

Gheorghe RUSU

Marius SPÎNU

MATEMATICI APLICATE ÎN ECONOMIE

IAȘI, 2008

CUPRINS

Prefață	5
Cap.1. Transformări elementare.....	8
1.1. Matrice	8
1.1.1. Rangul unei matrice	8
1.1.2. Transformări elementare.....	9
1.1.3. Forma Gauss-Jordan a unei matrice.....	10
1.1.4. Inversa unei matrice	13
1.2. Sisteme liniare de ecuații algebrice	15
1.2.1. Explicitarea sistemelor liniare de ecuații algebrice.....	18
Cap.2. Spații liniare.....	21
2.1. Definiția spațiului liniar	21
2.2. Dependență și independență liniară.....	23
2.3. Baze de vectori. Coordonatele unui vector într-obază	26
2.4. Schimbarea coordonatelor unui vector la schimbarea bazei	28
2.5. Forme pătratice	34
Cap. 3. Elemente de programare liniară	38
3.1. Programare liniară	38
3.1.1. Modele economice ce conduc la o problemă de programare liniară.....	38
3.1.2. Formularea generală a unei probleme de	42
programare liniară	
3.1.3. Forme ale unei probleme de programare liniară	43
3.1.4. Mulțimi convexe	45
3.1.5. Soluții ale unei probleme de programare liniară	46
3.2. Metoda simplex și algoritmul simplex primal	48
3.2.1. Principiile metodei simplex	48
3.2.2. Etapele algoritmului simplex primal.....	52
3.2.3. Metoda celor două faze.....	57
3.3. Problema transporturilor	62
3.3.1. Soluții admisibile de bază pentru o problemă de transport ..	64
3.3.2. Soluții optime pentru o problemă de transport.....	67
Cap. 4. Serii numerice. Serii de puteri	76
4.1. Serii numerice	77
4.1.1. Șiruri de numere reale	77
4.1.2. Noțiunea de serie numerică. Convergență.	78
Proprietăți generale ale seriilor	
4.1.3. Exemple remarcabile de serii	81
4.1.4. Proprietăți generale ale seriilor numerice	84
4.2. Serii cu termeni pozitivi	87
4.3. Serii alternate	94
4.4. Serii absolut convergente.	96
Serii semi-convergente	
4.5. Serii de puteri.....	102

4.5.1. Serii de puteri	104
Cap.5. Funcții reale de n variabile reale	110
5.1. Șiruri de puncte în \mathbb{R}^n	110
5.2. Funcții de două variabile	112
5.3. Limită și continuitate	114
5.4. Derivate parțiale și diferențiale	116
5.4.1. Derivate parțiale de ordinul întâi	116
5.4.2. Derivate parțiale de ordin superior	117
5.4.3. Derivate parțiale ale funcțiilor compuse	119
5.4.4. Diferențialele funcțiilor de mai multe variabile	120
5.5. Extremele funcțiilor de mai multe variabile	122
5.5.1. Formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile ..	122
5.5.2. Teorema lui Fermat pentru funcții de mai multe variabile ..	123
5.5.3. Condiții suficiente de extrem (Determinarea extremelor) ..	125
Bibliografie	129

Prefață

Importanța matematicii în orice domeniu al activității umane, este evidentă și de necontestat (chiar dacă uneori este mai puțin vizibilă). Metodele și modelele matematice puse la dispoziția cercetătorilor și specialiștilor din domenii foarte variate, sunt indispensabile în analiza și studiul fenomenelor (economice, fizice, chimice, sociale, etc.) cu care aceștia se ocupă.

Și în studiul economiei, privită ca o componentă esențială a activității umane, metodele și cunoștințele matematice sunt fundamentale pentru asimilarea, aplicarea, modelarea și înțelegerea fenomenelor economice. Mai mult, datorită tendințelor de globalizare din toate domeniile și a dezvoltării fără precedent a economiei, modelarea și studiul fenomenelor economice din ce în ce mai complexe, necesită aplicarea unor instrumente matematice tot mai sofisticate și elaborate.

Subliniem și faptul că lucrările distinse cu premiul Nobel în economie în ultimii ani folosesc exhaustiv un aparat matematic extrem de complex și elaborat. Mobilitățile academice ale studenților și cadrelor didactice din domeniul economic, au relevat un grad înalt de utilizare a tehnicilor matematice în cursurile și lucrările de cercetare din universitățile occidentale.

Matematicile aplicate în economie sunt importante și datorită corelațiilor pe care le realizează cu alte domenii de cercetare și cu alte discipline de studiu. Astfel:

- *fundamentează teoria optimizării, pune bazele matematice în statistica economică și în cercetarea operațională (teoria stocurilor, teoria așteptării, teoria fiabilității, etc.), are un rol central în finanțe și asigurări (dobânzi, rate, obligațiuni, acțiuni, etc.);*

- realizează un suport teoretic, logic și coerent, pentru alte discipline de specialitate precum: micro- și macro-economia, statistica economică, marketing, tehnici financiare și de asigurări, etc.;
- formează studenților deprinderea raționamentelor logice, deducția și inducția pornind de la elemente cunoscute sau demonstrate.

În ultimii ani, învățământul la distanță a devenit foarte popular datorită constrângerilor financiare și a necesității unei calificări superioare pe piața muncii din România. Nu în ultimul rând, în actualele condiții ale economiei de piață, prin învățământul la distanță se realizează și mult discutata reconversie profesională.

Pentru o eficiență sporită a acestei forme de învățământ, cursanții trebuie să aibă acces la informații corecte, complete și în concordanță cu programele analitice și planurile de învățământ. Desigur, datorită modului de organizare, studenții acestei forme de învățământ trebuie să depună un efort mai mare decât studenții de la zi care beneficiază de o îndrumare continuă și sistematică din partea cadrelor didactice.

Din aceste considerente credem că materialul pe care-l prezentăm este util tuturor celor care au optat pentru învățământul la distanță. El a fost elaborat de cadre didactice cu experiență în predarea matematicii, care ani la rând au ținut cursuri și seminarii cu studenții facultății de economie, la zi și I.D.

Structura lucrării este axată pe programa analitică în vigoare și are în vedere înzestrarea studenților cu acele cunoștințe de matematică ce le servesc la înțelegerea fenomenelor economice și la rezolvarea unor probleme concrete pe care acestea le ridică. În același timp se urmărește și formarea unor deprinderi de raționament corect, de realizare a unor deducții logice și de obținere a unui profil intelectual complet.

Am încercat realizarea unui material concis, cu o structură echilibrată, nu foarte abstract și nici sec, dar fără a renunța la o minimă rigurozitate atât de specifică matematicii. Acolo unde a fost cazul s-au dat demonstrații, considerând că ele contribuie la însușirea corectă și profundă a noțiunilor prezentate. S-a renunțat la justificarea obținerii unor rezultate teoretice, dacă acest lucru impunea folosirea unui aparat matematic complex și de o anumită finețe.

În primul capitol, se face o trecere în revistă a unor rezultate fundamentale din algebra liniară. Acestea sunt aprofundate în cap. II și aplicate problemelor de programare liniară din cap.III. Capitolele IV și V au drept obiectiv studiul unor clase de probleme de analiză matematică cu aplicații frecvente în optimizarea fenomenelor economice.

Bibliografia prezentată nu este exhaustivă, dar permite tuturor celor care doresc, aprofundarea anumitor capitole sau noțiuni introduse pe parcursul lucrării.

Septembrie, 2008

Autorii

Cap. 1 TRANSFORMĂRI ELEMENTARE

Studiul matricelor este legat de discuția și rezolvarea sistemelor de ecuații algebrice liniare și constituie elementul de control al aproape întregii programe analitice a disciplinei „Matematici aplicate în economie”. Noutatea pe care o propunem se numește **transformare elementară** efectuată asupra liniilor unei matrice, obținând din aceasta o matrice echivalentă din punctul de vedere al rangului. Departe de a fi o abstractizare inutilă, folosirea transformărilor elementare poate duce, fără calcule dificile, la determinarea rangului, la obținerea inversei, sau, la obținerea soluției unui sistem algebric liniar.

Se cunosc dificultățile pe care le întâmpinăm la discuția sau rezolvarea acestui tip de sisteme. Metodele bazate pe teoremele lui Cramer, Kroneker-Capelli sau Rouché sunt greoaie și folosesc determinanții, al căror calcul este laborios. Prin transformarea matricei lărgite a unui astfel de sistem se obține *forma explicită* din care se pot trage concluziile privind tipul și soluțiile sale. O categorie specială de soluții ale unui sistem liniar compatibil nedeterminat o formează soluțiile de bază care vor juca un rol deosebit în rezolvarea problemelor de programare liniară.

1.1 MATRICE

1.1.1 RANGUL UNEI MATRICE

Prin matrice înțelegem o aplicație $A: I \times J \rightarrow \mathbb{K}$, unde $I = 1, 2, \dots, m$; $J = 1, 2, \dots, n$, \mathbb{K} o mulțime oarecare. Ea poate fi reprezentată printr-un tablou de elemente din \mathbb{K} , așezate pe linii și coloane.

Pentru o matrice de tipul $m \times n$ vom folosi notația:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (1.1.1)$$

Suprimând din matricea A , $m - r$ linii și $n - r$ coloane, obținem o matrice pătratică de ordinul r . Determinantul acestei matrice se numește minor de ordinul r al matricei.

Definiția 1.1.1. Numim *rangul unei matrice* A de tipul $m \times n$ ($m \leq n$) un număr natural r cu proprietățile:

- a) în matrice există cel puțin un minor de ordinul r diferit de zero.
- b) toți minorii de ordinul $r + 1$ sunt nuli.

Observație. Se demonstrează că dacă toți minorii de ordinul $r + 1$ sunt nuli, atunci sunt nuli și toți minorii de ordin mai mare ca $r + 1$.

În continuare vom pune în evidență operații pe care le vom numi transformări elementare, care se bucură de proprietatea că nu modifică rangul unei matrice. Ele au la bază proprietățile determinanților.

1.1.2 TRANSFORMĂRI ELEMENTARE

Definiția 1.1.2. Numim *transformare elementară aplicată unei matrice* una din următoarele operații:

- (T_1) – înmulțirea unei linii cu un scalar real nenul ($\alpha \neq 0$);
- (T_2) – adunarea unei linii la o altă linie;
- (T_3) – schimbarea a două linii între ele.

Teorema 1.1.1. Transformările elementare nu modifică rangul unei matrice.

Demonstrație. Fie matricea A de tipul $m \times n$ și matricele $T_i (i = \overline{1,3})$ care se obțin din matricea unitate I_m . Înmulțind la stânga matricea A cu matricele T_i obținem matricele $A_i = T_i A$. Presupunem că rangul matricei A este r_A . Vom avea:

$$r_{A_i} \leq \min(r_{T_i}, r_A) = \min(m, r_A) = r_A \quad (1.1.2)$$

Din $A_i = T_i A$, cum T_i sunt ineversabile găsim $A = T_i^{-1} A_i$ și deci:

$$r_{A_i} \leq \min(r_{T_i}, r_A) = \min(m, r_{A_i}) = r_{A_i} \quad (1.1.3)$$

Din (1.1.2) și (1.1.3) rezultă că $r_{A_i} = r_A$, $i = \overline{1,3}$.

Definiția (1.1.3). Două matrice A și B care se obțin una din alta prin transformări elementare se numesc **echivalente** (în privința rangului) și scriem $A \sim B$.

1.1.3. FORMA GAUSS – JORDAN A UNEI MATRICE

Fie A matricea unui sistem de m ecuații algebrice liniare cu n necunoscute ($m < n$).

Definiția 1.1.4. Matricea A se spune că are **forma Gauss-Jordan** dacă conține r ($r \leq m$) coloane ale matricei unitate de ordinul m .

Dacă aceste coloane sunt j_1, j_2, \dots, j_r atunci forma matricei este

$$A = \begin{pmatrix} \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & a'_{1k} & \dots & a'_{1n} \\ \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & a'_{2k} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & a'_{rk} & \dots & a'_{rn} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (1.1.4)$$

Teorema 1.1.2. Orice matrice nenulă poate fi adusă la forma Gauss-Jordan, printr-un număr finit de transformări elementare.

Demonstrație. Fie deci matricea A de tipul $m \times n$ a unui sistem liniar de m ecuații cu n necunoscute.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Fie $a_{11} \neq 0$. Dacă $a_{11} = 0$, atunci printr-o transformare de tipul (T_3) putem aduce în locul lui a_{11} un element $a_{i1} \neq 0$; $i = \overline{2, m}$ care există deoarece prima coloană are cel puțin un element diferit de zero, în caz contrar sistemul nu ar avea n necunoscute.

Printr-o transformare de tipul (T_1) cu $\alpha = \frac{1}{a_{11}}$ realizăm în poziția $(1,1)$ un element egal cu unu. Prin $m-1$ transformări de tipul (T_1) și (T_2) în care linia întâi este succesiv înmulțită cu numere convenabile: $-a_{21}, -a_{31}, -a_{i1}, \dots, -a_{m1}$ și adunată de fiecare dată la liniile: a doua, a treia, . . . a i -a linie, . . . a m -a linie, realizăm pe prima coloană toate elementele nule cu excepția primului element care este unu.

Dacă dorim să realizăm pe coloana j toate elementele nule cu excepția elementului din poziția (i,j) care să fie egal cu unu procedăm astfel:

- a) ne asigurăm că $a_{ij} \neq 0$
- b) aplicăm o transformare de tipul (T_1) cu $\alpha = \frac{1}{a_{ij}}$, obținând în poziția (i,j) un element egal cu unu.
- c) Aplicăm succesiv $m-1$ transformări de tipul (T_1) și (T_2) , înmulțind linia i cu: $-a_{1j}, -a_{2j}, \dots, -a_{mj}$ și adunând-o la liniile: întâia, a doua, . . . , a m -a linie obținem pe coloana j toate elementele nule cu excepția elementului din poziția (i,j) care devine unu. Algoritmul se oprește când pe liniile $\overline{r+1, m}$ nu mai avem elemente nenule. Elementul nenul a_{ij} dat se va numi **pivot**, iar ansamblul transformărilor elementare necesare transformării matricei A într-o matrice cu coloana i din matricea unitate de ordinul m în coloana j se va numi *pivotaajul cu element pivot a_{ij}* .

Din forma Gauss-Jordan a matricei A putem observa că rangul matricei este r , acesta fiind de ordinul minorului format cu primele r linii și coloanele j_1, j_2, \dots, j_r . Toți minorii de ordinul $r+1$ sunt nuli. În practică nu este neapărat necesar să obținem coloanele matricei unitate în ordinea lor naturală, numărul lor ne va da rangul. Putem alege pivot orice element diferit de zero oriunde s-ar găsi el de preferință cel care este egal cu 1.

Exemplul 1.1.1. Să se aducă la forma Gauss-Jordan și să se determine rangul matricei:

$$\begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Luăm pivot elementul încercuit. Prima linie înmulțită cu 1 se adună la a doua, apoi cu -2 și o adunăm la a treia obținând matricea :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Luăm pivot elementul încercuit. Linia a doua o înmulțim cu $1/3$ și apoi înmulțită cu -2 o adunăm la prima obținând matricea:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & -\textcircled{1} & 1 \end{bmatrix}$$

Luăm pivot elementul încercuit. Linia a treia o înmulțim cu -1 , apoi înmulțită cu -1 o adunăm la a doua și obținem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei este egal cu 3, egal cu numărul maxim de coloane ale matricei unitate.

Exemplul 1.1.2. Să se determine rangul matricei:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Făcând pivotajele cu elementele pivot încercuite obținem succesiv:

$$\begin{bmatrix} 2 & \textcircled{1} & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & \textcircled{1} & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 5 \\ \textcircled{6} & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Rangul matricei considerate este 3.

1.1.4 INVERSA UNEI MATRICE

Fie A o matrice pătrată de ordinul m și $B = A : I_m$ matricea obținută prin alăturarea matricei unitate de ordinul m la matricea A . Se cunoaște că se numește matrice inversă a unei matrice pătrate A , o matrice, notată cu A^{-1} , astfel încât:

$$AA^{-1} = AA^{-1} = I_m \quad (1.1.6)$$

Presupunem pentru moment că există matricea A^{-1} . Înmulțind la stânga matricea B cu A^{-1} obținem:

$$\bar{B} = A^{-1}B = \left[A^{-1}A : A^{-1}I_m \right] = \left[I_m : A^{-1} \right]$$

De la matricea B putem ajunge la matricea \bar{B} cu ajutorul transformărilor elementare. Făcând pivotaje în matricea A în vederea obținerii celor m coloane ale matricei unitate de ordinul m , în dreapta barei vom găsi tocmai matricea A^{-1} . Dacă coloanele nu sunt în ordinea lor naturală, putem schimba liniile între ele obținând în stânga barei chiar matricea unitate. Dacă nu reușim să obținem coloane ale matricei unitate în număr egal cu ordinul matricei A , atunci matricea nu are inversă.

Exemplul 1.1.3. Să se găsească inversa matricei:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

considerând în matricea \bar{B} pivotaje cu elemente pivot încercuite avem :

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \textcircled{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \sim \\ &\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right] \sim \end{aligned}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Inversa matricei A este:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Exemplul 1.1.4. Să se găsească inversa matricei:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Vom avea:

$$\begin{aligned} \bar{B} &= \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{4} & -5 & \vdots & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & \vdots & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \\ &\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/4 & \vdots & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -5/4 & \vdots & -1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matricea nu admite inversă.

Deoarece matricele B și \bar{B} sunt echivalente, sistemele (1.2.1) și (1.2.4) vor fi echivalente (adică vor avea aceleași soluții). Este suficient pentru aceasta să observăm că transformările elementare aplicate liniilor matricei B pentru a fi adusă la forma \bar{B} au drept consecințe asupra sistemului de ecuații:

(T₁) – înmulțirea unei ecuații cu un număr diferit de zero;

(T₂) – adunarea la o ecuație a unei alte ecuații (eventual înmulțită cu un scalar nenul);

(T₃) – schimbarea a două ecuații între ele.

Evident, aceste operații aplicate unui sistem de ecuații îl transformă în unul echivalent.

Teorema 1.2.1. Condiția necesară și suficientă ca sistemul (1.2.1) să fie compatibil este ca $\bar{b}_i = 0$, $i = \overline{r+1, m}$.

Demonstrație. Să arătăm mai întâi necesitatea condiției.

Presupunem că sistemul (1.2.1) este compatibil. Aceasta înseamnă că sistemul (1.2.4) este compatibil. Din compatibilitatea acestuia din urmă rezultă $\bar{b}_i = 0$ pentru $i = \overline{r+1, m}$.

Să arătăm acum suficiența condiției. Presupunem că $\bar{b}_i = 0$, $i = \overline{r+1, m}$. Rezultă atunci că sistemul (1.2.4) este compatibil admitând ∞^{n-r} soluții și deci sistemul (1.2.1) este compatibil.

În baza acestei teoreme ușor pot fi demonstrate teoremele lui Kronecker-Capelli și Rouché. Pentru $r = m = n$ se obțin rezultatele cunoscute de la sistemele de n ecuații cu n necunoscute.

Exemplul 1.2.1. Să se studieze compatibilitatea sistemului și în caz afirmativ să se găsească soluția lui.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

Matricea lărgită a sistemului, după o serie de pivotaje cu elemente pivot încercuite, devine:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -5 & 5 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\textcircled{2} & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & 6 & -2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Sistemul considerat este echivalent cu sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + 1/2x_3 - 1/2x_4 = 3/2 \\ x_2 - 3/2x_3 + 3/2x_4 = -1/2 \end{cases}$$

care este compatibil având soluția:

$$\begin{cases} x_1 = 3/2 - 1/2\alpha + 1/2\beta, \\ x_2 = -1/2 + 3/2\alpha - 3/2\beta, \\ x_3 = \alpha, \quad x_4 = \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Exemplul 1.2.2. Să se studieze compatibilitatea sistemului:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 10 \end{cases}$$

Matricea lărgită a sistemului după o serie de pivotaje cu elemente pivot încercuite devine:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ -3 & 5 & 6 & 1 & 10 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & \textcircled{3} & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 12 & 9 & 14 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2 & -4/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right]$$

Cum $\bar{b}_3 = -1 \neq 0$, sistemul este incompatibil.

1.2.1. EXPLICITAREA SISTEMELOR DE ECUAȚII LINIARE

Fie sistemul (1.2.1). Presupunem că rangul matricei A este $m < n$.

Definiția (1.2.1). Vom spune că sistemul (1.2.1) este *explicitat în raport cu un grup de m variabile* (necunoscute), dacă în matricea A a sistemului coloanele acestor variabile sunt cele m coloane ale matricei unitate de ordinul m .

Deoarece cu cele n variabile ale sistemului putem forma C_n^m grupuri diferite de câte m variabile, rezultă că un sistem liniar, care poate fi explicitat în raport cu cel puțin un grup de m variabile, va avea cel mult C_n^m forme explicite. Acest număr maxim va fi atins dacă explicitarea poate avea loc în raport cu oricare dintre cele C_n^m grupuri diferite de câte n variabile și toate formele explicite sunt distincte.

Într-un sistem liniar explicitat sunt două tipuri de variabile (necunoscute): unele, ai căror coeficienți formează coloanele matricei unitate, altele ai căror coeficienți formează celelalte coloane ale matricei sistemului. Ca de obicei, primele vor fi denumite *variabile principale*, iar celelalte *variabile secundare*. În teoria programării liniare variabilele principale mai sunt denumite *bazice*, iar variabilele secundare *nebazice*.

Definiția (1.2.2). Numim *soluție de bază a unui sistem de ecuații liniare*, o soluție particulară obținută dintr-o formă explicită, prin egalarea cu zero a variabilelor secundare.

Din definiția dată rezultă că dacă sistemul este compatibil nedeterminat, atunci are cel puțin o soluție de bază și cel mult C_n^m soluții de bază. Evident, sistemele incompatibile și cele compatibil determinate nu au soluții de bază.

Dacă o soluție de bază are exact m componente nenule, atunci soluția de bază se numește **nedegenerată**, iar dacă are mai puțin de m componente nenule se numește soluție de bază **degenerată**.

Soluțiile de bază ale unui sistem liniar se clasifică și după un alt criteriu. Dacă toate componentele unei soluții de bază au valori nenegative (≥ 0), soluția de bază se numește **admisibilă**. În caz contrar, soluția de bază se numește **neadmisibilă** (are componente strict negative).

Să considerăm că $\mathbf{r} = \mathbf{m}$. În acest caz din (1.2.4) obținem o soluție de bază:

$$x_{j_1} = \bar{b}_1, \quad x_{j_2} = \bar{b}_2, \quad \dots \quad x_{j_i} = \bar{b}_i, \dots, x_{j_m} = \bar{b}_m, \text{ restul până la } n \text{ egale cu zero.}$$

Dorim ca variabila principală x_{j_i} să devină secundară iar variabila secundară $x_j (j \neq j_1, \dots, j_r)$ să devină principală. Pentru aceasta fie și $a_{ij} \neq 0$. Efectuând în matricea $\bar{\mathbf{B}}$ un pivotaj cu element pivot a_{ij} găsim o altă soluție de bază:

$$x_{j_1} = \bar{b}_1 - \bar{a}_{1j} \frac{\bar{b}_i}{a_{ij}}, x_{j_2} = \bar{b}_2 - \bar{a}_{2j} \frac{\bar{b}_i}{a_{ij}}, \dots, x_j = \frac{\bar{b}_i}{a_{ij}}, \dots, x_{j_m} = \bar{b}_m - \bar{a}_{mj} \frac{\bar{b}_i}{a_{ij}}$$

și restul până la n egale cu zero.

Putem scrie variabilele principale concentrat sub forma:

$$\begin{cases} x_{j_k} = \bar{b}_k - a_{kj} \frac{\bar{b}_i}{a_{ij}}, & \text{pentru } k \neq j \\ x_j = \frac{\bar{b}_i}{a_{ij}}, & \text{pentru } k = j \end{cases} \quad (1.2.5)$$

Exemplul 1.2.3. Să se determine toate formele explicite și soluțiile de bază corespunzătoare pentru sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

Matricea lărgită a sistemului este:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Pivotajele:

$$\text{a) } \left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \textcircled{1} & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\text{b) } \left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$c) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\textcircled{1} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \textcircled{1} & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$d) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \textcircled{1} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \textcircled{1} & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

$$e) \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -\textcircled{1} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \textcircled{1} & 2 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

conduc la formele explicite în raport cu grupurile:

$$(x_1, x_2), (x_1, x_4), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4),$$

$$a) \begin{array}{l} x_1 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{array}$$

$$b) \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{array}$$

$$c) \begin{array}{l} x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \end{array}$$

$$d) \begin{array}{l} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \end{array}$$

$$f) \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 2 \end{array}$$

Soluțiile de bază vor fi:

(S₁) $x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0$; soluție de bază nedegenerată admisibilă

(S₂) $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2$; soluție de bază nedegenerată admisibilă

(S₃) $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 0$; soluție de bază nedegenerată admisibilă

(S₄) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2$; soluție de bază degenerată admisibilă

(S₅) $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2$; soluție de bază degenerată admisibilă

Sistemul nu poate fi explicitat în raport cu grupul de variabile (x_1, x_3) și admite doar patru soluții de bază distincte din numărul maxim de $C_4^2 = 6$ posibilități.

Cap. 2 SPAȚII LINIARE

Înzestrând o mulțime oarecare cu o serie de operații având anumite proprietăți obținem noțiunea de **structură algebrică**. Unele tipuri de structuri algebrice au fost studiate în liceu (monoid, grup, inel, corp). **Spațiul liniar** se definește în același mod, elementele sale (vectorii) generalizând noțiunea de vector liber utilizat în fizică sau matematică.

În orice spațiu liniar se introduce noțiunea de **independență liniară** precum și cea de **bază**. Vom introduce aceleași noțiuni dar numai în cazul particular al spațiului liniar \mathbb{R}^n (care apare cel mai des în contextul aplicațiilor economice).

În studiul problemelor economice se impune problema determinării valorii maxime sau a valorii minime a unor funcții. Un ajutor prețios în acest scop îl constituie **formele pătratice** care generalizează funcția de gradul al doilea.

