Test 16

**11.** Problema de programare liniară: $\begin{cases}(1)(\max) f(x_1,x_2,x_3)=x_1-2x_2-3x_3\\ (2)\begin{cases}x_1+2x_2+x_3=9\\ 2x_1+x_2-x_3\le 12\end{cases}\\ (3)\, x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$ **se rezolvă aplicând metoda celor două faze**. Rezolvând problema artificială ataşată (în faza I), precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

**a)** funcţia obiectiv are coeficienţii: **-1, 2, 3, 0, 0**;

**b)** soluţia iniţială (de plecare) a fazei I este: $X^{artificiala}_{\text{int}iala}=(0,0,0,12,9)^T$;

**c)** diferenţele $z_j-c_j$ (sau $z_k-c_k$) din primul tabel Simplex al fazei I au valorile: **1, 2, -1, 0, 0**;

**d)** vectorul care intră în bază este $P_2$;

**e)** pivotul schimbării de bază este egal cu **1**;

**f)** în noua bază, vectorul $P_1$ are componentele: $P_1=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)^T$;

**g)** soluţia optimă a problemei artificiale este: $X^{artificiala}_{optima}=(0,\frac{9}{2},0,\frac{15}{2},0)^T$;

**h)** valoarea optimă (minimă) a funcţiei artificiale este egală cu **0**.

**12.** Pentru aceeaşi problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând în faza a II-a problema în forma standard, precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

**a)** coeficienţii funcţiei obiectiv sunt: **-1, 2, 3, 0**;

**b)** soluţia iniţială (de plecare) a fazei a II-a este: $X^{standard}_{initiala}=(0,\frac{9}{2},0,\frac{15}{2})^T$;

**c)** valoarea funcţiei obiectiv în soluţia iniţială este egală cu **9**;

**d)** diferenţele $z_j-c_j$ (sau $z_k-c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: **2, 0,-2, 0**;

**e)** vectorul care intră în bază este $P_3$;

**f)** vectorul care iese din bază este $P_4$;

**g)** în noul tabel Simplex diferenţa $z_3-c_3=0$;

**h)** soluţia optimă a problemei iniţiale este unică.

**13.** Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

*„Un om de afaceri doreşte să investească suma de 100.000 lei pe piaţa de capital. În tabelul de mai jos sunt date opţiunile pe care le are, rata de profit anuală estimată şi comisioanele de brokeraj care trebuie să le plătească:*

| **Tip produs** | **Profitul anual** (în % din suma investită) | **Comision broker** (în % din suma investită) |
|---|---|---|
| ***Acţiuni la firma XYZ (A)*** | *12%* | *0,8%* |
| ***Bond-uri guvernamentale (B)*** | *8%* | *0,9%* |
| ***Certificate de depozit (C)*** | *10%* | *1,1%* |
| ***Derivate financiare (D)*** | *16%* | *0,7%* |

*Datorită faptului că produsele (B) şi (C) au risc investiţional zero respectiv foarte mic, investitorul doreşte sa investească în cele două produse cel puţin 50% din sumă, dar suma investită în produsul (C) să fie cu cel puţin 10.000 lei mai mare decât cea pentru produsul (B) . Produsul (D) aduce cel mai mare profit dar are şi cel mai mare risc, astfel că acesta nu vrea să investească mai mult de 15.000 lei în acest produs. În plus investitorul nu vrea să plătească un comision total mai mare de 800 lei. Să se determine planul optim de investiţii pe care o firmă de brokeraj ar trebui să-l propună investitorului şi care să ţină cont de cerinţele acestuia."*

(13) Plan optim de investiții = profit maxim al investitorului în condițiile expuse în problemă

not.:
$$\begin{cases} x_1 \text{ – suma (în lei) pe care o va investi omul de afaceri în acțiuni la firma XYZ;} \\ x_2 \text{ – suma (în lei) — // — // — // — în bonduri guvernamentale} \\ x_3 = \text{suma (în lei) — // — // — // — în certificate de depozit} \\ x_4 = \text{suma (în lei) — // — // — // — în derivate financiare} \end{cases}$$

(1) $(\max)\ f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 0{,}12x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}10x_3 + 0{,}16x_4$ → profitul (în lei) obținut ca urmare a investițiilor făcute

(2)
- $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \underset{(=)}{\le} 100.000$ (lei) → totalul sumelor investite în cele 4 active financiare nu poate depăși capitalul disponibil al investitorului
- $x_2 + x_3 \ge 50.000$ (lei) → sumele investite în produsele (B) și (C) trebuie să $\ge 50\% \cdot 100.000$ lei $= \frac{50}{100} \cdot 100.000$ lei $= 50.000$ lei
- $x_3 \ge x_2 + 10.000$ (lei) → suma investită în (C) mai mare cu 10.000 lei decât cea în B
- $x_4 \le 15.000$ (lei) → suma investită în produsul D să fie maxim 15.000 lei
- $0{,}008x_1 + 0{,}009x_2 + 0{,}011x_3 + 0{,}007x_4 \le 800$ (lei) → comisionul total să nu depășească 800 lei

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$ → sumele investite nu pot fi negative, ar fi absurd (dacă $(\exists)\ x_i = 0 \Rightarrow$ nu se va investi în produsul respectiv $\Leftrightarrow$ nu se va cumpăra acel activ financiar.)

Obs:

i) expresia profitului putea fi scrisă și:

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 12x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 16x_4$$ (în % din suma investită), deci valoarea lui f în soluție optimă reprezintă câștigul maxim în „% din sumă" și nu în lei

Ex $f(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0) = 987623$ (în %) $= 9876{,}23$ lei $\left(x\% = \frac{x}{100}\right)$

ii) dacă în prima restricție am fi pus „=" adică: $x_1+x_2+x_3+x_4 = 100.000$ (deci condiție mai restrictivă decât cu „$\le$") am fi obligat ca planul de investiții cerut să folosească toată suma avută la dispoziție. În acest caz problema putea să nu aibă soluții (să nu existe un astfel de plan) sau să obținem o soluție optimă = profit maxim care să aibă o rată (procent) de profit mai mică decât dacă am fi folosit mai puțini bani!!

