Curs 1

Structura (în mare) a cursului : $\begin{cases} \text{cap. I : Elemente de algebră liniară} \\ \text{cap. II : Elemente de programare liniară} \\ \text{cap. III : Elemente de analiză matematică} \end{cases}$

CAP. I : Elemente de algebră liniară (vectorială)

I.1 Spații liniare (vectoriale)

mulțimea vidă

Obs: i) Numim **produs cartezian** a două mulțimi oarecare nevide A, B ($A, B \neq \emptyset$), mulțime ordonată a perechilor de elemente definită astfel:

$$A \times B \overset{def}{=} \{x = (a,b) \;/\; a \in A,\ b \in B\}$$

primul element
al doilea element

$x \overset{def}{=} (a,b) \neq y \overset{def}{=} (b,a)$

Ex: $\begin{cases} x = (1,2) \\ y = (2,1) \end{cases} \Rightarrow x \neq y$

ii) Dacă $A \equiv B$ (coincide), avem:

$$A \times A \overset{not}{=} A^2 \overset{def}{=} \{x = (a,b) \;/\; a, b \in A\}$$

iii) Generalizând obținem mulțimile: $A^3, A^4, A^5, \ldots, A^n, A^{n+1}, \ldots$

Ex $A^3 \overset{def}{=} A^2 \times A = A \times A \times A \overset{def}{=} \{x = (a,b,c) \;/\; a,b,c \in A\}$ → produs cartezian a 3 mulțimi

Fie $V \neq \emptyset$ o mulțime oarecare nevidă, cu elementele notate cu: $\begin{cases} u, v, w, \ldots \\ u_1, u_2, u_3, \ldots \\ x, y, z, \ldots \\ x_1, x_2, x_3, \ldots \end{cases}$ ← vectori (denumire generică)

și mulțimea $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ → corpul comutativ al nr. reale, cu elementele

notate cu: $\begin{cases} a, b, c, \ldots \\ a_1, a_2, a_3, \ldots \\ \alpha, \beta, \gamma, \ldots \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \end{cases}$ ← scalari

Vom presupune că putem defini pe mulțimea V două operații (legi de compoziție) notate:

$$(*) \begin{cases} \oplus : V \times V \longrightarrow V \\ (u, v) \xrightarrow{\oplus} u \oplus v \overset{not}{=} w \end{cases}$$ – operația de adunare a vectorilor (lege de compoziție internă)

$$(**) \begin{cases} * : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \\ (\alpha, u) \xrightarrow{*} \alpha * u \overset{not}{=} v \end{cases}$$ – operația de înmulțire a vectorilor cu scalari (reali) (lege de compoziție externă)

Def 1 Spunem că mulțimea V formează un spațiu liniar (vectorial), peste corpul nr. reale, în raport cu operațiile definite de relațiile (*) și (**) dacă:

a) $(V, \oplus)$ - grup abelian (comutativ), adică satisface proprietățile:

a1) $(u \oplus v) \oplus w = u \oplus (v \oplus w)$; $(\forall)\, u, v, w \in V$ → asociativitatea op. de adunare a vectorilor

a2) $(\exists!)\, u' \overset{not}{=} 0_V \in V$ a.î.: $u \oplus 0_V = 0_V \oplus u = u$, $(\forall)\, u \in V$ {sau: $u \oplus u' = u' \oplus u = u$} → existența elem. neutru

a3) $(\forall)\, u \in V$, $(\exists!)\, u'' \overset{not}{=} -u$ a.î.: $u \oplus (-u) = (-u) \oplus u = 0_V$ {sau: $u \oplus u'' = u'' \oplus u = 0_V$} → existența elem. opus (inversabile)

a4) $u \oplus v = v \oplus u$; $(\forall)\, u, v \in V$ → comutativitatea op. de adunare a vectorilor

b) $(V_{/\mathbb{R}}, *)$ satisface proprietățile (numite axiomele spațiului liniar)

$$\begin{cases} b_1)\ \alpha * (u \oplus v) = (\alpha * u) \oplus (\alpha * v)\ ;\ (\forall)\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ și } (\forall)\ u, v \in V \\ b_2)\ (\alpha + \beta) * u = (\alpha * u) \oplus (\beta * u)\ ;\ (\forall)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ și } (\forall)\ u \in V \\ b_3)\ (\alpha \cdot \beta) * u = \alpha * (\beta * u) = \beta * (\alpha * u)\ ;\ (\forall)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ și } (\forall)\ u \in V \\ b_4)\ 1 * u = u\ ;\ (\forall)\ u \in V \quad (1 \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

