Seminar 3 4) Determinarea soluţiilor de bază (S.B) ale unui sistem liniar compatibil nedeterminat cu f.e

Fie sistemul de ec. liniare ($\equiv$ sist. liniar): (3.1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

care verifică următoarele condiţii: (*) $\begin{cases} m < n \\ r_A = m \; (= r_{\bar{A}}) \end{cases}$ → înseamnă că sist. (3.1) este un sistem compatibil nedeterminat şi fără ecuaţii secundare (!!)

~~Def~~: Obs:

Deoarece am presupus că sist. lin. (3.1)+(*) este compatibil nedeterminat (=> are o infinitate de soluţii particulare. Vom numi mulţimea (totalitatea) acestor soluţii particulare, soluţia generală a sistemului: $S_G = \{X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \,/\, X_0$ soluţie particulară a sist. (3.1)$\}$

$\{X_0, X_1, X_2, \dots, X_n\}$ → $S_G \equiv$ sol. gen. a sistemului (3.1)

Def 1: Numim **forma explicită** ($\overset{not}{\equiv}$ F.E.) a sist. (3.1) care verifică condiţiile (*), în raport cu variabilele principale $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$, scrierea soluţiei generale a sistemului în raport cu acestea (adică rezolvarea sistemului în raport cu variabilele principale $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$)

Obs: i) necunoscutele $\begin{cases} x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m} \to \text{variabile principale sau bazice} \\ \text{restul } x_{i_{m+1}}, \dots, x_{i_n} \to \text{variabile secundare sau nebazice} \end{cases}$

ii) nr. formelor explicite ale lui (3.1)+(*) este: (3.2) $1 \le \text{nr. F.E} \le C_n^m$ $\left(C_n^m \overset{def}{=} \dfrac{n!}{m!\,(n-m)!}\right)$

iii) not: $X = (x_1, x_2, \dots, x_{i_1}, \dots\dots, x_{i_2}, \dots\dots\dots, x_{i_m}, \dots, x_n) \to$ F.E.

Def 2: Numim **soluţie de bază** ($\overset{not}{\equiv}$ S.B.) a sist. lin. (3.1)+(*), o soluţie particulară obţinută dintr-o formă explicită prin egalarea cu zero a variabilelor secundare

Obs: i) $\bar{X} = (0, 0, \dots, 0, \bar{x}_{i_1}, 0, \dots\dots, 0, \bar{x}_{i_2}, 0, \dots\dots\dots, 0, \bar{x}_{i_m}, 0, \dots\dots, 0) \to$ S.B

variabilele principale

variabilele secundare egale cu zero

ii) avem: (3.3) $1 \le \text{nr. S.B} \le \text{nr. F.E} \le C_n^m$

iii) se poate ca forme explicite distincte ($X_1 \neq X_2$) sol. de bază coresp. să coincidă ($\bar{X}_1 = \bar{X}_2$)

Def 3 O soluţie de bază a (3.1)+(*) se numeşte:

a) **admisibilă** (S.B.A), dacă are toate componentele (principale) nenegative (≥ 0); în caz contrar {dacă ($\exists$) componente (princip.) negative (<0)} se numeşte **neadmisibilă** (S.B.N)

b) **nedegenerată** (S.B.N_d), dacă are toate componentele principale nenule ($\neq 0$); în caz contrar (dacă ($\exists$) comp. principale nule ($=0$)) soluţia se numeşte **degenerată**

Obs: ordin de degenerare al unei S.B = nr. de comp. princip. egale cu zero

Ex: Determinați toate (FE) și (S.B) corespunzătoare, pentru următoarele sist. liniare:

a) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5 \\ -x_1-x_2+2x_3=-2 \end{cases} \Rightarrow \bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$