Ex a) pp. că ptr $x_1+x_2+x_3+x_4 = 100.000$ lei $\Rightarrow \overset{f(x_{opt})}{\text{profit max.}} = 9.000$ lei $\Rightarrow$ rata de profit $= 9\%$

b) pp. că ptr. $x_1+x_2+x_3+x_4 = 85.000$ lei $< 100.000 \Rightarrow$ profit max. $= 8.700$ lei $\Rightarrow$ rata de profit $\simeq 10{,}24\%$

Test 27

**11.** Problema de programare liniară: $\begin{cases}(1)(\max) f(x_1,x_2,x_3) = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ (2)\begin{cases} -x_1 + x_2 + 3x_3 \le 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 12 \end{cases} \\ (3) x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$ **se rezolvă aplicând metoda celor două faze.** Rezolvând problema artificială ataşată (faza I), precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

- **a)** în forma standard, problema artificială are 5 variabile;
- **b)** în primul tabel Simplex a fazei I, avem: $z_1 - c_1 = 2 \ si \ z_3 - c_3 = 1$ ;
- **c)** valoarea funcţiei artificiale în soluţia iniţială este egală cu **27**;
- **d)** soluţia iniţială a problemei artificiale este: $X_{initiala}^{artificiala} = (0,0,0,12,15)^T$ ;
- **e)** în următorul tabel Simplex, variabilele principale (bazice) sunt $x_1 \ si \ x_4$ ;
- **f)** noua soluţie obţinută este: $X_1^{artificiala} = (21,6,0,0,0)^T$ ;
- **g)** soluţia optimă a problemei artificiale se obţine după o singură schimbare de bază;
- **h)** valoarea optimă (minimă) a funcţiei artificiale este egală cu **27**.

**12.** Pentru aceeaşi problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând în faza a II-a problema în forma standard, precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

- **a)** coeficienţii funcţiei obiectiv sunt: **-2, 1,- 3, 0**;
- **b)** valoarea funcţiei obiectiv în soluţia iniţială este egală cu **12**;
- **c)** diferenţele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: **0, 2,-2, 0**;
- **d)** vectorul care intră în bază este $P_2$;
- **e)** vectorul care iese din bază este $P_4$;
- **f)** în noul tabel Simplex se oţine soluţia de bază: $X_1^{standard} = (0,12,0,3)^T$ ;
- **g)** noua soluţie obţinută (în al doilea tabel Simplex al fazei I) nu este soluţie optimă;
- **h)** valoarea optimă a funcţiei obiectiv pentru problema iniţială este: **-12**.

**13.** Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

*„O rafinărie doreşte să încheie un contract pentru transporta un milion de hl (1hl=1hectolitru=100 l) de produse petroliere către distribuitorii săi (staţii PECO). Compania de transport selectată dispune de trei tipuri de cisterne, al căror număr, capacitate maximă de transport şi cost anual de închiriere sunt prezentate în tabelul de mai jos:*

| Tip de cisternă | Număr (buc.) | Capacitate maximă (hl) | Cost anual (mii lei/buc) |
|---|---|---|---|
| *Large (L)* | *30* | *200* | *115* |
| *Medium (M)* | *50* | *120* | *95* |
| *Small (S)* | *20* | *75* | *70* |

*Ştiind că pentru acest tip de transport este necesară o autorizaţie specială, iar numărul de şoferi autorizaţi pe care îi are firma de transport este de 85, din care doar 70 au autorizaţia necesară să conducă cisternele de tipul (L) şi (M), să se determine preţul optim cu care trebuie încheiat contractul."*

(13) preț optim = preț minim (de transport)

not: $\begin{cases} x_1 = \text{nr. de cisterne de tip (L) care vor fi folosite la transportul produselor petroliere;} \\ x_2 = \text{nr. de cisterne de tip (M)} \text{ ------} \\ x_3 = \text{nr. de cisterne de tip (S)} \text{ ------} \end{cases}$

(1) (min) $f(x_1, x_2, x_3) = 115.000\, x_1 + 95.000\, x_2 + 70.000\, x_3$ (în lei) → costul total (anual) al transportului

$= 115\, x_1 + 95\, x_2 + 70\, x_3$ (în mii lei)

(2) $200\, x_1 + 120\, x_2 + 75\, x_3 = 1000.000$ (în hl) → capacitatea totală de transport anuală să fie (cel puțin) egală cu 1 milion de hl.;

(≥)

$x_1 \le 30$

$x_2 \le 50$ → nu putem folosi mai multe cisterne (din fiecare tip) decât nr. avut la dispoziție de transportator;

$x_3 \le 20$

$x_1 + x_2 + x_3 \le 85$ → un șofer conduce o cisternă, deci nu pot fi folosite mai multe cisterne decât nr. total de șoferi;

$x_1 + x_2 \le 70$ → nu pot fi folosite la transport mai multe cisterne de tip (L) și (M) decât numărul șoferilor care pot conduce acest tip de cisterne;

(3) $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ (eventual $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$) → $\begin{cases} x_i > 0 \to \text{folosesc nr. „}x_i\text{" de cisterne de tipul „i" la transport} \\ x_i = 0 \to \text{nu folosesc cisterne de tipul „i" la transport} \end{cases}$

$x_i < 0$ → aberant (folosesc un nr. negativ de cisterne, de ex: $x_2 = -8$ ⇒ „-8" cisterne de tip (M) ??)

Obs: i) evident dorim o soluție care să aibă componentele nr. întregi (naturale); Ce ar însemna, dacă să pp. soluția optimă ar fi: $X_{optim} = (18,3;\ 42,7;\ 12,5)^T$

Ce înseamnă $\begin{cases} 18,3 \text{ cisterne de tip (L)} \\ 42,7 \text{ cisterne de tip (M)} \\ 12,5 \text{ cisterne de tip (S)} \end{cases}$ ?