Obs:

i) notăm cu: $(V_{/\mathbb{R}}, \oplus, *) \equiv (V, \oplus, *) \equiv V$ → sp. liniar (vectorial) V

dacă nu există pericol de confuzie asupra operațiilor $\oplus$ și $*$

ii) 0_V → vectorul nul (față de adunarea vectorilor) al spațiului liniar V;

iii) $-u$ → opusul vectorului „u" (vectorul opus vectorului „u")

iv) Atenție: „$(\forall)$" → „oricare"; „$(\exists)$" → „există"; „$(\exists!)$" → „există și este unic"

iv) în definirea noțiunii de „spațiu liniar (vectorial)" apar 4 operații și anume:

pe $\mathbb{R}$: $\begin{cases} \text{„}+\text{" - adunarea nr. reale} \\ \text{„}\cdot\text{" - înmulțirea nr. reale} \end{cases}$ pe V $\begin{cases} \text{„}\oplus\text{" - adunarea vectorilor} \\ \text{„}*\text{" - înmulțirea unui scalar cu un vector} \end{cases}$

dar pentru a nu complica notațiile și scrierea, convenim să renotăm operațiile definite pe V cu aceleași simboluri ca și operațiile definite pe $\mathbb{R}$, adică: $\begin{cases} \text{„}\oplus \equiv +\text{"} \\ \text{„}* \equiv \cdot\text{"} \end{cases}$

Atunci vom folosi notația: $\begin{cases} (V_{/\mathbb{R}}, \oplus, *) \equiv (V_{/\mathbb{R}}, +, \cdot) \\ \text{sau:} \\ (V, \oplus, *) \equiv (V, +, \cdot) \end{cases}$ → înmulțirea vectorilor cu scalari reali; adunarea vectorilor

v) atunci cele 8 proprietăți ale spațiului liniar din Def 1 se vor scrie mult mai simplu astfel:

$$\begin{cases} a_1)\ (u+v)+w = u+(v+w)\ ;\ (\forall)\ u,v,w \in V \\ a_2)\ (\forall)\ u \in V,\ (\exists!)\ 0_V \in V \text{ a.î.: } u + 0_V = 0_V + u = u \\ a_3)\ (\forall)\ u \in V,\ (\exists!)\ -u \in V \text{ a.î.: } u + (-u) = (-u) + u = 0_V \\ a_4)\ u+v = v+u\ ;\ (\forall)\ u,v \in V \end{cases}$$

respectiv:

$$\begin{cases} b_1)\ \alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v \\ b_2)\ (\alpha+\beta)u = \alpha u + \beta u \\ b_3)\ (\alpha\beta)u = \alpha(\beta u) = \beta(\alpha u) \\ b_4)\ 1 \cdot u = u \end{cases} \quad ;\ (\forall)\ u, v \in V \text{ și } (\forall)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Exemple de spaţii liniare

① $(\vec{V}_3, +, \cdot)$ – spaţiul liniar tridimensional al vectorilor liberi

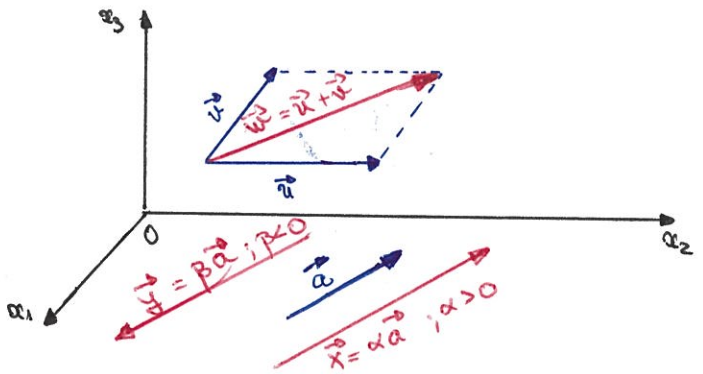
unde:

$$\begin{cases} V \overset{not}{\equiv} \vec{V}_3 \overset{def}{=} \{\vec{u} = \vec{AB} \mid \text{unde } A, B \in \mathbb{R}^3 \text{ - puncte într-un spaţiu (afin) cu 3 dimensiuni}\} \\ „\oplus" \overset{not}{\equiv} „+" \to \text{adunarea a doi vectori liberi (cu regula paralelogramului / triunghiului)} \\ „*" \overset{not}{\equiv} „\cdot" \to \text{înmulţirea unui vector liber cu un scalar real (multiplicarea)} \end{cases}$$

deci:

$$(*) \begin{cases} „+": \vec{V}_3 \times \vec{V}_3 \to \vec{V}_3 \\ (\vec{u}, \vec{v}) \xrightarrow{„+"} \vec{u} + \vec{v} \overset{not}{=} \vec{w} \end{cases}$$

$$(**) \begin{cases} „\cdot": \mathbb{R} \times \vec{V}_3 \to \vec{V}_3 \\ (\alpha, \vec{u}) \xrightarrow{„\cdot"} \alpha \vec{u} \overset{not}{=} \vec{v} \end{cases}$$



② $(\mathcal{P}_n(X), +, \cdot)$ – sp. lin. ($n+1$ dimensional) al polinoamelor de grad cel mult „n"

unde:

$$\begin{cases} V \equiv \mathcal{P}_n(X) \overset{def}{=} \{P(X) \in \mathbb{R}[X] \mid P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_2 X^2 + a_1 X + a_0\ ;\ a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{0,n}\} \\ „\oplus" \overset{not}{\equiv} „+" \to \text{adunarea a două polinoame (cu coeficienţi reali)} \\ „*" \overset{not}{\equiv} „\cdot" \to \text{înmulţirea unui polinom cu un scalar (număr) real} \end{cases}$$

deci:

$$(*) \begin{cases} „+": \mathcal{P}_n(X) \times \mathcal{P}_n(X) \to \mathcal{P}_n(X) \\ (P(X), Q(X)) \xrightarrow{„+"} P(X) + Q(X) \overset{not}{=} R(X) \end{cases}$$

$$\underline{P(X) + Q(X)} \equiv (a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0) + (b_n X^n + \dots + b_1 X + b_0) \overset{def}{=} \overbrace{(a_n + b_n)}^{\overset{not}{=} c_n} X^n + \dots + \overbrace{(a_1 + b_1)}^{\overset{not}{=} c_1} X + \overbrace{(a_0 + b_0)}^{\overset{not}{=} c_0}$$

$$= c_n X^n + \dots + c_1 X + c_0 \overset{not}{=} \underline{R(X)}$$

$$(**) \begin{cases} „\cdot": \mathbb{R} \times \mathcal{P}_n(X) \to \mathcal{P}_n(X) \\ (\alpha, P(X)) \xrightarrow{„\cdot"} \alpha \cdot P(X) \overset{not}{=} Q(X) \end{cases}$$

$$\alpha \cdot P(X) \equiv \alpha \cdot (a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0) \overset{def}{=} \underbrace{(\alpha a_n)}_{\overset{not}{=} b_n} X^n + \dots + \underbrace{(\alpha a_1)}_{\overset{not}{=} b_1} X + \underbrace{(\alpha \cdot a_0)}_{\overset{not}{=} b_0} = b_n X^n + \dots + b_1 X + b_0 \overset{not}{=} Q(X)$$

