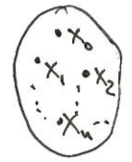
Seminar 3 — 4) Determinarea soluțiilor de bază (S.B.) ale unui sistem liniar compatibil nedeterminat cu t.e

Fie sistemul de ec. liniare ($\equiv$ sist. liniar): (3.1) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

care verifică următoarele condiții: $(*)\ \begin{cases} m < n \\ r_A = m\ (\equiv r_{\bar{A}}) \end{cases}$ → înseamnă că sist. (3.1) este un sistem compatibil nedeterminat și fără ecuații secundare (!!)

~~Def~~ **Obs:**

Deoarece am presupus că sist. lin. (3.1) + (*) este compatibil nedeterminat (⇒ are o infinitate de soluții particulare. Vom numi mulțimea (totalitatea) acestor soluții particulare, soluția generală a sistemului: $S_G = \{ X_0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \,/\, X_0$ soluție particulară a sist. (3.1)$\}$



→ $S_G \equiv$ sol. gen. a sistemului (3.1)

Def 1: Numim **formă explicită** ($\overset{not}{\equiv}$ F.E.) a sist. (3.1) care verifică condițiile (*), în raport cu variabilele principale $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$, scrierea soluției generale a sistemului în raport cu acestea (adică rezolvarea sistemului în raport cu variabilele principale $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}$)

Obs: i) recunoaștele $\begin{cases} x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_m} \to \text{variabile principale sau } \underline{\text{bazice}} \\ \text{restul } x_{i_{m+1}}, \dots, x_{i_n} \to \text{variabile secundare sau } \underline{\text{nebazice}} \end{cases}$

ii) nr. formelor explicite ale lui (3.1) + (*) este: (3.2) $1 \leq \text{nr. F.E} \leq C_n^m$ $\left(C_n^m \overset{def}{=} \frac{n!}{m!(n-m)!} \right)$

iii) not: $X = (x_1, x_2, \dots, x_{i_1}, \dots, x_{i_2}, \dots, x_{i_m}, \dots, x_n) \to$ F.E.

Def 2: Numim **soluție de bază** ($\overset{not}{\equiv}$ S.B.) a sist. lin. (3.1) + (*), o soluție particulară obținută dintr-o formă explicită prin egalarea cu zero a variabilelor secundare

Obs: i) $\bar{X} = (0, 0, \dots, 0, \bar{x}_{i_1}, 0, \dots, 0, \bar{x}_{i_2}, 0, \dots, 0, \bar{x}_{i_m}, 0, \dots, 0) \to$ S.B

variabile principale

variabile secundare egale cu zero

ii) avem: (3.3) $1 \leq \text{nr. S.B} \leq \text{nr. F.E} \leq C_n^m$

iii) se poate ca forme explicite distincte ($X_1 \neq X_2$) sol. de bază coresp. să coincidă ($\bar{X}_1 = \bar{X}_2$)

Def 3 O soluție de bază a (3.1) + (*) se numește:

a) **admisibilă** (S.B.A.), dacă are toate componentele (principale) nenegative (≥ 0); în caz contrar (dacă ($\exists$) componente (princip.) negative (< 0)) se numește **neadmisibilă** (S.B.N)

b) **nedegenerată** (S.B.N_d), dacă are toate componentele principale nenule ($\neq 0$); în caz contrar (dacă ($\exists$) comp. principale nule ($= 0$)) soluția se numește **degenerată**

Obs: **ordin de degenerare** al unei S.B = nr. de comp. princip. egale cu zero

Ex: Determinați toate (F.E) și (S.B) corespunzătoare, pentru următoarele sist. liniare:

ⓐ $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5 \\ -x_1-x_2+2x_3=-2 \end{cases} \Rightarrow \bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right)$

