inecuației $ax_1+bx_2+c>0$ → (Π_1)

→ mulț. soluțiilor ecuației: $ax_1+bx_2+c=0$ → (Δ)

→ mulț. soluțiilor inecuației $ax_1+bx_2+c<0$ → (Π_2)

Algoritm de lucru (pt. determ. soluțiilor unei inec. lin. cu 2 necunoscute)

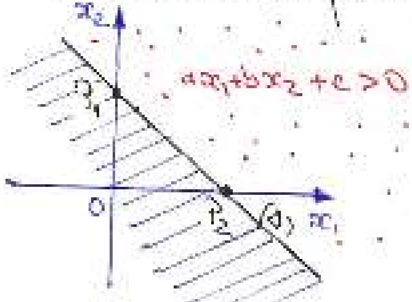
Pentru determinarea soluțiilor unei inecuații liniare de forma: $ax_1+bx_2+c \underset{(<)}{>} 0$ se procedează astfel:

1) se atașează inec. lin. (R) $ax_1+bx_2+c \underset{(<)}{>} 0$ dreapta corespunzătoare $(\Delta)\, ax_1+bx_2+c=0$

2) se reprezintă grafic dreapta (Δ) (folosind în mod uzual punctele de intersecție cu axele de coordonate): $\begin{cases} x_1=0 \overset{(\Delta)}{\Rightarrow} x_2=-\frac{c}{b} \Rightarrow P_1(0,-\frac{c}{b}) \\ x_2=0 \overset{(\Delta)}{\Rightarrow} x_1=-\frac{c}{a} \Rightarrow P_2(-\frac{c}{a},0) \end{cases}$

3) se elimină, prin hașurare, semiplanul care nu este soluție al inecuației (R)

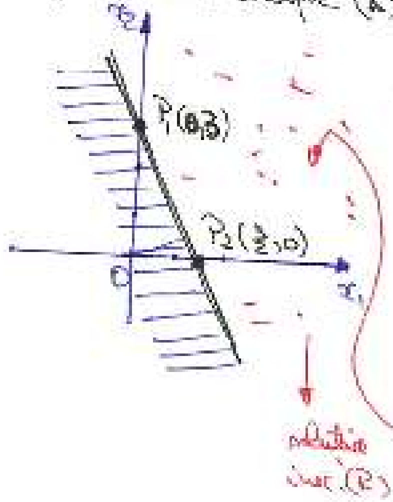
Obs: pt. a determina care din cele două semiplane determinate de dreapta (Δ) este soluția inecuației (R) se verifică dacă originea axelor de coordonate $O(0,0)$ (care aparține unui semiplan!!) este soluție, sau nu, pt. inec. (R).



→ semiplanul soluțiilor inec. $ax_1+bx_2+c>0$ (toate punctele din acest semiplan verifică inecuația!!)

Ex: Rezolvați inecuația: (R) $2x_1+x_2-3>0$

Rez: asociem dreapta $(\Delta)\, 2x_1+x_2-3=0 \Leftrightarrow (\Delta)\, 2x_1+x_2=3 \Rightarrow \begin{cases} x_1=0 \Rightarrow x_2=3 \ ;\ P_1(0,3) \\ x_2=0 \Rightarrow x_1=\frac{3}{2} \ ;\ P_2(\frac{3}{2},0) \end{cases}$



Înlocuim coordonatele originii $O(0,0)$ în inec. (R): $2\cdot 0+0-3>0 \Leftrightarrow -3>0$ (F)

deci $O(0,0)$ nu este soluție (nu verifică) a inec. (R), deci semiplanul care conține originea nu este soluția lui (R) și-l eliminăm hașurându-l. Semiplanul care nu conține originea este soluția inecuației!

II) Rezolvarea sistemelor liniare de inecuații cu două necunoscute cu metoda grafică

Pentru a determina mulțimea soluțiilor ($\overset{not}{=} S$) unui sistem de inecuații de forma:

$$(2)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \lesseqgtr b_1 & (R_1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \lesseqgtr b_2 & (R_2) \\ \text{------------------} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \lesseqgtr b_m & (R_m) \end{cases}$$

vom proceda astfel:

① asociem fiecărei inecuații (restricții) (R_i) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \lesseqgtr b_i$; $i=\overline{1,m}$ dreapta corespunzătoare: (Δ_i) $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$; $i=\overline{1,m}$ și o reprezentăm grafic (folosind punctele de intersecție ale dreptei cu axele de coordonate)