③ $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ – sp. lin ($m \cdot n$ dimensional) al matricelor cu „m" linii şi „n" coloane

unde:

$$\begin{cases} V \equiv \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}} \mid a_{ij} \in \mathbb{R}\} \\ „\oplus" \equiv „+" \to \text{op. de adunare a două matrici (de acelaşi tip)} \\ „*" \equiv „\cdot" \to \text{op. de înmulţire a unei matrici cu un scalar (număr) real} \end{cases}$$

deci:

$$(*)\begin{cases} "+" : \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \\ (A,B) \xrightarrow{"+"} A+B \overset{not}{=} C \end{cases}$$

$$\underline{A+B} \equiv (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} + (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \overset{def}{=} (\underbrace{a_{ij}+b_{ij}}_{\overset{not}{=} c_{ij}})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \overset{not}{=} (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} = \underline{C}$$

$$(**)\begin{cases} "\cdot" : \mathbb{R} \times \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) \\ (\alpha, A) \xrightarrow{"\cdot"} \alpha \cdot A \overset{not}{=} B \end{cases}$$

$$\underline{\alpha \cdot A} \equiv \alpha \cdot (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \overset{def}{=} (\underbrace{\alpha \cdot a_{ij}}_{\overset{not}{=} b_{ij}})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} \overset{not}{=} (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m}\\ j=\overline{1,n}}} = \underline{B}$$

4 (!!!) $\underline{(\mathbb{R}^n, +, \cdot)}$ **- sp. lin. $\mathbb{R}^n$** (în acest spațiu vom lucra pe tot parcursul acestui curs!!!)

unde:

$$V \equiv \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ ori}} \overset{def}{=} \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) / x_i \in \mathbb{R}, i=\overline{1,n}\} \equiv \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T / x_i \in \mathbb{R}, i=\overline{1,n}\}$$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ – componentele vectorului x

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – vector linie din $\mathbb{R}^n$ (sau: n-uplu)

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – vector coloană din $\mathbb{R}^n$

Obs: - în cap. I (algebră liniară) și cap. II (programare liniară) vom folosi pentru vectorii din $\mathbb{R}^n$ scrierea (notația) lor sub formă de vectori coloană (așa apar în aplicații, pe coloană) adică vectorii vor fi de forma: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

- în cap. III (analiză matematică) vom folosi scrierea vectorilor din $\mathbb{R}^n$ ca vectori linie, adică de forma: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Operațiile:

"$\oplus$" $\overset{not}{\equiv}$ "+" și "$*$" $\overset{not}{\equiv}$ "$\cdot$" sunt definite astfel:

$$(*)\begin{cases} "+" : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x,y) \xrightarrow{"+"} x+y \overset{not}{=} z \end{cases}$$

definită astfel: $x+y \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)^T + (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \overset{def}{=}$

$$\overset{def}{=} (\underbrace{x_1+y_1}_{\overset{not}{=} z_1}, \underbrace{x_2+y_2}_{\overset{not}{=} z_2}, \dots, \underbrace{x_n+y_n}_{\overset{not}{=} z_n})^T \equiv (z_1, z_2, \dots, z_n)^T = z$$

Ex Fie vectorii $\begin{cases} x = (1,1,3)^T \\ y = (-2,0,2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3$ și $\begin{cases} u = (2,-3)^T \\ v = (0,-3)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^2$ ~~și scalarii~~. Atunci:

$$\begin{cases} \underline{x+y} = (1,1,3)^T + (-2,0,2)^T \overset{def}{=} (1-2, 1+0, 3+2)^T = \underline{(-1,1,5)^T} \in \mathbb{R}^3 \\ \underline{u+v} = (2,-3)^T + (0,-3)^T \overset{def}{=} (2+0, -3-3)^T = \underline{(2,-6)^T} \in \mathbb{R}^2 \\ \underline{x+v} = (1,1,3)^T + (0,-3)^T = \underline{???} \end{cases}$$

(nu se pot aduna vectori din spații diferite $\begin{pmatrix} x \in \mathbb{R}^3 \\ v \in \mathbb{R}^2 \end{pmatrix}$!!!)

nu are sens (operația nu este definită cf. (*))

Deci, dacă $x \in \mathbb{R}^n$ și $y \in \mathbb{R}^m$ cu $m \neq n$, operația de adunare a lor $x+y = ?$ nu are sens!!!

$$(**)\begin{cases} \text{"}\cdot\text{"}: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (\alpha, x) \xrightarrow{\text{"}\cdot\text{"}} \alpha\cdot x \overset{not}{=} y \end{cases}$$ definită astfel: $\alpha\cdot x \equiv \alpha\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n)^T \overset{def}{=} (\underbrace{\alpha x_1}_{\overset{not}{=} y_1}, \underbrace{\alpha x_2}_{\overset{not}{=} y_2}, \dots, \underbrace{\alpha x_n}_{\overset{not}{=} y_n})^T \overset{not}{=} (y_1, y_2, \dots, y_n)^T = y$