2.1. DEFINIȚIA SPAȚIULUI LINIAR

Fie A o mulțime oarecare și K un corp având elementele neutre 0_K respectiv 1_K . Presupunem că pe A se pot defini două operații astfel:

a) $(\forall) \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, (\exists)$ un element notat cu $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in A$ astfel încât $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y}$.

b) $(\forall) \mathbf{x} \in A, (\forall) \lambda \in K, (\exists)$ un element notat $\lambda \mathbf{x} \in A$, astfel încât $(\lambda, \mathbf{x}) \rightarrow \lambda \mathbf{x}$.

Prima operație, de tip aditiv, este o operație internă iar cea de doua, de tip multiplicativ, este o operație externă pentru A .

Definiție. Mulțimea A formează un **spațiu liniar** peste corpul K dacă sunt satisfăcute următoarele proprietăți:

$$L_1) (\forall) \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in A, \quad \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z},$$

$$L_2) (\forall) \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x},$$

$$L_3) (\exists) 0_A \in A \text{ astfel încât } \mathbf{x} + 0_A = \mathbf{x}, \quad (\forall) \mathbf{x} \in A,$$

$$L_4) (\forall) \mathbf{x} \in A, (\exists) -\mathbf{x} \in A \text{ astfel încât } \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = 0_A,$$

$$L_5) (\forall) \lambda \in K, (\forall) \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A, \lambda(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y},$$

$$L_6) (\forall) \lambda \in K, (\forall) \mu \in K, (\forall) \mathbf{x} \in A, (\lambda + \mu) \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y},$$

$$L_7) (\forall) \lambda, \mu \in K, (\forall) \mathbf{x} \in A, \lambda(\mu\mathbf{x}) = \mu(\lambda\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x},$$

$$L_8) (\forall) \mathbf{x} \in A, 1_K \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Elementele lui K se numesc **scalari**, iar cele ale lui A , **vectori**. Prima operație se numește **adunarea vectorilor** iar cea de a doua **înmulțirea vectorilor cu scalari** din K . Atunci când nu este pericol de confuzie vectorul nul 0_A se notează simplu 0 . De asemenea, elementele neutre ale lui K se scriu 0 și 1 (în imensa majoritate a aplicațiilor $K=\mathbb{R}$).

Consecințe. Din axiome decurg următoarele proprietăți:

$$a) (\forall) \mathbf{x} \in A, 0\mathbf{x} = 0,$$

$$\text{Într-adevăr, din } L_6) \text{ obținem } (\lambda + 0) \mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + 0\mathbf{x}, \text{ adică } \lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + 0\mathbf{x}.$$

Axioma L_3) conduce la $0\mathbf{x} = 0$.

$$b) (\forall) \lambda \in K, \lambda \cdot 0 = 0.$$

Plecăm de la L_5): $\lambda(\mathbf{x} + 0) = \lambda\mathbf{x} + \lambda 0$. Obținem $\lambda\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \lambda 0$.

Aceeași axiomă L_3) arată că: $\lambda 0 = 0$.

$$c) (\forall) \mathbf{x} \in A, (-1) \mathbf{x} = -\mathbf{x}$$

Folosim a), adică $0\mathbf{x} = 0$ și înlocuim 0 prin $1 + (-1)$. Din L_6) obținem:

$$1\mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = 0. \text{ } L_8) \text{ conduce la } \mathbf{x} + (-1)\mathbf{x} = 0, \text{ iar } L_4) \text{ arată că } (-1)\mathbf{x} = 0.$$

Exemplu:

Considerăm $A = \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} = \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}$ și $K=\mathbb{R}$. Adunarea elementelor din A revine la adunarea matricelor cu o singură coloană sau cu o singură linie.

$$(\forall) \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \text{ din } \mathbb{R}^n,$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n$$

În mod similar produsul unui scalar din \mathbb{R} cu un element al lui \mathbb{R}^n se definește prin: $\lambda\mathbf{x} = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$

2.2. DEPENDENȚĂ ȘI INDEPENDENȚĂ LINIARĂ

Fie \mathbf{A} un spațiu liniar peste corpul K și fie $\mathbf{x}_i \in \mathbf{A}, \lambda_i \in K, i = \overline{1, h}$.

Definiție 2.2.1. Se numește combinație liniară a vectorilor x_i cu scalarii λ_i expresia :

$$\mathbf{E} = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_h \mathbf{x}_h. \quad (2.2.1)$$

Consecința a) din definiția spațiului liniar ne arată că atunci când $\lambda_i = 0, (\forall) i = \overline{1, h} \Rightarrow E = 0$. Reciproca acestuia nu este întotdeauna adevărată.

Definiție 2.2.2. Vectorii $\mathbf{x}_i = \mathbf{A}, i = \overline{1, h}$ se numesc liniar independenți dacă:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \cdots + \lambda_h \mathbf{x}_h = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_h = 0.$$

În caz contrar, dacă $\mathbf{E}=\mathbf{0}$ cu măcar un scalar nenul, vectorii \mathbf{x}_i se numesc liniari dependenți, adică:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_h \mathbf{x}_h = \mathbf{0} \quad \not\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_h = 0$$

Exemplu:

Fie spațiul liniar $A = \mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ și vectorii:

$$\mathbf{X}_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})^t, \mathbf{X}_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})^t, \dots, \mathbf{X}_h = (x_{h1}, x_{h2}, \dots, x_{hn})^t$$

vectori din A. Condiția $E=0$ conduce la sistemul liniar și omogen:

$$\begin{cases} \lambda_1 x_{11} + \lambda_2 x_{21} + \cdots + \lambda_h x_{h1} = 0 \\ \lambda_1 x_{12} + \lambda_2 x_{22} + \cdots + \lambda_h x_{h2} = 0 \\ \vdots \\ \lambda_1 x_{1n} + \lambda_2 x_{2n} + \cdots + \lambda_h x_{hn} = 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

Vectorii sunt liniari independenți dacă sistemul (2.2.3) admite numai soluția banală și liniar dependenți în caz contrar.

Din teoria sistemelor omogene independența liniară este caracterizată prin:

$$\text{rang } \mathbf{M} \equiv r_{\mathbf{M}} = h \quad (2.2.4)$$

unde matricea $M \in \mathcal{M}_{n,h}(\mathbb{R})$ este formată prin componentele vectorilor \mathbf{x}_i .

Dacă (2.2.3) are soluții nebanale, ele se exprimă prin $h - r_M$ parametri reali. Înlocuite în (2.2.2) aceste soluții conduc la una sau mai multe relații de dependență liniară.

Pe baza acestui exemplu vom realiza un mare număr de aplicații. Proprietățile familiilor de vectori liniar independenți și al familiilor de vectori liniar dependenți sunt date în următoarele teoreme:

Teorema 2.2.1. O mulțime de vectori liniar independenți nu poate conține vectorul nul.

Demonstrație: Presupunem prin absurd că mulțimea de vectori independenți $\mathcal{F} = \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_i, \dots, \mathbf{x}_h$ ar conține vectorul nul și că $\mathbf{x}_i = \mathbf{0}$.

Combinăția liniară :

$$E = 0 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 + \dots + 1 \cdot \mathbf{x}_i + \dots + \lambda_h \mathbf{x}_h = \mathbf{0} \quad \text{cu scalarul } \lambda_i \text{ nenul.}$$

Contradicția justifică teorema.

Teorema 2.2.2. Orice submulțime a unei mulțimi de vectori liniar independenți este formată tot din vectori liniar independenți.

Demonstrație: Tot prin reducere la absurd presupunem că deși $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_h$ sunt liniar independenți, submulțimea $\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \dots, \mathbf{x}_{i_k}$, $k \leq h$ este formată din vectori liniar dependenți. Atunci, egalitatea:

$$\lambda_{i_1} \mathbf{x}_{i_1} + \lambda_{i_2} \mathbf{x}_{i_2} + \dots + \lambda_{i_k} \mathbf{x}_{i_k} = \mathbf{0}$$

are loc cu măcar un scalar nenul.

$$\text{Rezultă că: } \lambda_{i_1} \mathbf{x}_{i_1} + \lambda_{i_2} \mathbf{x}_{i_2} + \dots + \lambda_{i_k} \mathbf{x}_{i_k} + \sum_{\substack{j=1, h \\ j \neq i}} 0 \cdot \mathbf{x}_j = \mathbf{0}$$

cu măcar un scalar nenul ceea ce contrazice ipoteza teoremei.

Teorema 2.2.3. Într-o mulțime de vectori liniar dependenți cel puțin un vector se scrie ca o combinație liniară a celorlalți.

Demonstrație: Definiția vectorilor liniar dependenți arată că:

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \lambda_i \mathbf{x}_i + \dots + \lambda_h \mathbf{x}_h = \mathbf{0}$$

cu măcar un scalar nenul. Presupunem că acesta este λ_i . Cum orice spațiu liniar este grup abelian, regulile de calcul dintr-o astfel de structură permite să scriem:

$$\lambda_i \mathbf{x}_i = -\lambda_1 \mathbf{x}_1 - \lambda_2 \mathbf{x}_2 - \dots - \lambda_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} - \lambda_{i+1} \mathbf{x}_{i+1} - \dots - \lambda_h \mathbf{x}_h$$

În corpul K , λ_i este inversabil iar dacă λ_i^{-1} este inversul său

$$\mathbf{x}_i = -\lambda_i^{-1} \lambda_1 \mathbf{x}_1 - \dots - \lambda_i^{-1} \lambda_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} - \lambda_i^{-1} \lambda_{i+1} \mathbf{x}_{i+1} - \dots - \lambda_i^{-1} \lambda_h \mathbf{x}_h \quad (2.2.5)$$

și teorema este demonstrată.

Când corpul de scalari este \mathbb{R} inversul λ_i^{-1} al lui λ_i este $1/\lambda_i$ și obținem:

$$\mathbf{x}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \mathbf{x}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} \mathbf{x}_2 - \dots - \frac{\lambda_{i-1}}{\lambda_i} \mathbf{x}_{i-1} - \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \mathbf{x}_{i+1} - \dots - \frac{\lambda_h}{\lambda_i} \mathbf{x}_h \quad (2.2.6)$$

Teoremele prezentate au consecințe importante cu valoare teoretică și practică. Astfel, modificarea componenței unei mulțimi de vectori liniar independenți prin suprimarea unora conduc totdeauna la o familie de vectori liniar independenți. Dacă adăugăm noi vectori unei astfel de familii, rezultatul nu este previzibil, noua mulțime poate fi dependentă sau independentă. Din (2.2.3) rezultă că (2.2.4) nu poate fi realizată dacă $h > n$, deci numărul maxim de vectori liniar independenți din \mathbb{R}^n este n .

Există efectiv mulțimi de vectori liniar independenți. Una dintre acestea este:

$$F = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \quad (2.2.7)$$

unde: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^t$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)^t, \dots, \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \dots, 1)^t$.

Dacă prin transformări elementare modificăm matricea M a vectorilor mulțimii F , obținem alte mulțimi formate tot din n vectori liniar independenți. Numărul acestor mulțimi este infinit.

2.3. BAZE DE VECTORI. COORDONATELE UNUI VECTOR ÎNTR-O BAZĂ

Am luat în studiu în paragraful precedent familiile maximale de vectori liniar independenți dintr-un spațiu liniar. Rolul acestora va fi precizat în cele ce urmează.

Definiție. Familia $B = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ formează o bază în spațiul vectorial V dacă:

- a) $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$ sunt liniar independenți;
- b) $(\forall) \mathbf{u} \in V$, mulțimea $F = \mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_k$, este formată din vectori liniar dependenți.

Mulțimea B este așadar o mulțime maximală de vectori liniar independenți. Când spațiul V este \mathbb{R}^n , această mulțime conține n vectori, deci $k = n$.

Spațiul \mathbb{R}^n are cel puțin o bază: cea formată din $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ numită **bază canonică**. Așadar:

$$B_c = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$$

Din aceasta prin procedeul indicat anterior putem obține o infinitate de baze toate având n vectori. Numărul n , al vectorilor oricărei baze din \mathbb{R}^n se numește **dimensiunea** acestui spațiu.

Condiția b) din definiția bazei și una din proprietățile fundamentale ale unei familii de vectori liniar dependenți ne permit să formulăm și să demonstrăm:

Teorema 2.3.1. Orice vector din \mathbb{R}^n se exprimă în mod unic printr-o combinație liniară a vectorilor unei baze B .

Demonstrație. Teorema 2.2.3 ne arată că cel puțin un vector al mulțimii $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ în care $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ formează bază în \mathbb{R}^n se exprimă printr-o combinație liniară a celorlalți. Acest lucru este valabil și pentru \mathbf{u} , deoarece în caz contrar, din:

$$\lambda \mathbf{u} + \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n = 0 \quad (2.3.1)$$

în care $\lambda = 0$ ar rezulta:

$$\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n = 0 \quad (2.3.2)$$

și unul din scalari fiind nenul s-ar contrazice condiția a) din definiția bazei.

Așadar $\lambda \neq 0$ și obținem:

$$\mathbf{u} = -\frac{\lambda_1}{\lambda} \mathbf{u}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda} \mathbf{u}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda} \mathbf{u}_n \quad (2.3.3)$$

Notăm: $\mu_1 = -\frac{\lambda_1}{\lambda}, \mu_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda}, \dots, \mu_n = -\frac{\lambda_n}{\lambda}$ și scriem:

$$\mathbf{u} = \mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \mu_n \mathbf{u}_n \quad (2.3.4)$$

Prin reducere la absurd demonstrăm că scalarii μ_i din (2.3.4) sunt unic determinați. În caz contrar, are loc și relația:

$$\mathbf{u} = \nu_1 \mathbf{u}_1 + \nu_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \nu_n \mathbf{u}_n \quad (2.3.5)$$

Din (2.3.4)-(2.3.5), obținem:

$$(\mu_1 - \nu_1) \mathbf{u}_1 + (\mu_2 - \nu_2) \mathbf{u}_2 + \dots + (\mu_n - \nu_n) \mathbf{u}_n = 0 \quad (2.3.6)$$

Cum $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ sunt liniar independenți, toți scalarii din (2.3.6) sunt nuli, deci:

$$\mu_1 = \nu_1, \mu_2 = \nu_2, \dots, \mu_n = \nu_n$$

ceea ce este în contradicție cu ipoteza. Teorema este demonstrată.

Observație. Scalarii $\mu_i, (i = \overline{1, n})$ se numesc în mod uzual coordonatele vectorului \mathbf{u} în baza $B = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$. Unicitatea lor rezultă și din teoremă dar și din faptul că (2.3.4) conduce la un sistem Cramer (cu soluție unică).

Vom nota mulțimea coordonatelor vectorului \mathbf{u} în baza B cu \mathbf{u}_B , adică:

$$\mathbf{u}_B = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^t \quad (2.3.7)$$

Un calcul elementar ne arată că în baza canonică $B_c = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ coordonatele oricărui vector \mathbf{u} coincid cu componentele sale, adică:

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^t = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + \dots + u_n \mathbf{e}_n$$

Exemplu:

Să se arate că vectorii $\mathbf{u}_1 = (1,1,1)^t$, $\mathbf{u}_2 = (1,2,1)^t$, $\mathbf{u}_3 = (1,1,3)^t$ formează o bază în \mathbb{R}^3 și să se determine coordonatele lui $\mathbf{u} = (6,1,8)^t$ în această bază.

Relația (2.3.4) devine:

$$\mathbf{u} = \mu_1 \mathbf{u}_1 + \mu_2 \mathbf{u}_2 + \mu_3 \mathbf{u}_3$$

și conduce la sistemul:

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 6 \\ \mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3 = 1 \\ \mu_1 + \mu_2 + 3\mu_3 = 8 \end{cases}$$

Prin transformări elementare de linii în matricea lărgită a sistemului obținem:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

care corespunde sistemului cu $r(M) = 3$) deci $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ formează baza).

$$\begin{cases} \mu_1 = 10 \\ \mu_2 = -5 \\ \mu_3 = 1 \end{cases}$$

acestea fiind valorile coordonatelor căutate.

2.4. SCHIMBAREA COORDONATELOR UNUI VECTOR LA SCHIMBAREA BAZEI

Dacă în locul bazei $B = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ a spațiului liniar \mathbb{R}^n considerăm o altă bază $B' = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ având același număr de vectori, n , ne așteptăm ca în relația (2.3.4) coordonatele să se schimbe. Dorim să aflăm legea de schimbare a acestora în cazul general și într-un caz particular.

Să considerăm că în baza B (numită baza veche) vectorul \mathbf{u} are coordonatele $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, deci:

$$\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{u}_n \quad (2.4.1)$$

și că același vector are în baza B' (numită baza nouă) coordonatele $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$, adică:

$$\mathbf{u} = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \beta_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n \quad (2.4.2)$$

Pe de altă parte fiecare din vectorii \mathbf{v}_i ai bazei noi are în baza veche coordonatele a_{ji} , unic determinate

$$\mathbf{v}_i = a_{i1} \mathbf{u}_1 + a_{i2} \mathbf{u}_2 + \dots + a_{in} \mathbf{u}_n = \sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{u}_j \quad (2.4.3)$$

Înlocuim (2.4.3) în (2.4.2) și comparăm cu (2.4.1).

Obținem:

$$\alpha_i = a_{i1} \beta_1 + a_{i2} \beta_2 + \dots + a_{in} \beta_n, \quad i = \overline{1, n} \quad (2.4.4)$$

Dacă notăm cu A matricea coordonatelor vectorilor din baza nouă față de vectorii din baza veche (numită **matrice de trecere**):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

cu $\mathbf{u}_B = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^t$ și cu $\mathbf{u}_{B'} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)^t$ atunci (2.2.4) se scrie matricial :

$$\mathbf{u}_B = A^t \mathbf{u}_{B'} \quad (2.4.5)$$

Cum vectorii lui B' sunt liniar independenți, A este inversabilă și din (2.4.5) putem obține relația:

$$\mathbf{u}_{B'} = A^{t^{-1}} \mathbf{u}_B \quad (2.4.6)$$

Relațiile (2.4.5) și (2.4.6) sunt formulele de schimbare a coordonatelor la schimbarea bazei.

Exemplu:

Se consideră vectorii $\mathbf{u}_1 = (1, 2, 1)^t$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, 0)^t$, $\mathbf{u}_3 = (1, 1, 0)^t$ din \mathbb{R}^3 :

- Să se arate că formează o bază în \mathbb{R}^3
- Să se determine coordonatele lui $\mathbf{u} = (1, 1, -2)^t$ în această bază.
- Să se determine coordonatele lui \mathbf{u} în baza formată din

$$\mathbf{v}_1 = -\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3, \quad \mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3$$

Soluție:

a) Matricea formată cu componentele vectorilor $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ are rangul trei, egal cu dimensiunea lui \mathbb{R}^3 , așadar cei trei vectori formează o bază.

b) Vectorul \mathbf{u} se scrie $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \alpha_2 \mathbf{u}_2 + \alpha_3 \mathbf{u}_3$ care conduce la sistemul

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 = -2 \end{cases}$$

cu soluția: $\alpha_1 = -2, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = 7$, deci :

$$\mathbf{u}_B = (-2, -2, 7)^t, B = \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$$

c) Matricea de trecere de la B la $B' = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$

este :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

iar inversa lui A^t are forma:

$$(A^t)^{-1} = \begin{pmatrix} -3/5 & 2/5 & -1/5 \\ 2/5 & 2/5 & -1/5 \\ 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

Folosind relația (2.4.6), obținem în final:

$$\mathbf{u}_{B'} = (-1, -3, 2)^t.$$

Observație. Dacă vectorii noii baze nu sunt exprimați de la început prin combinații ale vectorilor vechii baze, coordonatele lor (deci elementele matricei de trecere A) trebuie calculate separat. În această situație este mai simplu să calculăm direct $\mathbf{u}_{B'}$ folosind definiția.

În unele cazuri bazele B și B' diferă printr-un singur vector. Formula de calcul a noilor coordonate va avea evident o formă mai simplă. Să presupunem că în baza B, vectorul \mathbf{u}_i s-a înlocuit printr-un vector \mathbf{v}_j care are coordonatele $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{nj}$, adică:

$$\mathbf{v}_j = a_{1j}\mathbf{u}_1 + a_{2j}\mathbf{u}_2 + \dots + a_{ij}\mathbf{u}_i + \dots + a_{nj}\mathbf{u}_n \quad (2.4.7)$$

Ceilalți vectori ai vechii baze rămânând neschimbați, matricea de trecere

A devine:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \hline a_{1j} & a_{2j} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{nj} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

După determinarea lui $(A^t)^{-1}$ și aplicarea formulei (2.4.6) deducem noile coordonate:

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{a_{ij}}, \quad \beta_k = \alpha_k - \frac{\alpha_i}{a_{ij}} a_{kj}, \quad (k \neq i) \quad (2.4.8)$$

Formulele (2.4.7), greu de memorat pot fi utilizate prin intermediul unui algoritm de calcul bazat pe transformări elementare ale liniilor matricei coordonatelor vectorilor $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_i, \dots, \mathbf{u}_n$ și \mathbf{v}_j . Ilustrăm mai jos modul de organizare a algoritmului. Etapa inițială are forma :

Baza	\mathbf{u}_1	\mathbf{u}_2	...	\mathbf{u}_i	...	\mathbf{u}_n	\mathbf{v}_j	\mathbf{u}_B
\mathbf{u}_1	1	0	...	0	...	0	a_{1j}	α_1
\mathbf{u}_2	0	1	...	0	...	0	a_{2j}	α_2

\mathbf{u}_i	0	0	...	1	...	0	a_{ij}	α_i

\mathbf{u}_n	0	0	...	0	...	1	a_{nj}	α_n

Coloanele tabelului conțin coordonatele fiecărui vector în baza de pe prima coloană. Ele se presupun cunoscute. Ultima coloană reprezintă coordonatele lui \mathbf{u} în baza veche B.

Etapa finală are forma:

Baza	\mathbf{u}_1	\mathbf{u}_2	...	\mathbf{v}_j	...	\mathbf{u}_n	\mathbf{v}_j	$\mathbf{u}_{B'}$
\mathbf{u}_1	1	0	...	$-\frac{a_{1j}}{a_{ij}}$...	0	0	$\beta_1 = \alpha_1 - a_{1j} \frac{\alpha_i}{a_{ij}}$
\mathbf{u}_2	0	1	...	$-\frac{a_{2j}}{a_{ij}}$...	0	0	$\beta_2 = \alpha_2 - a_{2j} \frac{\alpha_i}{a_{ij}}$

\mathbf{v}_j	0	0	...	$-\frac{1}{a_{ij}}$...	0	1	$\beta_i = \frac{\alpha_i}{a_{ij}}$

\mathbf{u}_n	0	0	...	$\frac{a_{nj}}{a_{ij}}$...	1	0	$\beta_n = \alpha_n - a_{nj} \frac{\alpha_i}{a_{ij}}$

și conține coordonatele tuturor vectorilor în noua bază.

Se observă că linia i din ultima fază se obține prin împărțirea liniei i din prima fază prin a_{ij} (care este nenul, altfel matricea de trecere A nu este nesusingulară).

O linie oarecare k a matricei finale se obține înmulțind linia i cu $-a_{ij}$ după care se adună cu linia k a matricei inițiale. Ca efect al acestor operațiuni, pe ultima coloană se obțin coordonatele $\beta_i, \beta_k (k \neq i)$, pe coloana \mathbf{v}_j se obține coloana "i" a matricei unitate I_n iar coloana lui \mathbf{v}_j se modifică în mod corespunzător.

Algoritmul poate fi aplicat înlocuind cauzele cu efectele și invers. Astfel, putem să aplicăm transformările elementare de linii în matricea fazei inițiale pentru a transforma coloana lui \mathbf{v}_j în coloana vectorului \mathbf{u}_i din faza inițială. Unii numesc această operație "Lema substituției" și aplică diverse metode mnemotehnice de utilizare. Noi o considerăm o simplă aplicare a transformărilor elementare și o folosim succesiv înlocuind toți vectorii bazei inițiale B prin vectorii bazei B' .

Exemplu. În baza canonică $B_c = \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ se consideră vectorul $\mathbf{u} = (1, 1, -1)^t$. Să se determine coordonatele sale în baza $B' = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3$ unde $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)^t, \mathbf{v}_2 = (1, -1, 1)^t, \mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)^t$.

Baza	\mathbf{e}_1	\mathbf{e}_2	\mathbf{e}_3	\mathbf{v}_1	\mathbf{v}_2	\mathbf{u}
\mathbf{e}_1	1	0	0	1	1	1
\mathbf{e}_2	0	1	0	2	-1	1
\mathbf{e}_3	0	0	1	3	1	-1
\mathbf{v}_1	1	0	0	1	1	1
\mathbf{e}_2	-2	1	0	0	-3	-1
\mathbf{e}_3	-3	0	1	0	-2	-4
\mathbf{v}_1	1/3	1/3	0	1	0	2/3
\mathbf{v}_2	2/3	-1/3	0	0	1	1/3
\mathbf{e}_3	-5/3	-2/3	1	0	0	-10/3

Operațiile – extrem de simple – au urmărit crearea matricei unitate pe coloanele vectorilor noii baze $B' = \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_3$.

În prima etapă am completat tabelul cu coordonatele – coincidând cu componentele – tuturor vectorilor în baza canonică B_c . S-au aplicat transformări elementare de linii pentru a obține pe coloana lui \mathbf{v}_1 prima coloană a matricei unitate I_3 . În ultima etapă, prin transformări elementare de linii se obțin pe coloana lui \mathbf{v}_2 cea de a doua coloană a matricei unitate I_3 . Coordonatele lui \mathbf{u} în noua bază sunt înscrise pe ultima coloană și deci:

$$\mathbf{u} = \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{v}_2 - \frac{10}{3}\mathbf{e}_3.$$

Observație. Chiar dacă pare prea complicat în comparație cu aplicarea definiției în determinarea coordonatelor lui \mathbf{u} , algoritmul are avantajul principal că în fiecare etapă coloanele conțin coordonatele în baza curentă. În plus, ca avantaj secundar este posibilitatea de a-l folosi în probleme de programare liniară. El va fi aplicat consecvent în capitolele care urmează.

2.5. FORME PĂTRATICE

Considerăm în continuare spațiul liniar \mathbb{R}^n definit peste \mathbb{R} precum și funcția $Q: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$Q(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad \text{cu } a_{ij} = a_{ji} \quad (\forall) \quad i, j = \overline{1, n}. \quad (2.5.1)$$

Această funcție se numește **pătratică** și generalizează funcțiile de gradul al doilea omogene într-o singură variabilă.