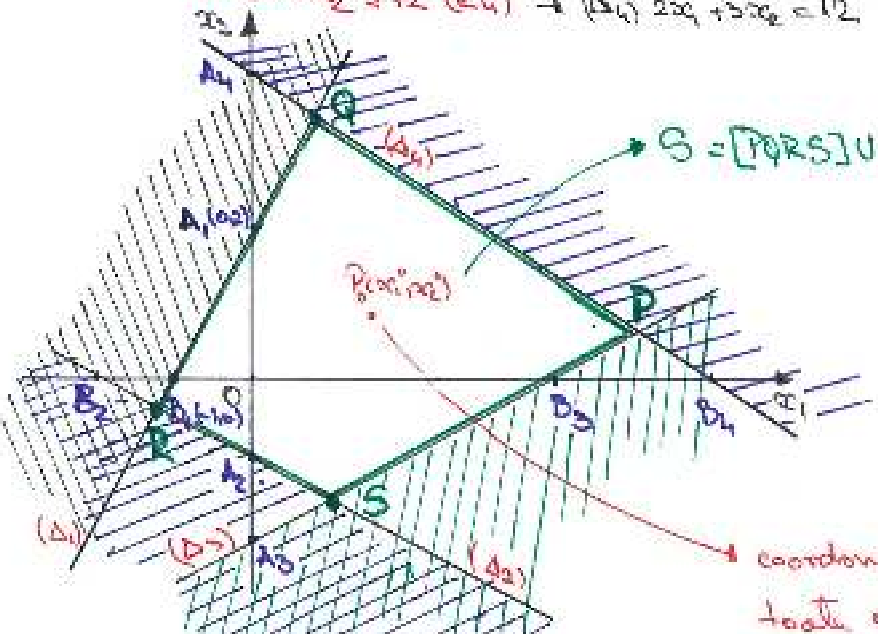
② se elimină (prin hașurare) unul din cele două semiplane determinate de dreapta (Δ_i) care nu este soluția (nu verifică) inecuației corespunzătoare (R_i)

③ zona rămasă nehașurată din plan, reprezintă soluția ($\overset{not}{=} S$) sistemului de inecuații

Obs: (i) S = mulțimea coordonatelor punctelor din zona nehașurată a planului x_1Ox_2
(ii) S = mulțime poligonală convexă

Ex:

$$(2)\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 & (R_1) \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 & (R_2) \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 & (R_3) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 & (R_4) \end{cases} \begin{matrix} \to (\Delta_1)\ 2x_1 - x_2 = -2 & : A_1(0,2)\ ;\ B_1(-1,0) \\ \to (\Delta_2)\ x_1 + 2x_2 = -2 & : A_2(0,-1)\ ;\ B_2(-2,0) \\ \to (\Delta_3)\ x_1 - 2x_2 = 4 & : A_3(0,-2)\ ;\ B_3(4,0) \\ \to (\Delta_4)\ 2x_1 + 3x_2 = 12 & : A_4(0,4)\ ;\ B_4(6,0) \end{matrix}$$



$S = [PQRS] \cup \text{int}[PQRS] \overset{not}{=} \overline{[PQRS]}$ → închiderea patrulaterului [PQRS]

↓

mulțime poligonală convexă (mulțimea soluțiilor sist. (2))

coordonatele x_1^0, x_2^0 ale punctului P_0 verifică toate cele 4 inecuații ale sist. (2)

{P_0 este una din infinitatea de soluții aflate în interiorul și pe laturile patrulaterului PQRS}

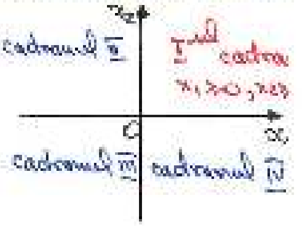
III Rezolvarea P.P.L. cu metoda grafică

Fie P.P.L de forma (1) – (3). Algoritmul de rezolvare (de determinare a soluției optime) cu metoda grafică constă în următoarele etape:

① Se determină mulțimea S a soluțiilor generale ale sist. lin. de inec. (2) cu metoda grafică)

② Se determină mulțimea S_A a soluțiilor admisibile (adică a) a PPL (soluțiile sist. (2) care verifică condițiile de nenegativitate (3)), astfel:

$$S_A \overset{def}{=} S \cap \{\text{primul cadran}\} \rightarrow \text{mulțime poligonală convexă};$$



③ Se determină mulțimea S_0 a soluțiilor optime a PPL astfel:

metoda I

a) se determină mulțimea S_{AB} soluțiilor de bază admisibile a PPL astfel:

$$S_{AB} \overset{def}{=} \{\text{vârfurilor mulțimii } S_A\}$$

Obs: elementele lui S_{AB} (vârfurile lui S_A) se află la intersecția a două drepte $(\Delta_i) \cap (\Delta_j)$ deci trebuie rezolvat sist. liniar de 2 ecuații cu 2 necun. format din ecuațiile celor două drepte.