ii) $f = 115000$ lei (costul de închiriere a 1 cisternă tip L / an) · $x_1$ (nr. de cisterne de tip (L) folosite 1 an) + - - - -

se simplifică

iii) 200 (hl / 1 cisternă (L)) · $x_1$ (nr. de cisterne tip (L)) + - - - -

se simplifică

Test 38

**11.** Problema de programare liniară: $\begin{cases}(1)(\min) f(x_1,x_2,x_3)=x_1-2x_2+2x_3\\ (2)\begin{cases}2x_1-x_2+3x_3=18\\ -x_1+3x_2+x_3\le 20\end{cases}\\ (3)\, x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$ **se rezolvă aplicând metoda celor două faze.** Rezolvând problema artificială ataşată (faza I), precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

a) funcţia obiectiv are coeficienţii: **0, 0, 0, 0, 1**;
b) soluţia iniţială (de plecare) a fazei I este: $X_{intiala}^{artificiala}=(0,0,0,18,20)^T$;
c) diferenţele $z_j-c_j$ (sau $z_k-c_k$) din primul tabel Simplex al fazei I au valorile: **-2, 1, -3, 0, 0**;
d) valoarea funcţiei obiectiv (a funcţiei artificiale) în primul tabel Simplex este egală cu **18**;
e) la prima schimbare de bază, iese din bază vectorul $P_5^a$;
f) pivotul primei schimbări de bază este egal cu **2**;
g) în noul tabel Simplex vectorul $P_2$ are componentele: $P_2=\left(-\frac{1}{3},\frac{10}{3}\right)^T$;
h) soluţia optimă a problemei artificiale artificiale este: $X_{optima}^{artificiala}=(0,0,6,14,0)^T$.

**12.** Pentru aceeaşi problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând în faza a II-a problema în forma standard, precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

a) coeficienţii funcţiei obiectiv sunt: **-1, 2, -2, 0**;
b) soluţia iniţială (de plecare) a fazei a II-a este: $X_{initiala}^{standard}=(0,0,6,14)^T$;
c) în primul tabel Simplex al fazei a II-a, avem diferenţele: $z_1-c_1=\frac{1}{3}$ şi $z_4-c_4=0$;
d) valoarea funcţiei obiectiv din primul tabel Simplex al fazei a II-a este egală cu **12**;
e) vectorul care intră în bază este $P_1$;
f) vectorul care iese din bază este $P_4$;
g) noua soluţie de bază găsită este $X_1^{standard}=(0,\frac{21}{5},\frac{37}{5},0)^T$:
h) valoarea optimă a funcţiei obiectiv a problemei iniţiale, este egală cu $\frac{32}{5}$.

**13.** Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

*„O firmă de produse cosmetice doreşte să-şi promoveze produsele, bugetul alocat fiind de 1.500.000 Euro. Compania de publicitate cu care firma lucrează propune următoarele 4 tipuri de publicitate:*

| **Tip de publicitate** | **Cost** | **Nr. mimim de acţiuni** |
|---|---|---|
| ***TV*** | *2.800 Euro/minut* | *150 minute* |
| ***Radio*** | *850 Euro/minut* | *400 minute* |
| ***Internet*** | *250 Euro/anunţ* | *350 anunţuri* |
| ***Flayere*** | *15.000 Euro/campanie* | *5 campanii* |

*cu menţiunea că pentru a beneficia de preţurile (cele din tabel) promoţionale oferite de trusturile de presă care deţin companiile de radio-tv, suma totală pentru reclama radio-tv trebuie să fie de minim un milion de Euro. Să se determine un plan optim de publicitate, ştiind că cifra de vânzări a companiei creşte cu fiecare acţiune publicitară efectuată."*

(13) plan optim de publicitate = nr. maxim de acțiuni publicitare (trebuie să conțină măcar nr. minim propus) dar care să coste cât mai puțin.

not: $\begin{cases} x_1 = \text{nr. de minute de publicitate TV (care vor fi folosite în campania publicitară)} \\ x_2 = \text{nr. de minute de publicitate Radio (din campania publicitară)} \\ x_3 = \text{nr. de anunțuri postate pe internet (—,———)} \\ x_4 = \text{nr. de campanii de tipărire și distribuire de flayere (—— ——)} \end{cases}$

(1) (min) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 2.800x_1 + 850x_2 + 250x_3 + 15.000x_4$ (în Euro) → costul total (minim) al campaniei publicitare

$= 2{,}8x_1 + 0{,}85x_2 + 0{,}25x_3 + 15x_4$ (în mii Euro)

(2)
$x_1 \geq 150$ (min)
$x_2 \geq 400$ (min)
$x_3 \geq 350$ (anunțuri)
$x_4 \geq 5$ (campanii)

→ trebuie organizate măcar numărul minim de acțiuni publicitare (din fiecare tip), conform recomandări companiei de publicitate

$2.800x_1 + 850x_2 \geq 1.000.000$ (Euro) → costul total al campaniei publicitare Radio-TV să fie minim de 1 milion Euro pentru a beneficia de prețurile promoționale din tabel

$2.800x_1 + 850x_2 + 250x_3 + 15.000x_4 \leq 1.500.000$ (Euro) → costul total al campaniei publicitare nu trebuie să depășească bugetul de publicitate alocat

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ → nr. de minute / nr. de anunțuri / nr. de campanii ~~pe fiecare tip de~~ acțiune publicitară nu pot fi negative!!

**Obs:**

- funcția obiectiv putea fi considerată și de forma:

(1) (max) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ ← nr. maxim de acțiuni (minute + anunțuri + campanii) publicitare, deoarece profitul companiei crește proporțional cu nr. de acțiuni publicitare

- totuși, în realitate, depășirea target-ului de publicitate propus de agențiile specializate nu duce la o creștere substanțială a vânzărilor; eficiența unei "supra publicități" este extrem de scăzută în creșterea vânzărilor (deci implicit în creșterea profitului)

De ex: - dacă la un buget de publicitate de 1.000.000 Euro cifra de vânzări crește să spunem cu 10% la un buget de 2.000.000 cifra de vânzări nu va crește cu 20% ci poate cu 11% sau 12%. Deci "eficiența" celui de-al doilea milion de Euro este extrem de scăzută, comparativ cu primul milion de Euro investit!!!