Ex Fie vectorii: $\begin{cases} x=(2,1,-1,3)^T \in \mathbb{R}^4 \\ y=(0,2,0,-4)^T \in \mathbb{R}^4 \\ z=(1,1,-1)^T \in \mathbb{R}^3 \end{cases}$ și scalarii $\alpha=2,\ \beta=-3$

Atunci:
$$\begin{cases} \alpha x = 2x = 2(2,1,-1,3)^T = (4,2,-2,6)^T \\ \beta y = -3y = -3(0,2,0,-4)^T = (0,-6,0,12)^T \\ \alpha x+\beta y = 2x-3y = (4,2,-2,6)^T + (0,-6,0,12)^T = (4,-4,-2,18)^T \\ \alpha z = 2z = 2(1,1,-1)^T = (2,2,-2)^T \\ \alpha x+\beta z = 2x-3z = 2(2,1,-1,3)^T - 3(1,1,-1)^T = (4,2,-2,6)^T + (-3,-3,3)^T = ??? \end{cases}$$

Obs:

i) $0_{\mathbb{R}^n} \overset{not}{\equiv} 0_n \overset{def}{=} (0,0,\dots,0)^T \rightarrow$ vectorul nul al spațiului $\mathbb{R}^n$

ii) $(\forall)\ x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n \rightarrow$ opusul său este vectorul $-x \overset{def}{=} (-x_1,-x_2,\dots,-x_n)^T \in \mathbb{R}^n$

Ex $x=(3,-2,4)^T \Rightarrow -x=(-3,2,-4)^T$

iii) doi vectori $x, y \in \mathbb{R}^n$ coincid (sunt egali) $\Leftrightarrow$ toate componentele lor coincid (sunt egale) și au aceeași ordine!!

adică, dacă:

$\begin{cases} x=(x_1,x_2,\dots,x_n)^T \\ y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^n$, atunci $x=y \Leftrightarrow (x_1,x_2,\dots,x_n)^T = (y_1,y_2,\dots,y_n)^T \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=y_1 \\ x_2=y_2 \\ \dots \\ x_n=y_n \end{cases} \Leftrightarrow x_i=y_i,\ i=\overline{1,n}$

Ex: $\begin{cases} x=(2,0,2)^T \\ y=(2,2,0)^T \end{cases} \Rightarrow \underline{x \neq y}$ (au aceleași componente dar nu în aceeași ordine)

I.2 Dependență și independență liniară a vectorilor

Teorema 1 Fie $(V,+,\cdot)$ un spațiu liniar (vectorial) oarecare. Atunci au loc relațiile:

$$(1.1)\begin{cases} i)\ 0\cdot u = 0_V & ;\ (\forall)\, u\in V\ (0\in\mathbb{R})\\ ii)\ \alpha\cdot 0_V = 0_V & ;\ (\forall)\,\alpha\in\mathbb{R}\\ iii)\ 0_V+0_V=0_V \end{cases}$$

Def 2 Numim combinație liniară a „m" vectori din sp. lin. V, expresia:

$$(1.2)\ \text{"}\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m\text{"}\ ;\ \alpha_i\in\mathbb{R},\ u_i\in V,\ i=\overline{1,m}$$

Obs:

i) combinația liniară a unui nr. oarecare de vectori din V este tot un vector din V, adică:

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m \overset{not}{=} v\in V$$

ii) dacă $\alpha_i=0,\ i=\overline{1,m} \Rightarrow \alpha_1u_1+\dots+\alpha_mu_m=0_V,\ (\forall)\, u_i\in V$

Dem: $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m = 0\cdot u_1+0\cdot u_2+\dots+0\cdot u_m \overset{(1.1)_i}{=} 0_V+0_V+\dots+0_V \overset{(1.1)_{iii}}{=} 0_V$

iii) reciproca nu este adevărată, adică dacă: $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m=0_V \not\Rightarrow \alpha_i=0,\ (\forall)\, i=\overline{1,m}$

Dem: dăm un exemplu: fie vectorii $\begin{cases}u_1=(2,2,-1)^T\\ u_2=(1,0,-3)^T\\ u_3=(1,2,2)^T\end{cases}\in\mathbb{R}^3$ și scalarii $\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=-1\\ \alpha_3=-1\end{cases}$

Atunci avem:

$$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\alpha_3u_3 = u_1-u_2-u_3 = (2,2,-1)^T-(1,0,-3)^T-(1,2,2)^T = (0,0,0)^T \overset{not}{=} 0_3$$

și totuși cei 3 scalari nu sunt egali cu zero. !