Dem: Obs: evident condițiile (*) sunt verificate: $\begin{cases} m=2<3=n \\ r_A=2=m \end{cases}$. Nr. max. de FE resp. S.B

este $C_3^2=3$, corespunzător următoarelor cazuri:

	v. princ.	v. sec.
1)	x_1,x_2	x_3
2)	x_1,x_3	x_2
3)	x_2,x_3	x_1

i) x_1,x_2 - variabile principale

$$\begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array}$$

v.p v.s

$$\overset{(F.E)_1}{\Longrightarrow} \begin{cases} x_1=-1+3\alpha \\ x_2=3-\alpha \end{cases} > \text{v.p} \quad x_3=\alpha\in\mathbb{R} - \text{v.s} \quad \underset{\alpha=0}{\Longrightarrow} (S.B)_1 \begin{cases} \bar{x}_1=-1 \\ \bar{x}_2=3 \\ \bar{x}_3=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$X_1=(-1+3\alpha,\,3-\alpha,\,\alpha)^T \xrightarrow[\alpha=0]{} \bar{X}_1=(-1,3,0)^T\in\mathbb{R}^3$$

→ S.B.N.Nd (sol. de bază neadmisibilă și nedegenerată)

ii) x_1,x_3 - variabile principale

$$\begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow X_2=(8-3\alpha,\,\alpha,\,3-\alpha)^T \underset{\alpha=0}{\Rightarrow} \bar{X}_2=(8,0,3)^T$$

- sol. de bază admisibilă și nedegenerată (SBANd)

iii) x_2,x_3 - variabile principale

$$\begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \boxed{2} & -1 & 5 \\ -1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{2} \;\; \cdot\frac{1}{2} \\ + \end{array} \sim \begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1/2 & 1 & -1/2 & 5/2 \\ -1/2 & 0 & \boxed{3/2} & 1/2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} + \\ \cdot 2/3 \;\; \cdot\frac{1}{3} \end{array} \sim \begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1 & 0 & 8/3 \\ -1/3 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow X_3=\left(\alpha,\,\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\alpha,\,\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\alpha\right)^T \overset{\alpha=0}{\Longrightarrow}$$

$\Rightarrow \bar{X}_1=\left(0,\frac{8}{3},\frac{1}{3}\right)^T$ → S.B.A.Nd (sol. de bază admisibilă, nedegenerată)

Obs: putem să procedăm și astfel (folosind ca pivot inițial pe „-1"):

$$\begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 5 \\ -1 & \boxed{-1} & 2 & -2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ /(-1) \;\; \cdot 2 \end{array} \sim \begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & \boxed{3} & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \cdot\frac{1}{3} \;\; \cdot\frac{2}{3} \\ + \end{array} \sim \begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} -1/3 & 0 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 0 & 8/3 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1/3 & 1 & 0 & 8/3 \\ -1/3 & 0 & 1 & 1/3 \end{array}\right) \end{array}$$

, deci am obținut același rezultat (dar cu calcule „nițel" mai simple!).

ⓑ $\begin{cases} x_1-x_2+2x_3+2x_4=-3 \\ x_1-2x_2+x_4=-6 \end{cases}$ Obs avem $\begin{cases} m=2 \\ n=4 \end{cases}$ și $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; evident cond. (*) $\begin{cases} m<n \\ r_A=m=2 \end{cases}$

Dem: sunt verificate. Nr. max. de F.E (S.B) este $C_4^2=\frac{4!}{2!\,(4-2)!}=6$

i) x_1,x_2 − v.p (respectiv x_3,x_4 − v.s)

$$\begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \\ \bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} /(-1) \\ + \end{array} \sim \begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & \boxed{-1} & -2 & -1 & -3 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} + \\ /(-1)/(-1) \end{array} \sim \begin{array}{c} \quad x_1 \;\; x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \end{array} \xrightarrow[x_4=\beta]{x_3=\alpha} X_1=(-4\alpha-3\beta,\,3-2\alpha-\beta,\,\alpha,\,\beta)^T$$

→ prima formă explicită corespunzătoare var. princ. x_1,x_2

$\overset{\alpha=\beta=0}{\Longrightarrow} \bar{X}_1=(0,3,0,0)^T\in\mathbb{R}^4$ − SBAD (sol. de bază admisibilă (toate componentele ≥ 0) și degenerată (există o comp. princ. egală cu zero → $x_1=0$))

ii) x_2, x_4 - v.p (și x_1, x_3 - v.s.)