Dem: Obs: evident condițiile (*) sunt verificate: $\begin{cases} m=2<3=n \\ r_A=2=m \end{cases}$. Nr. max. de FE resp. S.B

este $C_3^2=3$, corespunzător următoarelor cazuri:

	v. princ.	v. sec.
1)	x_1,x_2	x_3
2)	x_1,x_3	x_2
3)	x_2,x_3	x_1

i) x_1,x_2 - variabile principale

$\bar{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \end{array}\right) \cdot(-2) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow (FE_1)\begin{cases} x_1=-1+3\alpha \\ x_2=3-\alpha \end{cases} > v.p \quad x_3=\alpha\in\mathbb{R} - v.s \xrightarrow[\alpha=0]{} (S.B)_1 \begin{cases} \bar{x}_1=-1 \\ \bar{x}_2=3 \\ \bar{x}_3=0 \end{cases}$

v.p v.s

$X_1=(-1+3\alpha, 3-\alpha, \alpha)^T \xrightarrow[\alpha=0]{} \bar{X}_1=(-1,3,0)^T\in\mathbb{R}^3$ → S.B.N.Nd (sol. de bază neadmisibilă și nedegenerată)

ii) x_1,x_3 - variabile principale

$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow X_2=(8-3\alpha, \alpha, 3-\alpha)^T \xrightarrow[\alpha=0]{} \bar{X}_2=(8,0,3)^T$ - sol. de bază admisibilă și nedegenerată (SBANd)

iii) x_2,x_3 - variabile principale

$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{2} & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \cdot\frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 1 & -1/2 & 5/2 \\ -1/2 & 0 & \boxed{3/2} & 1/2 \end{array}\right) \cdot\frac{2}{3} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1 & 0 & 8/3 \\ -1/3 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) \Rightarrow X_3=\left(\alpha, \frac{8}{3}-\frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\alpha\right)^T \xRightarrow{\alpha=0}$

$\Rightarrow \bar{X}_3=\left(0,\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)^T$ → S.B.A.Nd (sol. de bază admisibilă, nedegenerată)

Obs: putem să procedăm și astfel (folosind ca pivot inițial pe -1)!

$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & \boxed{-1} & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1/3 & 0 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 0 & 8/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1 & 0 & 8/3 \\ -1/3 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right)$, deci am obținut același rezultat (dar cu calcule "inițial" mai simple!).

b) $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=-3 \\ x_1-2x_2+x_4=-6 \end{cases}$

Obs avem $\begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases}$ și $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; evident cond. (*) $\begin{cases} m<n \\ r_A=m=2 \end{cases}$ sunt verificate. Nr. max. de FE (S.B) este $C_4^2=\frac{4!}{2!(4-2)!}=6$.

Dem:

i) x_1,x_2 - v.p (respectiv x_3,x_4 - v.s)

$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \xRightarrow[x_4=\beta]{x_3=\alpha} X_1=(-4\alpha-3\beta, 3-2\alpha-\beta, \alpha, \beta)^T$

→ prima formă explicită coresp. var. princ. x_1,x_2

$\xRightarrow{\alpha=\beta=0} \bar{X}_1=(0,3,0,0)^T\in\mathbb{R}^4$ - SBAD (sol. de bază admisibilă (toate componentele ≥ 0) și degenerată (există o comp. princ. egală cu zero → $\bar{x}_1=0$))

ii) x_2, x_4 - v.p (și x_1, x_3 - v.s.)

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{-1} & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & -4 & \boxed{-3} & 0 \end{array}\right) \end{array} \Big| \cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) \Big| \left(\tfrac{2}{3}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2/3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4/3 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xRightarrow[x_3=\beta]{x_1=\alpha}$$

$$\Rightarrow X_2 = \left(\alpha, 3-\alpha-\tfrac{2}{3}\beta, \beta, -\alpha-\tfrac{4}{3}\beta\right)^T \to (F.E)_2 \xRightarrow{\alpha=\beta=0} \bar{X}_2 = (0,3,0,0)^T \to S.B.A.D.$$

