

## Seminar 6 - Distribuții bidimensionale

Distribuția unui eșantion de 750 de firme din Iași după cifra de afaceri,  $X$ , și tipul firmei,  $Y$ , (mici, mijlocii și mari) este prezentată în tabelul de mai jos.

**Tabelul 6.1.** Distribuția firmelor din Iași după cifra de afaceri și tipul firmei

$x_i \backslash y_j$ (mii lei)	mici	mijlocii	mari	TOTAL
10	132	30	8	170
20	42	60	13	115
30	20	90	40	150
40	6	70	239	315
<b>TOTAL</b>	200	250	300	750

Se cere:

1. Puneți în evidență distribuția marginală a variabilei  $X$  și distribuția marginală a variabilei  $Y$
2. Puneți în evidență distribuțiile condiționate. Câte distribuții condiționate sunt?
3. Să se interpreteze frecvențele absolute parțiale
4. Să se interpreteze frecvențele absolute marginale
5. Să se calculeze și să se interpreteze frecvențele relative parțiale
6. Să se calculeze și să se interpreteze frecvențele relative marginale
7. Să se calculeze și să se interpreteze frecvențele relative condiționate
8. Să se calculeze și să se interpreteze mediile condiționate (mediile pe grupe)
9. Să se calculeze și să se interpreteze media pe total
10. Să se calculeze varianțele condiționate (varianțele de grupă)
11. Să se calculeze media varianțelor de grupă
12. Să se calculeze varianța între grupe (varianța intergrupe)
13. Să se calculeze varianța generală
14. Să se calculeze coeficientul de influență a factorului de grupare și coeficientul de influență a factorilor aleatori/întâmplători

Forma generală a unei distribuții bidimensionale poate fi prezentată astfel:

$x_i \backslash y_j$	$y_1$	$y_2$	$\cdots$	$y_j$	$\cdots$	$y_p$	TOTAL
$x_1$	$n_{11}$	$n_{12}$	$\cdots$	$n_{1j}$	$\cdots$	$n_{1p}$	$n_{1\bullet}$
$x_2$	$n_{21}$	$n_{22}$	$\cdots$	$n_{2j}$	$\cdots$	$n_{2p}$	$n_{2\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_i$	$n_{i1}$	$n_{i2}$	$\cdots$	$n_{ij}$	$\cdots$	$n_{ip}$	$n_{i\bullet}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_m$	$n_{m1}$	$n_{m2}$	$\cdots$	$n_{mj}$	$\cdots$	$n_{mp}$	$n_{m\bullet}$
TOTAL	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$\cdots$	$n_{\bullet j}$	$\cdots$	$n_{\bullet p}$	$n_{\bullet\bullet}$

$$n_{1\bullet} = \sum_{j=1}^p n_{1j}$$

$$n_{2\bullet} = \sum_{j=1}^p n_{2j}$$

$$n_{m\bullet} = \sum_{j=1}^p n_{mj}$$

$$n_{\bullet 1} = \sum_{i=1}^m n_{i1}, \quad n_{\bullet 2} = \sum_{i=1}^m n_{i2}$$

$$n_{\bullet p} = \sum_{i=1}^m n_{ip}$$

$$n_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^m n_{i\bullet} = \sum_{j=1}^p n_{\bullet j} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^p n_{ij}$$

În cazul problemei noastre avem:

$x_i \backslash y_j$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	TOTAL
$x_1$	$n_{11}$	$n_{12}$	$n_{13}$	$n_{1\bullet}$
$x_2$	$n_{21}$	$n_{22}$	$n_{23}$	$n_{2\bullet}$
$x_3$	$n_{31}$	$n_{32}$	$n_{33}$	$n_{3\bullet}$
$x_4$	$n_{41}$	$n_{42}$	$n_{43}$	$n_{4\bullet}$
TOTAL	$n_{\bullet 1}$	$n_{\bullet 2}$	$n_{\bullet 3}$	$n_{\bullet\bullet}$