Test 49

**11.** Problema de programare liniară: $\begin{cases}(1)(\max) f(x_1,x_2,x_3) = x_1 - x_2 - 2x_3 \\ (2)\begin{cases}3x_1 + x_2 - 2x_3 \le 21 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 18\end{cases} \\ (3)\, x_1, x_2, x_3 \ge 0\end{cases}$ **se rezolvă aplicând metoda celor două faze**. Rezolvând problema artificială ataşată (faza I), precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

a) coeficienţii funcţiei obiectiv din tabel sunt: **1, -1, -2, 0, 0**;

b) baza din primul tabel Simplex este formată din vectorii $P_4^c$ şi $P_5^a$;

c) soluţia iniţială (de plecare) a fazei I este: $X_{intiala}^{artificiala} = (0,0,0,18,21)^T$;

d) diferenţele din primul tabel Simplex al fazei I au valorile: $z_1 - c_1 = 0 \; si \; z_3 - c_3 = -3$;

e) vectorul care intră în bază este $P_3$;

f) vectorul care iese din bază este $P_5^a$;

g) noua soluţie obţinută este: $X_1^{artificiala} = (0,0,6,33,0)^T$;

h) soluţia optimă a problemei artificiale este: $X_{optima}^{artificiala} = (33,6,0,0,0)^T$.

**12.** Pentru aceeaşi problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând faza a II-a problema în forma standard, precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

a) coeficienţii funcţiei obiectiv sunt: **-1, 1, 2, 0**;

b) valoarea funcţiei obiectiv în soluţia iniţială este egală cu **12**;

c) diferenţele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a, au valorile: **5/3, -5/3, 0, 0**;

d) intră în bază vectorul $P_1$;

e) pivotul transformării (a schimbării de bază) are valoarea egală cu **1/3**;

f) noua soluţie obţinută este $X_1^{standard} = (9,3,0,0)^T$:

g) valoarea funcţiei obiectiv în noua soluţie este egală cu **-3**;

h) soluţia optimă a problemei iniţiale este: $X_{optima}^{initiala} = (9,0,3)^T$ şi este unică.

**13.** Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice**:**

*„Universitatea „Al. I. Cuza" doreşte să construiască un cămin nou pentru studenţi care va trebui să aibă 450 de locuri de cazare în camere cu 2,3 şi 4 locuri. Suprafaţa camerelor, sumele necesare pentru dotarea acestora şi preţul plătit de student pentru un loc, sunt prezentate în tabelul de mai jos:*

| **Tip cameră** | **Suprafaţa camerei ($m^2$)** | **Sume pentru dotare (lei/cameră)** | **Preţ loc în cameră (lei/an)** |
|---|---|---|---|
| ***Cu 2 paturi (C2)*** | *14* | *4.000* | *5.000* |
| ***Cu 3 paturi (C3)*** | *18* | *3.200* | *3.500* |
| ***Cu 4 paturi (C4)*** | *22* | *2.500* | *3.000* |

*Costul de construcţie este de 1.000 lei/$m^2$ iar universitatea are prevăzută în buget suma de 3 milioane lei pentru această construcţie şi suma de 500.000 lei pentru dotarea acestora. Senatul universităţii a cerut ca numărul camerelor cu 4 locuri să fie de cel puţin jumătate din total, dar să fie prevăzute maxim 120 de camere cu două sau trei locuri. Să se determine un plan optim de construcţie (amenajare) al căminului."*

3) plan optim de construcție = un proiect care să respecte cerințele economice și sociale cerute dar care să aducă un profit maxim universității (după ce căminul va fi construit) din taxele achitate de studenți pe loc/cameră.

not: $\begin{cases} x_1 = \text{nr. de camere cu două locuri (care urmează a fi construite)} \\ x_2 = \text{nr. de camere cu trei locuri (—''—)} \\ x_3 = \text{nr. de camere cu patru locuri (—''—)} \end{cases}$

(1) $(\max) f(x_1, x_2, x_3) = 2 \times 5.000 \cdot x_1 + 3 \times 3.500 \cdot x_2 + 4 \times 3.000 \cdot x_3 = 10.000 x_1 + 10.500 x_2 + 12.000 x_3$ (în lei)

(nr. studenți/cam) · (chirie anuală pe 1loc/cam) · (nr. de camere cu 2 locuri); idem; idem

→ profitul total anual (maxim) din închirierea tuturor camerelor cu 2,3,4 locuri.

(2)
$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 450$ (locuri în cameră) → nr. total de locuri de cazare trebuie să fie 450.

$14 \times 1.000 \cdot x_1 + 18 \times 1.000 \cdot x_2 + 22 \times 1.000 \cdot x_3 \le 3.000.000 \iff 14.000 x_1 + 18.000 x_2 + 22.000 x_3 \le 3.000.000$ (în lei)

(m.de $m^2$) · (preț pe $m^2$) · (nr. de camere) + ...; idem; idem

(cost total de construcție al unei camere cu 2 locuri) · (nr. total de camere cu 2 locuri ce vor fi construite) + ...; idem; idem

$4.000 x_1 + 3.200 x_2 + 2.500 x_3 \le 500.000$ (în lei) → ~~bugetul~~ suma totală pt dotarea tuturor camerelor nu trebuie să depășească bugetul alocat

$x_3 \ge \frac{1}{2}(x_1 + x_2 + x_3)$ → nr. de camere cu 4 locuri să fie minim jumătate din totalul camerelor

$x_1 + x_2 \le 120$ → nr. de camere cu 2 și 3 locuri trebuie să fie maxim de 120 camere.

(3) $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ → nu pot construi un nr. negativ de camere ($x_i > 0$ → construiesc cam. de tip „i"; $x_i = 0$ → nu construiesc cam. de tip „i")

Obs: ($x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{N}$)

↓

soluția optimă ar trebui să aibă numai componente întregi (naturale)

De ex. ce ar însemna $x_1^{optim} = 13,47$ camere cu două locuri ?!

Test 50

11. Problema de programare liniară: $\begin{cases}(1)(\min) f(x_1,x_2,x_3)=x_1-2x_2+x_3\\(2)\begin{cases}-3x_1+x_2+2x_3=10\\2x_1+x_2+x_3\le 16\end{cases}\\(3)\, x_1,x_2,x_3\ge 0\end{cases}$ **se rezolvă aplicând metoda celor două faze**. Rezolvând problema artificială ataşată (în faza I), precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

**a)** problema artificială conţine o singură variabilă artificială;
**b)** coeficienţii funcţiei obiectiv din tabelul Simplex sunt : **1, -2, 1, 0, 0**;
**c)** soluţia iniţială (de plecare) a fazei I este: $X_{\text{intiala}}^{\text{artificiala}}=(0,0,0,10,16)^T$;
**d)** funcţia obiectiv are în primul tabel Simplex valoarea: **10**;
**e)** la prima schimbare de bază, intră în bază vectorul $P_3$ şi iese vectorul $P_5^a$;
**f)** pivotul schimbării de bază este egal cu **1**;
**g)** noua soluţie obţinută este: $X_1^{\text{artificiala}}=(0,0,0,5,11)^T$;
**h)** soluţia optimă a problemei artificiale se obţine după o singură schimbare de bază.