Obs: Formele explicite sunt diferite ($X_1 \neq X_2$) dar sol. de bază corespunzătoare coincid ($\bar{X}_1 =$

iii) x_3, x_4 - v.p (x_1, x_2 - v.s)

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \boxed{2} & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \end{array} \Big| \cdot \tfrac{1}{2} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1/2 & -1/2 & 1 & 1 & -3/2 \\ -1 & -2 & 0 & \boxed{1} & -6 \end{array}\right) \end{array} \Big| \cdot(-1) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 3/2 & 3/2 & 1 & 0 & 9/2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \end{array} \xRightarrow[x_2=\beta]{x_1=\alpha} X_3 = \left(\alpha, \beta, \tfrac{9}{2}-\tfrac{3}{2}\alpha-\tfrac{3}{2}\beta, -6+\alpha\right.$$

$$\xRightarrow{\alpha=\beta=0} \bar{X}_3 = \left(0, 0, \tfrac{9}{2}, -6\right)^T \to S.B.N.Nd \text{ (sol. de bază neadmisibilă și nedegenerată)}$$

Obs: determinați voi FE și SB în celelalte 3 (posibile) cazuri.

2) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -1 \\ -x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Obs: cond. (*) $\begin{cases} m = 3 < 5 = n \\ r_A = 3 \ (=m) \to \text{trebuie verificat prin calcul} \end{cases}$

(i) ($\exists$) cel mult $C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$ F.E (S.B)

Dem: voi determina doar una din cele (maxim) 10 S.B. Determinați voi alte S.B.

i) x_2, x_3, x_5 - v.p (și x_1, x_4 - v.s.)

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & \boxed{1} & -1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Big| \cdot(-1) \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 1 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & -2 & \boxed{-1} & -2 \end{array}\right) \end{array} \Big| \cdot(-1) \Big| \cdot(-2) \Big| \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 9 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 11 & 0 & 1 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array} \xRightarrow[x_4=\beta]{x_1=\alpha} X_1 = (\alpha, 7-9\alpha-\beta, 6-11\alpha-5\beta, \beta, 2-4\alpha-2\beta)^T \in \mathbb{R}^5$$

- formă explicită coresp. v.princ.: x_2, x_3, x_5

$$\bar{X}_1 = (0, 7, 6, 0, 2)^T \in \mathbb{R}^5 \to S.B.A.Nd \text{ (sol. de bază admis. și nedeg.)}$$

Obs: corespunde sistemului:

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 + x_4 = 7 \\ 11x_1 + x_3 + 5x_4 = 6 \\ 4x_1 + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \quad \xLeftrightarrow[x_4=\beta]{x_1=\alpha} \quad \begin{cases} x_2 = 7 - 9\alpha - \beta \\ x_3 = 6 - 11\alpha - 5\beta \\ x_5 = 2 - 4\alpha - 2\beta \\ x_1 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

se trec cu semnul schimbat în membrul ~~stâng~~ drept al egalității

și se atribuie valori reale oarecare variabilelor secundare: $\begin{cases} x_1 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_4 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

q.e.d.

CAP. I: ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

I.1) Dependență și independență liniară a vectorilor

Noțiuni teoretice:

i) Fie vectorii $u_1,u_2,\dots,u_m \in V$. Dacă, din combinația liniară a lor:

$$(*)\ \alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m=0_V \begin{cases} \Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=0, \text{ atunci } u_1,u_2,\dots,u_m\ (L.i) \\ \not\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=0\ ((\exists)\alpha_i\neq 0), \text{ atunci } u_1,u_2,\dots,u_m\ (L.D) \end{cases}$$

ii) Dacă $V=\mathbb{R}^n$, fie $A\in\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ matricea componentelor vectorilor $u_1,u_2,\dots,u_m$ (scrise pe coloane). Atunci, dacă:

$$\begin{cases} a)\ \text{rang}\,A=m\ (=\text{nr.vect.}) \Rightarrow u_1,u_2,\dots,u_m\ (L.i) \\ b)\ \text{rang}\,A<m\ (\text{nr.vect.}) \Rightarrow u_1,u_2,\dots,u_m\ (L.D) \end{cases}$$

