11. Fie sistemul de ecuații liniare: (*) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 + 3x_5 = -6 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 9 \end{cases}$. Aplicând metoda lui Gauss, determinați **forma explicită** și **soluția de bază** corespunzătoare acesteia, considerând variabile principale pe x_3 și x_4. Stabiliți tipul soluției de bază găsite (și explicați/justificați de ce este de acest tip).

Dem:

$$(*) \to \bar{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 0 & \boxed{-2} & 3 & -6 \\ -2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 9 \end{array}\right) \end{array} \cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \cdot \tfrac{3}{2} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & 1/2 & 0 & 1 & -3/2 & 3 \\ 1 & -1/2 & 1 & 0 & 9/2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \equiv A_{GJ}$$

v. princ.

$x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, $x_5 = \gamma$ — v. sec.

$\Rightarrow X_E = (\alpha, \beta, -\alpha + \frac{1}{2}\beta - \frac{9}{2}\gamma, 3 + \alpha - \frac{1}{2}\beta + \frac{3}{2}\gamma, \gamma)^T \in \mathbb{R}^5$ → forma explicită coresp. v.p. x_3, x_4

$\Downarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$

$\bar{X} = (0, 0, 0, 3, 0)^T \in \mathbb{R}^5$ → soluția de bază corespunzătoare < admisibilă (toate componentele sunt ≥ 0); degenerată (var. princ. $x_3 = 0$)

q.e.d.

Obs: aveți de făcut o singură coloană a matricii unitate (I_2)!!! În 4-5 minute obțineți minim nota 4 (patru) la subiectul scris $[(10+1+1) \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36]$

12. Fie mulțimea de vectori $B = \{x_1, x_2, x_3\} \subset R^3$ de forma: $\begin{cases} x_1 = (-2, 2, -1)^T \\ x_2 = (0, -1, 1)^T \\ x_3 = (-1, 1, 0)^T \end{cases}$. Se cere:

a) arătați că $B \leq R^3$ (B este bază în R^3);

b) dacă $y = (3, 0, -2)^T$ determinați numai cu **lema substituției** coordonatele acestuia în baza B: $y_B = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$;

c) dacă $z_B = [2, 1, -2]$ determinați coordonatele acestuia în baza canonică din R^3: $z_{B_c} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$.

Dem:

a) $B \leq \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) card } B = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \text{ (A)} \\ \text{(ii) } B - \text{l.i.} \Leftrightarrow r_A = 3 = \text{nr. vect., unde } A = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & \boxed{1} \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \equiv A_{GJ} \Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow r_A = 3 \Leftrightarrow B - \text{l.i.} \Leftrightarrow B \leq \mathbb{R}^3$

b)

B	y	x_1	x_2	x_3
e_1	3	-2	0	-1
e_2	0	2	-1	1
e_3	-2	-1	$\boxed{1}$	0
e_1	3	-2	0	-1
e_2	-2	1	0	$\boxed{1}$
x_2	-2	-1	1	0
e_1	1	$\boxed{-1}$	0	0
x_3	-2	1	0	1
x_2	-2	-1	1	0
x_1	-1	1	0	0
x_3	-1	0	0	1
x_2	-3	0	1	0

$\Downarrow$

$y = -x_1 - 3x_2 - x_3 \Leftrightarrow y_B = [-1, -3, -1]$

Verificare calcule:

$y = -x_1 - 3x_2 - x_3 = -(-2, 2, -1)^T - 3(0, -1, 1)^T - (-1, 1, 0)^T = (3, 0, -2)^T$ (adev.)

c) $z_B = [2, 1, -2] \Leftrightarrow z = 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2(-2, 2, -1)^T + (0, -1, 1)^T - 2(-1, 1, 0)^T = (-2, 1, -1)^T \Leftrightarrow z_{B_c} = [-2, 1, -1]$

$\Downarrow$

$z = -2e_1 + e_2 - e_3$

q.e.d.

13. Fie bazele din $\mathbb{R}^2$: $(B)\begin{cases} u_1=(5,-3)^T \\ u_2=(-2,1)^T \end{cases}$ și $(B')\begin{cases} v_1=(-3,-1)^T \\ v_2=(7,2)^T \end{cases}$. Se cere:

a) dacă $w=(-1,3)^T$ aflați cu ajutorul lemei substituției coordonatele $w_B=[\alpha_1,\alpha_2]$ și $w_{B'}=[\beta_1,\beta_2]$;

b) dacă $x_B=[-1,-2]$ determinați vectorul $x=(a_1,a_2)^T$;

c) dacă $y_B=[2,4]$ determinați, cu ajutorul lemei substituției, coordonatele $y_{B'}=[\gamma_1,\gamma_2]$;

d) determinați, cu lema substituției, matricea schimbării de bază: $S_{B'|B}$;

e) rezolvați punctul c) folosind formulele de schimbare a coordonatelor unui vector la schimbarea bazei (prin intermediul matricii schimbării de bază).