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{-1} & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \end{array} \Big| (-1) \Big| (-2) \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -2 & -2 & 3 \\ -3 & 0 & -4 & \boxed{-3} & 0 \end{array}\right) \end{array} \Big| \left(-\tfrac{1}{3}\right) \Big| \left(-\tfrac{2}{3}\right) \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2/3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 4/3 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \xRightarrow[x_3=\beta]{x_1=\alpha}$$

$$\Rightarrow X_2 = \left(\alpha,\ 3-\alpha-\tfrac{2}{3}\beta,\ \beta,\ -\alpha-\tfrac{4}{3}\beta\right)^T \to (F.E)_2 \xRightarrow{\alpha=\beta=0} \bar{X}_2 = (0, 3, 0, 0)^T \to \text{S.B.A.D.}$$

Obs: Formele explicite sunt diferite ($X_1 \neq X_2$) dar sol. de bază corespunzătoare coincid ($\bar{X}_1 =$

iii) x_3, x_4 - v.p (x_1, x_2 - v.s)

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \boxed{2} & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \end{array} \Big| \cdot \tfrac{1}{2} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1/2 & -1/2 & 1 & 1 & -3/2 \\ -1 & -2 & 0 & \boxed{1} & -6 \end{array}\right) \end{array} \Big| \cdot(-1) \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 3/2 & 3/2 & 1 & 0 & 9/2 \\ -1 & -2 & 0 & 1 & -6 \end{array}\right) \end{array} \xRightarrow[x_2=\beta]{x_1=\alpha} X_3 = \left(\alpha,\ \beta,\ \tfrac{9}{2}-\tfrac{3}{2}\alpha-\tfrac{3}{2}\beta,\ -6+\alpha+\right.$$

$$\xRightarrow{\alpha=\beta=0} \bar{X}_3 = \left(0, 0, \tfrac{9}{2}, -6\right)^T \to \text{S.B.N.N}_d$$ (sol. de bază neadmisibilă și nedegenerată)

Obs: determinați voi FE și SB în celelalte 3 (posibile) cazuri.

2) $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 = -1 \\ -x_1 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -3 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Obs: cond. (*) $\begin{cases} m = 3 < 5 = n \\ r_A = 3\ (=m) \end{cases}$ → trebuie verificat prin calcul

ii) ($\exists$) cel mult $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!\,2!} = 10$ F.E (S.B)

Dem: voi determina doar una din cele (maxim) 10 S.B. Determinați voi alte S.B.

i) x_2, x_3, x_5 - v.p (și x_1, x_4 - v.s.)

$$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & \boxed{1} & -1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & \boxed{1} & 1 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Big| \cdot(-1) \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_4 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 5 & 1 & 0 & -1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 0 & -2 & \boxed{-1} & -2 \end{array}\right) \end{array} \Big| \cdot(-1) \Big| \cdot(-2) \Big| \cdot(-1) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 9 & 1 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 11 & 0 & 1 & 5 & 0 & 6 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \end{array} \xRightarrow[x_4=\beta]{x_1=\alpha} X_1 = (\alpha,\ 7-9\alpha-\beta,\ 6-11\alpha-5\beta,\ \beta,\ 2-4\alpha-2\beta)^T \in \mathbb{R}^5$$

- formă explicită coresp. v.princ.: x_2, x_3, x_5

$$\Downarrow$$

$$\bar{X}_1 = (0, 7, 6, 0, 2)^T \in \mathbb{R}^5 \to \text{S.B.A.N}_d$$ (sol. de bază admis. și nedeg.)