Obs: $\begin{cases} (a)\ \text{dacă } m>n\ (\text{nr.vectorilor} > \dim\mathbb{R}^n) \Rightarrow u_1,u_2,\dots,u_m\ (L.D) \\ (b)\ \text{dacă } m\le n\ (\text{nr.vect} \le \dim\mathbb{R}^n) \Rightarrow u_1,u_2,\dots,u_m < \begin{matrix} L.D \\ L.i \end{matrix}\ (?) \end{cases}$

Exemple: Să se determine natura următoarelor mulțimi (sisteme) de vectori din $\mathbb{R}^n$:

a) $\begin{cases} u_1=(1,-1)^T \\ u_2=(-2,3)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\text{dem}} u_1,u_2$ sunt L.i

Dem:

a₁) cu definiția generală

Fie: $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2=0_2 \Leftrightarrow \alpha_1(1,-1)^T+\alpha_2(-2,3)^T=(0,0)^T \Leftrightarrow (\alpha_1,-\alpha_1)^T+(-2\alpha_2,3\alpha_2)^T=(0,0)^T \Leftrightarrow (\alpha_1-2\alpha_2,-\alpha_1+3\alpha_2)^T=(0,0)^T$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1-2\alpha_2=0 \\ -\alpha_1+3\alpha_2=0 \end{cases} \xrightarrow[\text{cu met. lui Gauss}]{\text{rezolvăm}} : \bar{A}=\begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_1 & u_2 & 0_2 \end{matrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right)\cdot 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=0 \\ \alpha_2=0 \end{cases} (*) \Rightarrow u_1,u_2 - L.i$$

a₂) cu matricea componentelor

Vom determina rangul matricei componentelor vectorilor u_1,u_2 (și îl vom compara cu nr. lor.)

$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}\cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=A_{G-J} \Rightarrow r_A=2=\text{nr.vect.} \Rightarrow u_1,u_2 - L.i$$

a₃) cu prop 1 a vect. L.D + (m.r.a)

pp. că vectorii u_1,u_2 sunt L.D $\overset{(P_1)}{\Leftrightarrow} (\exists)\alpha\in\mathbb{R}$ a.î. $u_1=\alpha u_2 \Leftrightarrow (1,-2)^T=\alpha(-2,3)^T \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha=1 \\ 3\alpha=-2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=-\frac{1}{2} \\ \alpha=-\frac{2}{3} \end{cases} (F) \Leftrightarrow$ presupunerea făcută este falsă $\Leftrightarrow$ vect. u_1,u_2 sunt L.i

q.e.d.

Obs: am demonstrat prin 3 metode diferite pentru a vedea asemănările respectiv deosebirile dintre metode; uzual în cazul vectorilor din $\mathbb{R}^n$ (cum este cazul și aici) se aplică metoda a₂), care este cea mai directă.

b) $\begin{cases} v_1 = (1,0,-1)^T \\ v_2 = (-1,-1,2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{dem}} v_1, v_2 - L.i$

Dem: b_1) cu definiția:

Fie: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_3 \Leftrightarrow \alpha_1 (1,0,-1)^T + \alpha_2 (-1,-1,2)^T = (0,0,0)^T \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 = 0 \Rightarrow \underline{\alpha_2 = 0} \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \text{ (verificată de } \alpha_1 = \alpha_2 = 0) \end{array}\right. \Rightarrow \underline{\alpha_1 = 0} \Rightarrow \underline{\underline{v_1, v_2 - L.i}}$

b_2) cu matricea componentelor:

Avem: $A = \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \end{array}$ $\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{G-J} \Rightarrow r_A = 2 = \text{nr. vectorilor} \Rightarrow \underline{\underline{v_1, v_2 - L.i}}$

b_3) cu prop. 1 a vect. L.D + (m.r.a)

