EVP1 (model)

① Fie sistemul liniar (*) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$. Aplicând metoda lui Gauss (de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare cu transf. elem.), determinați forma explicită corespunzătoare variabilelor secundare x_1 și x_3. Scrieți soluția de bază corespunzătoare variabilelor principale x_2, x_4 și x_5 și clasificați-o (stabiliți tipul acesteia).

Dem: Obs: deoarece x_1, x_3 sunt variab. sec. $\Rightarrow$ x_2, x_4, x_5 sunt variab. princip.

Asociem sist.(*) matricea extinsă, și prin T.E. facem coloanele lui x_2, x_4, x_5 coloanele matricei unitate (I_3):

v.sec.; cu semn schimbat

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & \boxed{1} & -3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) \end{array} = \bar{A}_{G-J}$$

$\xRightarrow{\text{not } x_1=\alpha,\ x_3=\beta}$ $X = (\alpha,\ 6-4\alpha+3\beta,\ \beta,\ 3-3\alpha+\beta,\ 4-2\alpha)^T \in \mathbb{R}^5$ – forma explicită coresp. v.princ. x_2, x_4, x_5, v.sec. x_1, x_3

$\Downarrow \alpha=\beta=0$

$\bar{X} = (0, 6, 0, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^5$ – sol. de bază admisibilă (toate variab. (princ.) sunt ≥ 0), nedegenerată (toate variab. princ. sunt $\neq 0$)

② Fie mulțimea (B) $\begin{cases} u_1 = (1,0,-1)^T \\ u_2 = (-1,-1,2)^T \\ u_3 = (2,1,-2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3$. Se cere:

a) $B \leq \mathbb{R}^3$ (B formează o bază în $\mathbb{R}^3$);

b) pt. $v = (3,-4,1)^T \in \mathbb{R}^3$, determinați coordonatele $v_B = ?$, folosind obligatoriu lema substituției;

c) dacă $w_B = [-2, 3, -2]$, determinați vectorul $w = ?$;

Dem:

a) $B \leq \mathbb{R}^3 \iff \begin{cases} \text{i) card } B = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \ (A) \\ \text{ii) } B\text{-L.i} \iff r_A = 3 = \text{nr. vectori} \end{cases}$, cu $A = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & +1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_A = 3 \Rightarrow \underline{B \leq \mathbb{R}^3}$

b)

B	v	u_1	u_2	u_3
e_1	3	$\boxed{1}$	-1	2
e_2	-4	0	-1	1
e_3	1	-1	2	-2
u_1	3	1	-1	2
e_2	-4	0	$\boxed{-1}$	1
e_3	4	0	1	0
u_1	7	1	0	1
u_2	4	0	1	-1
e_3	0	0	0	$\boxed{1}$
u_1	7	1	0	
u_2	4	0	1	
u_3	0	0	0	

$\rightarrow v = 7u_1 + 4u_2 \iff \underline{v_B = [7,4,0]}$

c) $w_B = [2,-3,-2] \iff w = 2u_1 - 3u_2 - 2u_3 \iff$

$\iff w = 2(1,0,-1)^T - 3(-1,-1,2)^T - 2(2,1,-2)^T = \underline{(1,1,-4)^T}$, deci:

$\underline{w = (1,1,-4)^T}$

③ Fie bazele din $\mathbb{R}^2$: $(B)\begin{cases}x_1=(4,-9)^T\\ x_2=(-1,2)^T\end{cases}$ și $(B')\begin{cases}y_1=(5,1)^T\\ y_2=(-4,-1)^T\end{cases}$.

Se cere:

a) pt. $u=(-5,3)^T \Rightarrow \begin{cases}u_B=?\\ u_{B'}=?\end{cases}$ (cu lema substituției !!);

b) dacă $v_{B'}=[3,-1] \Rightarrow v=?$;

c) dacă $w_B=[1,1] \Rightarrow w_{B'}=?$ (cu lema substituției);

d) determinați cu lema substituției, matricea schimbării de bază $S_{B'|B}\equiv S$;

e) verificați rezultatul de la pct. c) folosind formulele de schimbare a coordonatelor la schimbarea bazei (prin intermediul matricii schimbării de bază).