Obs: corespunde sistemului:

$$\begin{cases} 9x_1 + x_2 \qquad + x_4 = 7 \\ 11x_1 \qquad + x_3 + 5x_4 = 6 \\ 4x_1 \qquad\qquad + 2x_4 + x_5 = 2 \end{cases} \quad \overset{x_1=\alpha}{\underset{x_4=\beta}{\Longleftrightarrow}} \quad \begin{cases} x_2 = 7 - 9\alpha - \beta \\ x_3 = 6 - 11\alpha - 5\beta \\ x_5 = 2 - 4\alpha - 2\beta \\ \hline x_1 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

se trec cu semn schimbat în membrul ~~stâng~~ drept al egalității

și se atribuie valori reale oarecare variabilelor secundare: $\begin{cases} x_1 = \alpha \in \mathbb{R} \\ x_4 = \beta \in \mathbb{R} \end{cases}$

q.e.d.

CAP. I: ELEMENTE DE ALGEBRĂ LINIARĂ

I.1) Dependență și independență liniară a vectorilor

Noțiuni teoretice:

i) Fie vectorii $u_1, u_2, \dots, u_m \in V$. Dacă, din combinația liniară a lor:

(*) $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \dots + \alpha_m u_m = 0_V$ $\begin{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0, \text{ atunci } u_1, u_2, \dots, u_m \text{ (L.i)} \\ \not\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0 \ ((\exists)\alpha_i \neq 0), \text{ atunci } u_1, u_2, \dots, u_m \text{ (L.D)} \end{cases}$

ii) Dacă $V \equiv \mathbb{R}^n$, fie $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ matricea componentelor vectorilor $u_1, u_2, \dots, u_m$ (scrise pe coloane). Atunci, dacă: $\begin{cases} \text{a) } \operatorname{rang} A = m \text{ (=nr.vect.)} \Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m \text{ (L.i)} \\ \text{b) } \operatorname{rang} A < m \text{ (nr.vect.)} \Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m \text{ (L.D)} \end{cases}$

Obs: $\begin{cases} \text{a) dacă } m > n \text{ (nr.vectorilor} > \dim \mathbb{R}^n) \Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m \text{ (L.D)} \\ \text{b) dacă } m \leq n \text{ (nr.vect} \leq \dim \mathbb{R}^n) \Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m < \begin{matrix} \text{(L.D)} \\ \text{(L.i)} \end{matrix} \ (?) \end{cases}$

Exemple: Să se determine natura următoarelor mulțimi (seturi) de vectori din $\mathbb{R}^n$:

a) $\begin{cases} u_1 = (1,-1)^T \\ u_2 = (-2,3)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^2 \quad \xrightarrow{\text{dem}} u_1, u_2$ sunt L.i

Dem:

a1) cu definiția generală.

Fie: $\underline{\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 = 0_2} \Leftrightarrow \alpha_1 (1,-1)^T + \alpha_2 (-2,3)^T = (0,0)^T \Leftrightarrow (\alpha_1, -\alpha_1)^T + (-2\alpha_2, 3\alpha_2)^T = (0,0)^T \Leftrightarrow (\alpha_1 - 2\alpha_2, -\alpha_1 + 3\alpha_2)^T = (0,0)^T$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{cu met. lui Gauss}]{\text{rezolvăm}} : \bar{A} = \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \\ \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{array}\right) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ u_1 & u_2 & 0_2 \end{array} \sim \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) \end{array} \cdot 2 \sim \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \underline{\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}} \ (*) \Rightarrow \underline{u_1, u_2 - \text{L.i}}$

a2) cu matricea componentelor

Vom determina rangul matricei componentelor vectorilor u_1, u_2 (și îl vom compara cu nr. lor)

$A = \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{G-J} \Rightarrow r_A = 2 = \text{nr.vect.} \Rightarrow \underline{u_1, u_2 - \text{L.i.}}$

a3) cu prop 1 a vect. L.D + (m.r.a)

pp. că vectorii u_1, u_2 sunt L.D $\overset{(P_1)}{\Leftrightarrow} (\exists)\alpha \in \mathbb{R}$ a.î. $u_1 = \alpha u_2 \Leftrightarrow (1,-2)^T = \alpha(-2,3)^T \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha = 1 \\ 3\alpha = -2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \alpha = -\frac{2}{3} \end{cases} > (F) \Leftrightarrow$ presupunerea făcută este falsă $\Leftrightarrow$ $\underline{\text{vect. } u_1, u_2 \text{ sunt L.i}}$

q.e.d.