b) se calculează valoarea funcției obiectiv în fiecare din elementele lui S_{AB} (= vârfurile lui S_A)

Mulțimea S_0 este formată din coordonatele acelui(-lor) vârf(-uri) unde $f(x_1, x_2)$ ia valoarea minimă / maximă (optimă)

Obs: este obligatorie ca mulțimea S_A să fie un poligon (linie poligonală închisă)

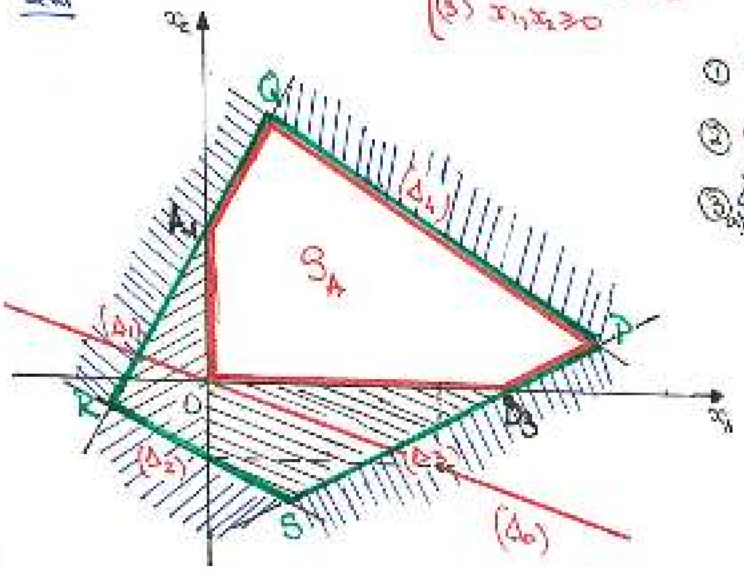
metoda II

a) se reprezintă grafic dreapta: $(\Delta_0)\ f(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow (\Delta_0)\ c_1x_1 + c_2x_2 = 0$ (care este o dreaptă care trece prin $O(0,0)$)

b) mulțimea S_0 este formată din coordonatele punctului (vârfului) din S_{AB} care se află la distanța optimă (min/max) de dreapta (Δ_0).

Ex: Să se rezolve (P.P.L):
$$\begin{cases} (1)\ (\max)\ f(x_1,x_2) = x_1 + 3x_2 \\ (2) \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq -2 \\ x_1 + 2x_2 \geq -2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \end{cases} \\ (3)\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$
→ este sistemul care l-am rezolvat în capitolul anterior.

Dem



① $S = [PQRS]$

② $S_A = [OB_3PQA_1]$

③ a) $S_{AB} = \{O, B_3, P, Q, A_1\}$ metoda I

$O(0,0) \Rightarrow f(O) = f(0,0) = 0$

$B_3(4,0) \Rightarrow f(B_3) = f(4,0) = 4$

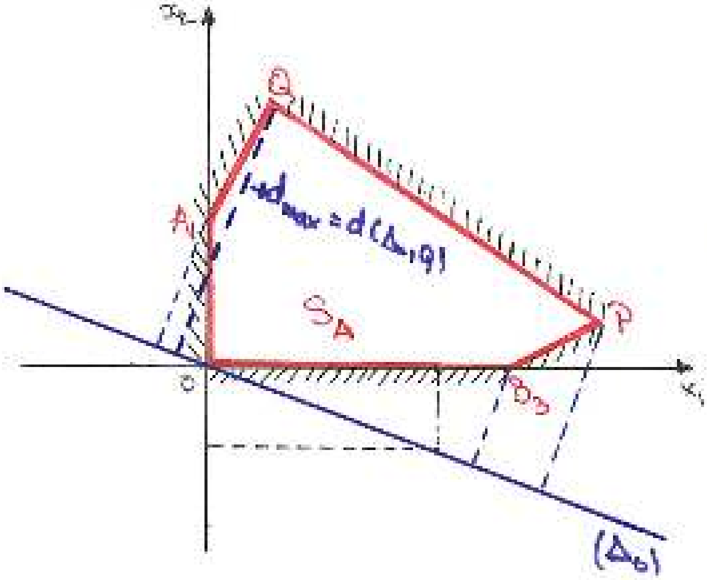
$A_1(0,2) \Rightarrow f(A_1) = f(0,2) = 6$