12. Pentru aceeaşi problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând în faza a II-a problema în forma standard, precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

**a)** problema conţine 2 variabile de compensare;
**b)** coeficienţii funcţiei obiectiv din tabelul Simplex sunt: **-1, 2, -1, 0**;
**c)** soluţia iniţială (de plecare) a fazei a II-a este: $X_{\text{initiala}}^{\text{standard}}=(0,0,5,11)^T$;
**d)** diferenţele $z_j-c_j$ (sau $z_k-c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: **-5/2, 5/2, 0, 0**;
**e)** vectorul care intră în bază este $P_1$;
**f)** pivotul schimbării de bază este egal cu **1/2**;
**g)** noua soluţie obţinută este: $X_1^{\text{standard}}=(0,10,0,6)^T$ ;
**h)** soluţia de bază obţinută în al doilea tabel Simplex al fazei a II-a, este soluţie optimă.

13. Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:
*„O fabrică de mobilă produce patru tipuri de mobilă: dulapuri, mese, paturi si scaune. Pentru fiecare tip de mobilier avem următoarele date:*

| Tip mobilier | Cantitate de lemn ($m^2$/buc.) | Ore de muncă (nr. ore/buc.) | Preţ de vânzare (lei/buc.) |
|---|---|---|---|
| *Dulapuri (D)* | *12* | *12* | *1.500* |
| *Mese (M)* | *2,5* | *5* | *600* |
| *Paturi (P)* | *5,5* | *7* | *1.100* |
| *Scaune (S)* | *0,8* | *2* | *150* |

*şi are un contract ferm cu un magazin specializat de mobilă pentru producerea lunară a minim 20 de dulapuri şi 30 de paturi. Fabrica poate produce minim 1.000 de piese de mobilier lunar, dar datorită utilajelor folosite nu poate produce mai mult de 700 de paturi şi mese la un loc, respectiv 500 de dulapuri şi scaune. Ştiind că, fabrica este aprovizionată lunar cu cantitatea de 5.000 $m^2$ de cherestea şi are un număr de 50 de muncitori care lucrează în medie 8 ore/zi timp de 20 de zile pe lună, să se determine planul lunar optim de producţie."*

13) plan optim de producție = profit maxim din vânzarea pieselor de mobilier, care este (evident) direct proporțional cu prețul de vânzare al acestora (profit maxim $\Leftrightarrow$ cifra totală de vânzări este maximă)

not: $\begin{cases} x_1 = \text{nr. de dulapuri care urmează a fi fabricate;} \\ x_2 = \text{nr. de mese} \text{ ——//——//—— ;} \\ x_3 = \text{nr. de paturi} \text{ ——//——//—— ;} \\ x_4 = \text{nr. de scaune} \text{ ——//——//—— ;} \end{cases}$

(1) $(\max) f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1.500\,x_1 + 600\,x_2 + 1.100\,x_3 + 150\,x_4$ (în lei) – cifra totală de vânzări a „$x_1$" dulapuri, ..., „$x_4$" scaune

$\begin{pmatrix}\text{prețul unui} \\ \text{dulap}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{nr. de} \\ \text{dulapuri}\end{pmatrix} +$ ------- idem idem

(2)
$x_1 \geq 20$ (buc) (trebuie fabricate minim 20 de dulapuri conform contractului ferm încheiat)

$x_3 \geq 30$ (buc) (trebuie fabricate minim 30 de paturi ——//——//——//—— )

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1.000$ (buc) → se pot fabrica lunar minim 1.000 de piese de mobilier;

$x_2 + x_3 \leq 700$ (buc) → nu se pot fabrica lunar mai mult de {700 de mese și paturi la un loc;

$x_1 + x_4 \leq 500$ (buc) → {500 de dulapuri și scaune la un loc;

$12x_1 + 2{,}5x_2 + 5{,}5x_3 + 0{,}8x_4 \leq 5.000$ ($m^3$) → cantitatea lunară de cherestea necesară ptr. a fabrica cantitățile $x_1, x_2, x_3, x_4$ de piese de mobilier nu poate depăși cantitatea de $5.000\,m^3$ de cherestea avută la dispoziție;

$12x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 \leq 8.000$ (ore muncă)

nr. lunar de ore de muncă necesare ptr. a se fabrica cantitățile $x_1$ de dulapuri, $x_2$ de mese, $x_3$ de paturi și $x_4$ de scaune nu poate depăși disponibilul de: 50 muncitori × 8 ore/zi × 20 zile/lună = 8.000 ore/lună – avut la dispoziție

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ (eventual $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$) → nu pot produce un nr. negativ de piese de mobilier!!

Obs: chiar dacă în problemă contractul ferm ar fi fost încheiat pentru exact 20 de dulapuri și exact 30 de paturi, restricțiile ar fi rămas la fel ($x_1 \geq 20$ și $x_3 \geq 30$) deoarece fabrica trebuie să producă și în afara contractelor ferme deja încheiate!!

Test 61

**11.** Problema de programare liniară: $\begin{cases}(1)(\max) f(x_1,x_2,x_3) = -x_1 - 3x_2 + x_3 \\ (2)\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \le 16 \end{cases} \\ (3)\, x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$ **se rezolvă aplicând metoda celor două faze**. Rezolvând problema artificială ataşată (în faza I), precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

**a)** problema artificială conţine două variabile artificiale;
**b)** coeficienţii funcţiei obiectiv din tabelul Simplex ataşat fazei I, sunt: **0, 0, 0, 0, 1**;
**c)** soluţia iniţială (de plecare) a fazei I este: $X_{\text{int}iala}^{artificiala} = (0,0,0,15,16)^T$
**d)** diferenţele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei I au valorile: **1, 3, 1, 0, 0**;
**e)** vectorul care intră în bază este $P_2$;
**f)** vectorul care iese din bază este $P_4$;
**g)** noua soluţie obţinută este: $X_1^{artificiala} = (0,5,0,11,0)^T$;
**h)** soluţia obţinută după prima schimbare de bază nu este optimă;

**12.** Pentru aceeaşi problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând faza a II-a problema în forma standard, precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

**a)** soluţia iniţială (de plecare) a fazei a II-a este: $X_{initiala}^{standard} = (0,5,0,11)^T$;
**b)** valoarea funcţiei obiectiv în soluţia iniţială este egală cu **15**;
**c)** diferenţele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: **0, 0,2, 0**;
**d)** vectorul care intră în bază este $P_1$;
**e)** vectorul care iese din bază este $P_4$;
**f)** pivotul schimbării de bază are valoarea **2/3**;
**g)** noua soluţie de bază obţinută este: $X_1^{standard} = (0,0,15,46)^T$;
**h)** valoarea optimă a funcţiei obiectiv a problemei iniţiale este: **15**.