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ care are elementele a_{ij} , $i, j = \overline{1, n}$ se numește matricea formei pătratice. Prin verificare directă se poate arăta că are loc formula:

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t A \mathbf{x}. \quad (2.5.2)$$

Exemplu: Să se scrie matricea corespunzătoare formei pătratice $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definită prin:

$$Q(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3.$$

Soluție. Folosim (2.6.3) sau (2.6.2) elementul a_{ij} al matricei A fiind coeficientul lui $x_i x_j$ în expresia acesteia. Cum $x_i x_j = x_j x_i$ și $a_{ij} = a_{ji}$ în A coeficienții produselor de variabile diferite se înjumătățesc. Așadar:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

și formula (2.6.3) se poate imediat verifica.

Observație. Matricea A este pătratică și simetrică conform condiției $a_{ij} = a_{ji}$ (nu este obligatoriu inversabilă).

Dacă în matricea A numai elementele diagonalei principale pot fi nenule spunem că forma pătratică are expresia canonică. **Expresia canonică** a unei forme pătratice este:

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \lambda_1 \mathbf{x}_1^2 + \lambda_2 \mathbf{x}_2^2 + \dots + \lambda_n \mathbf{x}_n^2, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}. \quad (2.5.3)$$

O formă pătratică Q este **nedegenerată** dacă expresia canonică are exact n termeni. Când numărul lor este mai mic forma se numește **degenerată**.

Expresia canonică a unei forme pătratice are o importanță deosebită în studiul semnului acesteia având în vedere că $Q(x) \in \mathbb{R}$. Există forme pătratice care păstrează același semn pentru orice argument $x \in \mathbb{R}^n$. Nu este greu de verificat că: $Q(0) = 0$. Următoarele definiții pot fi relevante:

Definiție. Forma pătratică $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **pozitiv (negativ)** definită dacă:

$$Q(\mathbf{x}) > 0 \quad (Q(\mathbf{x}) < 0) \quad (\forall) \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x} \neq 0. \quad (2.5.4)$$

Definiție. Forma pătratică $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **pozitiv (negativ) semidefinită** dacă:

$$Q(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (Q(\mathbf{x}) \leq 0) \quad (\forall) \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.5.5)$$

Orice formă pătratică definită este o formă pătratică semidefinită. Reciproca nu este adevărată. În cazul în care:

$$(\exists)x, y \in \mathbb{R}^n \text{ a.i. } Q(x) > 0 \text{ si } Q(y) < 0$$

atunci forma pătratică se numește **nedefinită ca semn.**

Dacă o formă pătratică este adusă la expresia canonică caracterul de formă pătratică pozitiv (negativ) definită (semidefinită) poate fi mult mai simplu apreciat. Astfel, dacă forma pătratică $Q(\mathbf{x})$ definită de (2.5.1) nu este sub forma (2.5.3), putem obține expresia canonică a acesteia:

$$Q(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2, \quad \lambda_i \in \mathbb{R} \quad (2.5.6)$$

unde $y_i, i = \overline{1, n}$ sunt date de relațiile liniare:

$$\begin{cases} y_1 = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \\ y_2 = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \\ \vdots \\ y_n = b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \cdots + b_{nn}x_n \end{cases} \quad ; \text{ cu } b_{ij} \in \mathbb{R} \quad (2.5.7)$$

Teoremă: Fie forma pătratică $Q(x)$ definită de (2.5.1) a cărei expresie canonică asociată este dată de (2.5.6). Dacă:

- a) $\lambda_i > 0, i = \overline{1, n}$ atunci $Q(x)$ este pozitiv definită;
- b) $\lambda_i \geq 0, i = \overline{1, n}$ si $(\exists) \lambda_j = 0$ atunci $Q(x)$ este pozitiv semidefinită;
- c) $\lambda_i < 0, i = \overline{1, n}$ atunci $Q(x)$ este negativ definită;
- d) $\lambda_i \leq 0, i = \overline{1, n}$ si $(\exists) \lambda_j = 0$ atunci $Q(x)$ este negativ semidefinită;
- e) $(\exists) \lambda_i > 0$ si $(\exists) \lambda_j < 0$ atunci $Q(x)$ este nedefinită ca semn.

Vom da în continuare două metode de obținere a expresiei canonice (2.5.6).

a) Metoda lui Gauss.

Se aplică transformări elementare asupra liniilor matricii A corespunzătoare formei pătratice, pentru a o aduce la forma (numită superior triunghiulară) de mai jos:

$$A = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & a'_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a'_{nn} \end{pmatrix} \quad (2.5.8)$$

Expresia canonică a formei pătratice este:

$$Q(y) = \frac{1}{a'_{11}} y_1^2 + \frac{1}{a'_{22}} y_2^2 + \dots + \frac{1}{a'_{nn}} y_n^2 \quad (2.5.9)$$

unde:

$$\begin{cases} y_1 = a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n \\ y_2 = a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n \\ \dots \\ y_n = a'_{nn}x_n \end{cases} \quad (2.5.10)$$

b) Metoda lui Jacobi

Fie $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ lanțul minorilor diagonali ai matricii A corespunzătoare formei pătratice, dați de relațiile:

$$\Delta_1 = a_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det A \quad (2.5.11)$$

Dacă toți $\Delta_i \neq 0$; $i = \overline{1, n}$ atunci expresia canonică este dată de formula:

$$Q(y) = \frac{1}{\Delta_1} y_1^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} y_2^2 + \dots + \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n} y_n^2. \quad (2.5.12)$$

Observații:

1) Expresia canonică a unei forme pătratice **nu este unică** (coeficienții λ_i pot avea valori diferite). Totuși în oricare dintre expresiile canonice asociate aceleiași forme pătratice **numărul de coeficienți λ_i pozitivi** respectiv **negativi este același**;

2) Metoda lui Jacobi **nu poate fi aplicată** dacă măcar un minor diagonal al matricei A este nul ($(\exists) \Delta_i = 0$); mai mult prin această metodă nu se pot obține expresiile variabilelor y_i definite în (2.5.7);

3) Aplicând metoda lui Jacobi de obținere a expresiei canonice (2.5.12), teorema de caracterizare a semnului unei forme pătratice conduce la următoarele concluzii:

- a) Dacă $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0$ atunci $Q(x)$ este pozitiv definită;**
- c) Dacă $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$ atunci $Q(x)$ este negativ definită;**
- e) Dacă $\Delta_i \neq 0, (\forall) i = \overline{1, n}$ și în orice altă combinație de semne decât cazul a) sau c) atunci $Q(x)$ este nedefinită ca semn;**

Evident cazurile b) respectiv d) de semidefinire nu pot fi caracterizate cu metoda lui Jacobi

Exemplu. Să se găsească expresia canonică a formei pătratice:

$$Q(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Folosim mai întâi metoda lui Gauss. Obținem succesiv:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim$$

:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Expresia canonică este așadar:

$$Q(\mathbf{y}) = y_1^2 + y_2^2 + \frac{1}{7}y_3^2$$

Prin metoda lui Jacobi obținem:

$$\Delta_1 = 2 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

Expresia canonică astfel obținută este deci:

$$Q(\mathbf{z}) = \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{2}{3}z_2^2 + \frac{3}{7}z_3^2$$

Prin cele două metode am obținut coeficienți diferiți (deci expresii canonice diferite), dar semnele acestora sunt aceleași. Forma pătratică este evident pozitiv definită.

CAP. 3. ELEMENTE DE PROGRAMARE LINIARĂ

3.1. PROGRAMARE LINIARĂ

3.1.1. MODELE ECONOMICE CE CONDUC LA O PROBLEMĂ DE PROGRAMARE LINIARĂ

a) Consumul lunar de materii prime

Considerăm un proces de producție în cursul căruia se realizează m tipuri de produse $P_i, i = \overline{1, m}$, pentru care se utilizează n tipuri de materii prime $M_j, j = \overline{1, n}$. Dintr-o unitate de materie primă M_j se pot produce a_{ij} unități de produs P_i . Se dorește ca numărul de produse de tipul P_i (realizate zilnic/săptămânal/lunar /etc.) să fie cel puțin în cantitățile b_i . Costul unei unități de materie primă M_j este c_j . Se cere să determinăm consumul lunar de materii prime, încât să se realizeze producția minimă planificată, iar cheltuielile legate de materiile prime să fie minime.

În continuare vom elabora modelul matematic al acestui fenomen economic. Notăm cu $x_j, j = \overline{1, n}$ cantitățile de materie primă M_j ce urmează a fi utilizate. Vom scrie sub formă algebrică restricțiile economice impuse mai sus. Aceste restricții sunt de trei categorii: restricții legate de planificarea producției, restricții impuse de sensul economic al variabilelor și restricția de minimizare a cheltuielilor. Așa cum $a_{ij}x_j$ reprezintă cantitatea de produse de tipul P_i ce se obține dintr-o cantitate x_j de materie primă M_j , deducem că:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \quad ; \quad i = \overline{1, m}$$

reprezintă cantitatea totală de produse de tipul P_i , ce se obține când materiile prime M_j se utilizează în cantitățile $x_j, j = \overline{1, n}$. Dar această cantitate nu poate fi mai mică decât b_i și deci obținem inecuațiile liniare de forma:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j b_i \geq b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (3.1.1)$$

Cum x_j reprezintă mărimi economice (cantități de materie primă) rezultă obligatoriu impunerea condițiilor (*de nenegativitate*):

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (3.1.2)$$

Cheltuielile totale obținute ca sumă a cheltuielilor unitare vor fi date de funcția:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad x = x_1, x_2, \dots, x_n^T \in \mathbb{R}^n, \quad (3.1.3)$$

care se cere a fi minimizată.

Din punct de vedere matematic problema poate fi formulată astfel: să se găsească în mulțimea soluțiilor sistemului de inecuații liniare (3.1.1) care satisfac condițiile de nenegativitate (3.1.2), o soluție pentru care funcția f ia valoarea minimă. Problema are sens dacă sistemul (3.1.1) are cel puțin o soluție. Inecuațiile (3.1.1) le numim *restricțiile problemei*, (3.1.2) *condițiile de nenegativitate*, iar f poartă denumirea de *funcție obiectiv*.

b) Folosirea optimă a resurselor

Într-un proces de producție în care se pot realiza n tipuri de articole $A_j, j = \overline{1, n}$ sunt utilizate m resurse $R_i, i = \overline{1, m}$, care sunt limitate de cantitățile b_i . Pentru producerea unei unități de articol de tipul A_j se consumă o cantitate a_{ij} de resursă de tipul R_i . Profiturile unitare pentru articolele A_j presupunem că sunt $c_j, j = \overline{1, n}$. Să se determine cantitatea x_j de articol $A_j, j = \overline{1, n}$ care urmează a se realiza în procesul de producție considerat, cu resurse limitate, astfel încât procesul să aibă drept rezultat profit maxim.

Limitările resurselor conduc la inecuațiile:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.1.4)$$

Necunoscutele (cantitățile) $x_j, j = \overline{1, n}$, trebuie să satisfacă condițiile de nenegativitate:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (3.1.5)$$

Profitul total este dat de funcția liniară

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.1.6)$$

care trebuie să ia valoarea maximă.

Ne propunem să găsim (măcar) o soluție $\mathbf{x}_0 = x_1, x_2, \dots, x_n^T \in \mathbb{R}^n$ (numită în cele ce urmează soluție optimă) a sistemului de restricții economice (3.1.4) care să aibă componentele nenegative, deci să verifice condițiile (3.1.5) și în care funcția obiectiv (profit) să ia cea mai mare valoare posibilă. Evident, în modelul matematic (corect) al unei probleme economice reale, sistemul de inecuații liniare (3.1.4) are o infinitate de soluții care verifică condițiile de nenegativitate (3.1.5). Dorim să găsim acea soluție \mathbf{x}_0 pentru care are loc:

$$(\min) f(x) = f(\mathbf{x}_0)$$

c) Problema amestecului optim

Să presupunem că pentru realizarea unui amestec se pot întrebuința n materii prime $M_j, j = \overline{1, n}$, disponibile în cantități nelimitate, ce conțin m substanțe $S_i, i = \overline{1, m}$. O unitate de materie primă M_j , conține cantitatea a_{ij} din substanță S_i . Amestecul trebuie să conțină substanța S_i în exact cantitatea b_i . Costurile unitare ale materiilor prime M_j sunt c_j unități bănești. Să de determine cantitățile $x_j, j = \overline{1, n}$ de materie primă M_j necesare realizării amestecului cu compoziția prescrisă și la un cost total minim.

Restricțiile sunt și acum de trei feluri: restricțiile de compoziție a amestecului, restricțiile datorate sensului economic al variabilelor și restricția de minimizare a costului total.

Traducerea algebrică a primelor două categorii este:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (3.1.7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (3.1.8)$$

Costul total al materiilor prime necesare pentru realizarea unei unități de amestec este dat de funcția:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.1.9)$$

care se cere a fi minimizată.

3.1.2. FORMULAREA GENERALĂ A UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ

Se constată că modelele matematice particulare, atașate problemelor economice prezentate anterior prezintă o serie de asemănări, fapt ce permite înglobarea lor într-un model general. Să considerăm un sistem care poate conține ecuații, inecuații de un semn sau altul, adică un sistem de forma:

[illegible]

numit **sistemul de restricții** (economice) **al problemei**, care poate fi scris condensat (utilizând indicele de sumare) și sub forma:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m} \quad (3.1.11)$$

(semnul \leq înseamnă semnul $=$, ori \leq , ori \geq , ori $<$, ori $>$). Condițiile de tipul:

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n} \quad (3.1.12)$$

sunt numite **condiții de nenegativitate** și sunt necesare datorită caracterului economic real al variabilelor (d.p.d.v. strict matematic putem rezolva și problemele în care aceste condiții nu apar). Funcția liniară:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (3.1.13)$$

care trebuie să o optimizăm (minimizăm sau maximizăm) se numește **funcție obiectiv** (funcție cost sau funcție profit conform tipului de problemă studiat).

Problema generală a programării liniare se formulează astfel: în mulțimea soluțiilor sistemului (3.1.11) ce satisfac condițiile (3.1.12) să se găsească o soluție (numită *soluție optimă*) ce dă valoarea minimă sau maximă funcției definite de (3.1.13).

3.1.3. FORME ALE UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ

Modelul matematic al unei probleme de programare liniară poate fi scris sub diverse forme potrivit scopurilor particulare urmărite. Aceste forme au doar o semnificație strict matematică și ușurează respectiv simplifică demonstrațiile anumitor rezultate matematice (propoziții sau teoreme) absolut necesare în fundamentarea modului (algoritmului) de rezolvare a problemelor de programare liniară.

a) Forma matriceală

Considerând matricele: $\mathbf{A} = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \in M_{m,n}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$,

$\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ și $\mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, putem scrie problema de programare liniară sub forma:

$$\begin{cases} (\min/\max) f(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}, \quad (3.1.14)$$

b) Forma vectorială

Dacă introducem vectorii:

$$P_1 = a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1}^T, P_2 = a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2}^T, \dots, P_n = a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn}^T$$

$$P_0 = \mathbf{b}.$$

atunci problema poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{cases} (\min/\max) f(\mathbf{x}) = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} \\ x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n \leq P_0 \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.15)$$

c) forma canonică

O problemă de programare liniară este sub formă canonică dacă ea se scrie:

$$\begin{cases} (\min) f(x) = Cx \\ Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.16)$$

sau

$$\begin{cases} (\max) f(x) = Cx \\ Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.17)$$

d) forma standard

O problemă de programare liniară este sub formă standard dacă restricțiile ei sunt sub formă de egalități. O problemă de programare liniară poate fi scrisă sub forma standard matricială sau vectorială, adică:

$$\begin{cases} (\min/\max) f(x) = cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} (\min/\max) f(x) = C \cdot x \\ x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = P_0 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.18)$$

Observație. Formele (3.1.16), (3.1.17), (3.1.18) ale unei probleme de programare liniară sunt echivalente dacă ținem seama de următoarele:

1. Sensul unei inegalități se schimbă prin înmulțirea cu -1 ;
2. O inecuație de forma $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leq b_i$, poate fi scrisă ca o ecuație $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + x_i^c = b_i$, prin adăugarea a unei noi variabile (variabilă de compensare) $x_i^c \geq 0$;
3. O inecuație de forma: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i$, poate fi scrisă ca o ecuație $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - x_i^c = b_i$, scăzând o variabilă de compensare $x_i^c \geq 0$;
4. O ecuație poate fi scrisă ca două inecuații de semn contrar ;
5. Problemele de maxim pentru funcția $f(x)$ pot fi reduse la o problemă de minim pentru funcția $f'(x) = -f(x)$; cu alte cuvinte în cazul unei funcții (forme) liniare de tipul (3.1.13) are loc egalitatea :

$$(\max)f(x) = -(\min)(-f(x)) \equiv -(\min)f'(x) \quad , \text{ pentru } (\forall)x \in \mathbb{R}^n$$

Având în vedere cele de mai sus, în continuare ne vom ocupa numai de probleme aflate sub forma standard cu cerința de minim pentru funcția obiectiv.

3.1.4. MULȚIMI CONVEXE

Fie spațiul vectorial \mathbb{R}^n și M o submulțime nevidă a sa ($M \subset \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$).

Definiția 3.1.1. Mulțimea $M \subset \mathbb{R}^n$ se numește **convexă** dacă $(\forall)x_1, x_2 \in M$ și $(\forall)\lambda \in [0,1]$ avem:

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in M \quad (3.1.19)$$

Definiția 3.1.2. Un punct (vector) $x \in M$ se numește punct **extrem** sau **vârf al mulțimii convexe** M , dacă nu există $x_1 \neq x_2$ din M și nu există $\lambda \in (0,1)$ astfel încât

$$x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \quad (3.1.20)$$

în caz contrar, punctul se numește **punct interior**.

Definiția 3.1.3. Numim **combinație liniară convexă** a vectorilor $x_i \in M$, $i=1, \overline{k}$ o expresie de forma:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i \quad , \text{ cu } \lambda_i \in [0,1] \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \quad (3.1.21)$$

Observație. Se poate demonstra (relativ ușor) că orice punct interior se poate scrie (exprima) întotdeauna ca o combinație liniară convexă de punctele extreme ale mulțimii convexe; evident, conform definiției 3.1.2, un vârf (punct extrem) al unei mulțimii convexe nu poate fi scris ca o combinație liniară convexă de puncte interioare mulțimii.

3.1.5. SOLUȚII ALE UNEI PROBLEME DE PROGRAMARE LINIARĂ

Fie o problemă de programare liniară aflată sub forma standard matricială:

$$\begin{cases} (\min) f(x)=cx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.1.22)$$

Definiția 3.1.4. Un vector $x \in \mathbb{R}^n$ ale cărui componente $x_j, j = \overline{1, n}$ verifică sistemul de restricții și condițiile de nenegativitate se numește **soluția admisibilă** a unei probleme de programare liniară.

Mulțimea soluțiilor admisibile o vom nota cu S_a .

Teorema 3.1.1. Mulțimea soluțiilor admisibile S_a este o mulțime convexă.

Demonstrație. Fie $x_1 \neq x_2 \in S_a$ două soluții admisibile.

Atunci avem:

$Ax_1 = b, x_1 \geq 0$; $Ax_2 = b, x_2 \geq 0$. Să considerăm un vector x de forma:

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \text{ cu } \lambda \in [0, 1].$$

Să arătăm că $x \in S_a$. Într-adevăr vom putea scrie:

$$Ax = A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda Ax_1 + (1 - \lambda)Ax_2 = \lambda b + (1 - \lambda)b = b$$

și deci verifică sistemul de restricții.

Cum $\lambda \in [0, 1]$, iar $x_1, x_2 \geq 0$, rezultă $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 = x \geq 0$ și deci x este soluție admisibilă a problemei de programare liniară.

Definiția 3.1.5. O soluție admisibilă care are cel mult m componente strict pozitive, iar vectorii formați cu coloanele matricei A , corespunzătoare acestor componente sunt liniar independenți, se numește **soluție admisibilă de bază**.

Dacă soluția admisibilă de bază are exact **m** componente strict pozitive, spunem că este **nedegenerată**, iar dacă are mai puține, **degenerată**. Mulțimea soluțiilor admisibile de bază o vom nota cu S_{ab} și este o mulțime finită (card $S_{ab} \leq C_n^m$) deci evident, nu este o mulțime convexă.

Exemplul 3.1.1.

Fie problema de programare:

$$\begin{cases} (\min) f(x) = 2x_1 + x_2 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, 4 \end{cases}$$

În baza definițiilor (3.1.4) și (3.1.5) constatăm că:

$x_1 = 2/3, 1/3, 2/3, 5/3^T$ este soluție admisibilă

$x_2 = 0, 1, 0, 5^T$ este soluție admisibilă de bază nedegenerată

$x_3 = 0, 0, 2, 0^T$ este soluție admisibilă de bază degenerată

$x_4 = 1, 0, 1, 0^T$ este soluție admisibilă, dar nu este de bază deoarece

(vectorii P_1 și P_3 nu sunt liniar independenți)

Teorema 3.1.2. Orice soluție admisibilă de bază a unei probleme de programare liniară, este un punct extrem al mulțimii soluțiilor admisibile S_a și reciproc, orice punct extrem al mulțimii soluțiilor admisibile este o soluție de bază a problemei de programare liniară, cu alte cuvinte are loc:

$$x \in S_{ab} \Leftrightarrow x \in S_a \text{ este punct extrem} \quad (3.1.23)$$

Definiția 3.1.6. O soluție admisibilă x se numește **soluție optimă**, dacă realizează minimul sau maximul funcției obiectiv f ; mulțimea soluțiilor optime o vom nota cu S_o

Se poate demonstra că mulțimea soluțiilor optime este o mulțime convexă. Evident, teoretic S_o poate să fie vidă (problema de programare aferentă nu are soluții optime), să aibă o infinitate de elemente (în acest caz

spunem că problema de programare aferentă are o infinitate de soluții optime). Dar cazul cel mai des întâlnit și cel care apare în imensa majoritate a problemelor economice reale este cel în care S_o are numai un element (problema de programare aferentă are soluție optimă unică).

Teorema 3.1.3. Dacă o problemă de programare are o soluție optimă finită, atunci există un punct extrem al mulțimii soluțiilor admisibile S_a în care funcția obiectiv ia aceeași valoare, adică:

$$(\min) f(x) = f_o \in \mathbb{R}(\text{finit}) \Rightarrow (\exists)x \in S_{ab} \text{ a.i. } f(x) = f_o \quad (3.1.24)$$

3.2. METODA SIMPLEX ȘI ALGORITMUL SIMPLEX PRIMAL

3.2.1. PRINCIPIILE METODEI SIMPLEX

Să considerăm problema de programare liniară sub forma standard matricială:

$$\begin{cases} (\min) f(x) = cx & (*) \\ Ax = b & (**) \\ x \geq 0 & (***) \end{cases} \quad (3.2.1)$$

sau vectorială

$$\begin{cases} (\min) f(x) = C \cdot x & (*) \\ x_1 P_1 + x_2 P_2 + \dots + x_n P_n = P_0 & (**) \\ x \geq 0 & (***) \end{cases} \quad (3.2.2)$$

Raționând în mod simplist, pentru a rezolva o problemă de programare liniară (adusă la forma standard), ar trebui să parcurgem următorii pași:

1. Să determinăm toate soluțiile sistemului liniar compatibil nedeterminat (**), lucru relativ ușor și cunoscut încă din liceu;
2. Să eliminăm (cum!?) din infinitatea de soluții a lui (**) acele soluții (tot o infinitate) care nu verifică condițiile de nenegativitate (***)

3. Din infinitatea de soluții admisibile rămase (adică soluțiile sistemului (**)) care satisfac condițiile (***) să o găsim (cum!?) pe *aceea* sau *acelea* care fac funcția obiectiv să ia cea mai mică valoare, adică care satisfac(e) și condiția (*).

Rezultatele indicate în capitolul precedent ne oferă un mod simplu și elegant de determinare a soluției optime a unei probleme de programare liniară. Astfel, teoremele 3.1.2 și 3.1.3 ne indică că trebuie să căutăm soluțiile optime ale unei probleme de programare liniară, în mulțimea soluțiilor admisibile de bază (S_{ab} este o mulțime finită având cel mult C_n^m elemente). Cu alte cuvinte, va trebui să parcurgem următorii pași:

1. Determinăm (eventual folosind transformări elementare) toate soluțiile de bază ale sistemului (**); sunt cel mult C_n^m soluții de bază, deci un număr finit (și nu infinit);
2. Eliminând soluțiile cu componente negative (neadmisibile), care nu satisfac condițiile (***), obținem mulțimea S_{ab} a soluțiilor de bază admisibile, printre care se află și soluți-a/ile optim-ă/e căutat-ă/e;
3. Calculăm valoarea funcției obiectiv în toate soluțiile admisibile de bază aflate la pct. 2). Soluția optimă va fi cea în care funcția obiectiv $f(x)$ ia valoarea minimă.

Totuși, chiar și în cazul problemelor în care numărul restricțiilor (ecuațiilor)**m** respectiv al variabilelor (necunoscutelor) **n** este relativ mic, numărul de calcule necesar aplicării metodei de mai sus este extrem de mare, ceea ce o face aproape imposibil de aplicat în realitate. De exemplu, pentru **m=10**, **n=40** numărul de soluții de bază al sistemului (**), care trebuie determinate, este de $C_{40}^{10} = 846.660.528$ soluții (!!).

Vom prezenta în continuare o metodă (algoritm) numită metoda (algoritmul) SIMPLEX, elaborată de matematicianul german G.B. Dantzig în anul 1906, algoritm care are avantajul unui volum extrem de redus de calcule și utilizarea numai a transformărilor elementare ca aparat matematic.

Să presupunem fără a restrânge generalitatea că matricea lărgită a sistemului de restricții este de forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1m+1} & \dots & \alpha_{1n} & \vdots & \beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{2m+1} & \dots & \alpha_{2n} & \vdots & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{mm+1} & \dots & \alpha_{mn} & \vdots & \beta_m \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

Vectorii P_1, P_2, \dots, P_m formați cu primele m coloane ale matricei A , fiind liniar independenți, formează o bază în \mathbb{R}^m . În acest caz un vector oarecare P_j , $j = \overline{m+1, n}$ se exprimă în mod unic cu ajutorul vectorilor bazei sub forma:

$$P_j = \alpha_{1j}P_1 + \alpha_{2j}P_2 + \dots + \alpha_{mj}P_m = \sum_{i=1}^m \alpha_{ij}P_i \quad (3.2.4)$$

Să notăm cu C_B vectorul linie format cu primele m componente ale vectorului C , adică coeficienții variabilelor x_1, x_2, \dots, x_n din funcția obiectiv ce corespund vectorilor care au intrat în bază.