Dem:

a) $a_1)$ $w=(-1,3)^T \overset{?}{\Longrightarrow} w_B=[\alpha_1,\alpha_2]$

B	w	u_1	u_2	
e_1	-1	5	-2	
e_2	3	-3	$\boxed{1}$	$\cdot 2$
e_1	5	$\boxed{-1}$	0	$/(-1)/(-3)$
u_2	3	-3	1	
u_1	-5	1	0	
u_2	-12	0	1	

$w=-5u_1-12u_2 \Leftrightarrow w_B=[-5,-12]$

V: $w=-5(5,-3)^T-12(-2,1)^T=(-1,3)^T$ (adev.)

$a_2)$ $w=(-1,3)^T \overset{?}{\Longrightarrow} w_{B'}=[\beta_1,\beta_2]$

B	w	v_1	v_2	
e_1	-1	-3	7	
e_2	3	$\boxed{-1}$	2	$/(-1)/(-3)$
e_1	-10	0	$\boxed{1}$	$\cdot 2$
v_1	-3	1	-2	
v_2	-10	0	1	
v_1	-23	1	0	

$w=-23v_1-10v_2 \Leftrightarrow w_{B'}=[-23,-10]$

V: $w=-23(-3,-1)^T-10(7,2)^T=(-1,3)^T$ (A)

b) $x_B=[-1,-2] \Leftrightarrow x=-u_1-2u_2=-(5,-3)^T-2(-2,1)^T=(-1,1)^T$

c) $y_B=[2,4] \overset{?}{\Longrightarrow} y_{B'}=[\gamma_1,\gamma_2]$

$y_B=[2,4] \Leftrightarrow y=2u_1+4u_2=2(5,-3)^T+4(-2,1)^T=(2,-2)^T \Rightarrow$

B	y	v_1	v_2	
e_1	2	-3	7	
e_2	-2	$\boxed{-1}$	2	$/(-1)/(-3)$
e_1	8	0	$\boxed{1}$	$\cdot 2$
v_1	2	1	-2	
v_2	8	0	1	
v_1	18	1	0	

$y=18v_1+8v_2 \Leftrightarrow y_{B'}=[18,8]$

V: $y=18(-3,-1)^T+8(7,2)^T=(2,-2)^T$ (A)

d) $S_{B'|B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ a.î. $(*)\begin{cases} v_1=b_{11}u_1+b_{12}u_2 \\ v_2=b_{21}u_1+b_{22}u_2 \end{cases}$

B	v_1	v_2	u_1	u_2	
e_1	-3	7	5	-2	
e_2	-1	2	-3	$\boxed{1}$	$\cdot 2$
e_1	-5	11	$\boxed{-1}$	0	$/(-1)/(-3)$
u_2	-1	2	-3	1	
u_1	5	-11	1	0	
u_2	14	-31	0	1	

$(**)\begin{cases} v_1=5u_1+14u_2 \\ v_2=-11u_1-31u_2 \end{cases}$

Din $(*)+(**) \Rightarrow S_{B'|B}=\begin{pmatrix} 5 & 14 \\ -11 & -31 \end{pmatrix}$

q.e.d

e) $\underline{y_B = [2,4]} \overset{?}{\Rightarrow} y_{B'} = (S^{-1})^T y_B = (\underbrace{S^{-1}}_{=S'_{B|B'}})^T y_B$ (*)

$S \to \tilde{S} = \left(\underbrace{\begin{matrix} \boxed{5} & 14 \\ -11 & -31 \end{matrix}}_{=S} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{=I_2}\right) \begin{matrix} / \cdot \frac{1}{5} / \cdot \frac{11}{5} \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{matrix} 1 & 14/5 \\ 0 & \boxed{-1/5} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/5 & 0 \\ 11/5 & 1 \end{matrix}\right) \begin{matrix} \\ / \cdot (-5) / \cdot 14 \end{matrix} \sim \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{=I_2} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 31 & 14 \\ -11 & -5 \end{matrix}}_{=S'}\right) \Rightarrow \underline{S^{-1}_{B|B'} = \begin{pmatrix} 31 & 14 \\ -11 & -5 \end{pmatrix} \equiv S'_{B|B'}}$ (**)

Din (*) + (**) $\Rightarrow y_{B'} = \begin{pmatrix} 31 & -11 \\ 14 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{y_{B'} = [18,8]}$ q.e.d

Obs: am fi putut obține matricea $S' = S^{-1}$ cu lema substituției, unde:

$S'_{B|B'} = \begin{pmatrix} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{pmatrix}$ a.î.: (*) $\begin{cases} u_1 = s'_{11} v_1 + s'_{12} v_2 \\ u_2 = s'_{21} v_1 + s'_{22} v_2 \end{cases}$

B	u_1	u_2	v_1	v_2	
e_1	5	-2	-3	1	
e_2	-3	1	$\boxed{-1}$	2	$/ \cdot (-1) / \cdot (-3)$
v_1	14	-5	0	$\boxed{1}$	$/ \cdot 2$
v_1	3	-1	1	-2	
v_2	14	-5	0	1	
v_1	31	-11	1	0	

$\Downarrow$

(**) $\begin{cases} u_1 = 31 \cdot v_1 + 14 \cdot v_2 \\ u_2 = -11 \cdot v_1 - 5 v_2 \end{cases}$

Din (*) + (**) $\Rightarrow S'_{B|B'} = \begin{pmatrix} 31 & 14 \\ -11 & -5 \end{pmatrix} \equiv S^{-1}_{B'|B}$

q.e.d