$$n_{1\bullet} = n_{11} + n_{12} + n_{13} = \sum_{j=1}^p n_{1j}$$

$$n_{\bullet 1} = n_{11} + n_{21} + n_{31} + n_{41} = \sum_{i=1}^m n_{i1}$$

$$n_{2\bullet} = n_{21} + n_{22} + n_{23} = \sum_{j=1}^p n_{2j}$$

$$n_{\bullet 2} = n_{12} + n_{22} + n_{32} + n_{42} = \sum_{i=1}^m n_{i2}$$

$$n_{3\bullet} = n_{31} + n_{32} + n_{33} = \sum_{j=1}^p n_{3j}$$

$$n_{\bullet 3} = n_{13} + n_{23} + n_{33} + n_{43} = \sum_{i=1}^m n_{i3}$$

$$n_{4\bullet} = n_{41} + n_{42} + n_{43} = \sum_{j=1}^p n_{4j}$$

$$n_{\bullet\bullet} = n_{1\bullet} + n_{2\bullet} + n_{3\bullet} + n_{4\bullet}$$

$$n_{\bullet\bullet} = n_{\bullet 1} + n_{\bullet 2} + n_{\bullet 3}$$

$$n_{\bullet\bullet} = n_{11} + n_{21} + n_{31} + n_{41} + n_{12} + n_{22} + n_{32} + n_{42} + n_{13} + n_{23} + n_{33} + n_{43}$$

1. Puneți în evidență distribuția marginală a variabilei  $X$  și distribuția marginală a variabilei  $Y$

O distribuție a unei variabile empirice poate fi pusă în evidență prin prezentarea valorilor variabilei și a frecvențelor lor de apariție.

Sunt două distribuții marginale constituite din valorile variabilei și frecvențele marginale.

**Tabelul 6.2.** Distribuția firmelor din Iași după cifra de afaceri

$x_i$ (mii lei)	$n_{i\cdot}$
10	170
20	115
30	150
40	315
<b>TOTAL</b>	<b>750</b>

**Tabelul 6.3.** Distribuția firmelor din Iași după tipul firmelor

$y_j$	$n_{\cdot j}$
mici	200
mijlocii	250
mari	300
<b>TOTAL</b>	<b>750</b>

2. Puneți în evidență distribuțiile condiționate. Câte distribuții condiționate sunt?

Sunt  $m+p=4+3=7$  distribuții condiționate

**Tabelul 6.4** Distribuția cifrei de afaceri a firmelor din Iași condiționată de tipul firmei să fie “mică” ( $X / Y = y_1$ )

$x_i$ (mii lei)	$n_{i1}$
10	132
20	42
30	20
40	6
<b>TOTAL</b>	<b>200</b>

**Tabelul 6.5** Distribuția cifrei de afaceri a firmelor din Iași condiționată de tipul firmei să fie “mijlocie” ( $X / Y = y_2$ )

$x_i$ (mii lei)	$n_{i2}$
10	30
20	60
30	90
40	70
<b>TOTAL</b>	<b>250</b>

**Tabelul 6.6** Distribuția cifrei de afaceri a firmelor din Iași condiționată de tipul firmei să fie “mijlocie” ( $X / Y = y_3$ )

$x_i$ (mii lei)	$n_{i3}$
10	8
20	13
30	40
40	239
<b>TOTAL</b>	<b>300</b>

Distribuțiile prezentate în tabelele 6.2, 6.4, 6.5 și 6.6 sunt distribuții ale unei variabile cantitative, discrete. Prin urmare pentru acestea putem determina nivelul mediu prin media aritmetică, dispersia prin abaterea standard etc.