Introducem mărimile:

$$z_j - c_j = z_j - C_B P_j \equiv \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij} ; \quad j = \overline{1, n} \quad (3.2.5)$$

Dacă presupunem acum că β_i , $i = \overline{1, m}$ sunt pozitive și dacă avem în vedere (3.2.3) deducem că vectorul \bar{x} de componente,

$\bar{x}_1 = \beta_1, \bar{x}_2 = \beta_2, \dots, \bar{x}_m = \beta_m, \bar{x}_{m+1} = 0, \dots, \bar{x}_n = 0$, este o soluție admisibilă de bază a problemei de programare considerată.

Teorema 3.2.1. (Criteriul de optim) Dacă diferențele $z_j - c_j \leq 0$, $j = \overline{m+1, n}$, atunci problema de programare liniară are optim finit și \bar{x} este soluția optimă căutată.

Observații:

- a) se constată ușor că $z_j - c_j = 0$ pentru $j = \overline{1, m}$
- b) În problemele de programare, în care avem cerința de maxim pentru funcția obiectiv, criteriul de optimalitate va fi: $z_j - c_j \geq 0$, $j = \overline{m+1, n}$
- c) Din demonstrația teoremei rezultă că în cazul în care există $z_j - c_j > 0$ în probleme de minim pentru funcția obiectiv pot exista soluții

admisibile pentru care funcția obiectiv să ia o valoare mai mică decât pentru \bar{x} , deci \bar{x} nu este optimă.

În cazul în care \bar{x} nu este soluție optimă vom căuta să obținem din vechea soluție de bază admisibilă \bar{x} o nouă soluție de bază admisibilă \bar{y} "mai bună" decât vechea soluție \bar{x} , în sensul că valoarea funcției obiectiv $f(x)$ este mai "bună" (adică mai mică) decât în vechea soluție ($f(\bar{y}) < f(\bar{x})$).

Dantzig demonstrează că, acest lucru se poate obține înlocuind un vector P_i (corespunzător unei variabile principale a soluției \bar{x}) din bază, cu un vector P_j (corespunzător unei variabile secundare a soluției \bar{x}) din afara bazei. Să notăm cu y_k , $k = 1, 2, \dots, i-1, j, i+1, \dots, m$ componentele noii soluții de bază \bar{y} .

Din (1.2.5) înlocuind \bar{b}_k cu β_k , \bar{a}_{ki} cu α_{ij} , x_{jk} cu y_k , x_j cu β_j obținem:

$$\begin{cases} y_k = \beta_k - \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \alpha_{kj}, & \alpha_{ij} \neq 0, \quad k = \overline{1, m}; k \neq i \\ y_j = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}}, & k = i \end{cases} \quad (3.2.6)$$

Vectorul P_i (care iese din bază) și vectorul P_j (care va intra în bază) se determină pe baza următoarelor două teoreme:

Teorema 3.2.2. (Criteriul de ieșire din bază). Condițiile necesare pentru înlocuirea vectorului P_i cu vectorul P_j sunt:

$$\theta_i \equiv \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \min \left\{ \theta_k \equiv \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}}, \quad k = \overline{1, m}; \alpha_{kj} > 0 \right\}, \quad (3.2.7)$$

Să vedem acum ce condiții trebuie să îndeplinească un vector P_j pentru a intra în bază în locul vectorului P_i pentru a obține o soluție "mai bună".

Teorema 3.2.3. (Criteriul de intrare în bază) Condiția pe care trebuie să o îndeplinească un vector P_j , $j = \overline{m+1, n}$ pentru a intra în bază în locul vectorului P_i în vederea obținerii unei soluții "mai bune" este:

$$z_j - c_j \geq 0 \quad (3.2.8)$$

3.2.2. ETAPELE ALGORITMULUI SIMPLEX PRIMAL

Rezultatele enunțate în capitolul anterior se concretizează în următorul mod de lucru, cunoscut în literatura de specialitate sub denumirea de **algoritmul Simplex primal**. Acesta constă dintr-o succesiune de iterații, care îmbunătățesc treptat o soluție admisibilă de bază inițială. Pe baza considerațiilor din aliniatul 3.2.1. putem pune în evidență etapele algoritmului care ne vor conduce la soluția optimă a problemei dacă aceasta există.

1. Se determină o soluție admisibilă de bază, fie aceasta \bar{x} (oare e atât de simplu!);
2. Se construiește tabelul Simplex corespunzător acestei soluții (este redat mai jos);
3. Se calculează diferențele $z_j - c_j$, $j = \overline{1, n}$ aflate pe ultima linie a tabelului inițial. Aplicăm *criteriul de optim*. Putem avea următoarele patru situații:
 - a) dacă $z_j - c_j < 0$, $j = \overline{m+1, n}$ atunci soluția admisibilă de bază \bar{x} este **optimă (și unică!)**;
 - b) dacă $z_j - c_j \leq 0$, $j = \overline{m+1, n}$ și $(\exists) z_j - c_j = 0$ iar vectorul P_j corespunzător are și componente strict pozitive, atunci soluția admisibilă de bază \bar{x} este **optimă** (dar **nu este unică**; problema admite **o infinitate de soluții optime** cu aceeași valoare a funcției obiectiv);
 - c) Dacă există indici j , $j = \overline{m+1, n}$ pentru care $z_j - c_j \geq 0$, iar toate componentele vectorului P_j corespunzător sunt mai mici sau egale cu zero ($\alpha_{ij} \leq 0$), atunci problema de programare are **optim infinit**;
 - d) Dacă $(\exists) j$; $j = \overline{m+1, n}$ pentru care $z_j - c_j > 0$ și nu toți $\alpha_{ij} \leq 0$, atunci se trece la etapa următoare (soluția nu este optimă).
4. Se aplică *criteriul de intrare*, determinând vectorul P_j care intră în bază ca fiind acel vector pentru care:

$$z_j - c_j = \max_{z_k - c_k \geq 0} (z_k - c_k)$$

5. Se aplică *criteriul de ieșire*. Părăsește baza vectorul P_i pentru care

$$\frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \min_{\alpha_{kj} > 0} \frac{\beta_k}{\alpha_{kj}} \Leftrightarrow \theta_i = \min \{ \theta_k > 0 \}$$

6. Se face schimbarea de bază obținând o nouă soluție admisibilă de bază \bar{y} , pentru care etapele algoritmului se reiau.

Datele problemei de programare liniară și elementele ce au intervenit în teoremele 3.2.1, 3.2.2, 3.2.3 respectiv în algoritmul prezentat mai sus, le sintetizăm în următorul **tabel Simplex**:

B	C_B	P_0	c_1	c_2	...	c_i	...	c_m	...	c_j	...	c_n	
			P_1	P_2	...	P_i	...	P_m	...	P_j	...	P_n	
P_1	c_1	β_1	1	0	...	0	...	0	...	α_{1j}	...	α_{1n}	θ_1
P_2	c_2	β_2	0	1	...	0	...	0	...	α_{2j}	...	α_{2n}	θ_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	
P_i	c_i	β_i	0	0	...	1	...	0	...	α_{ij}	...	α_{in}	θ_i
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots			\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	
P_m	c_m	β_m	0	0	...	0	...	1	...	α_{mj}	...	α_{mn}	θ_m
$z_j - c_j$	-	$f(\bar{x})$	0	0	...	0	...	0	...	$z_j - c_j$...	$z_n - c_n$	

Observații:

a) Valoarea funcției obiectiv pentru soluția admisibilă de bază este dată de:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=1}^m c_i \beta_i = C_B P_0$$

b) Diferențele $z_j - c_j$ se calculează cu relațiile:

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^m c_i \alpha_{ij} - c_j$$

i) Dacă soluția nu este optimă (există $z_j - c_j \geq 0$) alegem diferența pozitivă care este cea mai mare, determinând în felul acesta vectorul P_j care intră în bază.

ii) Dacă există mai multe astfel de diferențe, atunci poate intra în bază oricare dintre vectorii ce corespund acestora.

iii) Dacă pe coloana vectorului P_j care trebuie să intre în bază toate elementele sunt mai mici sau egale cu zero, atunci problema admite optim infinit.

iv) Dacă există și elemente strict mai mari ca zero considerăm toate rapoartele dintre componentele lui P_0 și componentele strict pozitive ale vectorului P_j , rapoarte de forma $\theta_i = \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} = \frac{\text{componentele lui } P_0}{\text{componentele lui } P_j} > 0$ cu $\alpha_{ij} > 0$.

Cel mai mic raport $\theta_i > 0$ va indica vectorul care părăsește baza. Dacă vectorul P_i părăsește baza atunci noua soluție admisibilă de bază se obține cu ajutorul unui pivotaj cu elementul pivot α_{ij} .

Exemplu 3.2.1. Pentru fabricarea a 3 tipuri de produse P_j , $j=\overline{1,3}$ se utilizează 2 tipuri de resurse R_1 și R_2 . Consumurile specifice, cantitățile de resurse și profiturile unitare sunt date în tabelul:

$\begin{matrix} P \\ R \end{matrix}$	P_1	P_2	P_3	Limitări resurse
R_1	1	1	2	30
R_2	2	3	1	57
Profit	4	1	5	

Să se determine cantitățile de produse P_j , $j=\overline{1,3}$ ce urmează a fi realizate pentru a obține un profit maxim.

Soluție. Notăm cu x_1, x_2, x_3 cantitățile de produse de tipul P_1, P_2, P_3 ce urmează a fi realizate. Modelul matematic al problemei este:

$$\begin{cases} (\max) f(x) = 4x_1 + x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 57 \\ x_j \geq 0, j=1,3 \end{cases}$$

Aducem problema la forma standard folosind variabile de compensare x_4^c și x_5^c și considerăm problema de minim pentru funcția $-f$.

Vom avea problema:

$$\begin{cases} (\min) (-f(x)) = -4x_1 - x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4^c = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5^c = 57 \\ x_j \geq 0, j=1,3, x_4^c \geq 0, x_5^c \geq 0 \end{cases}$$

O soluție admisibilă de bază este $x = 0, 0, 0, 30, 57^T$.

Tabelul simplex se prezintă astfel:

B	C_B	P_0	- 4	- 1	- 5	0	0	θ_i
			P_1	P_2	P_3	P_4^c	P_5^c	
P_4^c	0	30	1	1	②	1	0	$\theta_1 = \frac{30}{2} = 15$
P_5^c	0	57	2	3	1	0	1	$\theta_2 = \frac{57}{1} = 57$
$z_j - c_j$	-	0	4	1	5	0	0	
P_3	- 5	15	1/2	1/2	1	1/2	0	30
P_5^c	0	42	<u>3/2</u>	5/2	0	- 1/2	1	28
$z_j - c_j$	-	-75	3/2	- 3/2	0	- 5/2	0	
P_3	- 5	1	0	- 1/3	1	2/3	-1/3	-
P_1	- 4	28	1	5/3	0	-1/3	2/3	-
$z_j - c_j$	-	-117	0	-1	0	-2	-1	-

În prima etapă au intrat în bază vectorii x_4^c și x_5^c . Pe linia diferențelor $z_j - c_j$ observăm că există diferențe strict pozitive, deci conform cazului 3)_d de la criteriul de optim soluția inițială nu este optimă. Cea mai mare diferență

pozitivă este $z_3 - c_3 = 5$, și conform criteriului de intrare, vectorul P_3 va intra în bază. Avem rapoartele $\theta_4 = \frac{\beta_4}{\alpha_{43}} = \frac{30}{2} = 15$, $\theta_5 = \frac{\beta_5}{\alpha_{53}} = \frac{57}{1} = 57$. Cel mai mic raport este $\theta_4 = 15$, ceea ce înseamnă (conform criteriului de ieșire) că vectorul P_4^c părăsește baza fiind înlocuit de vectorul P_3 . Un pivotaj cu element pivot 2 (încercuit) conduce la o nouă soluție admisibilă de bază $x = 0, 0, 15, 0, 42^T$ care nu este optimă (există diferențe $z_j - c_j > 0$ în tabelul corespunzător noii soluții găsite). Continuând cu o nouă iterație cu elementul pivot 3/2 (încercuit), obținem soluția admisibilă de bază $x = 28, 0, 1, 0, 0^T$ care este optimă și unică.

Lăsând la o parte variabilele de compensare introduse, obținem soluția optimă a problemei inițiale: $x = 28, 0, 1^T$. D.p.d.v. economic aceasta înseamnă realizarea a 28 unități de produs P_1 și a unei unități de produs P_3 , profitul maxim posibil de realizat fiind de 117 (u.m.).

Exemplul 3.2.2 Să se determine soluțiile optime ale problemei:

$$\begin{cases} (\min) f(x) = -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_j \geq 0, j = 1, 5 \end{cases}$$

O soluție admisibilă de bază inițială este $x = 0, 0, 0, 7, 1^T$. Tabelul Simplex corespunzător este:

B	C_B	P_0	- 3	- 2	- 4	0	0	θ_i
			P_1	P_2	P_3	P_4^c	P_5^c	
P_4	0	7	1	2	- 1	1	0	$\theta_4 < 0$
P_5	0	1	1	- 4	①	0	1	$\theta_5 = 1$
$z_j - c_j$	-	0	3	2	4	0	0	
P_4	0	8	2	- 2	0	1	1	$\theta_4 < 0$
P_3	- 4	1	1	- 4	1	0	1	$\theta_3 < 0$
$z_j - c_j$	-	- 4	- 1	18	0	0	- 4	

Algoritmul se oprește, chiar dacă soluția admisibilă de bază găsită $x = 0, 0, 1, 8, 0^T$ nu este optimă (diferența $z_2 - c_2 = 18 > 0$), deoarece vectorul P_2 care ar trebui să intre în bază are toate componentele negative. Problema de programare liniară considerată admite optim infinit conform cazului 3)c.

3.2.3. METODA CELOR DOUĂ FAZE

Algoritmul Simplex este un algoritm rapid convergent la soluția optimă. Astfel, plecând de la o soluție de bază admisibilă inițială a sistemului în formă standard, cu m ecuații și n necunoscute, după cel mult $m+n$ iterații obținem soluția optimă. De exemplu, în cazul unui sistem cu 10 ecuații și 40 de necunoscute, plecând de la o soluție admisibilă inițială, în cel mult $10+40=50$ de pași (iterații) se ajunge la soluția optimă (dacă există).

Determinarea (eventual prin transformări elementare) a unei soluții de bază pentru un sistem liniar, chiar de dimensiuni mari, este extrem de simplă. Problema care apare, este admisibilitatea acesteia. De exemplu, în cazul sistemului prezentat anterior cu $C_{40}^{10} = 846.660.528$ soluții de bază, se poate întâmpla ca foarte multe dintre acestea, sau chiar toate, să fie neadmisibile. Am putea astfel calcula un număr imens (sute de milioane) de soluții neadmisibile (deci inutile), până obținem acea soluție admisibilă inițială. După găsirea acesteia, aplicând algoritmul Simplex vom obține soluția optimă foarte rapid, în cel mult 50 de iterații.

Vom indica o metodă mai lesne de aplicat în practică pentru a obține o soluție admisibilă de bază inițială: **metoda celor două faze**.

Să considerăm că problema de programare liniară (3.2.1) este sub formă standard, termenii liberi sunt pozitivi și că matricea A a sistemului de restricții nu conține nici o coloană a matricei unitate. Vom adăuga la fiecare restricție o variabilă nenegativă, numită variabilă artificială. Fiind m restricții vom adăuga m variabile artificiale x_k^m , $k=n+1, n+m$, și considerăm o nouă problemă de programare liniară, numită **problema artificială** atașată problemei inițiale, de forma:

$$\begin{cases} (\min) g(x^a) = \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k^a \\ Ax + I_m x^a = b \\ x \geq 0, x^a \geq 0 \end{cases} \quad (3.2.9)$$

Aici I_m este matricea unitate de ordinul m și $x^a = x_{n+1}^a, x_{n+2}^a, \dots, x_{n+m}^a$ vectorul variabilelor artificiale. Se constată că orice soluție admisibilă a problemei (3.2.9) în care variabilele artificiale sunt nule, devine după înlăturarea acestora o soluție admisibilă de bază a problemei (3.2.1).

Metoda celor două faze constă în:

Faza întâi. Se determină soluția optimă a problemei (3.2.9) folosind algoritmul Simplex. Soluția de bază admisibilă inițială artificială, se determină direct din sistemul artificial, considerând variabile principale pe cele artificiale.

Aplicând problemei (3.2.19) algoritmul Simplex primal, ajungem la una din situațiile:

- a) $(\min) g(x^a) = 0$ și nici un vector corespunzător variabilelor artificiale nu este în bază.
- b) $(\min) g(x^a) = 0$ și în bază rămân și vectori corespunzători variabilelor artificiale.
- c) $(\min) g(x^a) \neq 0$.

Faza a doua. În situația a) soluția optimă a problemei (3.2.9), după înlăturarea variabilelor artificiale, reprezintă o soluție de bază admisibilă, inițială, nedegenerată pentru problema (3.2.1). Cu această soluție inițială, se aplică algoritmul Simplex primal în vederea găsirii soluției optime a problemei inițiale. Din tabelul final al fazei întâi se elimină elementele ce țin de variabilele artificiale (coloanele vectorilor artificiali), se modifică coeficienții funcției obiectiv și se calculează noile diferențe $z_j - c_j$, obținându-se primul tabel Simplex al fazei a doua.

Situația b) conduce la o soluție admisibilă de bază degenerată pentru problema inițială. Considerațiile anterioare rămân valabile, însă nu vor fi eliminate coloanele corespunzătoare variabilelor artificiale, pentru care vectorii artificiali corespunzători au rămas în bază.

În situația c) problema inițială nu admite soluții admisibile.

Exemplul 3.2.3. Să se determine soluțiile optime ale problemei de programare liniară:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4 \\ x_j \geq 0, j=1,3 \\ (\min) f(x) = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Aducem problema la forma standard, ea devenind:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4^c = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5^c = 4, \\ x_j \geq 0, j=1,3, x_4^c \geq 0, x_5^c \geq 0 \\ (\min) f(x) = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Vom întrebuința metoda celor două faze.

În prima fază căutăm soluția optimă a problemei (artificiale):

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4^c + x_6^a = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_5^c + x_7^a = 4, \\ x_j \geq 0, x_4^c, x_5^c, x_6^a, x_7^a \geq 0 \\ (\min) g(x^a) = x_6^a + x_7^a \end{cases}$$

Soluția admisibilă de bază de pornire este $x = 0, 0, 0, 0, 0, 3, 4^T$.

Tabelul simplex are forma:

B	C _B	P ₀	0	0	0	0	0	1	1
			P ₁	P ₂	P ₃	P ₄ ^c	P ₅ ^c	P ₆ ^a	P ₇ ^a
P ₆ ^a	1	3	1	③	2	-1	0	1	0
P ₇ ^a	1	4	3	3	1	0	-1	0	1
z _j -c _j	—	7	4	6	3	-1	-1	0	0
P ₂	0	1	1/3	1	2/3	-1/3	0	1/3	0
P ₇ ^a	1	1	②	0	-1	1	-1	-1	1
z _j -c _j	—	1	2	0	-1	1	-1	-1	0
P ₂	0	5/6	0	1	5/6	-1/2	1/6	1/2	-1/6
P ₁	0	1/2	1	0	-1/2	1/2	-1/2	-1/2	1/2
z _j -c _j	—	0	0	0	0	0	0	-1	-1

Am găsit soluția optimă $x = 1/2, 5/6, 0, 0, 0, 0, 0^T$ a problemei artificiale. Soluția admisibilă de bază pentru problema inițială va fi: $x = 1/2, 5/6, 0, 0, 0^T$, iar sistemul de restricții cel ce rezultă din ultima etapă a algoritmului simplex pentru problema artificială.

Tabelul Simplex corespunzător fazei a doua are forma:

B	C_B	P_0	3	-4	2	0	0
			P_1	P_2	P_3	P_4^c	P_5^c
P_2	-4	5/6	0	1	5/6	-1/2	1/6
P_1	3	1/2	1	0	-1/2	1/2	<u>-1/2</u>
$z_j - c_j$	-	-11/6	0	0	-41/6	7/2	-13/6
P_2	-4	4/3	1	1	1/3	0	-1/3
P_4^c	0	1	2	0	-1	1	-1
$z_j - c_j$	-	16/3	-7	0	-10/3	0	4/3

Problema admite optim infinit deoarece vectorul P_5^c nu are și coordonate strict pozitive.

Exemplul 3.2.4. Să se determine soluțiile optime ale problemei de programare liniară:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 4 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 - 8x_6 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 3x_6 = 2 \\ x_j \geq 0, j=1,6 \\ (\min)f(x) = -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 8x_6 \end{cases}$$

Prima și a treia coloană a matricei A sunt coloane ale matricei unitate de ordinul trei și atunci vom adăuga la restricția a doua o variabilă artificială x_7^a .

Vom căuta în prima fază soluția optimă a problemei:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 4, \\ 3x_2 - x_4 + x_5 - 8x_6 + x_7^a = 3, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 3x_6 = 2. \\ x_j \geq 0, j=1,6, \quad x_7^a \geq 0 \\ (\min)g(x^a) = x_7^a \end{cases}$$

O soluție admisibilă de bază pentru această problemă este:

$$x = 4, 0, 2, 0, 0, 0, 3^T$$

Tabelul simplex are forma:

B	C_B	P_0	0	0	0	0	0	0	1
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7^a
P_1	0	4	1	0	0	-2	1	2	0
P_7^a	1	3	0	③	0	-1	1	-8	1
P_3	0	2	0	1	1	1	-1	-3	0
$z_j - c_j$	-	3	0	3	0	-1	1	-8	0
P_1	0	4	1	0	0	-2	1	2	1
P_2	0	1	0	1	0	-1/3	1/3	-8/3	1/3
P_3	0	1	0	0	1	4/3	-4/3	-1/3	-1/3
$z_j - c_j$	-	0	0	0	0	0	0	0	-1

Soluția admisibilă de bază pentru problema inițială va fi

$$x = 4, 1, 1, 0, 0, 0, 0^T.$$

Tabelul simplex pentru problema inițială (faza a doua) are forma:

B	C_B	P_0	-2	-3	-1	4	5	8
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
P_1	-2	4	1	0	0	-2	1	2
P_2	-3	1	0	1	0	-1/3	1/3	-8/3
P_3	-1	1	0	0	1	4/3	-4/3	-1/3
$z_j - c_j$	-	-12	0	0	0	-1/3	-20/3	-11/3

Soluția optimă a problemei este $x_{opt} = (4, 1, 1, 0, 0, 0)^T$, $(\min)f(x) = -12$.

3.3. PROBLEMA TRANSPORTURILOR

Să considerăm că un anumit produs este stocat în m depozite D_i în cantitățile a_i , $i = \overline{1, m}$. Produsul este solicitat de n centre de consum C_j în cantitățile b_j , $j = \overline{1, n}$. Costul transportului unei unități de produs de la depozitul D_i la centrul C_j este a_{ij} u.m. Se cere a se determina cantitățile x_{ij} de produs care urmează a fi transportate de la depozite la centrele de consum astfel ca disponibilul a fie epuizat, în fiecare depozit, cererea să fie satisfăcută exact, în fiecare centru de consum, iar costul total al transportului produsului să fie minim. Se presupune că $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, adică disponibilul din depozite este egal cu cererea totală a centrelor de consum. O astfel de problemă este denumită **problema de transport echilibrată**.

Restricțiile problemei sunt din nou de trei tipuri: restricții asupra disponibilului și cererii, restricțiile datorate sensului economic al variabilelor și restricția minimizare a costului.

Datele modelului economic le prezentăm într-un tabel de forma:

$\begin{smallmatrix} C \\ D \end{smallmatrix}$	C_1	C_2	...	C_j	...	C_n	a_i
D_1	$\begin{smallmatrix} c_{11} \\ x_{11} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c_{12} \\ x_{12} \end{smallmatrix}$...	$\begin{smallmatrix} c_{1j} \\ x_{1j} \end{smallmatrix}$...	$\begin{smallmatrix} c_{1n} \\ x_{1n} \end{smallmatrix}$	a_1
D_2	$\begin{smallmatrix} c_{21} \\ x_{21} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c_{22} \\ x_{22} \end{smallmatrix}$...	$\begin{smallmatrix} c_{2j} \\ x_{2j} \end{smallmatrix}$...	$\begin{smallmatrix} c_{2n} \\ x_{2n} \end{smallmatrix}$	a_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
D_i	$\begin{smallmatrix} c_{i1} \\ x_{i1} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c_{i2} \\ x_{i2} \end{smallmatrix}$...	$\begin{smallmatrix} c_{ij} \\ x_{ij} \end{smallmatrix}$...	$\begin{smallmatrix} c_{in} \\ x_{in} \end{smallmatrix}$	a_i
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
D_m	$\begin{smallmatrix} c_{m1} \\ x_{m1} \end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} c_{m2} \\ x_{m2} \end{smallmatrix}$...	$\begin{smallmatrix} c_{mj} \\ x_{mj} \end{smallmatrix}$...	$\begin{smallmatrix} c_{mn} \\ x_{mn} \end{smallmatrix}$	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_i	...	b_n	$\begin{smallmatrix} \Sigma a_i \\ \Sigma b_j \end{smallmatrix}$

Traducerea algebrică a celor trei tipuri de restricții conduce la:

$$\begin{cases} (\min)f(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}x_{ij}, & x = x_{11}, x_{12}, \dots, x_{mn}^T \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, & i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, & j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0, & i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

Observație. Dacă disponibilul este mai mic decât cererea sau mai mare, pentru a echilibra problema se introduce un depozit fictiv sau un centru fictiv cu cantitatea (fictivă) existentă sau cerută astfel încât problema să devină echilibrată. Costurile unitare de transport pentru depozitul fictiv sau centrul fictiv se consideră nule.

