Lema substituției (exemple)

1. Fie $(B)\begin{cases} x_1=(-1,1,-1)^T \\ x_2=(-1,2,0)^T \\ x_3=(0,-1,1)^T \end{cases} \subseteq \mathbb{R}^3$. Determinați coordonatele vectorului $y=(3,-4,2)^T$ în această bază.

Dem

a) cu definiția (metoda lui Gauss)

Vrem să determinăm scalarii: $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3 \in \mathbb{R}$ a.î. $\begin{cases} \underline{y=\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3} \quad (*) \\ ⇕ \\ y_B=[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3] \end{cases}$

Înlocuim în relația $(*)$ expresiile vectorilor: y, x_1, x_2, x_3 și obținem:

$$(3,-4,2)^T=\lambda_1(-1,1,-1)^T+\lambda_2(-1,2,0)^T+\lambda_3(0,-1,1)^T \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (**)\begin{cases} -\lambda_1-\lambda_2 = 3 \\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3=-4 \\ -\lambda_1 +\lambda_3=2 \end{cases}$$ care este un sistem pătratic, liniar cu 3 ec. și 3 necunoscute, pe care-l rezolvăm cu metoda lui Gauss.

$$\bar{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & y \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{-1} & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \end{array} /(-1) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \end{array} /(-1) \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \end{array} /\cdot\tfrac{1}{2} \;/\cdot\tfrac{1}{2}\;/\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1=-2 \\ \lambda_2=-1 \\ \lambda_3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{y=-2x_1-x_2+0x_3 \Leftrightarrow y_B=[-2,-1,0]}$$

Verificare calcule

$$y=-2x_1-x_2=-2(-1,1,-1)^T-(-1,2,0)^T=(2,-2,2)^T-(-1,2,0)^T=\underline{(3,-4,2)^T}$$

(adevărat)

Obs:

- semnificația elementelor din matricile din metoda lui Gauss este doar de coeficienți ai variabilelor $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$.

b) cu lema substituției:

Obs: deoarece știm componentele vectorilor $y, x_1, x_2, x_3 \Leftrightarrow$ știm coordonatele lor în baza canonică din $\mathbb{R}^3$: $(B_c)\begin{cases} e_1=(1,0,0)^T \\ e_2=(0,1,0)^T \\ e_3=(0,0,1)^T \end{cases}$

(componentele $\equiv$ coordonatele în baza canonică)

adică:
$$\begin{cases} y=(3,-4,2)^T \Leftrightarrow y=3e_1-4e_2+2e_3 \Leftrightarrow y_{B_c}=[3,-4,2] \\ x_1=(-1,1,-1)^T \Leftrightarrow x_1=-e_1+e_2-e_3 \Leftrightarrow x_1=[-1,1,-1]_{B_c} \\ x_2=(-1,2,0)^T \Leftrightarrow x_2=-e_1+2e_2 \Leftrightarrow x_2=[-1,2,0]_{B_c} \\ x_3=(0,-1,1)^T \Leftrightarrow x_3=-e_2+e_3 \Leftrightarrow x_3=[0,-1,1]_{B_c} \end{cases}$$

De aceea vom folosi ca bază inițială, baza canonică din $\mathbb{R}^3$

baza finală în care vrem să aflăm coordonatele vectorului „y"

baza inițială în care cunoaștem coordonatele vectorilor

B	y	x_1	x_2	x_3
e_1	3	$\boxed{-1}$	-1	0
e_2	-4	1	2	-1
e_3	2	-1	0	1
x_1	-3	1	1	0
e_2	-1	0	$\boxed{1}$	-1
e_3	-1	0	1	1
x_1	-2	1	0	1
x_2	-1	0	1	-1
e_3	0	0	0	$\boxed{2}$
x_1	-2	1	0	0
x_2	-1	0	1	0
x_3	0	0	0	1