**Tabelul 6.7** Distribuția firmelor din Iași după tipul firmei condiționată ca cifra de afaceri să fie 10 mii lei ( $Y / X = x_1$ )

$y_j$	$n_{1j}$
mici	132
mijlocii	30
mari	8
<b>TOTAL</b>	<b>170</b>

**Tabelul 6.8** Distribuția firmelor din Iași după tipul firmei condiționată ca cifra de afaceri să fie 20 mii lei ( $Y / X = x_1$ )

$y_j$	$n_{2j}$
mici	42
mijlocii	60
mari	13
<b>TOTAL</b>	<b>115</b>

**Tabelul 6.9** Distribuția firmelor din Iași după tipul firmei condiționată ca cifra de afaceri să fie 30 mii lei ( $Y / X = x_1$ )

$y_j$	$n_{3j}$
mici	20
mijlocii	90
mari	40
<b>TOTAL</b>	<b>150</b>

**Tabelul 6.10** Distribuția firmelor din Iași după tipul firmei condiționată ca cifra de afaceri să fie 40 mii lei ( $Y / X = x_1$ )

$y_j$	$n_{4j}$
mici	6
mijlocii	70
mari	239
<b>TOTAL</b>	<b>315</b>

### 3. Să se interpreteze frecvențele absolute parțiale

$n_{11} = 132$  . 132 de firme sunt mici și au cifra de afaceri egală cu 10 mii lei  
 $n_{21} = 42$  . 42 de firme sunt mici și au cifra de afaceri egală cu 20 mii lei  
 $n_{31} = 20$  . 20 de firme sunt mici și au cifra de afaceri egală cu 30 mii lei  
 $n_{41} = 6$  . 6 firme sunt mici și au cifra de afaceri egală cu 40 mii lei  
 $n_{12} = 30$  . 30 de firme sunt mijlocii și au cifra de afaceri egală cu 10 mii lei  
 $n_{22} = 60$  . 60 de firme sunt mijlocii și au cifra de afaceri egală cu 20 mii lei  
 $n_{32} = 90$  . 90 de firme sunt mijlocii și au cifra de afaceri egală cu 30 mii lei  
 $n_{42} = 70$  . 70 de firme sunt mijlocii și au cifra de afaceri egală cu 40 mii lei  
 $n_{13} = 8$  . 8 firme sunt mari și au cifra de afaceri egală cu 10 mii lei  
 $n_{23} = 13$  . 13 firme sunt mari și au cifra de afaceri egală cu 20 mii lei  
 $n_{33} = 40$  . 40 de firme sunt mari și au cifra de afaceri egală cu 30 mii lei  
 $n_{43} = 239$  . 239 de firme sunt mari și au cifra de afaceri egală cu 40 mii lei

### 4. Să se interpreteze frecvențele absolute marginale

$n_{1.} = 170$  . 170 de firme au cifra de afaceri de 10 mii lei  
 $n_{2.} = 115$  . 115 firme au cifra de afaceri de 20 mii lei  
 $n_{3.} = 150$  . 150 de firme au cifra de afaceri de 30 mii lei  
 $n_{4.} = 315$  . 315 firme au cifra de afaceri de 40 mii lei  
 $n_{.1} = 200$  . 200 firme sunt mici  
 $n_{.2} = 250$  . 250 de firme sunt mijlocii  
 $n_{.3} = 300$  . 300 de firme sunt mari

### 5. Să se calculeze și să se interpreteze frecvențele relative parțiale

$$f_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_{..}} \cdot 100$$

$$f_{11} = \frac{n_{11}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{132}{750} \cdot 100 = 17,6\% \text{ . } 17,6\% \text{ din firme sunt mici și au cifra de afaceri egală cu 10 mii lei}$$

$$f_{21} = \frac{n_{21}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{42}{750} \cdot 100 = 5,6\% \text{ . } 5,6\% \text{ din firme sunt mici și au cifra de afaceri egală cu 20 mii lei}$$

$$f_{31} = \frac{n_{31}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{20}{750} \cdot 100 = 2,67\% \text{ . } 2,67\% \text{ din firme sunt mici și au cifra de afaceri egală cu 30 mii lei}$$

$$f_{41} = \frac{n_{41}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{6}{750} \cdot 100 = 0,8\% \text{ . } 0,8\% \text{ din firme sunt mici și au cifra de afaceri egală cu 40 mii lei}$$

$$f_{12} = \frac{n_{12}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{30}{750} \cdot 100 = 4,00\% . 4,00\% \text{ din firme sunt mijlocii și au cifra de afaceri egală cu 10 mii}$$