**13.** Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

*„O fabrică de dulciuri produce trei tipuri de bomboane pentru sărbătorile de iarnă, folosind: lapte praf, cacao şi unt. Cantităţile necesare şi preţul acestora sunt în tabelul de mai jos:*

| Tip bomboane | Lapte praf (kg/100 buc.) | Cacao (kg/100 buc.) | Unt (kg/100 buc.) | Preţ (lei/1.000 buc.) |
|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | 0,8 | 0,2 | 0,3 | 1.300 |
| $T_2$ | 0,9 | 0,1 | 0,2 | 1.100 |
| $T_3$ | 0,7 | 0 | 0,4 | 900 |

*Fabrica dispune zilnic de următoarele cantităţi: 10 tone de lapte praf, 500 Kg de cacao şi 1,5 tone de unt iar capacitatea maximă de producţie a fabricii este 5 milioane de bomboane zilnic. Datorită procesului de fabricaţie nu se pot fabrica zilnic mai mult 4 milioane de bomboane de tipul* ***$T_1$*** *şi* ***$T_3$*** *la un loc. Din vânzările din anii trecuţi s-a observat că cele mai căutate sunt bomboanele de tipul* ***$T_2$*** *managementul fabricii decizând ca cantitatea acestora să fie cel puţin egală cu a celorlalte două tipuri. Să se determine un plan optim de producţie."*

13) plan optim de producție = să determinăm nr. de bomboane de fiecare tip care urmează a fi fabricate a.î. profitul rezultat în urma vânzării lor să fie maxim

Obs: se pot scrie trei modele diferite (dar echivalente) depinde de unitatea de măsură folosită în notațiile necunoscutelor.

not:
- $x_1$ = nr. de bomboane de tipul $(T_1)$ care urmează a fi fabricate (în bucăți/sute bucăți/mii buc)
- $x_2$ = nr. de bomboane de tipul $(T_2)$ —— // —— // —— // —— //
- $x_3$ = nr. de bomboane de tipul $(T_3)$ —— // —— // —— // —— //

(1) $(\max) f(x_1,x_2,x_3) = 1{,}3x_1 + 1{,}1x_2 + 0{,}9x_3$ (în lei) ($x_1,x_2,x_3$ în bucăți)

(sau $= 130x_1 + 110x_2 + 90x_3$) (în lei) (cu $x_1,x_2,x_3$ sute de buc.)

(sau $= 1300x_1 + 1100x_2 + 900x_3$) (în lei) (cu $x_1,x_2,x_3$ mii de buc)

– cifra de vânzări (profit) să fie maximă din vânzarea bomboanelor

(2)

$0{,}008x_1 + 0{,}009x_2 + 0{,}007x_3 \le 10.000$ (în kg) de lapte praf; cu $x_1,x_2,x_3$ în bucăți → nu pot folosi o cantitate de lapte praf (în producerea a $x_1,x_2,x_3$ bomboane) mai mare decât cea disponibilă;

sau: $0{,}8x_1 + 0{,}9x_2 + 0{,}7x_3 \le 10.000$ (în kg) → cu $x_1,x_2,x_3$ în sute bucăți

sau: $8x_1 + 9x_2 + 7x_3 \le 10.000$ (în kg) → cu $x_1,x_2,x_3$ în mii de bucăți

$0{,}002x_1 + 0{,}001x_2 \le 500$ (în kg) ptr. cacao; cu $x_1,x_2,x_3$ cantitatea în bucăți → nu pot folosi mai multă cacao decât cantitatea avută la dispoziție

sau: $0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \le 500$ (în kg); cu $x_1,x_2,x_3$ în sute de bucăți

sau: $2x_1 + x_2 \le 500$ (în kg); cu $x_1,x_2,x_3$ în mii de bucăți

$0{,}003x_1 + 0{,}002x_2 + 0{,}004x_3 \le 1.500$ (în kg) ptr. unt; cu $x_1,x_2,x_3$ în bucăți → nu pot folosi o cantitate de unt mai mare decât cea avută la dispoziție

sau: $0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}4x_3 \le 1.500$ (în kg); cu $x_1,x_2,x_3$ în sute de bucăți

sau: $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 1.500$ (în kg); cu $x_1,x_2,x_3$ în mii de bucăți

$x_1 + x_2 + x_3 \le 5.000.000$ (buc) → capacitatea maximă de producție este de 5 milioane de bomboane (de toate tipurile);

sau: $x_1 + x_2 + x_3 \le 50.000$ (în sute de buc)

sau: $x_1 + x_2 + x_3 \le 5.000$ (în mii de buc)

$x_1 + x_3 \le 4.000.000$ (buc) → capacitatea maximă de producție a bomboanelor de tip $T_1$ și $T_3$ este de 4 milioane buc.

sau: $x_1 + x_3 \le 40.000$ (sute buc)

sau: $x_1 + x_3 \le 4.000$ (mii buc)

$x_2 \ge x_1 + x_3$ (în buc/sute buc/mii buc) → cantitatea de bomboane de tip $T_2$ fabricată să fie cel puțin la fel de mare ca cea a bomboanelor de tip $T_1$ și $T_3$ la un loc

(3) $x_1, x_2, x_3 \ge 0$ → nr. de bomboane fabricate să fie $\ge 0$ (logic, nu?)