Obs: am demonstrat prin 3 metode diferite pentru a vedea asemănările respectiv deosebirile dintre metode; uzual în cazul vectorilor din $\mathbb{R}^n$ (cum este cazul și aici) se aplică metoda a2), care este cea mai directă.

b) $\begin{cases} v_1 = (1,0,-1)^T \\ v_2 = (-1,-1,2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{dem} v_1, v_2 - L.i$

Dem: b_1) cu definiția:

Fie: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0_3 \Leftrightarrow \alpha_1 (1,0,-1)^T + \alpha_2(-1,-1,2)^T = (0,0,0)^T \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \text{ (verificată de } \alpha_1 = \alpha_2 = 0) \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 0 \Rightarrow v_1, v_2 - L.i$

b_2) cu matricea componentelor:

Avem: $A = \begin{array}{c} \begin{matrix} v_1 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 \\ 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} /(-1)/(-1)/ \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv A_{G-J} \Rightarrow r_A = 2 = \text{nr. vectorilor} \Rightarrow v_1, v_2 - L.i$

b_3) cu prop. 1 a vect. L.D + (m.r.a)

Pp. v_1 și v_2 - L.D $\Leftrightarrow (\exists)\ \beta \in \mathbb{R}$ a.î.: $v_2 = \beta v_1 \Leftrightarrow (-1,-1,2)^T = \beta(1,0,-1)^T \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ 0 = -1 \text{ (F)} \\ -\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$ pp. făcută este falsă $\Leftrightarrow v_1, v_2 - L.i$

q.e.d

c) $\begin{cases} w_1 = (1,-1,0)^T \\ w_2 = (-2,3,-1)^T \\ w_3 = (0,-1,2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{dem} w_1, w_2, w_3 - L.i$

Dem: c_1) cu def.

Fie: $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \alpha_3 w_3 = 0_3 \Leftrightarrow \alpha_1 (1,-1,0)^T + \alpha_2(-2,3,-1)^T + \alpha_3(0,-1,2)^T = (0,0,0)^T \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$

rezolvăm cu met. lui Gauss

$\bar{A} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \\ \begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ w_1 & w_2 & w_3 & 0_3 \end{matrix} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) /\cdot 2/ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right) +/\cdot 2 \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \xRightarrow{def.} w_1, w_2, w_3 - L.i$

c_2) cu matricea componentelor

determinăm rangul matricii componentelor: $A = \begin{array}{c} \begin{matrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \sim \ldots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv A_{G-J} \Rightarrow r_A = 3 = \text{nr. vect.} \Leftrightarrow w_1, w_2, w_3 - L.i$

vezi calculul de mai sus

c_3) cu prop. 1 + m.r.a

pp. că $w_1, w_2, w_3 - L.D \Leftrightarrow (\exists)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î.: $w_1 = \alpha w_2 + \beta w_3 \Leftrightarrow (1,-1,0)^T = \alpha(-2,3,-1)^T + \beta(0,-1,2)^T$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \\ 3\alpha - \beta = -1 \\ 2\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 0 = -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} = -1 \text{ (F)} \Rightarrow$ pp. făcută este falsă $\Leftrightarrow w_1, w_2, w_3 - L.i$

q.e.d.

d) $\begin{cases} x_1 = (1,-1,-2)^T \\ x_2 = (2,-1,-5)^T \\ x_3 = (0,-1,1)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3 \xrightarrow{dem} x_1, x_2, x_3 - L.D \ \{ x_3 = 2x_1 - x_2 \rightarrow$ relație de dependență lin. $\}$

$\Updownarrow$

$2x_1 - x_2 - x_3 = 0_3$

Dem: Avem: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0_3 \iff \alpha_1 (1,-1,-2)^T + \alpha_2 (2,-1,-5)^T + \alpha_3 (0,-1,1)^T = (0,0,0)^T$