Teorema 3.3.1. Problema echilibrată de transport echilibrată (3.3.1.) admite cel puțin o soluție admisibilă, iar o soluție de bază admisibilă de bază are cel mult $m+n-1$ componente diferite de zero.

Demonstrație: Cum $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j = S$, considerând $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{S}$ avem:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n \frac{a_i b_j}{S} = \frac{a_i}{S} \sum_{j=1}^n b_j = \frac{a_i}{S} S = a_i, \quad i = \overline{1, m}$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = \sum_{i=1}^m \frac{a_i b_j}{S} = \frac{b_j}{S} \sum_{i=1}^m a_i = \frac{b_j}{S} S = b_j, \quad j = \overline{1, n}$$

și cum $x_{ij} \geq 0$, ajungem la concluzia că $X(x_{ij})$ verifică sistemul de restricții și condițiile nenegativitate, fiind deci soluție admisibilă a problemei de transport. Putem observa că din cele $m+n$ restricții doar $m+n-1$ sunt independente. Este suficient pentru aceasta, de exemplu, ca din suma primelor m restricții, să scădem suma următoarelor $n-1$ și vom obține atunci ultima restricție. Pe de altă parte știm că numărul componentelor nenule ale unei soluții de bază admisibile de bază este cel mult egal cu numărul restricțiilor independente și în felul acesta teorema este demonstrată.

3.3.1. SOLUȚII ADMISIBILE DE BAZĂ PENTRU O PROBLEMĂ DE TRANSPORT

Soluțiile optime pentru o problemă de transport vor fi căutate în mulțimea soluțiilor admisibile de bază și din acest motiv vom pune în evidență două metode prin care putem găsi aceste soluții.

a) Metoda diagonalei. Se începe cu determinarea componentei corespunzătoare căsuței din stânga sus a tabelului deci x_{11}

Vom lua $x_{11} = \min(a_1, b_1)$ și vom atribui valoarea zero tuturor variabilelor de pe aceeași linie sau coloană cu x_{11} în funcție de următoarele situații:

1. dacă $a_1 < b_1$, vom lua $x_{11} = a_1$, $x_{1j} = 0$, $j = \overline{2, n}$
2. dacă $a_1 > b_1$, vom lua $x_{11} = b_1$, $x_{i1} = 0$, $i = \overline{2, m}$
3. dacă $a_1 = b_1$, vom lua $x_{11} = a_1 = b_1$, iar x_{12} sau $x_{21} = 0$,

și restul componentelor de pe linia și coloana lui x_{11} egale cu zero. În ultima situație obținem soluții degenerate.

Modificăm apoi a_1 și b_1 înlocuindu-i cu $a'_1 = a_{11} - x_{11}$, $b'_1 = b_{11} - x_{11}$.

Procedeeul se repetă la pasul următor pentru calculele rămase necompletate care formează un tablou cu $m - 1$ linii și n coloane ; m linii și $n - 1$ coloane ; sau $m - 1$ linii și $n - 1$ coloane după cum primul pas s-a desfășurat în situațiile 1), 2), respectiv 3).

Prima componentă ce va fi determinată acum va ocupa aceeași poziție (colțul stânga – sus), în noul tabel. Procesul se termină în cel mult $m + n - 1$ pași, la fiecare pas determinându-se complet o linie (situația 1), o coloană (situația 2), sau o linie și o coloană situația 3. La fiecare pas se determină o singură componentă nenulă. Componentele nebazice nu se completează în tabel, căsuțele corespunzătoare rămânând libere pentru a nu se confunda componentele nebazice cu eventualele componente bazice nule.

b) Metoda costului minim. Această metodă este într-un total similară celei a diagonalei, cu singura diferență că se va determina mai întâi componenta x_{ij} pentru care $c_{ij} = \min c_{kl}$, luând $x_{ij} = \min(a_i, b_j)$.

Exemplul 3.3.1. Să se determine o soluție admisibilă de bază pentru problema de transport

D \ C	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	a _i
D ₁	4	2	2	3	35
D ₂	2	2	4	5	40
D ₃	3	4	2	3	20
b _j	50	10	25	10	95 95

a) Metoda diagonalei. Problema este echilibrată. Vom căuta o soluție cu $m+n-1=3+4-1=6$

4	2	2	3	35, 0
35				
2	2	4	5	40, 25, 15,
15	10	15	5	0
3	4	2	3	20, 10, 0
		10	10	
50	10	25	10	
15	0	10	0	
0		0		

Pasul întâi: deoarece $\min(a_1, b_1)=a=35$, punem conform situației 1) $x_{11} = 35$, $x_{12} = x_{13} = x_{14} = 0$. Modificăm pe a_1 și b_1 înlocuindu-i cu $a'_1 = a_1 - x_{11} = 0$, $b'_1 = b_1 - x_{11} = 15$.

Pasul al doilea: se pleacă de la tabelul format prin înlăturarea primei linii,: deoarece $\min(a_2, b'_1)=b'_1=15$, punem (conform 2)) $x_{21} = 15$, $x_{31} = 0$ (x_{31} componentă nebazică). Modificăm pe a_2 și b'_1 înlocuind cu $a'_2 = a_2 - x_{21} = 25$, $b''_1 = b'_1 - x_{21} = 0$.

Pasul al treilea: a rămas de completat tabelul format din liniile a doua, a treia și ultimile trei coloane. Cum $\min(a_2, b_2)=b_2=10$ punem $x_{22} = 10$, $x_{32} = 0$

(x_{32} componentă nebazică) înlocuindu-i cu $a_2'' = a_2' - x_{22} = 15$,

$$b_2' = b_2 - x_{22} = 0.$$

Pasul al patrulea: a rămas de completat tabelul format din ultimile două linii și coloane. Cum $\min(a_2'', b_3) = a_2'' = 15$, punem (conform 1)) $x_{23} = 15$, $x_4 = 0$

(x_{24} componentă nebazică). Modificăm pe a_{23}'' și b_3 înlocuindu-i cu $a_2''' = a_2'' - x_{23} = 0$,

$$b_3' = b_3 - x_{23} = 10.$$

Pasul al cincilea: a rămas de completat tabelul format din ultima linie și ultimile două coloane. Cum $\min(a_3, b_3') = 10$ punem $x_{33} = 10$. Modificăm pe a_3

și b_3' înlocuindu-i cu $a_3' = a_3 - x_{33} = 10$, $b_3'' = b_3' - x_{33} = 0$.

Pasul al șaselea: obligatoriu vom pune $x_{34} = 10$.

S-a obținut o soluție admisibilă de bază:

$$x_{11} = 35, x_{12} = 0, x_{13} = 0, x_{14} = 0, x_{21} = 15, x_{22} = 10, x_{23} = 15, x_{24} = 0, x_{31} = 0, x_{32} = 0, x_{33} = 10, x_{34} = 10$$

costul total al transportului fiind 300 u.m.

b) Metoda costului minim. Vom considera din nou tabelul simplificat:

4	2	2	3	35, 10, 0
		25	10	
2	2	4	5	40, 30, 0,
30	10			
3	4	2	3	20, 0
20				
50				
20	10	25	10	
0	0	0	0	

Pasul întâi: $\min_{ij} c_{ij} = c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{22} = c_{33} = 2$. Putem determina ori care dintre componentele $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{33}$. Luăm $x_{22} = \min(a_2, b_2) = 10$, $x_{12} = x_{32} = 0$ (componente nebazice). Înlocuim pe a_2 și b_2 cu $a_2' = a_2 - x_{22} = 30$, $b_3' = b_2 - x_{22} = 0$.

Pasul al doilea: $\min c_{ij} = c_{13} = c_{21} = c_{33} = 2$. Luăm $x_{21} = \min(a'_2, b_1) = 30$, $x_{23} = x_{24} = 0$ (componente nebazice). Înlocuim pe a'_2 și b_2 cu $a''_2 = a'_2 - x_{21} = 0$, $b'_1 = b_1 - x_{21} = 20$.

Pasul al treilea: $\min c_{ij} = c_{13} = c_{33} = 2$.

Luăm $x_{13} = \min(a_1, b_3) = 25$, $x_{33} = 0$ (componentă nebazică). Înlocuim a_1 și b_3 cu $a'_1 = a_1 - x_{13} = 10$, $b'_3 = b_3 - x_{13} = 0$.

Pasul al patrulea: $\min c_{ij} = c_{14} = c_{31} = c_{33} = 3$.

Luăm $x_{31} = \min(a_3, b'_1) = 20$, $x_{11} = 0$ (componentă bazică), $x_{34} = 0$ (componentă nebazică). Înlocuim a_3 și b'_1 cu $a''_3 = a_3 - x_{31} = 0$, $b''_1 = b'_1 - x_{31} = 0$.

Pasul al cincilea: obligatoriu $x_{14} = 10$. Am obținut pentru problemă o soluție admisibilă de bază degenerată ($x_{11} = 0$ componentă bazică). Ea este indicată în tabelul de mai sus. Costul unui asemenea transport este 220 u.m. *Metoda costului minim ne conduce de cele mai multe ori la o soluție admisibilă de bază mai bună decât metoda diagonalei, în sensul că realizează o valoare a cheltuielilor de transport mai mică.*

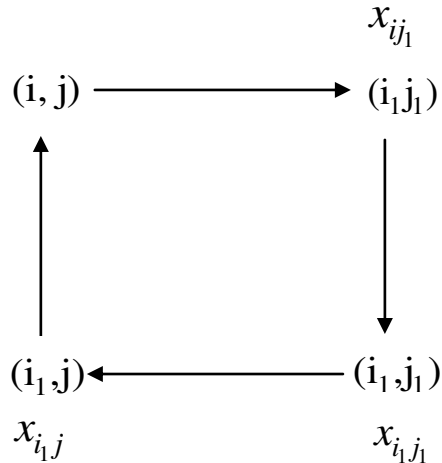
3.3.2. SOLUȚII OPTIME PENTRU O PROBLEMĂ DE TRANSPORT

Soluțiile optime (soluții admisibile ce realizează minimumul funcției obiectiv) ale unei probleme de transport le vom căuta în mulțimea soluțiilor admisibile de bază nedegenerate. Să considerăm că am determinat pentru problemă o soluție admisibilă de bază nedegenerată: $x = (x_{ij})^T$. Pornind de la aceasta să vedem cum putem obține o soluție admisibilă.

Convenim ca o pereche de indici (i, j) să o numim **celulă**. Când vom spune celulă liberă înțelegem că ea se referă la o componentă nebazică (secundară), adică nu se găsește printre cele $m+n-1$. Celule ocupate vor fi cele care se referă la componentele bazice (principale). Să considerăm o celulă liberă (i, j) .

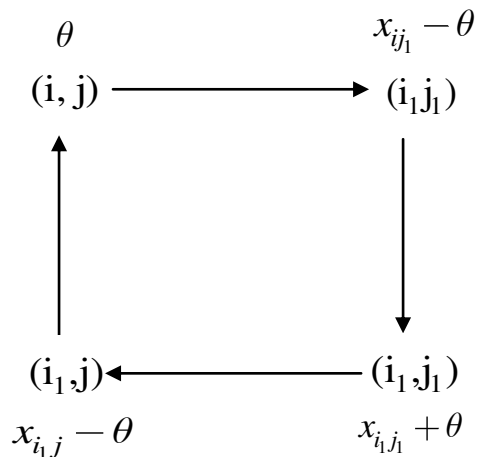
Definiția 3.3.1: Un șir de celule care începe cu celula liberă (i, j) și se termină cu aceasta, conținând în rest numai celule ocupate și anume câte două din aceeași linie și coloană se numește ciclul celulei libere (i, j) .

Cel mai simplu ciclu al unei celule libere (i, j) se prezintă sub forma de mai jos unde în dreptul celulelor am scris și componentele corespunzătoare ale soluției.



Să atribuim componentei x_{ij} (componenta nebazică), o valoare $\theta > 0$. Vom obține atunci un vector care are $m+n$ componente diferite de zero, acesta trebuind să verifice sistemul de restricții.

Acestea sunt verificate dacă vom scădea și aduna succesiv valoarea θ la componentele care au intrat în ciclul celulei libere (i, j) . Indicăm pe același ciclu acest lucru.



Pentru a fi verificate condițiile de nenegativitate va trebui ca θ să fie luat astfel încât $x_{ij_1} - \theta \geq 0$ și $x_{i_1j} - \theta \geq 0$.

Odată îndeplinite aceste condiții putem spune că am obținut o nouă soluție admisibilă $\bar{x}(x_{ij})$ unde:

$$\begin{cases} \bar{x}_{ij} = \theta, \bar{x}_{ij_1} = x_{ij_1} - \theta, \bar{x}_{i_1j_1} = x_{i_1j_1} + \theta \\ \bar{x}_{i_1j} = x_{i_1j} - \theta, \bar{x}_{ke} = x_{ke} \text{ pentru } k \neq i, i_1; j \neq j, j_1 \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Dorind acum ca noua soluție admisibilă să fie și admisibilă de bază este suficient să considerăm:

$$\theta = \min(x_{ij_1}, x_{i_1j}) \quad (3.3.3)$$

În acest fel se determină care componentă bazică devine nebazică. Relația (3.3.3) reprezintă forma criteriului de ieșire din algoritmul pentru găsirea soluțiilor optime a unei probleme de transport.

Să vedem acum care sunt condițiile ca soluția admisibilă de bază x să fie soluție optimă. Să evaluăm diferența $f(x) - f(\bar{x})$. Vom avea:

$$f(x) - f(\bar{x}) = \sum_{k=1}^m \sum_{e=1}^n c_{ke} x_{ke} - \sum_{k=1}^m \sum_{e=1}^n c_{ke} \bar{x}_{ke} = -c_{ij}\theta + c_{ij_1}\theta - c_{i_1j_1}\theta + c_{i_1j}\theta$$

sau

$$f(x) - f(\bar{x}) = \theta \delta_{ij} \quad (3.3.4)$$

unde

$$\delta_{ij} = -c_{ij} + c_{ij_1} - c_{i_1j_1} + c_{i_1j} \quad (3.3.5)$$

care reprezintă suma algebrică cu semn alternat a costurilor celulelor corespunzătoare ce au intrat în ciclu și care începe cu $-c_{ij}$.

Din (3.3.5) se observă că dacă pentru toate celulele libere (i, j) vom avea $\delta_{ij} \leq 0$, și așa cum $\theta > 0$, soluția admisibilă de bază $x(x_{ij})$ considerată reprezintă soluția optimă a problemei de transport. Rezultă în felul acesta că criteriul de optimalitate este

$$\delta_{ij} \leq 0 \quad (3.3.6)$$

pentru toate celule libere (i, j) .

Tot din (3.3.4) se constată că dacă există $\delta_{ij} \geq 0$, soluția x poate fi îmbunătățită. Pentru aceasta fie:

$$\delta_{ij} = \max_{\delta_{ke} \geq 0} \delta_{ke} \quad (3.3.7)$$

Atunci componentei nebazice x_{ij} îi vom atribui o valoare $\theta > 0$. Relația (3.3.7) reprezintă forma criteriului de intrare în algoritm. Mărimile δ_{ij} joacă rolul diferențelor $z_j - c_j$ din problemele de programare de care ne-am ocupat.

Sintetizând cele de mai sus în practică procedăm în felul următor:

a) Se determină o soluție admisibilă de bază nedegenerată prin una din cele două metode prezentate.

b) Pentru toate celulele libere se calculează cantitățile δ_{ij} .

- dacă toate cantitățile δ_{ij} sunt mai mici sau egale cu zero, atunci soluția este optimă;
- dacă există $\delta_{ij} > 0$ se trece la etapa următoare.

c) Se aplică criteriul de intrare. Vom atribui o valoare $\theta > 0$ componentei x_{ij} (nebazică) cea pentru care avem îndeplinită relația (3.3.7).

d) Se consideră ciclul celulei x_{ij} , se introduce θ în ciclu și se aplică criteriul de ieșire. Se determină valoarea lui θ după relația (3.3.3) indicându-se deci care componentă bazică devine nebazică.

e) Etapele algoritmului se reiau până se găsește soluția optimă a problemei.

Observații:

- a)** Prezența semnelor de egal în criteriul de optim și de intrare în bază, indică existența mai multor soluții optime ;
- b)** Pe parcursul aplicării algoritmului pot să apară soluții admisibile degenerate care pot conduce la un fenomen numit fenomen de ciclaaj. Pentru evitarea apariției soluțiilor admisibile degenerate se întrebuițează așa-numita **metodă a perturbării**. Aceasta constă în înlocuirea cantităților a_i cu $a_i + \varepsilon$, și cantității b_n cu $b_n + m\varepsilon$ (unde ε reprezintă o cantitate foarte mică, strict pozitivă). La finalul algoritmului, după determinarea soluției optime a problemei perturbate, se face $\varepsilon = 0$, obținându-se soluția optimă a problemei inițiale.

- c) Dacă la aplicarea criteriului de intrare sunt mai multe mărimi δ_{ij} pozitive maxime egale putem lua oricare dintre acestea.

Exemplul 3.3.2. Să se determine soluțiile optime ale problemei de transport din exemplul 3.3

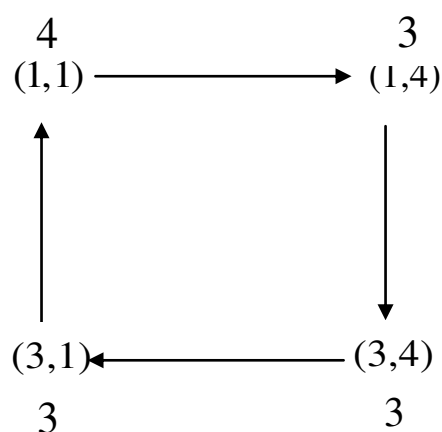
Pentru a fi siguri că nu apar soluții admisibile de bază degenerate aplicăm de la început metoda perturbării, adică considerăm:

$$a_1=35+\varepsilon, a_2=40+\varepsilon, a_3=20+\varepsilon, b_1=50, b_2=10, b_3=25, b_4=10, +3\varepsilon$$

O soluție admisibilă de bază determinată prin metoda costului minim din tabel este dată în tabelul:

D \ C	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	a _i
D ₁	4 10	2	2 25	3 ε	35+ ε
D ₂	2 40+ ε	2	3	5	40+ ε
D ₃	3 10- ε	4	2	3 10+2 ε	20+ ε
b _j	50	10	25	10+3 ε	95+3 ε 95+3 ε

Să găsim cantitățile δ_{ij} pentru celulele libere. Considerăm ciclul celulei libere (1,1) și în dreptul celulelor scriem costurile.



Vom avea: $\delta_{11} = -4 + 3 - 3 + 3 = -1$

Analog:

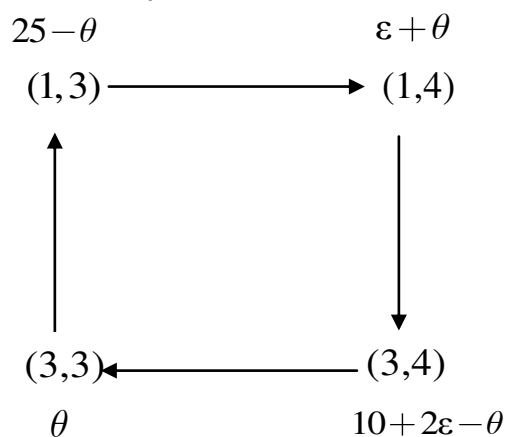
$$\begin{aligned}\delta_{22} &= -2 + 2 - 3 + 3 - 3 + 2 = -1 \\ \delta_{23} &= -4 + 2 - 3 + 3 - 3 + 2 = -3 \\ \delta_{24} &= -5 + 3 - 3 + 2 = -3 \\ \delta_{32} &= -4 + 2 - 3 + 3 = -2 \\ \delta_{33} &= -2 + 2 - 3 + 3 = 0\end{aligned}$$

Deoarece toate cantitățile δ_{ij} sunt mai mici sau egale cu zero am găsit soluția optimă a problemei. Făcând $\varepsilon=0$ găsim:

$$x_{11} = 0, x_{12} = 10, x_1 = 25, x_{14} = 0, x_{21} = 40, x_{22} = 0, x_{23} = 0, x_{24} = 0$$

$$x_{31} = 10, x_{32} = 0, x_{33} = 0, x_{34} = 0, \quad (\min)f(x) = 210 \text{ u.b.}$$

Deoarece $\delta_{33} = 0$, algoritmul poate continua atribuind componentei x_{33} (nebazică), o valoare $\theta > 0$. Considerăm ciclul celulei (3,3) și introducem pe θ în ciclu pentru a satisface restricțiile.



Aplicăm criteriul de ieșire luând $\theta = \min(25, 10 + 2\varepsilon) = 10 + 2\varepsilon$.

Componentele noii soluții sunt date în tabelul:

D \ c	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	a _i
D ₁	4	2	2	3	35+ ε
D ₂	2	2	4	5	40+ ε
D ₃	3	4	2	3	20+ ε
b _j	50	10	25	10+3 ε	95+3 ε

Făcând $\varepsilon=0$ găsim soluția optimă.

$$x_{11} = 0, x_{12} = 10, x_{13} = 15, x_{14} = 10, x_{21} = 40, x_{22} = 0, x_{23} = 0, x_{24} = 0$$

$$x_{31} = 10, x_{32} = 0, x_{33} = 10, x_{34} = 0, (\min)f(x) = 210 \text{ u.b.}$$

Exemplul 3.3.3 Să se determine soluțiile optime ale problemei de transport:

D \ c	C ₁	C ₂	C ₃	a _i
D ₁	1	2	3	50
D ₂	3	4	1	25
b _j	40	20	30	75 90

Problema nu este echilibrată. Vom adăuga un depozit cu costuri zero.

Vom avea deci:

D \ c	C ₁	C ₂	C ₃	a _i
D ₁	1	2	3	50
D ₂	3	4	1	25
D ₃	0	0	0	15
b _j	40	10	25	90 90

O soluție admisibilă de bază determinată prin metoda costului minim din tabel este prezentată în:

D \ c	C ₁	C ₂	C ₃	a _i
D ₁	25 1	20 2	5 3	50
D ₂	3	4	25 1	25
D ₃	15 0	0	0	15
b _j	40	20	30	90 90

Componentele soluției au fost determinate în ordinea:

$$x_{31} = 15, x_{11} = 25, x_{21} = 25, x_{12} = 20,$$

$$x_{13} = 5, x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{32} = 0, x_{33} = 0$$

Pentru celulele libere calculăm cantitățile δ_{ij} .

$$\delta_{21} = -3 + 1 - 3 + 1 = -4$$

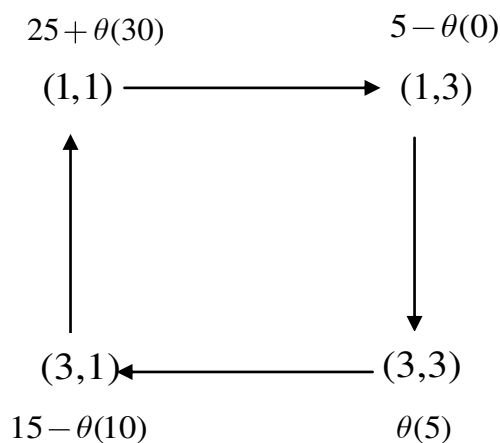
$$\delta_{22} = -4 + 2 - 3 + 1 = -4$$

$$\delta_{32} = -0 + 2 - 1 + 0 = 1$$

$$\delta_{33} = -0 + 3 - 1 + 0 = 2$$

Soluția nu este optimă. Avem că $\delta_{33} = \max_{\delta_{ij} \geq 0} \delta_{ij} = 2$. Considerăm ciclul

celulei (3,3) componentei x_{33} (nebazică) îi atribuim o valoare $\theta > 0$ și introducând pe θ în circuit avem:



După criteriul de ieșire luăm $\theta = \min(1, 15) = 5$. Noua soluție este prezentată în tabelul:

D \ c	C ₁	C ₂	C ₃	a _i
D ₁	30	20	3	50
D ₂	3	4	25	25
D ₃	10	0	5	15
b _j	40	20	30	90

Pentru celulele libere vom avea:

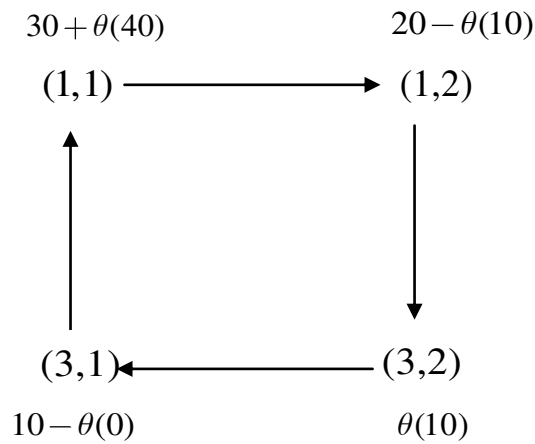
$$\delta_{13} = -3 + 1 - 0 + 0 = -2$$

$$\delta_{21} = -3 + 1 - 0 + 0 = -2$$

$$\delta_{22} = -4 + 2 - 1 + 0 - 0 + 1 = -2$$

$$\delta_{32} = -0 + 2 - 1 + 0 = 1$$

Soluția nu este optimă. Atribuim componentei x_{32} o valoare $\theta > 0$.



Noua soluție este prezentată în tabelul:

D \ c	C ₁	C ₂	C ₃	a _i
D ₁	1 40	2 10	3	50
D ₂	3	4	1 25	25
D ₃	0	0 10	0 5	15
b _j	40	20	30	90 90

Această soluție este optimă deoarece avem:

$$\delta_{13} = -1, \delta_{21} = -3, \delta_{22} = -3, \delta_{31} = -1.$$

Soluția problemei inițiale va fi:

$$x_{11} = 40, x_{12} = 10, x_{13} = 0, x_{21} = 0, x_{22} = 0, x_{23} = 25. (\min)f(x) = 85u.b.$$

Se observă că cerințele centrelor C₂ și C₃ nu vor fi satisfăcute în totalitate.

Cap. 4 SERII NUMERICE.

SERII DE PUTERI.

Este bine cunoscut faptul că, în prezent, fenomenele economice devin din ce în ce mai complexe și interdependente; mai nou, tendința de globalizare a economiei (și nu numai) duce la o concurență acerbă pe mai toate piețele și în mai toate domeniile de activitate economică, fenomen care se simte din ce în ce mai pregnant și în economia românească.