lei

$$f_{22} = \frac{n_{22}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{60}{750} \cdot 100 = 8,00\% . 8,00\% \text{ din firme sunt mijlocii și au cifra de afaceri egală cu 20 mii}$$

lei

$$f_{32} = \frac{n_{32}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{90}{750} \cdot 100 = 12,00\% . 12,00\% \text{ din firme sunt mijlocii și au cifra de afaceri egală cu 30}$$

mii lei

$$f_{42} = \frac{n_{42}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{70}{750} \cdot 100 = 9,33\% . 9,33\% \text{ din firme sunt mijlocii și au cifra de afaceri egală cu 40 mii}$$

lei

$$f_{13} = \frac{n_{13}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{8}{750} \cdot 100 = 1,07\% . 1,07\% \text{ din firme sunt mari și au cifra de afaceri egală cu 10}$$

mii lei

$$f_{23} = \frac{n_{23}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{13}{750} \cdot 100 = 1,73\% . 1,73\% \text{ din firme sunt mari și au cifra de afaceri egală cu 20}$$

mii lei

$$f_{33} = \frac{n_{33}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{40}{750} \cdot 100 = 5,33\% . 5,33\% \text{ din firme sunt mari și au cifra de afaceri egală cu 30}$$

mii lei

$$f_{43} = \frac{n_{43}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{239}{750} \cdot 100 = 31,87\% . 31,87\% \text{ din firme sunt mari și au cifra de afaceri egală cu}$$

40 mii lei

*6. Să se calculeze și să se interpreteze frecvențele relative marginale*

$$f_{i.} = \frac{n_{i.}}{n_{..}} \cdot 100$$

$$f_{1.} = \frac{n_{1.}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{170}{750} \cdot 100 = 22,67\% . 22,67\% \text{ dintre firme au cifra de afaceri de 10 mii lei}$$

$$f_{2.} = \frac{n_{2.}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{115}{750} \cdot 100 = 15,33\% , 15,33\% \text{ dintre firme au cifra de afaceri de 20 mii lei}$$

$$f_{3.} = \frac{n_{3.}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{150}{750} \cdot 100 = 20,00\% , 20\% \text{ dintre firme au cifra de afaceri de 30 mii lei}$$

$$f_{4.} = \frac{n_{4.}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{315}{750} \cdot 100 = 42,00\% , 42\% \text{ dintre firme au cifra de afaceri de 40 mii lei}$$

$$f_{.j} = \frac{n_{.j}}{n_{..}} \cdot 100$$

$$f_{.1} = \frac{n_{.1}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{200}{750} \cdot 100 = 26,67\% , 26,67\% \text{ dintre firme sunt mici}$$

$$f_{.2} = \frac{n_{.2}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{250}{750} \cdot 100 = 33,33\% , 33,33\% \text{ dintre firme sunt mijlocii}$$

$$f_{.3} = \frac{n_{.3}}{n_{..}} \cdot 100 = \frac{300}{750} \cdot 100 = 40,00\% , 40\% \text{ dintre firme sunt mari}$$

## 7. Să se calculeze și să se interpreteze frecvențele relative condiționate

$$f_{i/j} = \frac{n_{ij}}{n_{.j}} \cdot 100, j \text{ valoare fixă (mărimea firmei)}$$

*Firme Mici*

$$f_{i/1} = \frac{n_{i1}}{n_{.1}} \cdot 100$$

$f_{1/1}$  reprezintă frecvența relativă a firmelor mici condiționate ca valoarea cifrei de afaceri să fie de 10 mii lei

$$f_{1/1} = \frac{n_{11}}{n_{.1}} \cdot 100 = \frac{132}{200} \cdot 100 = 66,00\% . 66\% \text{ dintre firmele mici au cifra de afaceri egală cu 10 mii lei}$$

$$f_{2/1} = \frac{n_{21}}{n_{.1}} \cdot 100 = \frac{42}{200} \cdot 100 = 21,00\% . 21\% \text{ dintre firmele mici au cifra de afaceri egală cu 20 mii lei}$$

$$f_{3/1} = \frac{n_{31}}{n_{.1}} \cdot 100 = \frac{20}{200} \cdot 100 = 10,00\% . 10\% \text{ dintre firmele mici au cifra de afaceri egală cu 30 mii lei}$$

$$f_{4/1} = \frac{n_{41}}{n_{.1}} \cdot 100 = \frac{6}{200} \cdot 100 = 3,00\% . 3\% \text{ dintre firmele mici au cifra de afaceri egală cu 40 mii lei}$$