$/(-1)/$ $/(-1)$ $+$ $+$

$/(-1)/(-1)$ $+$ $+$

$/\cdot\frac{1}{2}$ $/\cdot\frac{1}{2}$ $/(-\frac{1}{2})$ $+$ $+$

$y=-3x_1-e_2-e_3$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=1\cdot x_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3 \\ x_2=x_1+e_2+e_3 \\ x_3=\quad -e_2+e_3 \end{cases}$

$\Rightarrow y=-2x_1-x_2+0\cdot e_3$

$$y=-2x_1-x_2+0\cdot x_3 \Leftrightarrow y_B=[-2,-1,0]$$

Obs: semnificația numerelor din tabel este de coordonate ale vectorilor (y, x_1, x_2, x_3) în cele 4 baze (baza inițială, baza intermediare și cea finală)!!!

2) Fie $(B)\begin{cases} x_1=(-2,1)^T \\ x_2=(3,-1)^T \end{cases} \subseteq \mathbb{R}^2$ și $(B')\begin{cases} y_1=(5,2)^T \\ y_2=(-2,-1)^T \end{cases} \subseteq \mathbb{R}^2$

Se cere:

a) știind că $u_B=[3,-1]$ aflați $u_{B'}=?$;

b) știind că $v_{B'}=[1,2]$ aflați $v_B=?$;

Dem

Vom folosi numai lema substituției. Dacă vom încerca să folosim bazele B și B' în mod direct ca baze inițiale respectiv finale avem nevoie de matricile schimbării de bază $S_{B'|B}$ și $S'_{B|B'}$ pe care nu le cunoaștem, adică:

B	u	y_1	y_2
x_1	3	s_{11}	s_{21}
x_2	-1	s_{12}	s_{22}
⋮	⋮	⋮	⋮

unde $\begin{cases} y_1=s_{11}x_1+s_{12}x_2 \\ y_2=s_{21}x_1+s_{22}x_2 \end{cases} \Rightarrow S_{B'|B}=\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$

respectiv:

B'	u'	x_1	x_2
y_1	1	s'_{11}	s'_{21}
y_2	2	s'_{12}	s'_{22}
⋮	⋮	⋮	⋮

unde $\begin{cases} x_1=s'_{11}y_1+s'_{12}y_2 \\ x_2=s'_{21}y_1+s'_{22}y_2 \end{cases} \Rightarrow S'_{B|B'}=\begin{pmatrix} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{pmatrix}$

{Obs: evident $S'=S^{-1}$}

Din acest motiv (pentru a nu afla matricele S, S') vom folosi ca bază inițială, baza canonică din $\mathbb{R}^2$: $(B_0)\begin{cases} e_1=(1,0)^T \\ e_2=(0,1)^T \end{cases}$ astfel:

a)

B	u	y_1	y_2
e_1	-9	5	-2
e_2	4	2	$\boxed{-1}$ /(-1)/(-2)
e_1	-17	$\boxed{1}$	0 /·2
y_2	-4	-2	1
y_1	-17	1	0
y_2	-38	0	1

Deoarece știm că:

$u_B=[3,-1] \Leftrightarrow u=3x_1-x_2=3(-2,+1)^T-(3,-1)^T=(-9,4)^T$

$u_{B_0}=[-9,4] \Leftrightarrow u=-9e_1+4e_2$

$\Downarrow$

$u=-17y_1-38y_2 \Leftrightarrow u_{B'}=[-17,-38]$

b) analog: $v_{B'} = [1,2] \Leftrightarrow v = y_1 + 2y_2 = (5,2)^T + 2(-2,-1)^T = \underline{(1,0)^T}$ $(\equiv e_1)$

şi avem:

B	v	x_1	x_2
e_1	1	-2	3
e_2	0	$\boxed{1}$	-1
e_1	1	0	$\boxed{1}$
x_1	0	1	-1
x_2	1	0	1
x_1	1	1	0

$\Downarrow$

$\underline{v = x_1 + x_2 \Leftrightarrow v_B = [1,1]}$

Obs: i) $u_B \xrightarrow{S^{(?)}} u_{B'}$ (complicat, avem nevoie de S)

ii) $u_B \to u_{B_c} \to u_{B'}$ (simplu, nu avem nevoie de S)