Pp. v_1 și $v_2 - L.D \Leftrightarrow (\exists)\, \beta \in \mathbb{R}$ a.î.: $v_2 = \beta v_1 \Leftrightarrow (-1,-1,2)^T = \beta (1,0,-1)^T \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ 0 = -1 \ (F) \\ -\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$ pp. făcută este falsă $\Leftrightarrow \underline{\underline{v_1, v_2 - L.i}}$

q.e.d

c) $\begin{cases} w_1 = (1,-1,0)^T \\ w_2 = (-2,3,-1)^T \\ w_3 = (0,-1,2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{dem}} w_1, w_2, w_3 - L.i$

Dem: c_1) cu def.

Fie: $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = 0_3 \Leftrightarrow \alpha_1 (1,-1,0)^T + \alpha_2 (-2,3,-1)^T + \alpha_3 (0,-1,2)^T = (0,0,0)^T \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$

rezolvăm cu met. lui Gauss

$$\begin{array}{c} \\ \bar{A} = \end{array} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$\downarrow w_1 \quad \downarrow w_2 \quad \downarrow w_3 \quad \downarrow 0_3$

$\Downarrow$ def.

$\underline{\underline{w_1, w_2, w_3 - L.i}}$

c_2) cu matricea componentelor

Determinăm rangul matricii componentelor: $A = \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array}$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{G-J} \Rightarrow r_A = 3 = \text{nr. vect.}$

vezi calculul de mai sus

$\Updownarrow$

$\underline{\underline{w_1, w_2, w_3 - L.i}}$

c_3) cu prop. 1 + m.r.a

pp. că $w_1, w_2, w_3 - L.D \Leftrightarrow (\exists)\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î.: $w_1 = \alpha w_2 + \beta w_3 \Leftrightarrow (1,-1,0)^T = \alpha(-2,3,-1)^T + \beta(0,-1,2)^T$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \\ 3\alpha - \beta = -1 \\ 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 = -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = -1 \ (F) \Rightarrow$ pp. făcută este falsă $\Leftrightarrow \underline{\underline{w_1, w_2, w_3 - L.i}}$

q.e.d.

d) $\begin{cases} x_1 = (1,-1,-2)^T \\ x_2 = (2,-1,-5)^T \\ x_3 = (0,-1,1)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\text{dem}} x_1, x_2, x_3 - L.D \quad \{ x_3 = 2x_1 - x_2 \rightarrow$ relație de dependență lin. $\}$

$\Updownarrow$

$2x_1 - x_2 - x_3 = 0_3$

<u>Dem:</u> Avem: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0_3 \Leftrightarrow \alpha_1 (1,-1,-2)^T + \alpha_2 (2,-1,-5)^T + \alpha_3 (0,-1,1)^T = (0,0,0)^T$

$\Leftrightarrow (*) \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$ - sistem lin. omogen, deci este compatibil (are soluție)

Fie $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array}$ - matricea coeficienților sist. lin. (*) $\equiv$ matricea componentelor vectorilor x_1, x_2, x_3

Calculăm r_A prin t.e.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & \boxed{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{G-J}$

$\Rightarrow r_A = 2 < 3 =$ nr. ~~necun.~~ (vectorilor) $\Rightarrow$ sist. (*) compatibil nedeterminat $\Leftrightarrow$ are o infinitate de soluții $\Leftrightarrow (\exists)\, \alpha_i \neq 0, i=\overline{1,3} \Leftrightarrow$ vectorii <u>x_1, x_2, x_3 - L.D.</u> $\Leftrightarrow (\exists)\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î.