*Firme Mijlocii*

$$f_{i/2} = \frac{n_{i2}}{n_{.2}} \cdot 100$$

$f_{1/2}$  reprezintă frecvența relativă a firmelor mijlocii condiționate ca valoarea cifrei de afaceri să fie de 10 mii lei

$$f_{1/2} = \frac{n_{12}}{n_{.2}} \cdot 100 = \frac{30}{250} \cdot 100 = 12,00\% . 12\% \text{ dintre firmele mijlocii au cifra de afaceri egală cu 10 mii lei}$$

lei

$$f_{2/2} = \frac{n_{22}}{n_{.2}} \cdot 100 = \frac{60}{250} \cdot 100 = 24,00\% . 24\% \text{ dintre firmele mijlocii au cifra de afaceri egală cu 20 mii lei}$$

mii lei

$$f_{3/2} = \frac{n_{32}}{n_{.2}} \cdot 100 = \frac{90}{250} \cdot 100 = 36,00\% . 36\% \text{ dintre firmele mijlocii au cifra de afaceri egală cu 30 mii lei}$$

mii lei



$$f_{4/2} = \frac{n_{42}}{n_{\cdot 2}} \cdot 100 = \frac{70}{250} \cdot 100 = 28,00\% . 28\% \text{ dintre firmele mijlocii au cifra de afaceri egală cu 40}$$

mii lei

*Firme Mari*

$$f_{i/3} = \frac{n_{i3}}{n_{\cdot 3}} \cdot 100$$

$$f_{1/3} = \frac{n_{13}}{n_{\cdot 3}} \cdot 100 = \frac{8}{300} \cdot 100 = 2,67\% . 2,67\% \text{ dintre firmele mari au cifra de afaceri egală cu 10 mii}$$

lei

$$f_{2/3} = \frac{n_{23}}{n_{\cdot 3}} \cdot 100 = \frac{13}{300} \cdot 100 = 4,33\% . 4,33\% \text{ dintre firmele mari au cifra de afaceri egală cu 20 mii}$$

lei

$$f_{3/3} = \frac{n_{33}}{n_{\cdot 3}} \cdot 100 = \frac{40}{300} \cdot 100 = 13,33\% . 13,33\% \text{ dintre firmele mari au cifra de afaceri egală cu 30 mii}$$

lei

$$f_{4/3} = \frac{n_{43}}{n_{\cdot 3}} \cdot 100 = \frac{239}{300} \cdot 100 = 79,67\% . 79,67\% \text{ dintre firmele mari au cifra de afaceri egală cu 40}$$

mii lei

$$f_{i/j} = \frac{n_{ij}}{n_{i\cdot}} \cdot 100, i \text{ valoare fixă (cifra de afaceri)}$$

*Firme cu cifra de afaceri de 10 mii lei*

$$f_{1/j} = \frac{n_{1j}}{n_{1\cdot}} \cdot 100$$

$$f_{1/1} = \frac{n_{11}}{n_{1\cdot}} \cdot 100 = \frac{132}{170} \cdot 100 = 77,65\% . 77,65\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 10 mii lei}$$

sunt mici

$$f_{1/2} = \frac{n_{12}}{n_{1\cdot}} \cdot 100 = \frac{30}{170} \cdot 100 = 17,65\% . 17,65\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 10 mii lei}$$

sunt mijlocii

$$f_{1/3} = \frac{n_{13}}{n_{1\cdot}} \cdot 100 = \frac{8}{170} \cdot 100 = 4,70\% . 4,70\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 10 mii lei}$$