Test 42

**11.** Problema de programare liniară:
$$\begin{cases}(1)(\max) f(x_1,x_2,x_3) = -4x_1 - 3x_2 + x_3 \\ (2)\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 \le 18 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 21 \end{cases} \\ (3)\, x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$
**se rezolvă aplicând metoda celor două faze.** Rezolvând problema artificială ataşată (în faza I), precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

**a)** în problema artificială se introduce o singură variabilă artificială;
**b)** coeficienţii funcţiei obiectiv din tabelul Simplex corespunzător fazei I sunt: **4, 3, -1, 0, 0**;
**c)** soluţia iniţială (de plecare) a fazei I este: $X^{artificiala}_{intiala} = (0,0,0,18,21)^T$;
**d)** diferenţele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei I au valorile: **1, -3, -1, 0, 0**;
**e)** vectorul care intră în bază este $P_2$;
**f)** vectorul care iese din bază este $P_4$;
**g)** noua soluţie obţinută este: $X_1^{artificiala} = (0,25,0,7,0)^T$;
**h)** noua soluţie obţinută, în al doilea tabel Simplex al fazei I, este optimă.

**12.** Pentru aceeaşi problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând faza a II-a problema în forma standard, precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

**a)** coeficienţii funcţiei obiectiv sunt: **4, 3, -1, 0**;
**b)** soluţia iniţială (de plecare) a fazei a II-a este: $X^{standard}_{initiala} = (0,7,0,25)^T$;
**c)** diferenţele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: **5, 0,-2, 0**;
**d)** vectorul care intră în bază este $P_1$;
**e)** vectorul care iese din bază este $P_4$;
**f)** pivotul schimbării de bază are valoarea: **2/3**;
**g)** soluţia optimă a problemei în formă standard este: $X^{standard}_{optima} = (0,\frac{15}{2},0,\frac{9}{2})^T$;
**h)** soluţia optimă a problemei iniţiale $X^{initiala}_{optima} = (0,\frac{9}{2},\frac{15}{2})^T$ şi este unică.

**13.** Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

*„Ministerul Economiei şi Industriei are pentru anul 2016 un buget pentru investiţii de 1 miliard de Euro, pentru modernizări şi reparaţia facilităţilor de producere a energiei electrice. În tabelul de mai jos sunt prezentate proiectele propuse, necesarul maximal de investiţii şi cantitatea de energie produsă suplimentar (calculată în Mwh pentru fiecare milion de euro investit) în fiecare caz în parte:*

| Proiect | Necesar de investiţii (milioane Euro/proiect) | Cantitatea de energie produsă (Megawaţi/oră per 1milion Euro investit ) |
|---|---|---|
| ***Centrale pe cărbune*** | *500* | *8* |
| ***Centrale pe gaz*** | *300* | *4,5* |
| ***Turbine eoliene*** | *200* | *3* |
| ***Hidrocentrale*** | *450* | *6,5* |

*Datorită fenomenului de poluare, s-a luat decizia să se aloce pentru centralele pe cărbune şi gaz cel puţin 75% din sumele solicitate. Deoarece vechimea hidrocentralelor impune reparaţii şi modernizări urgente s-a hotărât ca suma alocată acestora să fie de cel puţin trei ori mai mare decât cea alocată pentru turbinele eoliene.Să se determine planul optim de investiţii al ministerului."*

13) plan optim de investiţii = să se producă cât mai multă energie pentru banii investiţi (evident, respectând restricţiile impuse)

not $\begin{cases} x_1 = \text{suma care urmează a fi investită în centralele pe cărbune (în milioane de Euro);} \\ x_2 = \text{suma (în milioane Euro) care urmează a fi investită în centralele pe gaz;} \\ x_3 = \text{suma (în milioane Euro) — // — // — în turbine eoliene;} \\ x_4 = \text{suma (în milioane Euro) — // — // — în hidrocentrale.} \end{cases}$

(1) $(\max) f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 8x_1 + 4{,}5x_2 + 3x_3 + 6{,}5x_4$ (în MW/h) → cantitatea totală de energie care urmează a fi produsă (suplimentar) în urma investiţiilor făcute

(2)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 1.000$ (milioane Euro) – bugetul maxim de investiţii al ministerului (MEI)

$x_1 \le 500$ (milioane Euro)

$x_2 \le 300$ (milioane Euro)

$x_3 \le 200$ (milioane Euro)

$x_4 \le 450$ (milioane Euro)

→ sumele care urmează a fi investite în fiecare proiect nu trebuie să depăşească necesarul (= suma maximă care poate fi investită în fiecare proiect)

$x_1 + x_2 \ge \underbrace{75\%}_{=\frac{75}{100}=0{,}75}(500+300) \iff x_1 + x_2 \ge 600$ (în milioane Euro) → suma totală care urmează a fi investită în centralele pe cărbune şi pe gaz să fie cel puţin 75% din necesar (din suma solicitată)

Obs: sau: $\begin{cases} x_1 \ge 0{,}75 \cdot 500 \iff x_1 \ge 375 \text{ (mil. Euro)} \\ x_2 \ge 0{,}75 \cdot 300 \iff x_2 \ge 225 \text{ (mil. Euro)} \end{cases}$ → fiecare sumă în parte să fie de minim 75% din necesar

depinde de interpretarea textului (care aici nu e foarte, foarte clar)

$x_4 \ge 3x_3$ (în milioane Euro) → suma care va fi alocată hidrocentralelor trebuie să fie de cel puţin trei ori mai mare decât cea care va fi alocată turbinelor eoliene

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$ → dacă $\begin{cases} x_i > 0 \to \text{aloc suma proiectului „}i\text{"} \\ x_i = 0 \to \text{proiectul „}i\text{" nu primeşte bani} \end{cases}$

evident $x_i < 0$ absurd.