Def 3:

Fie vectorii: $u_1,u_2,\dots,u_m\in V$ sp. lin. oarecare. Spunem că acești vectori sunt:

a) liniar independenți (L.i.) dacă combinația liniară a lor este vectorul nul 0_V, doar dacă toți scalarii din combinație sunt nuli (=0), adică are loc relația:

$$(1.3)\ \text{din}\ \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m=0_V \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=0$$

b) liniar dependenți (L.D.) dacă combinația liniară a lor este vectorul nul 0_V și pentru scalari nenuli ($\neq 0$ măcar unul dintre scalari), adică:

$$(1.4)\ (\exists)\,\alpha_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,m}\ \text{nu toți nuli a.î.:}\ \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m=0_V$$

Obs:

i) $A=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ – L.i $\Leftrightarrow$ "$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m=0_V \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=0$"

ii) $A=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ – L.D. $\Leftrightarrow$ "$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m=0_V \not\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=0$"

iii) pentru a studia natura (sunt L.D sau L.i) unei mulțimi (set) de vectori cunoscuți $v_1,v_2,\dots,v_m$ se impune condiția (cu scalarii $\alpha_i,\ i=\overline{1,m}$ necunoscuți inițial (apriori)):

$\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m=0_V$. Dacă din această condiție (ec. vectorială) $\Rightarrow (\forall)\,\alpha_i=0,\ i=\overline{1,m} \Rightarrow$ vectorii sunt L.i

iv) vectorii u_1,u_2,u_3 din ex. de mai sus sunt L.D (deoarece $(\exists)$ scalari $\neq 0$ în comb. lin.) $\Rightarrow (\exists)\,\alpha_i\neq 0 \Rightarrow$ vectorii sunt L.D

Proprietăți ale vectorilor L.D și L.i

T_1: O mulțime de vectori este L.D. $\Leftrightarrow$ cel puțin un vector se exprimă ca o combinație liniară de ceilalți vectori, adică:

(1.5) $A=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ – L.D. $\Leftrightarrow$ $(\exists)\, u_i\in A$ $(1\le i\le m)$ a.î.: (*) $u_i=\beta_1u_1+\dots+\beta_{i-1}u_{i-1}+\beta_{i+1}u_{i+1}+\dots+\beta_m u_m$

Dem: ($\overset{nec.}{\Longrightarrow}$) A – L.D $\Rightarrow$ (*) adev.

Dacă A – L.D $\xRightarrow[(1.4)]{def}$ $(\exists)\,\alpha_i\in\mathbb{R}, i=\overline{1,m}$ nu toți nuli, a.î.: (1) $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_{i-1}u_{i-1}+\alpha_iu_i+\alpha_{i+1}u_{i+1}+\dots+\alpha_mu_m=0_V$

Fie $\alpha_i\neq 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \alpha_iu_i=-\alpha_1u_1-\alpha_2u_2-\dots-\alpha_{i-1}u_{i-1}-\alpha_{i+1}u_{i+1}-\dots-\alpha_mu_m \,/\cdot\frac{1}{\alpha_i}\neq 0 \Leftrightarrow$

(2) $u_i=\underbrace{-\frac{\alpha_1}{\alpha_i}}_{\overset{not}{=}\beta_1}u_1\underbrace{-\frac{\alpha_2}{\alpha_i}}_{\overset{not}{=}\beta_2}u_2-\dots\underbrace{-\frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}}_{\overset{not}{=}\beta_{i-1}}u_{i-1}\underbrace{-\frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}}_{\overset{not}{=}\beta_{i+1}}u_{i+1}-\dots\underbrace{-\frac{\alpha_m}{\alpha_i}}_{\overset{not}{=}\beta_m}u_m \Longleftrightarrow$ not: $\beta_k=-\frac{\alpha_k}{\alpha_i}$, $k=\overline{1,m}$, $k\neq i$