Aceste situații, cer din partea specialiștilor în economie, cunoștințe cât mai precise în vederea observării, înțelegerii, modelării și rezolvării pe baze riguros științifice a problemelor complexe cu care se confruntă. Această abordare nu mai este astăzi posibilă, fără recurgerea la un aparat matematic cât mai adecvat.

Modul mai puțin riguros, chiar empiric, de luare a deciziilor economice doar pe baza unei simple experiențe, este total depășit, astfel încât cei care nu se vor adapta noilor condiții și cerințe economice, vor fi eliminați încet, încet de pe piață.

În acest capitol se prezintă, într-o manieră accesibilă studenților economiști, câteva elemente de bază din teoria seriilor numerice și a seriilor de funcții (cazul particular al seriilor de puteri). Aplicațiile practice ale acestei teorii se întâlnesc în multe domenii de cercetare din matematică, fizică, chimie, biologie etc. În particular, aplicațiile cu caracter economic ale teoriei seriilor sunt multiple și permit modelarea și rezolvarea unor probleme economice cu caracter atât determinist cât și aleator (probabilistic).

Elemente și aplicații ale teoriei seriilor sunt regăsite în Teoria probabilităților și Statistica economică, Micro- și Macroeconomie, Gestiunea stocurilor și a fenomenelor de așteptare etc.

Pentru parcurgerea și înțelegerea noțiunilor prezentate în acest capitol sunt necesare noțiuni de teoria limitelor și a șirurilor studiate la Analiza Matematică din clasa a XI-a.

4.1. SERII NUMERICE

4.1.1. ȘIRURI DE NUMERE REALE

Definiția 4.1.1: Numim *șir de numere reale*, o aplicație:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ f(n) &= a_n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Vom nota șirul cu simbolul: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$; a_n se numește **termenul general** al șirului.

Definiția 4.1.2: Spunem că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este **convergent** către un număr $a \in \mathbb{R}$, dacă, orice vecinătate a lui a conține toți termenii șirului cu excepția unui număr finit de termeni.

Vom nota cu $a_n \rightarrow a$ sau $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$.

Numărul "a" se numește limita șirului și dacă există este unică. Dacă șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este convergent, atunci acesta se numește **șir divergent**. Un șir divergent sau nu are limită sau limita sa este $+\infty$ sau $-\infty$.

Exemple:

a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; $b_n = \frac{n^2}{2n^2+3}$; $c_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sunt șiruri convergente (cu

limitele 0, $\frac{1}{2}$ respectiv $e=2,71\dots$;

b) $a_n = \sqrt{n}$; $b_n = \frac{n^2+1}{3n}$; $c_n = \sqrt[3]{1-n^2}$ sunt șiruri divergente cu limitele $+\infty$, $+\infty$, respectiv $-\infty$;

c) $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^n \ln(n^2 + n + 1)$, $c_n = \sin(n+1)$ sunt șiruri divergente care nu au limită.

Teorema 4.1.1 (de caracterizare a șirurilor convergente)

Șirul $a_n \rightarrow a$ dacă și numai dacă: $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât $|a_n - a| < \varepsilon$, pentru $(\forall)n \geq n_\varepsilon$.

Teorema 4.1.2. (Cauchy)

Șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este convergent dacă și numai dacă: $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel încât: $|a_{n+k} - a_n| < \varepsilon$, pentru $(\forall)n \geq n_\varepsilon$ și $(\forall)k \in \mathbb{N}^*$.

Observații:

- i) Cele două teoreme, ca și definiția, nu sunt folosite în mod curent în aplicații practice; cu ajutorul lor se pot demonstra rezultate a căror aplicare este mult mai simplă (de exemplu, teorema de convergență a șirurilor monotone și mărginite, teorema cleștelui etc.).
- ii) Așa cum se observă, aplicarea teoremei 4.1.2. nu presupune cunoașterea apriorică a limitei a , în enunțul acesteia intervenind numai termenul general a_n respectiv a_{n+k} ; acest lucru este deosebit de util în aplicațiile care conțin șiruri recurente sau în care limita șirului este dificil de determinat.

4.1.2 NOȚIUNEA DE SERIE NUMERICĂ.**CONVERGENȚĂ.****PROPRIETĂȚI GENERALE ALE SERIILOR.**

După cum se știe, oricărei mulțimi finite $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de numere reale i se poate asocia un număr real $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ numit suma acestora. Se pune întrebarea firească: dacă mulțimea conține o infinitate de numere reale $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (cu alte cuvinte un șir de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$) i-am putea asocia un număr $S \in \mathbb{R}$ care să generalizeze conceptul de sumă finită?

Fie șirul: $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

Vom asocia acestuia, un nou șir de numere reale, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} : S_0, S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ definit astfel:

$$\begin{cases} S_0 = a_0 \\ S_1 = a_0 + a_1 \\ S_2 = a_0 + a_1 + a_2 \\ \dots\dots\dots \\ S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \equiv \sum_{k=0}^n a_k \end{cases} \quad (4.1.1)$$

pe care îl vom numi **șirul sumelor parțiale** atașat șirului $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Definiția 4.1.3. Numim **serie numerică, de termen general a_n** , expresia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (4.1.2)$$

Observație: În unele cazuri numerotarea termenilor seriei poate începe de la $n=1$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right)$ sau de la $n=n_0$ oarecare fixat $\left(\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \right)$ (vezi și proprietățile seriilor numerice).

Definiția 4.1.4.: Spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ este o serie:

- a) **convergentă (C)**, dacă șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir convergent;
- b) **divergentă (D)**, dacă șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este șir divergent.

Cu alte cuvinte problema convergenței unei serii numerice este echivalentă cu problema convergenței unui șir de numere reale și anume, șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Observații:

- i) Dacă $S_n \rightarrow S$, vom spune că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (C)$ și are **suma** S

(notăm: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$);

- ii) Dacă $S_n \rightarrow \pm\infty$, spunem că seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (D)$ și are **suma** $\pm\infty$

notăm $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \pm\infty$);

iii) Dacă $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu are limită, spunem că $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(D)$ și nu are sumă.

În studiul seriilor numerice, trebuie cercetat (ca și în cazul șirurilor) două aspecte:

- **natura seriei** (dacă este convergentă sau divergentă)
- **suma seriei** (în caz de convergență)

Dacă pentru șiruri stabilirea convergenței și determinarea limitei acestora este în cele mai multe cazuri una și aceeași chestiune, în cazul seriilor situația se schimbă radical; de cele mai multe ori este relativ ușor să stabilești convergența seriei, dar foarte greu, ba câte odată chiar imposibil de determinat suma acesteia.

De obicei, cu metodele specifice analizei numerice, se determină o aproximație S' a sumei S a seriei ($S' \simeq S$).

Pentru a se cerceta natura unei serii, nu se poate folosi întotdeauna definiția, ci adesea se utilizează condiții echivalente cu aceasta sau numai condiții suficiente de convergență numite “**criterii de convergență**”. Vom prezenta unul dintre aceste criterii în cele ce urmează.

Teorema 4.1.3. (criteriul general de convergență a lui Cauchy)

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este (C) dacă și numai dacă: $(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ astfel

încât: $|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k}| < \varepsilon$, pentru $(\forall)n \geq n_\varepsilon, (\forall)k \in \mathbb{N}$.

Această teoremă se obține ca o consecință a Teoremei 4.1.2, considerând în loc de șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Într-adevăr, conform (4.1.1) avem:

$$\begin{aligned} |S_{n+k} - S_n| &= |(a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} + \dots + a_{n+k}) - (a_1 + \dots + a_n)| = \\ &= |a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| \end{aligned}$$

4.1.3. EXEMPLE REMARCABILE DE SERII

1) Seria geometrică $\left(\sum_{n=0}^{\infty} aq^n; \text{ cu } a, q \in \mathbb{R} \right)$

Termenul general al acestei serii are forma $a_n = aq^n$ (*) și depinde de doi parametri (constante reale) a, q . Evident, este logic ca natura seriei și suma acesteia în caz de convergență să depindă de acești parametri. Astfel, dacă:

- i) $a = 0$, atunci $a_n = 0, (\forall) q \in \mathbb{R}$, deci seria este convergentă și are suma $S = 0$.
- ii) $a \neq 0$, avem:

$$\begin{aligned} S_n &\equiv a_0 + a_1 + a_2 + \dots a_n \stackrel{(*)}{=} a + aq + aq^2 + \dots + aq^n \\ &= a(1 + q + q^2 + \dots + q^n) \end{aligned}$$

deci S_n reprezintă suma unei progresii aritmetice cu rația q (de aici și numele seriei) și conform rezultatelor de la acest capitol (vezi manualul de Algebră, clasa a X-a) vom avea:

$$S_n = \begin{cases} a \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}; & q \neq 1 \\ a(n+1); & q = 1 \end{cases}$$

Trecând la limită în relația de mai sus, obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \begin{cases} \frac{a}{1 - q} & ; q \in (-1, 1) \\ \pm \infty & ; q \in [1, \infty) \\ (\nexists) & ; q \in (-\infty, -1] \end{cases} \quad (\text{depinde de semnul lui } a)$$

cu alte cuvinte, pentru:

$$\begin{cases} q \in -1, 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1 - q} & \left(\text{seria converge cu suma } S = \frac{a}{1 - q} \right) \\ q \in (-\infty, 1] \cup [1, \infty) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} aq^n (D) & \text{cu suma } S = \pm \infty \text{ sau nu există} \end{cases} \quad (4.1.3)$$

Observație: De fapt, această serie cuprinde o infinitate de serii particulare (pentru a, q având valori fixate) a căror natură o cunoaștem; foarte important este că, în caz de convergență, știm și suma seriei.

Exemple:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$, este serie geometrică cu $a=1, q=\frac{1}{2}$ și conform

(4.1.3) rezultă că:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 2 \quad (C)$$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{9^n}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$, este serie geometrică cu $a=1$ și $q=-\frac{1}{3}$ și

conform (4.1.3) rezultă că:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{9^n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{81}} - \dots + \frac{(-1)^n}{\sqrt{9^n}} + \dots = \frac{3}{4} \quad (C)$$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{2^{2n}} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} 5 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^n$, este serie geometrică cu $a=5, q=\frac{5}{4}$ și conform

(4.1.3) seria diverge $\left(\text{în acest caz } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^{n+1}}{2^{2n}} = +\infty \right)$.

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \sqrt{2}^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-1) - \sqrt{2}^n$ este serie geometrică cu

$a=-1, q=-\sqrt{2}$ și deci seria este divergentă; mai mult suma nu există.

2) Seria armonică generalizată $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}; \alpha \in \mathbb{R} \right)$

Evident, ca și în șirul seriei geometrice, natura (și în caz de convergență suma) seriei armonice generalizate, va depinde de valoarea parametrului α . Aplicând, Teorema 4.2 se poate arăta că, seria:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \right) \begin{cases} \nearrow (C) & ; \alpha > 1 \\ \searrow (D) & ; \alpha \leq 1 \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Observații:

- i) În caz de convergență ($\alpha > 1$), nu există o formulă generală de stabilire a sumei S în funcție de parametrul α , așa cum s-a stabilit în cazul seriei geometrice;
- ii) Evident, în cazul în care seria diverge ($\alpha \leq 1$), suma seriei este $S = +\infty$ (ca serie cu termeni pozitivi).

Exemple:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D), deoarece

$$\alpha = 1 \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = +\infty \right)$$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (C), deoarece $\alpha = 2 > 1$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = S \right)$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$ (D), deoarece $\alpha = \frac{2}{3} \leq 1$

Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ se numește **seria armonică (simplă)** sau **seria lui**

Riemann, deoarece termenul general a_n este media armonică a vecinilor săi,

adică satisface relația $\frac{2}{a_n} = \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}$.

3) Seria telescopică $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \right)$

Această serie este convergentă. Într-adevăr scriind termenul general

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ sub forma (*) $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, obținem termenul general al

șirului sumelor parțiale $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de forma:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$\stackrel{(*)}{=} \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = (\text{după simplificări})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}.$$

$$\text{Atunci } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right), \text{ deci } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 \quad (C)$$

$$\text{Dacă notăm cu } \alpha_n = \frac{1}{n}, \text{ atunci termenul general al seriei } a_n = \frac{1}{n(n+1)},$$

se poate scrie sub forma:

$$a_n = \alpha_n - \alpha_{n+1} \quad (4.1.5)$$

Seriile numerice a căror termen general a_n au forma de mai sus, se numesc **serii telescopice** și se poate observa ușor ca seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad (C) \Leftrightarrow (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \quad (C).$$

Mai mult seria va avea suma $S = \alpha_1 - \alpha$, unde α_1 este primul termen al șirului $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$, iar $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$.

Vom enunța în continuare câteva din proprietățile generale ale seriilor numerice, care se pot demonstra relativ ușor, ținând cont de definiția seriei și a operațiilor cu șiruri convergente.

4.1.4. PROPRIETĂȚI GENERALE ALE SERIILOR NUMERICE

(P₁) Dacă unei serii $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, i se adaugă sau i se suprimă un număr finit

de termeni, natura acesteia nu se schimbă.

Observație. Evident, în caz de convergență, suma S a unei serii se modifică corespunzător prin adăugarea (sau scăderea) a sumei termenilor finiți care se adaugă (sau se suprimă).

(P₂) Dacă unei serii convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, i se asociază termeni în grupe

finite, cu păstrarea ordinii lor, atunci se obține tot o serie convergentă și cu aceeași sumă.

Observații:

i) Proprietatea de mai sus, poate fi scrisă și sub forma:

(P₂') Dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S$, atunci și:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{n_1}) + (a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}) + (a_{n_2+1} + \dots + a_{n_3}) + \dots = S$$

ii) Asociind termenii unei serii divergente, în grupe finite cu păstrarea ordinii se pot obține serii convergente.

Exemplu:

Fie seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^n + \dots$ (termenul general

fiind $a_n = (-1)^n$)

Atunci:

$$S_0 = 1, S_1 = 1 - 1 = 0, S_2 = 1 - 1 + 1 = 1, S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \dots$$

deci: $S_{2n} = 1$ și $S_{2n+1} = 0$; evident șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge deoarece are două subșiruri care converg la limite diferite. Rezultă că seria

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{ (D) și nu are sumă.}$$

Dacă asociem termenii în grupe de câte doi (sau de câte patru, șase, etc.) obținem:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0$$

deci noua serie obținută converge și are suma $S = 0$.

(P₃) Dacă seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ sunt convergente cu sumele S_1

respectiv S_2 , atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge și are suma $S_1 + S_2$.

Cu alte cuvinte dacă:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_1, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = S_2 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = S_1 + S_2 \quad (4.1.6)$$

(P₄) Dacă $\lambda \in \mathbb{R}^*$, atunci seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ au aceeași natură;

mai mult în caz de convergență, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$ atunci $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda S$.

Teorema 4.1.4. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C), atunci $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Demonstrație:

Fie $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Deoarece seria converge, avem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \quad (1)$$

Dar $a_n = S_n - S_{n-1}$; trecând la limită în această relație obținem:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} \stackrel{(1)}{=} S - S = 0$$

q.e.d.

Observație: Condiția din teorema de mai sus ($a_n \rightarrow 0$) este o condiție necesară dar nu și suficientă pentru convergența unei serii; deci, dacă termenul general $a_n \rightarrow 0$ acest lucru nu implică obligatoriu că seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C). Ca

exemple se pot da cazurile particulare ale seriei armonice. Astfel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D)

chiar dacă $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$.

O formulare echivalentă a teoremei 4.1.4. des folosită în aplicații practice, este:

Teorema 4.1.5. Criteriul general de divergență (C.G.D)

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$. Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D).

Exemple:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ (D), deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$ (D), deoarece:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71... \neq 0$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n-n^2}{2n}$ (D), deoarece $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+n-n^2}{2n} = -\infty \neq 0$

În concluzie, dacă:

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D)

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ poate fi (C) sau (D) (trebuie făcută o analiză

suplimentară în acest caz)

4.2 SERII CU TERMENI POZITIVI

Definiția 4.2.1. Numim *serie cu termeni pozitivi*, o serie de forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ cu } a_n \geq 0, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}.$$

Teorema 4.2.1. (de caracterizare a convergenței seriilor cu termeni pozitivi)

Seria cu termeni pozitivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ converge dacă și numai dacă

șirul sumelor parțiale $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este mărginit.

Demonstrație:

Avem

$$S_{n+1} - S_n = (a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}) - (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = a_{n+1} \geq 0 \text{ deci}$$

$S_{n+1} \geq S_n$, adică șirul $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este monoton crescător.

Dacă $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este și mărginit (superior), rezultă că este convergent

(conform teoremei de convergență a șirurilor monotone și mărginite) deci $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C).

Reciproc, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (C) \Rightarrow (S_n)_{n \in \mathbb{N}} (C)$. Dar un şir convergent este obligatoriu mărginit, deci teorema este demonstrată.

q.e.d.

Observație: În aplicațiile practice, Teorema 4.2.1. nu este folosită foarte des deoarece, în general, este relativ complicat a se demonstra mărginirea şirului $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$; întradevăr, trebuie demonstrată relația:

$$|S_n| = |a_1 + a_2 + \dots + a_n| < M, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^* \text{ cu } M > 0 \text{ constantă care nu depinde de } n \in \mathbb{N}^*.$$

Mult mai utile sunt următoarele rezultate (numite criterii de convergență), care pot fi clasificate în două categorii: *criterii de comparație* și *criterii cu limită*.

I) Criteriul de comparație de specia I (cu inegalități simple)

Fie seriile: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **și** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **care satisfac relațiile**

$$0 \leq a_n \leq b_n, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) Dacă } \sum_{n=1}^{\infty} b_n (C) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n (C) \\ \text{ii) Dacă } \sum_{n=1}^{\infty} a_n (D) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n (D) \end{array} \right.$$

Exemplu: Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$. Termenul general $a_n = \frac{n!}{n^n}$ satisface:

$$0 \leq a_n = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{n \cdot n \cdot n \dots n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdot \frac{3}{n} \dots \frac{n}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} = \frac{2}{n^2} = b_n$$

Dar:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad (C) \quad (\text{ca serie armonică generalizată})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} \text{ cu } \alpha = 2 > 1)$$

Atunci conform punctului i) din criteriu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ (C).

II) Criteriul de comparație de specia a III-a (cu limită)

Fie seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cu $a_n, b_n \geq 0$. Dacă există:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = k \in (0, \infty) \quad (4.2.1)$$

atunci seriile au aceeași natură.

Exemplu: Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+3}$ cu $a_n = \frac{1}{2n+3} \geq 0$

Luăm ca serie de comparație, seria armonică (simplă) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$,

despre care știm că diverge. Deoarece:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n+3}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2} \in (0, \infty) \quad \text{deci}$$

conform criteriului, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ are aceeași natură cu seria $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, deci

diverge.

Observații:

- i) Criteriul de comparație la limită, tratează și cazurile când $k=0$ sau $k=+\infty$, dar s-a renunțat la prezentarea lor pentru simplificarea expunerii.
- ii) Aplicarea criteriilor de comparație, nu este în general foarte simplă, deoarece trebuie satisfăcute simultan următoarele două condiții:

- a) alegerea seriei de comparație (de exemplu, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$), funcție de seria dată (de exemplu, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a cărei convergență vrem să o stabilim);
- b) trebuie cunoscută aprioric natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ (convergență sau divergență)

Prima condiție este influențată foarte mult de abilitățile matematice ale rezolvitorului, iar cea de a doua de “experiența” sa. Pentru această din urmă condiție, seriile geometrică și armonică pot furniza o infinitate de serii particulare (a căror natură o cunoaștem) posibil de folosit ca serii de comparație.

- iii) În schimb, următoarele criterii (numite criterii cu limită) se aplică mult mai ușor, formularea acestora depinzând exclusiv de termenul

general a_n al seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ a cărei natură vrem să o determinăm.

III. Criteriul raportului (D'Alembert)

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ și: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda \in 0, \infty$. Atunci, dacă:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \lambda < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (C)} \\ \text{ii) } \lambda > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (D)} \\ \text{iii) } \lambda = 1 ; \text{ caz de nedeterminare (nu se poate preciza natura seriei)} \end{array} \right.$$

Exemple:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; cu $a_n = \frac{n!}{n^n}$ respectiv $a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$. Atunci

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (n+1)}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n^n}{n!} =$$

$$(\text{după simplificări}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{e} < 1, \text{ deci seria } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \text{ converge.}$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1} ; \text{ cu } a_n = \frac{2^n}{n^2+1} \text{ și } a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2+1}.$$

Atunci:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n \cdot 2}{n^2+2n+2} \cdot \frac{n^2+1}{2^n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^2+2n+2} = 2 \cdot 1 = 2 > 1$$

deci, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2+1}$, diverge.

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} ; \text{ cu } a_n = \frac{1}{n} \text{ și } a_{n+1} = \frac{1}{n+1}. \text{ Avem:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \text{ deci conform acestui criteriu nu putem preciza}$$

natura seriei armonice $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (despre care știm însă că este divergentă,

vezi formula (4.1.4)).

IV. Criteriul rădăcinii (Cauchy)

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lambda \in [0, \infty]$. Atunci, dacă:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \lambda < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (C)} \\ \text{ii) } \lambda > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (D)} \\ \text{iii) } \lambda = 1 \Rightarrow \text{caz de nedeterminare (nu se poate preciza natura seriei)} \end{array} \right.$$

Exemple:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} ; \text{ cu } a_n = \frac{n^2}{2^n} \geq 0. \text{ Atunci:}$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1 \text{ deci, seria } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$

converge.

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} ; \text{ cu } a_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2} \geq 0. \text{ Atunci:}$$

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e > 1$$

deci seria diverge.

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; cu $a_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$. Atunci:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = \frac{1}{1} = 1, \text{ deci nu putem preciza cu}$$

acest criteriu, natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (despre care știm că este convergentă,

ca seria armonică generalizată, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ cu $\alpha = 2 > 1$).

Observații:

i) În unele din exemplele de mai sus am folosit limitele fundamentale:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \quad \text{și} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{P_k(n)} = 1 \quad (4.2.2)$$

unde: $P_k(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_2 n^2 + a_1 n + a_0$ polinom de grad k cu coeficienți reali și $a_k > 0$

ii) Se observă că aplicarea acestor criterii, constă doar în calculul unei limite; totuși dacă termenul general al seriei a_n , are o formă mai complicată determinarea lui λ poate fi o problemă deloc ușoară. Se poate apela în aceste cazuri la criteriile de comparație sau la alte criterii de o formă mai complicată care nu sunt prezentate aici (se poate consulta în acest scop, orice curs de analiză matematică care tratează convergența seriilor numerice).

iii) Datorită relației: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \quad (4.2.3)$

rezultă că dacă un criteriu ne conduce la cazul de excepție $\lambda = 1$, nu se încearcă aplicarea celui alt criteriu, deoarece se va obține aceeași concluzie; obișnuit aplicarea criteriului raportului sau rădăcinii se face ținând cont de forma termenului general a_n (astfel încât calculul limitei să fie cât mai simplu).

iv) Se observă, că există situații – chiar pentru serii foarte simple – în care aceste criterii nu pot preciza natura seriilor ($\lambda = 1$). De obicei în aceste cazuri se aplică criteriile de comparație respectiv criteriul general de divergență (C.G.D), sau următorul criteriu (a lui Raabe-Duhamel).

V) Criteriul lui Raabe – Duhamel

Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \mu \in \mathbb{R}$. Atunci, dacă:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } \mu > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (C)} \\ \text{ii) } \mu < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (D)} \\ \text{iii) } \mu = 1 ; \text{ caz de nedeterminare (nu se poate preciza natura seriei)} \end{array} \right.$$

Exemple:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; cu $a_n = \frac{1}{n^2} \geq 0$. Am văzut cum criteriul rădăcinii ne

conduce la cazul de nedeterminare $\lambda = 1$. Vom aplica criteriul lui Raabe – Duhamel pentru a “scăpa” din această situație.

Avem:

$$\begin{aligned} \mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{(n+1)^2}{n^2} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \left(\frac{(n^2 + 2n + 1) - n^2}{n^2} \right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 1}{n} = 2 > 1, \text{ deci seria converge.} \end{aligned}$$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$; cu $a_n = \frac{1}{2n+1} \geq 0$. Se verifică imediat că atât criteriul

raportului cât și cel al rădăcinii ne conduc la cazul $\lambda = 1$. Dacă aplicăm criteriul lui Raabe – Duhamel obținem:

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{2n+3}{2n+1} - 1 \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{2n+1} \right) = 1$$

deci (în acest caz) nici criteriul lui Raabe – Duhamel nu ne “scoate” din cazul de nedeterminare.

Dacă aplicăm în schimb criteriul de comparație la limită, considerând seria

armonică : $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D), obținem $k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$.

Deci cele două serii au aceeași natură, cu alte cuvinte seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}$ (D).

Observații:

- i) Criteriul lui Raabe – Duhamel nu se aplică (în mod obișnuit) decât atunci când criteriul raportului sau rădăcinii ne conduc la cazul de nedeterminare $\lambda = 1$. În cele mai multe dintre situații, acest criteriu ne scoate din cazul de nedeterminare; în caz contrar se va încerca aplicarea criteriilor de comparație.
- ii) Totuși, există situații unde datorită formei termenului general al seriei aplicarea directă a criteriului lui Raabe – Duhamel aduce o simplificare a modului de calcul a limitei.

4.3 SERII ALTERNATE

Definiția 4.3.1. O serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $u_n \in \mathbb{R}$ se numește **serie alternată** (cu

termeni alternați) dacă, termenii săi satisfac relațiile:

$$u_n \cdot u_{n+1} < 0, \quad (\forall) n \in \mathbb{N}^* \quad (4.3.1)$$

Observații:

- i) Din (4.3.1) rezultă că termenii seriei alternează ca semn; atunci termenul general u_n poate fi scris sub una din următoarele forme:

$$u_n = (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n > 0 \text{ (dacă primul termen al seriei este pozitiv)}$$

respectiv:

$$u_n = (-1)^n a_n, \quad a_n > 0 \quad \text{(dacă primul termen al seriei este negativ)}$$

- ii) Deci orice serie alternată poate avea una din următoarele două forme:

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n+1} a_n + \dots \\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \dots + (-1)^n a_n + \dots \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Exemple:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2} + \dots \\ \text{b)} \quad & \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n = -1 + 2 - 3 + 4 - \dots + (-1)^n \cdot n + \dots \end{aligned}$$

În studiul convergenței seriilor alternate **nu pot** fi folosite criteriile de la serii cu termeni pozitivi. Vom prezenta aici un singur criteriu specific seriilor cu termeni alternanți.

