I) Să se rezolve (P.P.L):

$$(P.P.L)_g \begin{cases} (1_g) \ (min) \ f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 \\ (2_g) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 8 \end{cases} \\ (3_g) \ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \longrightarrow \text{forma generală}$$

1) aducerea (P.P.L) la forma standard:

$$(PPL)_S \begin{cases} (1_S)(min) \ f(x_1, x_2, x_3; x_4^c, x_5^c) = 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 0 \cdot x_4^c + 0 \cdot x_5^c \\ (2_S) \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^c = 10 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5^c = 8 \end{cases} \longrightarrow \text{forma standard} \\ (3_S) \ x_1, x_2, x_3, x_4^c, x_5^c \geq 0 \end{cases}$$

2) determinăm o soluție de bază admisibilă inițială (S.B.A.i) $\overline{X}_0$ a $(PPL)_S$ (adică a sistemului (2_S)) cu metoda lui Gauss.

$$(2_S) \xrightarrow{\text{scriem}} \overline{A} = \begin{array}{ccccc|c} P_1 & P_2 & P_3 & P_4^c & P_5^c & P_0 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & ① & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & ① \end{pmatrix} & & & & & \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \overline{X}_0 = (0,0,0,10,8)^T - S.B.A.i$$

$\underbrace{x_1 \ x_2 \ x_3}_{v.sec. = 0} \ \underbrace{x_4^c \ x_5^c}_{v.princ.}$

3) Construim tabelul simplex (corespunzător soluției $\overline{X}_0$)

| B | c_B | P_0 | 2 | -1 | -3 | 0 | 0 | $\theta_i = \frac{P_0}{P_{3i}}$ |
			P_1	$P_2\Downarrow$	$P_3\Downarrow$	P_4^c	P_5^c	
P_4^c	0	10	1	1	2	1	0	$10/2 = 5$
$\leftarrow P_5^c$	0	8	3	-1	②	0	1	$8/2 = 4$
$f(\overline{X}_0)=0$			-2	1	3	0	0	$z_j - c_j$
$\Leftarrow P_4^c$	0	2	-2	②	0	1	-1	$2/2 = 1$
P_3	-3	4	3/2	-1/2	1	0	1/2	$4/-\frac{1}{2} = ?$
$f(\overline{X}_1) = -12$			-13/2	5/2	0	0	-3/2	$z_j - c_j$
P_2	-1	1	-1	1	0	1/2	-1/2	
P_3	-3	9/2	1	0	1	1/4	1/4	
$f(\overline{X}_2) = -\frac{29}{2}$			-4	0	0	-5/4	-1/4	$z_j - c_j$

pe col. P_0: $\begin{cases} \overline{X}_0 = (0,0,0,10,8)^T \\ f(\overline{X}_0) = 0 \end{cases}$

pe col. lui P_0: $\begin{cases} \overline{X}_1 = (0,0,4,2,0)^T \\ f(\overline{X}_1) = -12 \end{cases}$

pe col. lui P_0: $\begin{cases} \overline{X}_2 = (0,1,9/2,0,0)^T \\ f(\overline{X}_2) = -\frac{29}{2} \end{cases}$

4) ‖ crit. de optim (toate dif. $z_j - c_j \leq 0$)
soluția găsită (pe coloana lui P_0)
este optimă și unică !

$\begin{cases} \overline{X}_{optim}^{standard} = (0,1,9/2,0,0)^T \\ (min) f = -29/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{X}_{optim}^{inițial} = (0,1,9/2)^T \\ (min) f = -29/2 \end{cases}$

$\text{II}\begin{cases} (1_g)\ (max)\ f(x_1,x_2,x_3) = x_1 + x_2 + 3x_3 \\ (2_g)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_3 \le 6 \end{cases} \\ (3_g)\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ forma iniţială (generală)

$\Downarrow$

$\begin{cases} (1_S)\ (min)\ (-f)(x_1,x_2,x_3;\ x_4^c) = -x_1 - x_2 - 3x_3 + 0 \cdot x_4^c \\ (2_S)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 10 \\ 3x_1 + x_3 + x_4^c = 6 \end{cases} \\ (3_S)\ x_1, x_2, x_3, x_4^c \ge 0 \end{cases}$

$\overset{P_1\ P_2\ P_3\ P_4^c\ P_0}{\Rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & ① & 2 & 0 & | & 10 \\ 3 & 0 & 1 & ① & | & 6 \end{pmatrix}} \Rightarrow \widehat{x_0} = (0,10,0,6)^T - SBAi$

V.sec $=0$ V.prin.

$\theta_i = \dfrac{P_0}{P_3 \downarrow}$

$z_j - c_j = \sum(c_B \cdot P_j) - c_j$

$\overset{II}{}(4a)\ (*)\ z_j - c_j \le 0$

$\begin{cases} x_{optimă}^{standard} = (0,0,5,1)^T \\ (min)(-f) = -15 \end{cases} \rightarrow$ soluţie optimă unică pt. $(PPL)_S$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x_{optimă}^{iniţială} = (0,0,5)^T \\ (max)(f) = 15 \end{cases} \rightarrow$ sol. optimă unică pt. $(PPL)_g$

$$\text{II} \begin{cases} (1)\ (\min)\ f(x_1,x_2,x_3) = 2x_1 + 3x_2 - x_3 \\[4pt] (2)\ \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 8 \end{cases} \\[4pt] (3)\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (1_s)\ (\min)\ f = 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 0x_4^c + 0x_5^c \\[4pt] (2_s)\ \begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4^c = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5^c = 8 \end{cases} \\[4pt] (3_s)\ x_1, \dots, x_5^c \ge 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \overset{P_1}{3} & \overset{P_2}{-6} & \overset{P_3}{2} & \overset{P_4^c}{1} & \overset{P_5^c}{0} & \overset{P_0}{6} \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{}_{\text{v. sec} = 0} \qquad \underbrace{}_{\text{v. priv.}}$$

$$\overline{x}_0 = (0, 0, 0, 6, 8)^T - S.B.A.\hat{\imath}$$

B	c_B	P_0	$\begin{matrix}2\\P_1\end{matrix}$	$\begin{matrix}3\\P_2\end{matrix}$	$\begin{matrix}-1\\P_3\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\P_4^c\end{matrix}$	$\begin{matrix}0\\P_5^c\end{matrix}$	θ_i
P_4^c	0	6	3	-6	[2]	1	0	$6/2 = 3$
P_5^c	0	8	1	2	1	0	1	$8/1 = 1$
$f=$		0	-2	-3	1	0	0	
P_3	-1	3	3/2	-3	1	1/2	0	
P_5^c	0	5	-1/2	5	0	-1/2	1	
$f=$		-3	-7/2	0	0	-1/2	0	

$\theta_i = \dfrac{P_0}{P_{3\downarrow}} \quad L_2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)$

$\Downarrow\ 4_b)$

$$\begin{cases} x_{\text{optimă}}^{\text{standard}} = (0, 0, 3, 0, 5)^T \\ (\min)\ f = -3 \end{cases}$$

— sol. optimă dar __nu este unică__

$f\ (PPL)_s$ are o ∞ de sol. optime $\neq$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} x_{\text{optimă}}^{\text{inițială}} = (0, 0, 3)^T \\ (\min)\ f = -3 \end{cases}$$

— sol. optimă dar __nu este unică__

$\neq$ probl. inițială are o ∞ de sol. optime
care conduce către aceeași valoare
minimă $(=-3)$ a fcț. obiectiv f