Obs: i) $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left(8 \text{ MWh}/1 \text{ mil. Euro investiţi}\right) \cdot x_1 \text{ (mil. Euro investiţi)} + \dots$ = rezultatul va fi în MWh

ii) mai clar: $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 8x_1 + 4{,}5x_2 + 3x_3 + 6{,}5x_4$

$\left(\text{MWh}/\cancel{\text{mil. Euro investiţi}}\right) \cdot \left(\text{nr. de }\cancel{\text{milioane Euro investite}}\right) + (\quad)\cdot(\quad) + (\quad)\cdot(\quad)$

se simplifică „milioane Euro investite"

Test 83

**11.** Problema de programare liniară: $\begin{cases}(1)(\max) f(x_1,x_2,x_3) = -2x_1 - x_2 + x_3 \\ (2)\begin{cases}2x_1 + x_2 + x_3 = 26 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \le 24\end{cases} \\ (3)\, x_1, x_2, x_3 \ge 0\end{cases}$ **se rezolvă aplicând metoda celor două faze**. Rezolvând problema artificială ataşată ( în faza I), precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

- **a)** trebuie indroduse două variabile artificiale;
- **b)** soluţia iniţială (de plecare) a fazei I este: $X_{\text{int}\,iala}^{artificiala} = (0,0,0,26,24)^T$;
- **c)** în primul tabel Simplex al fazei I, diferenţele $z_1 - c_1 = 2 \ si \ z_3 - c_3 = 1$ ;
- **d)** valoarea funcţiei obiectiv pentru soluţia inţială este egală cu **26**;
- **e)** vectorul care intră în bază este $P_2$;
- **f)** vectorul care iese din bază este $P_5^a$;
- **g)** în noul tabel componentele vectorului $P_3$ sunt: $P_3 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)^T$;
- **h)** noua soluţie obţinută este: $X_1^{artificiala} = (13,11,0,0,0)^T$;

**12.** Pentru aceeaşi problemă de programare liniară (de la pct. 11), rezolvând faza a II-a problema în forma standard, precizaţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate:

- **a)** soluţia iniţială (de plecare) a fazei a II-a este: $X_{initiala}^{s\tan dard} = (13,0,11,0)^T$;
- **b)** valoarea funcţiei obiectiv în soluţia iniţială este egală cu **26**;
- **c)** diferenţele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din primul tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: **0, 0, 2, 0**;
- **d)** vectorul care intră în bază este $P_2$;
- **e)** pivotul schimbării de bază are valoarea **1/2**;
- **f)** noua soluţie de bază obţinută este: $X_1^{s\tan dard} = (\frac{54}{5}, 0, \frac{22}{5}, 0)^T$;
- **g)** diferenţele $z_j - c_j$ (sau $z_k - c_k$) din al doilea tabel Simplex al fazei a II-a au valorile: **6/5, -4/5, 0, 0**;
- **h)** valoarea optimă a funcţiei obiectiv din problema standard este egală cu: **86/5**.

**13.** Să se scrie modelul matematic (de tip problemă de programare liniară) al următoarei probleme economice:

*„Un dezvoltator imobiliar are la dispoziţie un teren de 10 ha, pe care doreşte să construiască 4 tipuri de case. Suprafeţele de teren, costul de construcţie şi profitul net sunt date în tabelul de mai jos:*

| *Tip case:* | *Suprafaţa de teren necesară ($m^2$/casă)* | *Cost unitar de construcţie (mii lei/casă)* | *Profit unitar (mii lei/casă)* |
|---|---|---|---|
| *Tip 1* | *300* | *85* | *35* |
| *Tip 2* | *500* | *125* | *55* |
| *Tip 3* | *800* | *180* | *90* |
| *Tip 4* | *1.000* | *200* | *110* |

*Dezvoltatorul a semnat deja contracte pentru patru case de tipul 1, 3 case de tipul 3 şi o casă de tipul 4. Compania de construcţii cu care are contract poate construi maxim 50 de case anual. Pe baza unor studii de piaţă, patronul hotărăşte să construiască de două ori mai multe case de tipul 2 şi 3 decât cele de tipul 1 şi 4. Ştiind că suma maximă pe care o poate investi anual este de 8 milioane lei, determinaţi planul anual optim al afacerii."*

13) plan optim al afacerii = profit total maxim în urma vânzării caselor care urmează a fi construite (ţinând evident cont de restricţiile impuse în enunţ)

not $\begin{cases} x_1 = \text{nr. de case de tipul } (T_1) \text{ care urmează să fie construite;} \\ x_2 = \text{nr. de case de tipul } (T_2) \text{ — // — // — // — ;} \\ x_3 = \text{nr. de case de tipul } (T_3) \text{ — // — // — ;} \\ x_4 = \text{nr. de case de tipul } (T_4) \text{ — // — // — ;} \end{cases}$

(1) $(\max) f(x_1,x_2,x_3,x_4) = 35.000x_1 + 55.000x_2 + 90.000x_3 + 110.000x_4$ (în lei) → profitul maxim (în lei) obţinut din vânzarea celor 4 tipuri de case

sau $= 35x_1 + 55x_2 + 90x_3 + 110x_4$ (în mii de lei)

(2) $\begin{cases} 300x_1 + 500x_2 + 800x_3 + 1.000x_4 \le 100.000 \ (\text{în } m^2) \\ \text{sau: } 0{,}03x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}1x_4 \le 10 \ (\text{în ha}) \\ 85.000x_1 + 125.000x_2 + 180.000x_3 + 200.000x_4 \le 8.000.000 \ (\text{lei}) \\ \text{sau: } 85x_1 + 125x_2 + 180x_3 + 200x_4 \le 8.000 \ (\text{în mii lei}) \\ x_1 \ge 4 \ (\text{buc.}) \\ x_3 \ge 3 \ (\text{buc.}) \\ x_4 \ge 1 \ (\text{buc.}) \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \le 50 \ (\text{buc.}) \\ x_2 + x_3 = 2(x_1 + x_4) \end{cases}$

→ suprafaţa totală necesară construirii celor 4 tipuri de case nu trebuie să depăşească 10 ha $= 10 \times 10.000 m^2 = 100.000 m^2$

→ costul total de construcţie nu trebuie să depăşească suma maximă de care dispune investitorul

→ contractele sunt semnate, deci casele trebuie obligatoriu construite;

→ compania de construcţii nu poate construi anual decât cel mult 50 de case (de toate tipurile);

→ casele de tip 2 şi 3 care urmează a fi construite trebuie să fie de două ori mai multe decât cele de tipul 3 şi 4.

(3) $x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0$ – nr de case care urmează a fi construite, nu pot fi $< 0$

$(x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N})$

Obs: evident am dori ca soluţia optimă să aibă toate componentele nr. întregi (naturale). Într-adevăr, ce s-ar întâmpla (ce ar face investitorul) dacă soluţia optimă ar fi de forma:

$$X_{optim} = (9{,}72 \ ; \ 10{,}66 \ ; \ 8{,}5 \ ; \ 14{,}37)^T$$

ce înseamnă 9,72 case de tip 1 ??