$\iff (*) \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 - 5\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$ - sistem. lin. omogen, deci este compatibil (are soluție)

Fie $A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \end{array} \end{array}$ - matricea coeficienților sist. lin. $(*)$ $\equiv$ matricea componentelor vectorilor x_1, x_2, x_3

Calculăm r_A prin t.e: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -5 & \boxed{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 0 \\ -3 & -6 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot 3 / \cdot 2 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{G-J}$

$\Rightarrow r_A = 2 < 3 =$ nr. ~~vect~~ necun. (vectorilor) $\Rightarrow$ sist. $(*)$ compatibil nedeterminat $\iff$ are o infinitate de soluții $\iff (\exists)\ \alpha_i \neq 0,\ i=\overline{1,3} \iff$ vectorii x_1, x_2, x_3 - L.D. $\iff (\exists)\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a.î.

$x_2 = \alpha x_1 + \beta x_3$ (de exemplu) $\iff (2,-1,-5)^T = \alpha (1,-1,-2)^T + \beta (0,-1,1)^T \iff$

$\iff (**) \begin{cases} \alpha = 2 \\ -\alpha - \beta = -1 \\ -2\alpha + \beta = -5 \end{cases} \Rightarrow \beta = -1$; $-2\alpha + \beta = -5$ → este verif. pt. $\alpha = 2, \beta = -1$

$\iff x_2 = 2x_1 - x_3$ (rel. de depend. liniară)

$2x_1 - x_2 - x_3 = 0_3 \quad \left(\overset{(!)}{\iff} \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = -1 \end{cases} \right)$

q.e.d.

e) $\begin{cases} y_1 = (2,3,-1)^T \\ y_2 = (1,2,3)^T \\ y_3 = (-2,-2,1)^T \\ y_4 = (1,1,2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3$

Dem: $A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}) \Rightarrow r_A \leq \min\{3,4\} = 3$

$\iff r_A \leq 3 < 4 =$ nr. vect. $\Rightarrow y_1, y_2, y_3, y_4$ - L.D.

q.e.d

f) $\begin{cases} z_1 = (2,1,-1,3)^T \\ z_2 = (1,0,0,-1)^T \\ z_3 = (3,1,-1,2)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^4$

Dem matricea comp. vectorilor,

$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} z_1 & z_2 & z_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & \boxed{1} & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & \boxed{1} \\ -1 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-3) / (-5) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv A_{G-J} \Rightarrow$

$\Rightarrow r_A = 2 < 3 =$ nr. vect. $\Rightarrow z_1, z_2, z_3$ - L.D

Obs cf. prop. 1 (C.2) $\Rightarrow z_3 = z_1 + z_2 \iff z_1 + z_2 - z_3 = 0_3$ → rel. de dependență liniară cu (toți) coeficienții nenuli $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -1$.

q.e.d

Obs: (!!!)

repet, modul cel mai simplu pentru a determina natura vectorilor din $\mathbb{R}^4$ este de a determina rangul matricei componentelor acestora și compararea cu numărul de vectori: $\begin{cases} \text{i) rang } A = \text{nr. vectori} \Rightarrow \text{vectorii sunt L.I.} \\ \text{ii) rang } A < \text{nr. vectori} \Rightarrow \text{vectorii sunt L.D.} \end{cases}$

Obs: Voi prezenta câteva exemple privind L.D/L.i a altor tipuri de vectori (matrici și polinoame);