$x_2 = \alpha x_1 + \beta x_3$ (de exemplu) $\Leftrightarrow (2,-1,-5)^T = \alpha(1,-1,-2)^T + \beta(0,-1,1)^T \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (**) \begin{cases} \alpha = 2 \\ -\alpha - \beta = -1 \\ -2\alpha + \beta = -5 \end{cases} \Rightarrow \underline{\beta = -1}$; $-2\alpha + \beta = -5 \to$ este verif. pt. $\alpha = 2, \beta = -1$

$\Leftrightarrow x_2 = 2x_1 - x_3$ (rel. de depend. liniară)

$\Updownarrow$

$2x_1 - x_2 - x_3 = 0_3 \quad \left(\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \right)$

<u>q.e.d.</u>

e) $\begin{cases} y_1 = (2,3,-1)^T \\ y_2 = (1,2,3)^T \\ y_3 = (-2,-2,1)^T \\ y_4 = (1,1,2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3$ <u>Dem:</u> $A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \Rightarrow r_A \leq \min\{3,4\} = 3$

$\Leftrightarrow r_A \leq 3 < 4 =$ nr. vect. $\Rightarrow y_1, y_2, y_3, y_4$ <u>- L.D.</u>

<u>q.e.d</u>

f) $\begin{cases} z_1 = (2,1,-1,3)^T \\ z_2 = (1,0,0,-1)^T \\ z_3 = (3,1,-1,2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^4$ <u>Dem</u> matricea comp. vectorilor,

$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & \boxed{1} \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{G-J} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_A = 2 < 3 =$ nr. vect. $\Rightarrow$ <u>z_1, z_2, z_3 - L.D.</u>

<u>Obs</u> cf. prop. 1 (C.2) $\Rightarrow z_3 = z_1 + z_2 \Leftrightarrow z_1 + z_2 - z_3 = 0_3$ → rel. de dependență liniară cu (toți) coeficienți nenuli

<u>q.e.d</u>

$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1.$

<u>Obs. (!!!)</u>
repet, modul cel mai simplu pentru a determina natura vectorilor din $\mathbb{R}^n$ este de a determina rangul matricei componentelor acestora și compararea cu numărul de vectori: (i) rang A = nr. vectori $\Rightarrow$ vectori sunt L.I.
(ii) rang A < nr. vectori $\Rightarrow$ vectori sunt L.D.

Obs: Voi prezenta câteva exemple privind L.D/L.I a altor tipuri de vectori (matrici și polinoame);

① $A_1=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}$ și $A_2=\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dem: pt. a verifica natura celor două matrici (sunt L.D. sau L.I) egalăm combinația liniară a lor cu zero:

$$\underline{\alpha_1A_1+\alpha_2A_2=O_{2,2}}\Leftrightarrow \alpha_1\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&2\\-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1&-\alpha_1\\2\alpha_1&3\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\alpha_2\\-\alpha_2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}\alpha_1&-\alpha_1+2\alpha_2\\2\alpha_1-\alpha_2&3\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\-\alpha_1+2\alpha_2=0 & \Rightarrow\alpha_2=0\\2\alpha_1-\alpha_2=0 & (A)\\3\alpha_1=0 & (A)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=0\\\alpha_2=0\end{cases}\Leftrightarrow \underline{A_1,A_2-L.I}$$

q.e.d.

② $B_1=\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}$; $B_2=\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}$; $B_3=\begin{pmatrix}2&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

Dem: Din:

$$(*)\ \underline{\alpha_1B_1+\alpha_2B_2+\alpha_3B_3=O_{2,3}}\Leftrightarrow\alpha_1\begin{pmatrix}2&-1&1\\1&2&-1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0&1&2\\-1&-1&1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2&0&3\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2\alpha_1+2\alpha_3=0\\-\alpha_1+\alpha_2=0\\\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0\\\alpha_1-\alpha_2=0\\2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0\\-\alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}\xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{met. lui}}\bar{A}=\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{matrix}\\\left(\begin{array}{ccc|c}2&0&2&0\\-1&1&0&0\\1&2&3&0\\1&-1&0&0\\2&-1&1&0\\-1&1&0&0\end{array}\right)\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{matrix}\\\left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1}&-1&0&0\\-1&1&0&0\\1&2&3&0\\2&0&2&0\\2&-1&1&0\\-1&1&0&0\end{array}\right)\end{array}\begin{matrix}(-1)&(-2)\end{matrix}\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{matrix}\\\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&0\\0&0&0&0\\0&3&3&0\\0&2&2&0\\0&\boxed{1}&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}\begin{matrix}(-2)&(-3)\end{matrix}\sim$$