(2') $u_i=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\dots+\beta_{i-1}u_{i-1}+\beta_{i+1}u_{i+1}+\dots+\beta_mu_m \Leftrightarrow$ (*)

($\overset{suf}{\Longleftarrow}$) (*) adev $\Rightarrow$ A – L.D

din rel. (*) $\Rightarrow$ $\beta_1u_1+\beta_2u_2+\dots+\beta_{i-1}u_{i-1}-u_i+\beta_{i+1}u_{i+1}+\dots+\beta_mu_m=0_V$

not $\alpha_1=\beta_1;\dots;\alpha_{i-1}=\beta_{i-1};\ \alpha_i=-1;\ \alpha_{i+1}=\beta_{i+1};\dots;\alpha_m=\beta_m$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_{i-1}u_{i-1}+\alpha_iu_i+\alpha_{i+1}u_{i+1}+\dots+\alpha_mu_m=0_V \xLeftrightarrow[\text{cf def}(1.4)]{(\exists)\alpha_i=-1\neq 0} A=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ – L.D

q.e.d

Obs:

i) evident: $A=\{u_1,\dots,u_m\}$ – L.i $\Leftrightarrow$ niciunul dintre vectori nu se poate scrie ca și comb. lin. de restul vectorilor

ii) relația (*) (din (1.5)) se numește relație de dependență liniară (vectorul „u_i" depinde liniar de ceilalți „$m-1$" vectori)

T_2: O mulțime de vectori $A\subset V$ care conține vectorul nul este L.D., adică:

„dacă $0_V\in A \Rightarrow$ A – L.D."

Dem Fie $0_V\in A=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$ – oarecare. Fără a restrânge generalitatea pp. că: (*) $u_1=0_V$

Fie scalarii: (**) $\begin{cases}\alpha_1=1\\ \alpha_2=\dots=\alpha_m=0\end{cases}\in\mathbb{R}.$

Atunci din (*) și (**) avem: $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m=1\cdot 0_V+0\cdot u_2+\dots+0\cdot u_m=0_V+0_V+\dots+0_V=0_V$

$\Leftrightarrow$ A – L.D (cf. (1.4), există și scalari nenuli)

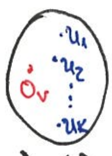
q.e.d.

Obs:

i) reciproca T_2 nu este adevărată, adică: „dacă A – L.D $\not\Rightarrow 0_V\in A$" (o mulțime poate fi L.D. și fără a conține vectorul nul 0_V);

ii) cu alte cuvinte, dacă: $\begin{cases}(a)\ 0_V\in A\Rightarrow A\text{ – L.D}\\ (b)\ 0_V\notin A\Rightarrow A<\begin{matrix}L.D\\ L.i\end{matrix}\end{cases}$

iii) evident, dacă mulțimea A – L.i $\Rightarrow 0_V\notin A$



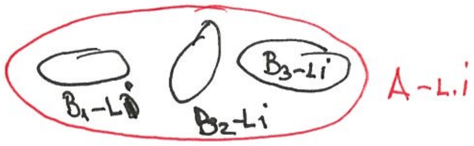
A – LD

A < L.D / L.i

T_3: Orice submulțime nevidă ($\neq \emptyset$) a unei mulțimi de vectori L.i. este tot L.i., adică:

„dacă: $A \subset V$ − L.i. ; $B \subset A$; $B \neq \emptyset$ $\Rightarrow$ B − L.i"

($\subset$ = „este inclusă")



Dem: (m.r.a → metoda reducerii la absurd)

Fie $A=\{u_1,u_2,\dots,u_k,u_{k+1},\dots,u_m\}\subset V$ − L.i și $B=\{u_1,u_2,\dots,u_k\}\subset A$

Vom pp. că B − L.D $\overset{(1.4)}{\underset{def}{\Longleftrightarrow}}$ $(\exists)\alpha_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,k}$, nu toți nuli, a.î.: $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_ku_k=0_V$ (1)