Criteriul lui Leibniz:

Fie seria alternată $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ **cu** $a_n > 0$. **Dacă șirul** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

satisface condițiile:

$$\begin{cases} \text{i)} \quad a_n \rightarrow 0 \\ \text{ii)} \quad (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ este monoton descrescător } (a_n \geq a_{n+1}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

atunci seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ **converge.**

Observații:

- i) Criteriul lui Leibniz oferă **numai** condiții suficiente de convergență **nu** și necesare; cu alte cuvinte dacă condițiile nu sunt satisfăcute nu rezultă că seria diverge, ci doar faptul că criteriul nu poate fi aplicat.
- ii) **Totuși**, dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, atunci $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ (D), dar datorită aplicării criteriului general de divergență $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n a_n \neq 0$.
- iii) În cazul în care $a_n \rightarrow 0$, dar șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este monoton descrescător criteriul lui Leibniz nu este satisfăcut, și nu putem afirma nimic despre natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$.

Exemple:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} + \dots \quad (\text{seria armonică alternată})$$

Avem șirul $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ și este monoton descrescător, deci conform criteriului lui Leibniz seria converge.

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{3n+1}$; cu $a_n = \frac{n}{3n+1} \rightarrow \frac{1}{3}$ deci prima condiție a criteriului lui Leibniz nu este satisfăcută, acesta neputând fi aplicat.

Totuși, deoarece: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{3n+1}$ nu există, rezultă conform C.G.D. că seria diverge.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}}$, cu $a_n = \frac{\sin^2 n}{\sqrt{n}} > 0$

Deoarece $0 \leq \sin^2 n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$. Trecând la limită (teorema

cleștelui) obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, deci prima condiție din criteriul lui Leibniz este satisfăcută. Se poate arăta relativ ușor că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nu este monoton, deci condiția a doua nu este satisfăcută și criteriul lui Leibniz nu poate fi aplicat.

Pentru a putea totuși preciza natura acestei serii, se pot aplica criterii de la serii cu termeni oarecare (neprezentate aici) sau folosi noțiunile din următorul subcapitol.

4.4 SERII ABSOLUT CONVERGENTE.

SERII SEMI – CONVERGENTE.

Evident, în cazul seriilor cu termeni oarecare $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R} \right)$, nu se pot

aplica în studiul naturii acestora, criteriile formulate pentru seriile cu termeni pozitivi sau pentru seriile cu termeni alternanți, enunțate în secțiunile precedente 4.2 respectiv 4.3.

Totuși, în secțiunea 4.1 au fost enunțate două rezultate care pot fi aplicate tuturor seriilor numerice, și anume: Criteriul general de convergență a lui Cauchy (Teorema 4.1.3) respectiv Criteriul general de divergență (Teorema

4.1.5). Aplicarea lor, în special pentru stabilirea convergenței seriilor, este așa cum am mai spus, de cele mai multe ori extrem de dificilă. De aceea, matematicienii au căutat și au stabilit, noi criterii, mai simple de aplicat în practică, cum ar fi: Criteriul lui Abel, Criteriul lui Dirichlet, etc.

Chiar și așa, aplicarea lor necesită abilități matematice mai deosebite, precum și o oarecare practică în lucrul cu serii. Deoarece lucrarea de față se adresează în mod special studenților economiști, s-a considerat utilă renunțarea prezentării acestor noi criterii; vom arăta totuși că, în anumite situații, studiul convergenței / divergenței seriilor cu termeni oarecare se reduce la studiul convergenței / divergenței seriilor cu termeni pozitivi.

Definiția 4.4.1. Fie seria cu termeni oarecare $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$. Spunem că:

a) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, este **absolut convergentă (A.C.)**, dacă seria modulelor

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ este convergentă (ca serie cu termeni pozitivi).

b) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, este **semi - convergentă (S.C.)**, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C) dar ,

$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (D).

Teorema 4.4.1. Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbb{R}$ este absolut convergentă,

atunci și seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Demonstrație. Deoarece, seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (A.C.) $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (C). Aplicând

Teorema 4.1.3. seriei modulelor, obținem:

$$(\forall)\varepsilon > 0, (\exists)n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ a.î. } \|a_{n+1} + \dots + a_{n+k}\| \equiv |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}| < \varepsilon, (\forall)n \geq n_\varepsilon$$

și $(\forall)k \in \mathbb{N}^*$ (*)

Din proprietățile funcției modul, rezultă că:

$$|a_{n+1} + \dots + a_{n+k}| \leq |a_{n+1}| + \dots + |a_{n+k}| \quad (**)$$

Din (*) + (**) rezultă că $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C), conform criteriului general de convergență a lui Cauchy.

q.e.d.

Observație:

Reciproca teoremei de mai sus nu este adevărată; cu alte cuvinte, convergența seriei simple nu implică convergența seriei modulelor

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (C) \not\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (C) \right).$$

Exemplu: Fie seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$. Evident este o serie alternată și converge deoarece satisface criteriul lui Leibniz. Totuși, seria modulelor, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, diverge ca serie armonică simplă.

1. Întrucât seria valorilor absolute, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, este o serie cu termeni pozitivi, pentru studiul naturii acesteia se vor folosi criteriile enunțate în secțiunea 4.3
2. În cazul în care seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (D), am văzut că despre seria

simplă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, nu se poate afirma nimic. Totuși, se demonstrează că în

cazul în care divergența seriei modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ a fost stabilită cu

Criteriul raportului sau cu Criteriul rădăcinii, atunci și seria (simplă)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

3. Pentru seriile cu termeni pozitivi $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \geq 0\right)$, noțiunile de convergență și convergență absolută coincid (deoarece $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$).
4. În anumite situații, este utilă și următoarea formulare echivalentă a Teoremei 4.4.1. “Dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$ diverge, atunci și seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge”.

În concluzie, în studiul naturii seriilor cu termeni oarecare, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, a_n \in \mathbb{R}$, se poate aplica următorul:

Mod de lucru:

- i) Se atașează seriei cu termeni oarecare, seria modulelor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (care este serie cu termeni pozitivi);
- ii) Se studiază natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ folosind criteriile enunțate pentru serii cu termeni pozitivi;
- iii) Dacă:
 - a) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (C) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n (C)$
 - b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (D)$ (divergența fiind stabilită cu Criteriul raportului sau Criteriul rădăcinii $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n (D)$)
 - c) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| (D)$ (divergența fiind stabilită cu alte criterii) \Rightarrow despre natura seriei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nu se poate spune nimic. În acest caz trebuie folosite alte criterii (Abel, Dirichlet etc.).

Exemple:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \cdot \sin^n \alpha}{\sqrt{n}}, \text{ cu } \alpha \in 0, 2\pi \text{ parametru real.}$$

Evident seria este o serie cu termeni oarecare (datorită lui $\sin^n \alpha$) și nu cu termeni alternanți.

Atașăm seria $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot |\sin^n \alpha|}{\sqrt{n}}$ și aplicăm criteriul raportului.

Atunci, obținem:

$$\lambda \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1} \cdot |\sin^{n+1} \alpha|}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^n \cdot |\sin^n \alpha|} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt{\frac{n}{n+1}} \cdot |\sin \alpha|$$

și deci:

$$\lambda = 2|\sin \alpha|$$

Atunci, pentru:

$$i) \quad \lambda \equiv 2|\sin \alpha| < 1, \text{ seria } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ (C)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (C) (conf.T.4.1.1)}$$

$$ii) \quad \lambda \equiv 2|\sin \alpha| > 1, \text{ seria } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ (D)} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ (D) (conf.Obs.3)}$$

$$iii) \quad \lambda \equiv 2|\sin \alpha| = 1, \text{ nu putem preciza natura seriei } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ și deci a}$$

$$\text{seriei inițiale } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Rezolvând inecuațiile trigonometrice de mai sus, avem:

$$i) \quad \text{pentru } \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right) \cup \left(\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right] \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \cdot \sin^n \alpha}{\sqrt{n}} \text{ (A.C.)}$$

$$ii) \quad \text{pentru } \alpha \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \cdot \sin^n \alpha}{\sqrt{n}} \text{ (D)}$$

$$iii) \quad \text{pentru } \alpha \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\} \Rightarrow \text{nu putem preciza natura seriilor}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ și } \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Dar, în cazul iii) cele două serii (simplă și a modulelor) au expresiile:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$ (C), ca serie alternantă care satisface

criteriul lui Leibniz (șirul $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$, monoton descrescător).

b) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}}$ (D), (ca serie armonică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ cu

$$\alpha = \frac{1}{2} < 1)$$

Deci, în acest caz, seria $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n \cdot \sin^n \alpha}{\sqrt{n}}$ este (S.C.)

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left(\frac{1-a}{1-2a} \right)^n$, cu $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ parametrul real.

Atașăm seria modulelor: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left| \frac{1-a}{1-2a} \right|^n$ și aplicăm criteriul

rădăcinii:

$$\lambda \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n} \right)^n \cdot \left| \frac{1-a}{1-2a} \right|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \left| \frac{1-a}{1-2a} \right| = \left| \frac{1-a}{1-2a} \right|$$

Atunci, pentru:

i) $\lambda = \left| \frac{1-a}{1-2a} \right| < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (C), deci și seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (C) (conf. T.4.4.1)

ii) $\lambda = \left| \frac{1-a}{1-2a} \right| > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (D), deci și seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (D) (conf. Obs.3)

iii) $\lambda = \left| \frac{1-a}{1-2a} \right| = 1 \Rightarrow$ nu putem preciza natura seriilor $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ și $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Atunci, rezolvând inecuațiile de mai sus, concluzionăm că:

i) pentru $\lambda \in -\infty, 0 \cup \left(\frac{2}{3}, \infty \right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \left(\frac{1-a}{1-2a} \right)^n$ este (A.C.);

ii) pentru $\lambda \in \left(0, \frac{2}{3} \right) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \left(\frac{1-a}{1-2a} \right)^n$ este (D);

iii) pentru $\lambda \in \left\{ 0, \frac{2}{3} \right\} \Rightarrow$ nu putem preciza natura seriei.

Dar, pentru:

$$a) \quad \underline{\lambda = 0} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n, \text{ care (D) conform C.G.D.}$$

Într-adevăr

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \neq 0$$

$$b) \quad \underline{\lambda = \frac{2}{3}} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n+1}{n} \right)^n,$$

care (D) conform C.G.D., deoarece $a_n \not\rightarrow 0$.

4.5. SERII DE PUTERI.

Așa cum s-a observat din secțiunile precedente, noțiunea de “**serie numerică**” apare ca o generalizare (extindere) firească a noțiunii de “**șir numeric**”.

În mod natural, aceste două noțiuni au căpătat în Analiza matematică noi extinderi, din ce în ce mai complexe, lucru de altfel deseori întâlnit nu numai în matematică ci și în multe alte domenii ale științei.

Astfel, pornind de la noțiunea de șir numeric:

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \dots \quad (*)$$

se introduce noțiunea de “**șir de funcții**”:

$$f_n(x)_{n \in \mathbb{N}} : f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (**)$$

unde funcțiile $f_n(x)$ sunt definite pe același domeniu $D \subset \mathbb{R}$.

Exemple:

$$a) \quad f_n(x)_{n \in \mathbb{N}^*}, \text{ cu termenul general: } \begin{cases} f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n(x) = nx^{2n} \sin nx \end{cases}$$

adică, șirul de funcții are forma:

$$x \sin x, 2x^4 \sin 2x, 3x^6 \sin 3x, \dots, nx^{2n} \sin nx, \dots$$

$$b) \quad f_n(x)_{n \in \mathbb{N}^*}, \text{ unde termenul general este: } \begin{cases} f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n(x) = (n^2 + 1) \ln(nx) \end{cases}$$

deci, șirul de funcții are forma:

$$2\ln x, 5\ln 2x, 10\ln 3x, \dots, (n^2 + 1)\ln(nx) \dots$$

Ținând seama că noțiunea de “**funcție**” este mult mai complexă decât cea de “**număr**”, este evident că noțiuni precum *convergență* sau *divergență* au căpătat pentru șirurile de funcții valențe noi. Astfel, un șir de funcții $f_n(x)_{n \in \mathbb{N}}$ poate fi: **simplu (punctual) convergent, uniform convergent, slab convergent, tare convergent** etc.

Este natural ca în caz de convergență, șirul de funcții să aibă limita o funcție $f(x)$ și nu un număr. De asemenea, ținând cont că termenii șirului sunt funcții, care pot avea diverse proprietăți (funcție continuă, derivabile, integrabile etc.), este natural să cercetăm în ce condiții acestea se “transferă” la funcția limită $f(x)$.

În mod cu totul analog noțiunea de “**serie numerică**”:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \quad (***)$$

capătă o primă generalizare și anume cea de “**serie de funcții**”:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (****)$$

unde termenii seriei sunt funcții definite pe același domeniu $D \subset \mathbb{R}$.

Exemple:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 1)\operatorname{arctg}(x^n + 1) = \operatorname{arctg}1 + 2\operatorname{arctg}(x + 1) + 5\operatorname{arctg}(x^2 + 1) + \dots$$

$$\text{unde termenul general al seriei este: } \begin{cases} f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n(x) = (n^2 + 1)\operatorname{arctg}(x^n + 1) \end{cases}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 + x^n} = \frac{1!}{1 + x} + \frac{2!}{1 + x^2} + \frac{3!}{1 + x^3} + \dots$$

$$\text{unde termenul general are forma: } \begin{cases} f_n : 0,1 \rightarrow \mathbb{R} \\ f_n(x) = \frac{n!}{1 + x^n} \end{cases}$$

Analog, în caz de convergență (simplă, uniformă, etc.) seria va converge la o “**funcție sumă**” $s(x)$. Din nou este interesant și important de studiat, în ce

condiții proprietățile termenilor seriei de funcții (integrabilitate, derivabilitate, continuitate etc.) se transferă asupra funcției sumă $s(x)$.

4.5.1. SERII DE PUTERI

Un caz particular de serii de funcții, dar foarte important și des întâlnit în aplicațiile economice, este cel al seriilor de puteri, unde termenii seriei sunt funcții putere. Astfel, avem:

Definiția 4.5.1: *Numim serie de puteri centrată în x_0 , o serie de funcții de forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots \quad (4.5.1)$$

unde $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ este un șir numeric (Numerele $a_n \in \mathbb{R}$ se numesc *coeficienții* seriei de puteri).

Observații:

- i) un caz particular, dar foarte des întâlnit în aplicații, este cel al seriilor de puteri centrate în 0 (pe scurt, serii de puteri) deci când $x_0 = 0$. Vom obține atunci seria:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots \quad (4.5.2)$$

- ii) Deoarece prin substituția:

$$y = x - x_0 \quad (4.5.3)$$

o serie de puteri centrată în x_0 (și variabila x) se reduce întotdeauna la o serie de puteri centrată în 0 (și variabila y), adică avem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \quad (4.5.4)$$

ne vom ocupa numai în continuare numai de seriile de puteri centrate în 0, deci de forma (4.5.2).

Definiția 4.5.2: Spunem că, seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este:

a) **convergentă (punctual)** în $x = \bar{x}_0 \in \mathbb{R}$, dacă seria numerică

atașată, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \bar{x}_0^n$ este convergentă;

b) **convergentă (punctual) pe domeniul** $D_0 \subset \mathbb{R}$, dacă converge în orice punct $x \in D_0$ (D_0 se numește mulțime de convergență a seriei).

Teorema 4.5.1. Mulțimea de convergență a unei serii de puteri,

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, este întotdeauna nevidă.

Demonstrație. Fie seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir de numere reale oarecare și D_0 mulțimea sa de convergență.

Pentru $x = 0$ seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \equiv a_0$, deci converge și are suma $S = a_0$.

Rezultă că $0 \in D_0$, deci $D_0 \neq \emptyset$.

q.e.d.

Teorema 4.5.2. (lui Abel)

Fie seria de puteri, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $a_n \in \mathbb{R}$. Atunci, $(\exists!) r \in 0, \infty$ ("r" se

numește rază de convergență), astfel încât:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) pentru } x \in (-r, r) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge (C)} \\ \text{ii) pentru } x \in (-\infty, -r) \cup (r, +\infty) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ diverge (D)} \end{array} \right. \quad (4.5.5)$$

Observații:

- i) Teorema lui Abel nu precizează natura seriei în capetele intervalului de convergență: $(-r, r)$. În exemplele concrete, se studiază separat natura seriei în cele două capete, adică seriile numerice:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n \text{ și } \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n.$$

- ii) Dacă raza de convergență $r=0$, atunci evident seria de puteri

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge numai în } x=0 \text{ și diverge în rest (pentru } x \in \mathbb{R}^* \text{)}.$$

- iii) Dacă raza de convergență $r=+\infty$, atunci mulțimea de convergență a seriei $D_0 = \mathbb{R}$, deci seria nu diverge pentru nici o valoare reală.

- iv) Așadar, folosind teorema lui Abel, dacă aflăm raza de convergență r , știm mulțimile pe care seria $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge sau diverge (evident cu excepția valorilor $x = \pm r$). Următoarele două teoreme ne oferă două formule pentru aflarea razei de convergență r .

Teoremă 4.5.3 (Teorema raportului).

Fie seria de puteri, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ cu $a_n \in \mathbb{R}$ și $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \rho \in 0, \infty$.

Atunci raza de convergență r , este dată de relațiile:

$$r = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & ; \rho \in (0, \infty) \\ +\infty & ; \rho = 0 \\ 0 & ; \rho = +\infty \end{cases} \quad (4.5.6)$$

Teorema 4.5.4 (Teorema rădăcinii)

Fie seria de puteri, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **cu** $a_n \in \mathbb{R}$, **și** $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \in [0, \infty)$.

Atunci, raza de convergență r , este dată de relațiile:

$$r = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & ; \rho \in (0, \infty) \\ +\infty & ; \rho = 0 \\ 0 & ; \rho = +\infty \end{cases} \quad (4.5.7)$$

Observație: Din rezultatele enunțate anterior, se observă că în determinarea mulțimii (intervalului) de convergență respectiv a mulțimii (reuniune de intervale) de divergență pentru seria de puteri $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, trebuie aplicat următorul:

Algoritm de lucru:

1) Se calculează valoarea “ ρ ” aplicând una din formulele:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \text{ sau } \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

2) Să determină raza de convergență “ r ” cu relațiile (4.5.6) sau (4.5.7) (care de fapt coincid);

3) Se scriu intervalele de convergență / divergență ale seriei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$;

4) Se studiază natura seriei în cele două capete $x = \pm r$.

Observație: În cazul în care seria este centrată în $x_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right)$

se reduce la seria centrată în 0 $\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \right)$ folosind substituția (4.5.3) și apoi se aplică algoritm de lucru, obținându-se mulțimea de (C)/(D) pentru variabila y . Folosind aceeași substituție se scriu mulțimile de (C)/(D) în variabila x .

Exemple:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$; Avem: $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, deci $|a_n| = \frac{1}{n}$.

Folosind teorema rădăcinii, obținem:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

(am folosit aici limita fundamentală: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$)

deci conform (4.5.7), avem: $\mathbf{r} = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{1}$ deci $\mathbf{r} = 1$. Atunci, conform

Teoremei 4.5.2. (Abel) obținem:

i) pentru $x \in (1, -1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ (C)

ii) pentru $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ (D)

iii) pentru $x = \pm 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ nu-i putem preciza natura.

Dar, pentru:

$x = 1$ obținem: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ (C) (conform Criteriului lui

Leibniz de la serii alternante)

iar, pentru:

$x = -1$, obținem: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (D) (ca serie armonică

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ cu $\alpha=1$)

În concluzie, $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n} \begin{cases} \rightarrow \text{(C)}, \text{ dacă } x \in (-1, 1] \\ \rightarrow \text{(D)}, \text{ dacă } x \in (-\infty, -1] \cup (1, +\infty) \end{cases}$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!}$; avem $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n!}$, deci $|a_n| = \frac{1}{n!}$

Folosind teorema raportului, obținem:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

și deci conform (4.6.6) avem $r = +\infty$. Deci, seria $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n!}$ (C) pentru

$(\forall) x \in \mathbb{R}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 2^n} (x+1)^n$, este o serie de puteri centrată în $x_0 = -1$.

Notăm $y = x + 1$ și obținem $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 2^n} y^n$ cu $a_n = \frac{n+1}{n \cdot 2^n} = |a_n|$

Atunci:

$$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{n+1} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{2}$$

Atunci raza de convergență $r = \frac{1}{\rho} = 2$, și avem:

i) pentru $y \in (-2, 2) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n2^n} y^n$ (C)

ii) pentru $y \in (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n2^n}$ (D)

iii) pentru $y = \pm 2 \Rightarrow ?$ (nu putem preciza natura seriei)

Revenind la variabila $x (x = y - 1)$, avem:

i) pentru $x \in (-3, 1) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 2^n} (x+1)^n$ (C)

ii) pentru $x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n \cdot 2^n} (x+1)^n$ (D)

iii) pentru $x = -3, x = 1 \Rightarrow ?$ (nu putem preciza natura seriei)

Dar, pentru:

$x = -3$, obținem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{n+1}{n}$ (D) (conform C.G.D,

deoarece termenul general $(-1)^n \frac{n+1}{n} \not\rightarrow 0$)

iar pentru:

$x = 1$, obținem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ (D) (conform C.G.D, deoarece termenul general $\frac{n+1}{n} \rightarrow 1 \neq 0$).

Cap. 5. FUNCȚII REALE DE n VARIABLE REALE

Fenomenele vieții reale sunt descrise cel mai adesea de funcții care depind nu de o singură variabilă ci de mai multe variabile independente. Acest lucru este valabil și în viața economică.

În acest capitol se introduc elementele de bază ale teoriei acestui tip de funcții. Pentru a depăși dificultățile extinderii conceptelor fundamentale (continuitate, limită, derivabilitate etc.) de la funcții de o variabilă la o funcție de mai multe variabile am abordat numai cazul funcțiilor de două variabile, dezvoltarea ulterioară făcându-se în aceeași manieră.

5.1. ȘIRURI DE PUNCTE ÎN \mathbb{R}^n

Să considerăm spațiul vectorial \mathbb{R}^n și să considerăm un vector oarecare $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ al său. Pentru a simplifica scrierea vom renunța la simbolul

de transpunere și în cele ce urmează vom scrie pur și simplu $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Acestui element al spațiului \mathbb{R}^n îi asociem un punct P care are coordonatele x_1, x_2, \dots, x_n , tot așa cum unui vector $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ din \mathbb{R}^2 îi asociem un punct P cu coordonatele x_1, x_2 într-un sistem de axe ortogonale.

Asociem unei perechi de astfel de puncte P, P_0 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ un număr nenegativ numit distanță și definit prin:

$$d(P, P_0) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2}. \quad (5.1.1)$$

Evident, distanța este nulă dacă și numai dacă P și P_0 coincid. Convenim că însuși vectorul \mathbf{x} să se numească punct din \mathbb{R}^n . În acest mod, distanța d se asociază unei perechi de vectori din \mathbb{R}^n .

Definiția 5.1.1. Se numește **șir de puncte din \mathbb{R}^n** funcția care asociază oricărui număr natural k un punct unic \mathbf{x}^k din \mathbb{R}^n .

$$k \rightarrow \mathbf{x}^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$$

Șirurile $(x_1^k)_{k \in \mathbb{N}}, (x_2^k)_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$ se numesc șiruri de coordonate.

Definiția 5.1.2. Șirul $(\mathbf{x}^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge la punctul \mathbf{x}^0 dacă:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^0) = 0 \quad (5.1.2)$$

În spiritul definiției cunoscute a limitei unui șir de numere reale aceasta înseamnă:

$$(\forall) \varepsilon > 0, \exists k(\varepsilon) \text{ a.î. } (\forall) k > k(\varepsilon) \quad d(\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^0) < \varepsilon \quad (5.1.3)$$

Folosind (5.1.1) deducem că:

$$\sqrt{(x_1^k - x_1^0)^2 + (x_2^k - x_2^0)^2 + \dots + (x_n^k - x_n^0)^2} < \varepsilon$$

pentru $k > k(\varepsilon)$ adică

$$|x_i^k - x_i^0| < \varepsilon \quad (\forall) k > k(\varepsilon), \quad (\forall) i = \overline{1, n} \quad (5.1.4)$$

sântem conduși astfel la:

Teorema 5.1.1. Șirul \mathbf{x}^k este convergent la \mathbf{x}^0 dacă șirurile de coordonate x_i^k sunt convergente la x_i^0 pentru orice $i = \overline{1, n}$.

Exemplu. Considerăm în \mathbb{R}^2 șirul $\mathbf{x}^k = \left(\frac{2k+1}{k^2}, \frac{k-2}{3k} \right)$. Șirurile de coordonate sunt $x_1^k = \frac{2k+1}{k^2}$, $x_2^k = \frac{k-2}{3k}$ și pentru $k \rightarrow \infty$ au limitele 0 și respectiv $\frac{1}{3}$. Aceasta înseamnă că \mathbf{x}^k are limita $\mathbf{x}^0 = \left(0, \frac{1}{3} \right)$.

5.2. FUNCȚII DE DOUĂ VARIABLE

În cele ce urmează vom considera spațiul \mathbb{R}^2 ale cărui puncte \mathbf{x} au doar două coordonate $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Pentru ca scrierea să fie mai simplă vom înlocui perechea de coordonate (x_1, x_2) prin perechea (x, y) .

Fie D o mulțime de puncte (x, y) din \mathbb{R}^2 și I o mulțime din \mathbb{R} .

Definiția 5.2.1. Se numește funcție de două variabile tripleta formată din D, I și o lege de corespondență care asociază oricărui punct $(x, y) \in D$, un singur element $z \in I$.

Exprimăm această corespondență prin $z = f(x, y)$.

Observație. Când D este din \mathbb{R}^n iar $I \subset \mathbb{R}$ în mod similar se definește o funcție de n variabile.

Dacă luăm un sistem cartezian de coordonate $Oxyz$ și reprezentăm mulțimea punctelor $P(x,y,z)$ unde $z = f(x,y)$ obținem imaginea geometrică a funcției sau graficul său. De data aceasta graficul e o porțiune dintr-o suprafață.