sunt mari

*Firme cu cifra de afaceri de 20 mii lei*

$$f_{2/j} = \frac{n_{2j}}{n_{2\cdot}} \cdot 100$$

$$f_{2/1} = \frac{n_{21}}{n_{2\cdot}} \cdot 100 = \frac{42}{115} \cdot 100 = 36,52\% . 36,52\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 20 mii lei}$$

sunt mici

$$f_{2/2} = \frac{n_{22}}{n_{2\cdot}} \cdot 100 = \frac{60}{115} \cdot 100 = 52,17\% . 52,17\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 20 mii}$$

lei sunt mijlocii

$$f_{2/3} = \frac{n_{23}}{n_{2.}} \cdot 100 = \frac{13}{115} \cdot 100 = 11,31\% \cdot 11,31\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 20 mii lei}$$

sunt mari

*Firme cu cifra de afaceri de 30 mii lei*

$$f_{3/j} = \frac{n_{3j}}{n_{3.}} \cdot 100$$

$$f_{3/1} = \frac{n_{31}}{n_{3.}} \cdot 100 = \frac{20}{150} \cdot 100 = 13,33\% \cdot 13,33\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 30 mii lei}$$

sunt mici

$$f_{3/2} = \frac{n_{32}}{n_{3.}} \cdot 100 = \frac{90}{150} \cdot 100 = 60,00\% \cdot 60,00\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 30 mii}$$

lei sunt mijlocii

$$f_{3/3} = \frac{n_{33}}{n_{3.}} \cdot 100 = \frac{40}{150} \cdot 100 = 26,67\% \cdot 26,67\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 30 mii}$$

lei sunt mari

*Firme cu cifra de afaceri de 40 mii lei*

$$f_{4/j} = \frac{n_{4j}}{n_{4.}} \cdot 100$$

$$f_{4/1} = \frac{n_{41}}{n_{4.}} \cdot 100 = \frac{6}{315} \cdot 100 = 1,91\% \cdot 1,91\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 40 mii lei}$$

sunt mici

$$f_{4/2} = \frac{n_{42}}{n_{4.}} \cdot 100 = \frac{70}{315} \cdot 100 = 22,22\% \cdot 22,22\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 40 mii}$$

lei sunt mijlocii

$$f_{4/3} = \frac{n_{43}}{n_{4.}} \cdot 100 = \frac{239}{315} \cdot 100 = 75,87\% \cdot 75,87\% \text{ dintre firmele ce au cifra de afaceri egală cu 40 mii}$$

lei sunt mari

#### 8. Să se calculeze și să se interpreteze mediile condiționate (mediile pe grupe)

Mediile condiționate pot fi calculate pentru fiecare din distribuțiile condiționate ale variabilei cantitative, cifra de afaceri.

$$\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_{ij}}{\sum_{j=1}^p n_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_{ij}}{n_{.j}}$$

**Tabelul 6.4** Distribuția cifrei de afaceri a firmelor din Iași condiționată de tipul firmei să fie “mică” ( $X / Y = y_1$ )

$x_i$ (mii lei)	$n_{i1}$	$x_i n_{i1}$
10	132	1320
20	42	840
30	20	600
40	6	240
<b>TOTAL</b>	<b>200</b>	<b>3000</b>

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_{i1}}{\sum_{j=1}^p n_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_{i1}}{n_{.1}} = \frac{3000}{200} = 15 \text{ mii lei}$$

Cifra medie de afaceri a firmelor mici este de 15 mii lei.

**Tabelul 6.5** Distribuția cifrei de afaceri a firmelor din Iași condiționată de tipul firmei să fie “mijlocie” ( $X / Y = y_2$ )

$x_i$ (mii lei)	$n_{i2}$	$x_i n_{i2}$
10	30	300
20	60	1200
30	90	2700
40	70	2800
<b>TOTAL</b>	<b>250</b>	<b>7000</b>

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_{i2}}{\sum_{j=1}^p n_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_{i2}}{n_{.2}} = \frac{7000}{250} = 28 \text{ mii lei}$$

Cifra medie de afaceri a firmelor medii este de 28 mii lei.