$\{P\} = \Delta_3 \cap \Delta_4 : \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{36}{7} \\ x_2 = \frac{4}{7} \end{cases} \Rightarrow f(P) = f(\frac{36}{7}, \frac{4}{7}) = \frac{48}{7} \simeq 6{,}8$

$\{Q\} = \Delta_1 \cap \Delta_4 : \begin{cases} 2x_1 - x_2 = -2 \\ 2x_1 + 3x_2 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{4} \\ x_2 = \frac{7}{2} \end{cases} \Rightarrow f(Q) = f(\frac{3}{4}, \frac{7}{2}) = \frac{45}{4} \simeq 11{,}2$ max

b) deoarece valoarea maximă a funcției obiectiv este atinsă în punctul Q ⇒ $S_0=\{Q\}$ deci $\begin{cases} x_1^{optim}=\frac{3}{4}\\ x_2^{optim}=\frac{7}{2}\\ (max)\, f(x_1,x_2)=\frac{45}{4}\end{cases}$

metoda II



$(\Delta_0)\ x_1+3x_2=0\ \begin{cases} O(0,0)\\ T(3,-1)\end{cases}$

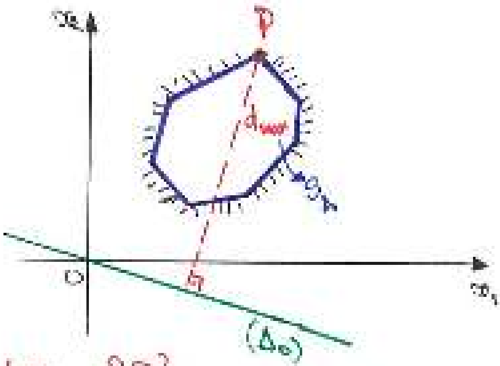
Conform figurii $d_{max}(\Delta_0,S_A)=d(\Delta_0,Q)$ ⇒

⇒ $S_0=\{Q\}$ cu $\begin{cases} Q(3/4,\ 7/2)\\ f(Q)=\frac{45}{4}\end{cases}$

IV) Tipurile de soluții ale unei P.P.L.

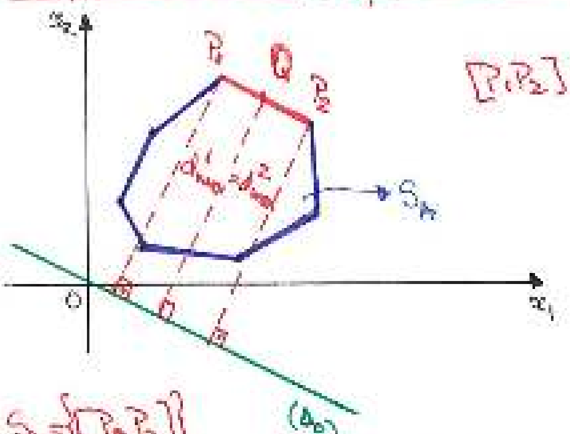
A) P.P.L. de „maxim"

a₁) soluție optimă unică (finită)



$\begin{cases} S_0=\{P\}\\ (max)\, f(x_1,x_2)=f(P)\end{cases}$

a₂) o infinitate de soluții optime (finite)

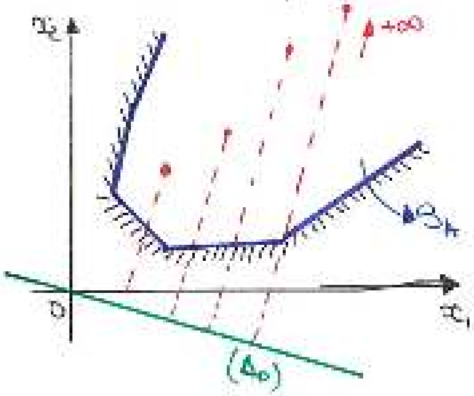


$[P_1P_2]\,||\,(\Delta_0)$

$S_0=[P_1P_2]$

$(max)\, f(x_1,x_2)=f(P_1)=f(P_2)=f(Q)$; $(\forall)\ Q\in[P_1,P_2]$

a₃) maxim (optim) infinit



$\begin{cases} S_0=\emptyset\\ (max)\, f(x_1,x_2)=+\infty\end{cases}$

Obs: este posibil ca pt. anumite P.P.L (cazuri particulare) să avem:

$\begin{cases} a)\ S=\emptyset \Rightarrow S_A=\emptyset \Rightarrow S_0=\emptyset\\ b)\ S\neq\emptyset \text{ dar } S\cap(\text{I}^{ul}\text{ cadran})(=S_A)=\emptyset \Rightarrow S_0=\emptyset\end{cases}$

B) P.P.L de „minim"

3 cazuri similare !!!