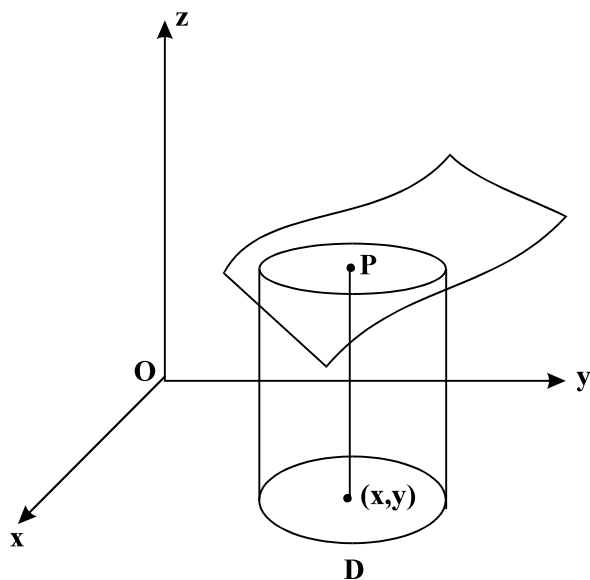


Fig. 5.1.

Exemplu: Să se reprezinte graficul funcției $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soluție. Ridicăm la pătrat egalitatea și obținem $z^2 = x^2 + y^2$. Dacă facem aici $x = 0$ (intersectăm graficul cu planul yOz obținem $z = \pm y$ adică două drepte în acest plan. În mod similar intersectăm graficul cu planul xOz și obținem dreptele $x = \pm z$.

Graficul este un con infinit cu vârful în originea sistemului de coordonate.

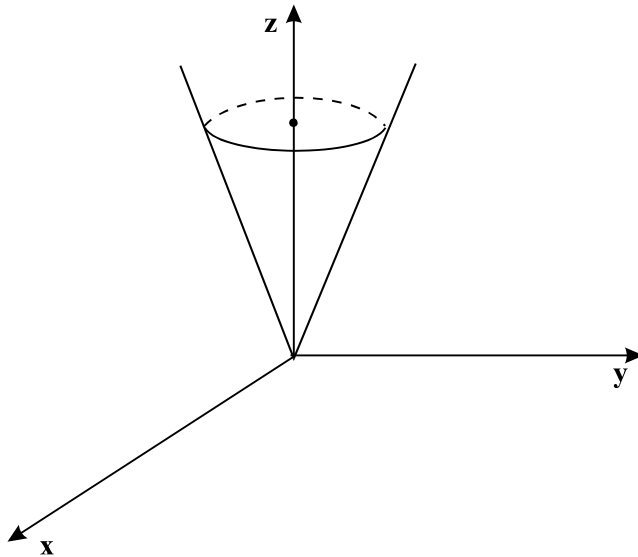


Fig. 5.2

5.3. LIMITĂ ȘI CONTINUITATE

Să considerăm o funcție $f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ și (x_0, y_0) un punct de acumulare al lui D . Aceasta înseamnă că există cel puțin un șir de puncte $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ din D care converge la (x_0, y_0) .

Definiția 5.3.1. Funcția $f(x, y)$ are în (x_0, y_0) limita ℓ , dacă oricare ar fi șirul $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}} \in D$, $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow (x_0, y_0)$, $(x_k, y_k) \neq (x_0, y_0)$ rezultă că $f(x_k, y_k) \rightarrow \ell$.

Vom scrie: $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ sau $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x,y) = \ell$.

Această limită se numește limită globală deoarece x și y tind simultan și independent către x_0 respectiv y_0 . Dacă x_0 și y tind succesiv la x_0 respectiv y_0 adică dacă $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y))$, $\ell_2 = \lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y))$, se obțin limitele iterate sau parțiale. Are loc:

Teorema 5.3.1. Dacă limita globală există atunci și limitele parțiale există și are loc egalitatea:

$$\ell = \ell_1 = \ell_2 \quad (5.3.1)$$

Reciproca nu este adevărată.

Demonstrație. Pentru a justifica rezultatul este suficient să considerăm mai întâi șiruri generale $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow (x_0, y_0)$ și apoi să le particularizăm în șiruri de formă particulară $(x_k, y_0)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow (x_0, y_0)$ și $(x_0, y_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow (x_0, y_0)$. Ceea ce e adevărat pentru general se păstrează și pentru particular.

Faptul că reciproca e falsă se poate proba prin următorul exemplu.

Să se calculeze limitele iterate ale funcției $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ în punctul $(0,0)$.

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

$$\ell_2 = \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} (-1) = -1$$

Cele două limite nefiind egale nu există limita globală a funcției în origine.

Observații:

1⁰. Dacă $\ell_1 = \ell_2$ nu rezultă că limita globală ℓ există ci doar că dacă aceasta există este egală cu valoarea lor comună.

2⁰. S-ar putea ca în punctul (x_0, y_0) funcția f să nu fie definită adică să nu se poată calcula $f(x_0, y_0)$ cum este în exemplul precedent.

Definiția 5.3.2. Funcția $f(x,y)$ este continuă în (x_0, y_0) dacă:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Ca și în cazul limitei globale acest tip de continuitate se numește continuitatea globală. Se poate și aici pune problema continuității în raport cu fiecare argument când celălalt este fixat, adică continuitatea parțială.

Exemplu. Să se studieze continuitatea globală și cea parțială pentru funcția:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calculăm limitele parțiale:

$$\ell_1 = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

$$\ell_2 = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$$

Se observă că $\ell_1 = f(0, 0) = \ell_2 = 0$, deci funcția este continuă în raport cu fiecare argument.

Limita globală nu există pentru că luând șiruri $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}} \rightarrow (0, 0)$ în care $y_k = mx_k$, $m \neq 0$ obținem:

$$f(x_k, y_k) = \frac{x_k \cdot mx_k}{x_k^2 + m^2 x_k^2} = \frac{m}{1 + m^2},$$

deci $f(x_k, y_k) = \frac{m}{1 + m^2}$ care depinde de m .

Așadar continuitatea globală nu există.

5.4. DERIVATE PARȚIALE ȘI DIFERENȚIALE

5.4.1. DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

Să considerăm funcția $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ și (x_0, y_0) un punct din interiorul mulțimii D . Considerăm de asemenea un punct (x, y) din D diferit de (x_0, y_0) .

Definiția 5.4.1.1. Se numește derivată parțială a funcției f în raport cu variabila x în punctul (x_0, y_0) .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0} \quad (5.4.1)$$

dacă limita există. Dacă aceasta este și finită, spunem că funcția este derivabilă parțial în raport cu x în punctul considerat.

Notăm valoarea limitei cu $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ sau $f'_x(x_0, y_0)$. În mod similar se introduce derivata parțială și derivabilitatea parțială în raport cu y în (x_0, y_0) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Observație. Derivata parțială nu aduce nici o noutate față de cazul funcțiilor de o singură variabilă. Practic, când se derivează parțial o funcție de n variabile în raport cu una, toate celelalte variabile se consideră constante (parametri).

Dacă $f(x, y)$ este derivabilă parțial în raport cu x sau/și y în toate punctele unei submulțimi D_1 a lui D , spunem că f este derivabilă parțial pe D_1 .

În acest caz pentru orice punct $(x_0, y_0) \in D_1$ stabilim corespondențele $(x_0, y_0) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $(x_0, y_0) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ care definesc două funcții noi numite derivatele parțiale ale lui f în raport cu x respectiv y în D_1 . Ele se vor nota:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \text{ sau } f'_x(x, y) \text{ respectiv } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \text{ sau } f'_y(x, y).$$

Observație. Calculul derivatelor parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ se face folosind regulile obișnuite de calcul pentru derivata sumei, produsului, câtului, funcțiilor compuse etc.

Exemplu. Să se calculeze $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ dacă $f(x, y) = xy e^{xy}$.

Soluții. Calculăm $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ considerându-l pe y parametru constant.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (xy)'_x e^{xy} + (xy)(e^{xy})'_x = ye^{xy} + xy(ye^{xy}) = (y + xy^2)e^{xy}$$

Calculăm $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ considerându-l pe x parametrul constant:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (xy)'_y e^{xy} + (xy)(e^{xy})'_y = xe^{xy} + (xy)(xe^{xy}) = (x + x^2y)e^{xy}$$

Observații :

1⁰. În exemplul de mai sus, simetria în raport cu variabilele x și y permitea calculul celei de-a doua derivate parțiale schimbând între ele variabilele x cu y în $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.

2⁰. Toate considerațiile anterioare se pot extinde de la funcții de două variabile la funcții de n variabile fără nici un fel de dificultate.

5.4.2. DERIVATE PARȚIALE DE ORDIN SUPERIOR

Să considerăm din nou $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă parțial în raport cu x și y pe D . Cele două derivate parțiale $f'_x(x, y) = g_1(x, y)$ și $f'_y(x, y) = g_2(x, y)$ pot fi la rândul lor derivabile pe o submulțime D_1 a lui D . Apare natural să considerăm derivatele lor parțiale drept derivate parțiale de ordinul al doilea ale funcției f :

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = f''_{xx}(x, y),$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = f''_{xy}(x, y),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = f''_{yx}(x, y),$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = f''_{yy}(x, y).$$

Pentru funcția de două variabile $f(x, y)$ obținem astfel patru derivate de ordinul al doilea. Dintre acestea se remarcă $f''_{xy}(x, y)$ și $f''_{yx}(x, y)$ numite derivate parțiale mixte de ordinul al doilea.

Natural se pune întrebarea dacă între cele două derivate există legături. Exemplul următor sugerează că răspunsul este afirmativ.

Exemplu. Să se determine derivatele parțiale de ordinul al doilea ale funcției $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y + 2xy + 1$.

Soluție. Obținem succesiv:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy + 2y ; \quad \frac{\partial f}{\partial x} = x^2 + 2x ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2y ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 2x + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = 2x + 2 ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = 0 .$$

Se observă că cele două derivate parțiale mixte f''_{xy}, f''_{yx} sunt egale. Nu orice funcție $f(x, y)$ are această proprietate. Fără demonstrație enunțăm următoarea teoremă:

Teorema 5.4.2 (Criteriul lui Schwarz)

Dacă în domeniul $D_1 \subset D$ funcția $f(x, y)$ satisface condițiile:

a) are derivatele $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$,

b) derivatele mixte de ordinul al doilea $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sunt continue

global, atunci derivatele parțiale mixte de ordinul al doilea sunt egale.

Observație. Funcția $f(x, y)$ din exemplul anterior satisface condițiile criteriului lui Schwarz.

Fiecare derivată parțială de ordinul al doilea poate fi la rândul său derivată parțial în raport cu cele două variabile. Se obțin astfel derivate parțiale de ordinul al treilea și procesul poate continua.

5.4.3. DERIVATELE PARȚIALE ALE

FUNCȚIILOR COMPUSE

Să luăm funcția $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ și să presupunem că la rândul lor, argumentele x și y ale lui f sunt funcții de variabilele u, v, w :

$$f(x, y) = f(x(u, v, w), y(u, v, w)) = \varphi(u, v, w) \quad (5.4.2)$$

Ne interesează derivatele parțiale ale funcției φ în raport cu cele trei variabile u, v, w . Un calcul nu foarte complicat care folosește definiția derivatei parțiale conduce la formula de calcul a celor trei derivate parțiale:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial w} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial w}. \end{aligned}$$

Exemplu. Să se afle derivatele parțiale ale funcției $f(x, y) = xy^2 + x^2y$, cunoscând că $x = u + v$, $y = u - v$.

Soluție. Notăm $\varphi(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} = (y^2 + 2xy) \cdot 1 + (2xy + x^2) \cdot 1 = y^2 + 4xy + x^2,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} = (y^2 + 2xy) \cdot 1 + (2xy + x^2) \cdot (-1) = y^2 - x^2.$$

Observație. Formula (5.4.3.1) se poate generaliza când f are n variabile iar fiecare este funcție de m variabile. Evident aplicarea formulei este posibilă când toate funcțiile implicate sunt derivabile parțial.

5.4.4. DIFERENȚIALELE FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABLE

Fie $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, (x_0, y_0) și (x, y) două puncte din D . Să notăm $h = x - x_0$,

$k = y - y_0$. Numim creșterea totală a funcției în punctul (x_0, y_0) cantitatea $\Delta f(x_0, y_0)$ definită prin:

$$\Delta f(x_0, y_0) = f(x, y) - f(x_0, y_0) \quad (5.4.3)$$

Definiția 5.4.2 Funcția f este **diferențiabilă** în (x_0, y_0) dacă există două constante A și B independente de h și k și două funcții $\alpha(x_0, y_0, h, k), \beta(x_0, y_0, h, k)$ astfel încât:

$$\alpha(x_0, y_0, 0, 0) = 0, \beta(x_0, y_0, 0, 0) = 0, \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \alpha(x_0, y_0, h, k) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \beta(x_0, y_0, h, k) = 0$$

$$\Delta f(x_0, y_0) = Ah + Bh + h\alpha(x_0, y_0, h, k) + k \cdot \beta(x_0, y_0, h, k) \quad (5.4.4)$$

Se poate demonstra următoarea teoremă:

Teorema 5.4.3 Dacă $f(x, y)$ este diferențiabilă în (x_0, y_0) atunci ea este derivabilă parțial în raport cu x și y în acest punct și

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = A, \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = B.$$

Definiția 5.4.3 Expresia $Ah + Bk$ se numește **diferențiala funcției f în punctul (x_0, y_0)** și se notează:

$$df(x_0, y_0) = Ah + Bk. \quad (5.4.5)$$

Dacă funcția $f(x, y)$ este diferențiabilă în (x_0, y_0) atunci diferențiala sa $df(x_0, y_0)$ e dată de

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \quad (5.4.6)$$

Cum $dx = h$, $dy = k$ obținem **diferențiala de ordinul întâi** a funcției $f(x, y)$ în forma finală:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy$$

Exemplu. Să se determine diferențiala de ordinul întâi a funcției $f(x, y) = xy^2 + 2x^3y$ în punctul $(1, 1)$.

Soluție: $f'_x(x, y) = y^2 + 6x^2y$ $f'_x(1, 1) = 7$

$$f'_y(x, y) = 2xy + 2x^3 \quad f'_y(1,1) = 4$$

Obținem: $df(1,1) = 7dx + 4dy$.

Observație. Diferențiala de ordinul întâi ale funcției $f(x, y)$ servește la aproximarea creșterii totale a funcției $f, \Delta f(x_0, y_0)$ conform formulei (5.4.3).

Dacă $f(x, y)$ este diferențiabilă în toate punctele (x_0, y_0) unui domeniu $D_1 \subset D$, putem defini o corespondență:

$$(x_0, y_0) \rightarrow df(x_0, y_0) \quad (\forall) (x_0, y_0) \in D_1.$$

Care se numește diferențiala lui f și se scrie $df(x, y)$.

Ea poate fi la rândul său diferențiabilă. Diferențiala sa se numește diferențiala de ordinul al doilea a lui f și se notează $d^2f(x, y)$. Un calcul elementar conduce la formula $d^2f(x, y)$.

$$d^2f(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot k^2$$

Exemplu. Să se determine $d^2f(1,1)$ pentru funcția:

$$f(x, y) = xy + 2x^2y^3$$

Soluție.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 4xy^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 6x^2y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 + 12xy^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12x^2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 4, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,1) = 13, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,1) = 12 \text{ și în final}$$

$$d^2f(1,1) = 4h^2 + 26hk + 12k^2.$$

Observații:

1⁰. Procesul poate continua obținând diferențiale de ordin superior lui 2.

2⁰. Diferențiala de ordinul al doilea este după cum se poate vedea din exemplul de mai sus o formă pătratică de variabile h, k . Când variabilele sunt x_1, x_2, \dots, x_n această diferențială devine o formă pătratică de n variabile. Ea

joacă rolul derivatei a doua la funcții de o singură variabilă adică servește studiul convexității unei funcții de n variabile.

5.5. EXTREMELE FUNCȚIILOR DE MAI MULTE VARIABLE

5.5.1. FORMULA LUI TAYLOR PENTRU FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABLE

Se cunoaște formula lui Taylor pentru funcții de o variabilă care are derivate până la ordinul $k+1$ într-o vecinătate a punctului x_0 .

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots \\ \dots + \frac{(x-x_0)^k}{k!} f^{(k)}(x_0) + \frac{(x-x_0)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\theta)$$

θ fiind un punct intermediar lui x_0 și x .

Această formulă permite aproximarea valorii f în x cu ajutorul valorilor acesteia și a primelor sale k derivate în punctul x_0 , dacă ultimul termen (restul de ordin k) este neglijat.

Căutăm o extindere a formulei la cazul funcțiilor de două variabile după care, natural, extinderea se poate face la n variabile.

Fie așadar, $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ și (x_0, y_0) un punct interior din D .

Presupunem că (x, y) este un punct oarecare din D și notăm $h = x - x_0$, $k = y - y_0$.

Teorema 5.5.1. Dacă $f(x, y)$ are toate derivatele parțiale până la ordinul m în (x_0, y_0) iar derivatele parțiale de ordin $m+1$ există într-o vecinătate V a lui (x_0, y_0) atunci oricare ar fi punctul $(x, y) \in V$, are loc formula:

$$\begin{aligned}
f(x, y) = & f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k \right] + \\
& + \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial}{\partial y}(x_0, y_0)k \right]^{(2)} f + \dots + \\
& \dots + \frac{1}{m!} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial}{\partial y}(x_0, y_0)k \right]^{(m+1)} f + R_m
\end{aligned} \tag{5.5.1}$$

unde :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial}{\partial y}(x_0, y_0)k \right]^{(i)} f \text{ reprezintă puterea formală "i" a}$$

expresiei diferențiale din paranteză aplicată funcției f iar R_m numit restul de ordin m în formula lui Taylor este exprimat prin:

$$R_m = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)h + \frac{\partial}{\partial y}(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k)k \right]^{(m+1)} f; \quad \theta \in (0,1) \tag{5.5.2}$$

5.5.2. TEOREMA LUI FERMAT PENTRU FUNCȚII DE MAI MULTE VARIABLE

În teoria diferențială a funcțiilor de o variabilă, teorema lui Fermat afirmă că într-un punct de extrem local din interiorul domeniului de derivabilitate al funcției, $D_{f'}$, derivata f' se anulează. Încercăm aici o extindere la funcții de două variabile care se poate apoi transpune la funcții de n variabile.

Să considerăm $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ și $(x_0, y_0) \in D$.

Definiția 5.5.1 Punctul (x_0, y_0) se numește maxim (minim) local pentru $f(x, y)$ dacă există o vecinătate V a acestuia astfel încât $(\forall) (x, y) \in V$ are loc:

$$f(x, y) \leq f(x_0, y_0) \quad (f(x, y) \geq f(x_0, y_0)) \tag{5.5.3}$$

Teorema lui Fermat poate constitui o metodă prin care se determină punctele de extrem sau posibilele puncte de extrem.

Teorema 5.5.2 Dacă $f(x, y)$ are derivate parțiale finite în raport cu x și y în punctul de extrem local (x_0, y_0) din interiorul lui D , atunci:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (5.5.4)$$

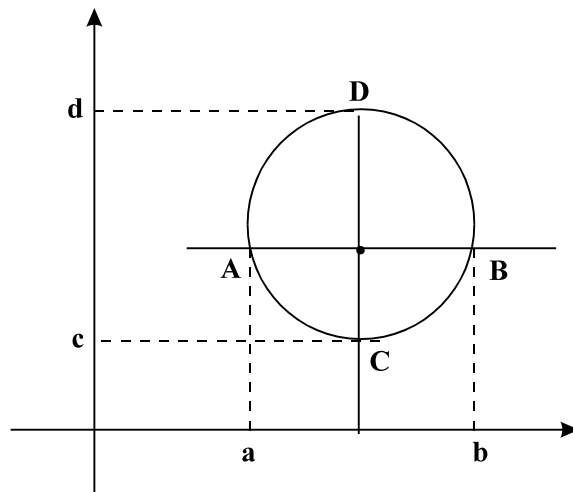
Demonstrație. Considerăm $\varphi(x) = f(x, y_0)$ și $\psi(y) = f(x_0, y)$. Cum (x_0, y_0) este în interiorul lui D , (vezi fig. 5.3) x_0 se află în interiorul lui (a, b) iar y_0 în interiorul lui (c, d) . Se poate aplica teorema lui Fermat pentru $\varphi(x)$ cu x_0 punct de extrem local și $\psi(y)$ cu y_0 punct de extrem local.

Obținem:

$$\frac{d\varphi}{dx}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{d\psi}{dy}(y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$$

ceea ce demonstrează teorema.

Fig. 5.3



Soluțiile sistemului (5.5.4) se numesc puncte critice sau puncte staționare. Reciproca nefiind adevărată, punctele critice rămân posibile puncte de extrem. Condițiile (5.5.4) pentru punctele (x_0, y_0) sunt doar condiții necesare de extrem.

Exemplu. Să se determine posibilele puncte de extrem ale funcției:

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3xy + 15$$

Soluție: Calculăm $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$. Avem:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 3x$$

Rezolvăm sistemul $\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0 \\ 2y - 3x &= 0 \end{aligned}$$

Obținem soluțiile $(0,0)$ și $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$ care sunt posibile puncte de extrem.

5.5.3. CONDIȚII SUFICIENTE DE EXTREM (DETERMINAREA EXTREMELOR)

Am văzut în cele de mai sus că un punct de extrem este punct staționar dar din teorema lui Fermat nu putem obține și reciproca. Căutăm așadar condiții suficiente de extrem prin care să putem aprecia dacă un punct staționar este sau nu este punct de extrem.

Să remarcăm mai întâi că formula lui Taylor (5.5.1.2) se poate scrie și sub forma:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}d^2f + \dots + \frac{1}{m!}d^mf(x_0, y_0) + R_m \quad (5.5.5)$$

Dacă $m = 2$ atunci

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}df + \frac{1}{2!}d^2f + R_2 \quad (5.5.6)$$

Să presupunem acum că (x_0, y_0) este un extrem local. În virtutea condițiilor (5.5.2.2) rezultă că :

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k = 0.$$

În plus dacă $x - x_0 = h$ și $y - y_0 = k$ sunt suficient de mici, R_2 poate fi neglijat (acolo h și k apar la puterea a treia). Rezultă că pentru (x, y) într-o vecinătate suficient de mică a lui (x_0, y_0) :

$$\operatorname{sgn} f(x, y) - f(x_0, y_0) = \operatorname{sgn} d^2f(x_0, y_0)$$

obținem, astfel:

Teorema 5.5.3. Dacă forma pătratică $d^2f(x_0, y_0)$ este pozitiv definită în punctul critic (x_0, y_0) atunci acest punct este minim local. Dacă în același punct $d^2f(x_0, y_0)$ este negativ definită, punctul este maxim local.

Condițiile în care o formă pătratică este pozitiv (negativ) definită au fost prezentate anterior. Pentru prezenta formă pătratică, matricea este:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (5.5.7)$$

care se numește **matrice hessiană** și se poate generaliza la funcții de n variabile. Suntem conduși astfel la următoarea teoremă:

Teorema 5.5.4 Fie $P(x_0, y_0)$ punct critic pentru funcția $f(x, y)$ și Δ_1, Δ_2 minorii diagonali ai matricii Hessiene în acesta. Atunci:

1. Dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ atunci P este punct de minim local pentru $f(x, y)$;
2. Dacă $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ atunci P este punct de maxim local pentru $f(x, y)$;
3. Dacă $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 < 0$ sau $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$ atunci P nu este punct de extrem local pentru $f(x, y)$;
4. Dacă $\Delta_1 = 0$ sau $\Delta_2 = 0$ atunci nu putem preciza natura punctului critic P .

Exemple :

1⁰. Să se determine extremele funcției:

$$f(x, y) = x^3 + y^2 - 3xy + 15$$

Soluție. Determinăm punctele de extrem local printre punctele critice adică printre soluțiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \text{ Am văzut anterior că sunt două puncte critice}$$

$(0, 0), \left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$. Fiecare poate să fie sau nu punct de extrem.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

Matricea hessiană:

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

O calculăm în fiecare punct critic:

$$H(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } \Delta_1 = 0, \Delta_2 = -9$$

Punctul (0,0) nu este punct de extrem.

$$H\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right) = \begin{pmatrix} \frac{27}{2} & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ și } \Delta_1 = \frac{27}{2}, \Delta_2 = 18$$

Punctul $\left(\frac{9}{4}, \frac{27}{8}\right)$ este un *punct de minim*.

2^o. Să se determine extremele funcției:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_3$$

Punctele staționare (critice) sunt soluții ale sistemului

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - x_3 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - x_1 = 0$$

Obținem un singur punct critic (0,0,0). Acesta este și singurul posibil punct de extrem.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial y_2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$$

Matricea hessiana devine:

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

și are lanțul minorilor principali:

$$\Delta_1 = 2, \quad \Delta_2 = 4, \quad \Delta_3 = 6$$

Rezultă că $(0,0,0)$ este un punct de *minim local*.

Bibliografie:

1. **Allen, R.G.D.**, „*Analiză matematică pentru economiști*”, Ed. Șt., București, 1971;
2. **Dantzig, G.**, „*Application et prologements de la programmation lineaire*”, Dunod, Paris, 1966;
3. **Diaconița, V., Manolachi, A., Rusu, G.**, „*Matematici aplicate în economie*”, Ed. Chemarea, Iași, 1993;
4. **Diaconița, V., Rusu, G.**, „*Optimizări liniare*”, Ed. Sedcom Libris, Iași, 2001;
5. **Diaconița, V.**, „*Matematici aplicate în economie*”, Ed. Paralela 45, Pitești, 2003;
6. **Diaconița, V., Rusu, G., Spînu, T. M.**, „*Matematici aplicate în economie*”, Ed. Sedcom Libris, Iași, 2004;
7. **Drăgan, I.**, „*Tehnici de bază în programarea liniară*” , Ed. Tehnică, București, 1976;
8. **Mihoc, G., Ștefănescu, A.**, „*Programarea matematică*”, Ed. Did. și Ped., București, 1973;
9. **Tamaș, V.**, „*Matematică pentru studenții economiști*”, Ed. Junimea, Iași, 2001.