(sistem de 6 ec. cu 3 nec. omogen)

$$\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{matrix}\\\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{matrix}\\\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}=\bar{A}^R_{6\times3}\Rightarrow\begin{cases}\overset{\text{var. princ.}}{\alpha_1}+\overset{\text{var. sec.}}{\alpha_3}=0\\\alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}\quad\alpha_3\overset{not}{=}\beta\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=-\beta\\\alpha_2=-\beta\\\alpha_3=\beta\in\mathbb{R}\end{cases}\Leftrightarrow S=\{(-\beta,-\beta,\beta)^T\in\mathbb{R}^3\mid\beta\in\mathbb{R}\}$$

Deci sistemul este compatibil nedeterminat (are o infinitate de soluții) deci relația (*) este satisfăcută și pt. $\underline{\alpha_i\neq0}\Leftrightarrow\underline{B_1,B_2,B_3-L.D}$

De exemplu, pt. variabila secundară $\beta=1$, avem soluția particulară $(-1,-1,1)^T$, adică

$$(*)\ -B_1-B_2+B_3=O_{2,3}\Leftrightarrow\underline{B_3=B_1+B_2}$$ (se poate observa și prin calcul direct)

q.e.d.

③ $P_1(X) = 2X+3$; $P_2(X) = -X+1 \in \mathcal{P}_1(X)$

Dem: egalăm cu vectorul (polinomul) nul, combinația liniară a celor două polinoame:

$\alpha_1 P_1(X) + \alpha_2 P_2(X) = \mathcal{O}(X) \Leftrightarrow \alpha_1(2X+3) + \alpha_2(-X+1) = \underbrace{0\cdot X + 0}_{=\text{polinomul nul}} \Leftrightarrow 2\alpha_1 X + 3\alpha_1 - \alpha_2 X + \alpha_2 = 0X + 0$

$\Leftrightarrow (2\alpha_1 - \alpha_2)X + (3\alpha_1 + \alpha_2) = 0X + 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$

$\overset{+}{\ } 5\alpha_1 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Leftrightarrow P_1(X)$ și $P_2(X)$ – L.I.

q.e.d

④ $Q_1(X) = X^2+X-1$; $Q_2(X) = 2X^2-3X+2$; $Q_3(X) = -X^2+4X-3 \in \mathcal{P}_2(X)$

Dem: Avem:

$\alpha_1 Q_1(X) + \alpha_2 Q_2(X) + \alpha_3 Q_3(X) = \mathcal{O}_2(X) \Leftrightarrow \alpha_1(X^2+X-1) + \alpha_2(2X^2-3X+2) + \alpha_3(-X^2+4X-3) = 0X^2+0X+0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)X^2 + (\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3)X + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3) = 0X^2 + 0X + 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (*) \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$

(∗) sistem pătratic omogen cu 3 ec. și 3 nec. Calculăm rangul matricii A a sist. pt. a vedea natura acestui comp. < determinat ($r_A = 3$) / nedeterminat ($r_A < 3$)

$$\begin{array}{cccc} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-5} & 5 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^R_{G-J} \Rightarrow \underline{r_A = 2 < 3} \text{ (nr. nec.)}$$

$\Downarrow$

sist. (∗) este comp. nedet. $\Leftrightarrow$

$(\exists)\ \alpha_i \neq 0$ soluție a comb. lin.

$\Leftrightarrow$ polinoamele Q_1, Q_2, Q_3 – L.D

q.e.d