**Tabelul 6.6** Distribuția cifrei de afaceri a firmelor din Iași condiționată de tipul firmei să fie “mijlocie” ( $X / Y = y_3$ )

$x_i$ (mii lei)	$n_{i3}$	$x_i n_{i3}$
10	8	80
20	13	260
30	40	1200
40	239	9560
<b>TOTAL</b>	<b>300</b>	<b>11100</b>

$$\bar{x}_3 = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_{i3}}{\sum_{j=1}^p n_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_{i3}}{n_{.3}} = \frac{11100}{300} = 37 \text{ mii lei}$$

Cifra medie de a faceri a firmelor mari este de 37 mii lei.

9. Să se calculeze și să se interpreteze media pe total

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^p \bar{x}_j n_{.j}}{\sum_{j=1}^p n_{.j}} = \frac{\sum_{j=1}^p \bar{x}_j n_{.j}}{n_{..}}$$

$$\bar{x} = \frac{15 \cdot 200 + 28 \cdot 250 + 37 \cdot 300}{750} = \frac{3000 + 7000 + 11100}{750} = \frac{21100}{750} = 28,13 \text{ mii lei}$$

Cifra medie de a faceri a tuturor firmelor este de 37 mii lei.

Media pe total poate fi calculată și cu ajutorul distribuției marginale a variabilei X.

**Tabelul 6.2.** Distribuția firmelor din Iași după cifra de afaceri

$x_i$ (mii lei)	$n_{i\cdot}$	$x_i n_{i\cdot}$
10	170	1700
20	115	2300
30	150	4500
40	315	12600
<b>TOTAL</b>	<b>750</b>	<b>21100</b>

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_{i\cdot}}{\sum_{i=1}^m n_{i\cdot}} = \frac{\sum_{i=1}^m x_i n_{i\cdot}}{n_{\cdot\cdot}}$$

$$\bar{x} = \frac{21100}{750} = 28,13 \text{ mii lei}$$

10. Să se calculeze varianțele condiționate (varianțele de grupă)

Varianțele de grupă pot fi calculate pentru fiecare din distribuțiile condiționate ale variabilei cantitative, cifra de afaceri.

$$s_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_j)^2 n_{ij}}{\sum_{i=1}^m n_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_j)^2 n_{ij}}{n_{\cdot j}}$$

**Tabelul 6.4** Distribuția cifrei de afaceri a firmelor din Iași condiționată de tipul firmei să fie “mică” ( $X / Y = y_1$ )

$x_i$ (mii lei)	$n_{i1}$	$x_i n_{i1}$	$x_i - \bar{x}_1$	$(x_i - \bar{x}_1)^2$	$(x_i - \bar{x}_1)^2 n_{i1}$
10	132	1320	-5	25	3300
20	42	840	5	25	1050
30	20	600	15	225	4500
40	6	240	25	625	3750
<b>TOTAL</b>	<b>200</b>	<b>3000</b>	<b>-</b>	<b>-</b>	<b>12600</b>

$$s_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_1)^2 n_{i1}}{\sum_{i=1}^m n_{i1}} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_1)^2 n_{i1}}{n_{\cdot 1}}$$

$$s_1^2 = \frac{12600}{200} = 63$$

**Tabelul 6.5** Distribuția cifrei de afaceri a firmelor din Iași condiționată de tipul firmei să fie “mijlocie” ( $X / Y = y_2$ )

$x_i$ (mii lei)	$n_{i2}$	$x_i n_{i2}$	$x_i - \bar{x}_2$	$(x_i - \bar{x}_2)^2$	$(x_i - \bar{x}_2)^2 n_{i2}$
10	30	300	-18	324	9720
20	60	1200	-8	64	3840
30	90	2700	2	4	360
40	70	2800	12	144	10080
<b>TOTAL</b>	250	7000	-	-	24000

$$s_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_2)^2 n_{i2}}{\sum_{i=1}^m n_{i2}} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_2)^2 n_{i2}}{n_{\cdot 2}}$$

$$s_2^2 = \frac{24000}{250} = 96$$

**Tabelul 6.6** Distribuția cifrei de afaceri a firmelor din Iași condiționată de tipul firmei să fie “mare” ( $X / Y = y_3$ )

