## EVP1 (model)

① Fie sistemul liniar (*) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_5 = 2 \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5 \end{cases}$. Aplicând metoda lui Gauss (de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare cu transf. elem.), determinați forma explicită corespunzătoare variabilelor secundare $x_1$ și $x_3$. Scrieți soluția de bază corespunzătoare variabilelor principale $x_2, x_4$ și $x_5$ și clasificați-o (stabiliți tipul acesteia).

**Dem:** Obs: deoarece $x_1, x_3$ sunt variab. sec. $\Rightarrow$ $x_2, x_4, x_5$ sunt variab. princip.

Asociem sist. (*) matricea extinsă, și prin T.E. facem coloanele lui $x_2, x_4, x_5$ coloanele matricei unitate ($I_3$):

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & \boxed{1} & -3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 1 & -3 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right) = \bar{A}_{x_2 x_4 x_5}$$

v.sec. — acum prelucrăm

$\xRightarrow[x_3=\beta]{\text{not } x_1=\alpha}$ $X = (\alpha, 6-4\alpha+3\beta, \beta, 3-3\alpha+\beta, 4-2\alpha)^T \in \mathbb{R}^5$ – forma explicită coresp. v.princ. $x_2, x_4, x_5$, v.sec. $x_1, x_3$

$\Downarrow \alpha=\beta=0$

$\bar{X} = (0, 6, 0, 3, 4)^T \in \mathbb{R}^5$ – sol. de bază admisibilă (toate variab. (princ.) sunt $\geq 0$), nedegenerată (toate variab. princ. sunt $\neq 0$)

② Fie mulțimea (B) $\begin{cases} u_1 = (1,0,-1)^T \\ u_2 = (-1,-1,2)^T \in \mathbb{R}^3 \\ u_3 = (2,1,-2)^T \end{cases}$. Se cere:

a) $B \leq \mathbb{R}^3$ (B formează o bază în $\mathbb{R}^3$);

b) pt. $v = (3,-4,1)^T \in \mathbb{R}^3$, determinați coordonatele $v_B = ?$, folosind obligatoriu lema substituției;

c) dacă $w_B = [-2,3,-2]$, determinați vectorul $w = ?$;

**Dem:**

a) $B \leq \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i) card } B = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \text{ (A)} \\ \text{(ii) B-L.i} \Leftrightarrow r_A = 3 = \text{nr. vectori} \end{cases}$, cu $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & +1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} /(-1)/(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow r_A = 3 \Rightarrow \underline{B \leq \mathbb{R}^3}$

b)

| B | v | $u_1$ | $u_2$ | $u_3$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 3 | $\boxed{1}$ | -1 | 2 |
| $e_2$ | -4 | 0 | -1 | 1 |
| $e_3$ | 1 | -1 | 2 | -2 |
| $u_1$ | 3 | 1 | -1 | 2 |
| $e_2$ | -4 | 0 | $\boxed{-1}$ | 1 /(-1)/(-1) |
| $e_3$ | 4 | 0 | 1 | 0 |
| $u_1$ | 7 | 1 | 0 | 1 |
| $u_2$ | 4 | 0 | 1 | -1 |
| $e_3$ | 0 | 0 | 0 | $\boxed{1}$ /(-1) |
| $u_1$ | 7 | 1 | 0 | |
| $u_2$ | 4 | 0 | 1 | |
| $u_3$ | 0 | 0 | 0 | |

$\rightarrow v = 7u_1 + 4u_2 \Leftrightarrow \underline{v_B = [7,4,0]}$

c) $w_B = [2,-3,-2] \Leftrightarrow w = 2u_1 - 3u_2 - 2u_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w = 2(1,0,-1)^T - 3(-1,-1,2)^T - 2(2,1,-2)^T = \underline{(1,1,-4)^T}$, deci:

$\underline{w = (1,1,-4)^T}$

③ Fie bazele din $\mathbb{R}^2$: $(B)\begin{cases} x_1=(4,-9)^T \\ x_2=(-1,2)^T \end{cases}$ și $(B')\begin{cases} y_1=(5,1)^T \\ y_2=(-4,-1)^T \end{cases}$.

Se cere:

a) pt. $u=(-5,3)^T \Rightarrow \begin{cases} u_B=? \\ u_{B'}=? \end{cases}$ (cu lema substituției!!);

b) dacă $v_{B'}=[3,-1] \Rightarrow v=?$;

c) dacă $w_B=[1,1] \Rightarrow w_{B'}=?$ (cu lema substituției);

d) Determinați cu lema substituției, matricea schimbării de bază $S_{B'|B}=S$;

e) verificați rezultatul de la pct. c) folosind formulele de schimbare a coordonatelor la schimbarea bazei (prin intermediul matricii schimbării de bază).