Dem.:

a) $u_B \overset{?}{=} [\alpha_1,\alpha_2] \Leftrightarrow u=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$

B	u	x_1	x_2	
e_1	-5	4	$\boxed{-1}$	/(-1)/·2
e_2	3	-9	2	
x_2	5	-4	1	
e_2	-7	$\boxed{-1}$	0	/(-1)/(-4)
x_2	33	0	1	
x_1	7	1	0	

$u=7x_1+33x_2 \Leftrightarrow u_B=[7,33]$

Verificare: $u=7(4,-9)^T+33(-1,2)^T=(-5,3)^T$

$u_{B'}\overset{not}{=}[\beta_1,\beta_2] \Leftrightarrow u=\beta_1y_1+\beta_2y_2$

B	u	y_1	y_2	
e_1	-5	5	-4	
e_2	3	$\boxed{1}$	-1	/(-5)
e_1	-20	0	$\boxed{1}$	
y_1	3	1	-1	
y_2	-20	0	1	
y_1	-17	1	0	

$u=-17y_1-20y_2 \Leftrightarrow u_{B'}=[-17,-20]$

Verificare: $u=-17(5,1)^T-20(-4,-1)^T=(-5,3)^T$

b) $v_{B'}=[3,-1] \Leftrightarrow v=3y_1-y_2=3(5,1)^T-(-4,-1)^T=(19,4)^T \Leftrightarrow v=(19,4)^T$

c) $w_B=[1,1] \Leftrightarrow w=x_1+x_2=(4,-9)^T+(-1,2)^T=(3,-7)^T \Rightarrow$

B	w	y_1	y_2	
e_1	3	5	-4	
e_2	-7	1	$\boxed{-1}$	/(-1)/(-4)
e_1	31	$\boxed{1}$	0	
y_2	7	-1	1	
y_1	31	1	0	
y_2	38	0	1	

$w=31y_1+38y_2 \Leftarrow$

$\Downarrow$

$w_B=[31,38]$

Verificare: $w=31(5,1)^T+38(-4,-1)^T=(3,-7)^T$ (adev.)

d) $S_{B'|B}=\begin{pmatrix}s_{11}&s_{12}\\ s_{21}&s_{22}\end{pmatrix}$ a.î.: $\begin{cases}y_1=s_{11}x_1+s_{12}x_2\\ y_2=s_{21}x_1+s_{22}x_2\end{cases}$; Avem:

B	y_1	y_2	x_1	x_2	
e_1	5	-4	4	$\boxed{-1}$	/(-1)/·2
e_2	1	-1	-9	2	
x_2	-5	4	-4	1	
e_2	11	-9	$\boxed{-1}$	0	/(-1)/(-4)
x_2	-49	40	0	1	
x_1	-11	9	1	0	

$\begin{cases}y_1=-11x_1-49x_2\\ y_2=9x_1+40x_2\end{cases} \Rightarrow S=\begin{pmatrix}-11&-49\\ 9&40\end{pmatrix}$

e) Avem formulele: $(*)\begin{cases}\cancel{w_B=S^Tw_{B'}}\\ w_{B'}=(S^T)^{-1}w_B\end{cases}$

cf. d) $\Rightarrow S^T=\begin{pmatrix}-11&9\\ -49&40\end{pmatrix}$ (**)

Aflăm $(S^T)^{-1}$ cu T.E.:

$\underbrace{S^T}_{=S^T}=\left(\begin{array}{cc|cc}-11&\boxed{9}&1&0\\ -49&40&0&1\end{array}\right)$ /·1/9 /(-40/9) $\sim\left(\begin{array}{cc|cc}-11/9&1&1/9&0\\ \boxed{-1/9}&0&-40/9&1\end{array}\right)$ /·(-9)/·(-11/9) $\sim\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&49&-11\\ 1&0&40&-9\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&40&-9\\ 0&1&49&-11\end{array}\right) \Rightarrow (S^T)^{-1}=\begin{pmatrix}40&-9\\ 49&-11\end{pmatrix}$ (***)

Avem:

$w_{B'}=(S^T)^{-1}\cdot w_B \overset{(***)}{=} \underbrace{\begin{pmatrix}40&-9\\ 49&-11\end{pmatrix}}_{=(S^T)^{-1}}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}}_{=w_{B'}}=\begin{pmatrix}31\\ 38\end{pmatrix} \Leftrightarrow w_{B'}=[31,38]$