$x_i$ (mii lei)	$n_{i3}$	$x_i n_{i3}$	$x_i - \bar{x}_3$	$(x_i - \bar{x}_3)^2$	$(x_i - \bar{x}_3)^2 n_{i3}$
10	8	80	-27	729	5832
20	13	260	-17	289	3757
30	40	1200	-7	49	1960
40	239	9560	3	9	2151
<b>TOTAL</b>	300	11100	-	-	13700

$$s_3^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_3)^2 n_{i3}}{\sum_{i=1}^m n_{i3}} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x}_3)^2 n_{i3}}{n_{\cdot 3}}$$

$$s_3^2 = \frac{13700}{300} = 45,67$$

11. Să se calculeze media varianțelor de grupă

$$\bar{s}^2 = \frac{\sum_{j=1}^p s_j^2 n_{\cdot j}}{\sum_{j=1}^p n_{\cdot j}} = \frac{\sum_{j=1}^p s_j^2 n_{\cdot j}}{n_{\cdot \cdot}}$$

$$\bar{s}^2 = \frac{63 \cdot 200 + 96 \cdot 250 + 45,67 \cdot 300}{750} = \frac{12600 + 24000 + 13700}{750}$$

$$\bar{s}^2 = \frac{50300}{750} = 67,067$$

12. Să se calculeze varianța între grupe (varianța intergrupe)

$$s_{\bar{x}_j}^2 = \frac{\sum_{j=1}^p (\bar{x}_j - \bar{x})^2 n_{.j}}{\sum_{j=1}^p n_{.j}} = \frac{\sum_{j=1}^p (\bar{x}_j - \bar{x})^2 n_{.j}}{n_{..}}$$

$\bar{x}_j$	$n_{.j}$	$\bar{x}_j - \bar{x}$	$(\bar{x}_j - \bar{x})^2$	$(\bar{x}_j - \bar{x})^2 n_{.j}$
15	200	-13,13	172,48	34496,89
28	250	-0,13	0,02	4,44
37	300	8,87	78,62	23585,33
<b>TOTAL</b>	<b>750</b>			<b>58086,67</b>

$$s_{\bar{x}_j}^2 = \frac{58086,67}{750} = 77,45$$

13. Să se calculeze varianța generală

**Tabelul 6.2.** Distribuția firmelor din Iași după cifra de afaceri

$x_i$ (mii lei)	$n_{i.}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 n_{i.}$
10	170	-18,13	328,82	55899,02
20	115	-8,13	66,15	7607,38
30	150	1,87	3,48	522,67
40	315	11,87	140,82	44357,60
<b>TOTAL</b>	<b>750</b>	<b>-12,53</b>	<b>539,27</b>	<b>108386,67</b>

$$s_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_{i.}}{\sum_{i=1}^m n_{i.}} = \frac{\sum_{i=1}^m (x_i - \bar{x})^2 n_{i.}}{n_{..}}$$

$$s_X^2 = \frac{108386,67}{750} = 144,52$$

$$s_X^2 = s_{\bar{x}_j}^2 + \bar{s}^2$$

$$144,52 = 77,45 + 67,07$$

14. Să se calculeze coeficientul de influență a factorului de grupare și coeficientul de influență a factorilor aleatori/întâmplători

$$k_1 = \frac{s_{\bar{x}_j}^2}{s_X^2} \cdot 100 = \frac{77,45}{144,52} \cdot 100 = 53,59\%$$

$$k_2 = \frac{\bar{s}^2}{s_X^2} \cdot 100 = \frac{67,07}{144,52} \cdot 100 = 46,41\%$$

Deoarece coeficientul factorului de grupare  $k_1$  este mai mare decât coeficientul influenței factorilor întâmplători  $k_2$ , factorul de grupare, tipul firmelor (mici, mijlocii și mari) are influență asupra cifrei de afaceri a firmelor din Iași.