Dem.:

a) $\underline{u_B \overset{?}{=} [\alpha_1,\alpha_2] \Leftrightarrow u=\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2}$

| B | u | $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | -5 | 4 | $\boxed{-1}$ | /(-1)/·2 |
| $e_2$ | 3 | -9 | 2 | |
| $x_2$ | 5 | -4 | 1 | |
| $e_2$ | -7 | $\boxed{-1}$ | 0 | /(-1)/(-4) |
| $x_2$ | 33 | 0 | 1 | |
| $x_1$ | 7 | 1 | 0 | |

$u=7x_1+33x_2 \Leftrightarrow \underline{u_B=[7,33]}$

Verificare:

$u=7(4,-9)^T+33(-1,2)^T=\underline{(-5,3)^T}$

$\underline{u_{B'} \overset{not}{=} [\beta_1,\beta_2] \Leftrightarrow u=\beta_1 y_1+\beta_2 y_2}$

| B | u | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | -5 | 5 | -4 | |
| $e_2$ | 3 | $\boxed{1}$ | -1 | /(-5) |
| $e_1$ | -20 | 0 | $\boxed{1}$ | / |
| $y_1$ | 3 | 1 | -1 | |
| $y_2$ | -20 | 0 | 1 | |
| $y_1$ | -17 | 1 | 0 | |

$u=-17y_1-20y_2 \Leftrightarrow \underline{u_{B'}=[-17,-20]}$

Verificare

$u=-17(5,1)^T-20(-4,-1)^T=\underline{(-5,3)^T}$

b) $v_{B'}=[3,-1] \Leftrightarrow v=3y_1-y_2=3(5,1)^T-(-4,-1)^T=\underline{(19,4)^T} \Rightarrow \underline{v=(19,4)^T}$

c) $w_B=[1,1] \Leftrightarrow w=x_1+x_2=(4,-9)^T+(-1,2)^T=\underline{(3,-7)^T} \Rightarrow$

| B | w | $y_1$ | $y_2$ | |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 3 | 5 | -4 | |
| $e_2$ | -7 | 1 | $\boxed{-1}$ | /(-1)/(-4) |
| $e_1$ | 31 | $\boxed{1}$ | 0 | / |
| $y_2$ | 7 | -1 | 1 | |
| $y_1$ | 31 | 1 | 0 | |
| $y_2$ | 38 | 0 | 1 | |

$w=31y_1+38y_2 \Leftrightarrow \underline{w_{B'}=[31,38]}$

Verificare: $w=31(5,1)^T+38(-4,-1)^T=\underline{(3,-7)^T}$ (adev.)

d) $S_{B'|B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ a.î.: $\begin{cases} y_1=b_{11}x_1+b_{12}x_2 \\ y_2=b_{21}x_1+b_{22}x_2 \end{cases}$; Avem:

| B | $y_1$ | $y_2$ | $x_1$ | $x_2$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | 5 | -4 | 4 | $\boxed{-1}$ | /(-1)/·2 |
| $e_2$ | 1 | -1 | -9 | 2 | |
| $x_2$ | -5 | 4 | -4 | 1 | |
| $e_2$ | 11 | -9 | $\boxed{-1}$ | 0 | /(-1)/(-4) |
| $x_2$ | -49 | 40 | 0 | 1 | |
| $x_1$ | -11 | 9 | 1 | 0 | |

$\begin{cases} y_1=-11x_1-49x_2 \\ y_2=9x_1+40x_2 \end{cases} \Rightarrow \underline{S=\begin{pmatrix} -11 & -49 \\ 9 & 40 \end{pmatrix}}$

e) Avem formulele: $(*)\begin{cases} w_B=S^T w_{B'} \\ w_{B'}=(S^T)^{-1} w_B \end{cases}$

$\underline{\text{d. d)} \Rightarrow S^T=\begin{pmatrix} -11 & 9 \\ -49 & 40 \end{pmatrix}} (**)$

Aflăm $(S^T)^{-1}$ cu T.E.:

$\left(\underbrace{\begin{matrix} -11 & \boxed{9} \\ -49 & 40 \end{matrix}}_{=S^T} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{=I_2}\right) \sim \left(\begin{matrix} -11/9 & 1 \\ \boxed{-1/9} & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 1/9 & 0 \\ -40/9 & 1 \end{matrix}\right) \sim \left(\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} 49 & -11 \\ 40 & -9 \end{matrix}\right) \sim \left(\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{=I_2} \middle| \underbrace{\begin{matrix} 40 & -9 \\ 49 & -11 \end{matrix}}_{=(S^T)^{-1}}\right) \Rightarrow \underline{(S^T)^{-1}=\begin{pmatrix} 40 & -9 \\ 49 & -11 \end{pmatrix}} (***)$

Avem:

$\underline{w_{B'}}=(S^T)^{-1}\cdot w_B \overset{(*)}{=} \underbrace{\begin{pmatrix} 40 & -9 \\ 49 & -11 \end{pmatrix}}_{=(S^T)^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=w_B} = \begin{pmatrix} 31 \\ 38 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \underline{w_{B'}=[31,38]}$