Fie scalarii $\alpha_{k+1}=\dots=\alpha_m=0\in\mathbb{R}$, deci avem: $\alpha_{k+1}u_{k+1}+\dots+\alpha_mu_m=0_V$ (cf.(1.1)) (2)

Din (1) + (2) obținem: $\underbrace{\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_ku_k}_{\overset{(1)}{=}0_V\ \{(\exists)\alpha_i\neq 0\}}+\underbrace{\alpha_{k+1}u_{k+1}+\dots+\alpha_mu_m}_{\overset{(2)}{=}0_V\ \{(\forall)\alpha_i=0\}}=0_V+0_V=0_V \Leftrightarrow$ A − L.D (F)

Deci pp. făcută (B − L.D) este falsă $\Leftrightarrow$ B − L.i

q.e.d.

Obs:

i) O mulțime formată dintr-un unic vector nenul este L.i ($B=\{u\}$ − L.i $\Leftrightarrow u\neq 0_V$)

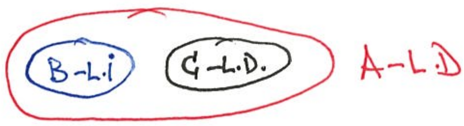
Dem: Fie $A=\{u_1,u_2,\dots,u_i,\dots,u_m\}$ − L.i $\Rightarrow 0_V\notin A$, deci $(\forall)u_i\neq 0_V,\ i=\overline{1,m}$

Fie $B=\{u_i\}\subset A$; A − L.i $\overset{T_3}{\Longrightarrow}$ $B=\{u_i\}$ − L.i

q.e.d.

ii) T_3 nu este adevărată în cazul mulțimilor de vectori L.D., adică:

„dacă A − L.D ; $B\subset A$ $\Rightarrow$ B < L.D / L.i "



Ex: a) Fie vectorii $\begin{cases}u_1=(1,1)^T\\u_2=(2,2)^T\\u_3=(3,3)^T\end{cases}\in\mathbb{R}^2$. Se observă imediat că:

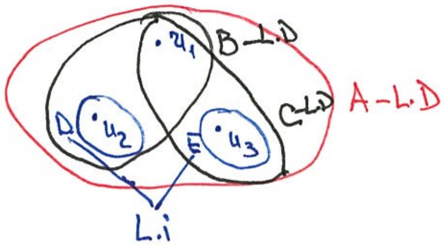
i) $u_2=2u_1 \Leftrightarrow 2u_1-u_2=0_2 \Leftrightarrow u_1,u_2$ − L.D.

ii) $u_3=3u_1 \Leftrightarrow 3u_1-u_3=0_2 \Leftrightarrow u_1,u_3$ − L.D

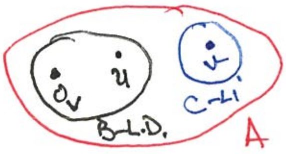
iii) $u_3=u_1+u_2 \Leftrightarrow u_1+u_2-u_3=0_2 \Leftrightarrow u_1,u_2,u_3$ − L.D

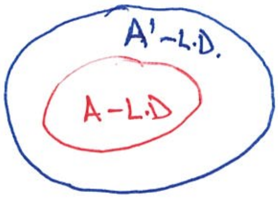
cf. def.(1.4) avem comb. lin. de vectori cu scalari nenuli egală cu „0_2".

Fie $\begin{cases}A=\{u_1,u_2,u_3\}\text{ − L.D}\\B=\{u_1,u_2\}\text{ − L.D}\subset A\\C=\{u_1,u_3\}\text{ − L.D}\subset A\\D=\{u_2\}\ ;\ E=\{u_3\}\text{ − L.i (cf.obs.i))}\end{cases}$



b) Fie $\begin{cases}A=\{0_V,u,v\}\subset V\text{ − L.D (conține }0_V)\\B=\{0_V,u\}\subset A\text{ − L.D (conține }0_V)\\C=\{v\}\subset A\text{ − L.i (cf.obs. i))}\end{cases}$





iii) dacă A − L.D, atunci $(\forall)A'\supset A$ este tot L.D.

($\supset$ = „include")