① $A_1=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ și $A_2=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Dem: ptr. a verifica natura celor două matrici (sunt L.D. sau L.i) egalăm combinația liniară a lor cu zero:

$$\underline{\alpha_1A_1+\alpha_2A_2=O_{2,2}}\iff\alpha_1\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\alpha_1\\ 2\alpha_1 & 3\alpha_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 2\alpha_2\\ -\alpha_2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\iff\begin{pmatrix}\alpha_1 & -\alpha_1+2\alpha_2\\ 2\alpha_1-\alpha_2 & 3\alpha_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}\alpha_1=0\\ -\alpha_1+2\alpha_2=0 & \Rightarrow\alpha_2=0\\ 2\alpha_1-\alpha_2=0 & (A)\\ 3\alpha_1=0 & (A)\end{cases}\iff\begin{cases}\alpha_1=0\\ \alpha_2=0\end{cases}\iff\underline{A_1,A_2-\text{L.i}}$$

q.e.d

② $B_1=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$; $B_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}$; $B_3=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

Dem: Din:

$$(*)\ \underline{\alpha_1B_1+\alpha_2B_2+\alpha_3B_3=O_{2,3}}\iff\alpha_1\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\iff$$

$$\begin{cases}2\alpha_1+2\alpha_3=0\\ -\alpha_1+\alpha_2=0\\ \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3=0\\ \alpha_1-\alpha_2=0\\ 2\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0\\ -\alpha_1+\alpha_2=0\end{cases}\ \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{met. lui}}\ \bar{A}=\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \end{matrix}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}2 & 0 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \end{matrix}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}\boxed{1} & -1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\end{array}\begin{matrix}|(-1)|(-2)|\end{matrix}\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \end{matrix}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 3 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 0\\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\end{array}\begin{matrix}|(-2)|(-3)|\end{matrix}\sim$$

(sistem de 6 ec. cu 3 nec. omogen)

$$\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \end{matrix}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{matrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \end{matrix}\\ \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\end{array}=\bar{A}^R_{G-J}\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1+\alpha_3=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}\quad \alpha_3\overset{\text{not}}{=}\beta\in\mathbb{R}\iff$$

v.princ. (α_1, α_2), v.sec. (α_3)

$$\iff\begin{cases}\alpha_1=-\beta\\ \alpha_2=-\beta\\ \alpha_3=\beta\in\mathbb{R}\end{cases}\iff S=\{(-\beta,-\beta,\beta)^T\in\mathbb{R}^3\mid\beta\in\mathbb{R}\}$$

Deci sistemul este compatibil nedeterminat (are o infinitate de soluții) deci relația (*) este satisfăcută și ptr $\underline{\alpha_i\neq0}\iff\underline{B_1,B_2,B_3-\text{L.D}}$

De exemplu, ptr. variabila secundară $\beta=1$, avem soluția particulară $(-1,-1,1)^T$, adică

$(*)\Rightarrow -B_1-B_2+B_3=O_{2,3}\iff\underline{B_3=B_1+B_2}$ (se poate observa și prin calcul direct)

q.e.d.

(3) $P_1(X) = 2X+3$; $P_2(X) = -X+1 \in \mathcal{P}_1(X)$

Dem: egalăm cu vectorul (polinomul) nul, combinația liniară a celor două polinoame:

$$\alpha_1 P_1(X) + \alpha_2 P_2(X) = O(X) \iff \alpha_1(2X+3) + \alpha_2(-X+1) = \underbrace{0\cdot X + 0}_{\equiv O(\text{polinomul nul})} \iff 2\alpha_1 X + 3\alpha_1 - \alpha_2 X + \alpha_2 = 0\cdot X + 0$$

$$\iff (2\alpha_1 - \alpha_2)X + (3\alpha_1 + \alpha_2) = 0X + 0 \iff \begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

"+" $5\alpha_1 = 0 \iff \alpha_1 = 0$ $\Rightarrow \alpha_2 = 0 \iff P_1(X)$ și $P_2(X)$ – L.I

q.e.d

(4) $Q_1(X) = X^2+X-1$; $Q_2(X) = 2X^2-3X+2$; $Q_3(X) = -X^2+4X-3 \in \mathcal{P}_2(X)$

Dem: Avem:

$$\alpha_1 Q_1(X) + \alpha_2 Q_2(X) + \alpha_3 Q_3(X) = O_2(X) \iff \alpha_1(X^2+X-1) + \alpha_2(2X^2-3X+2) + \alpha_3(-X^2+4X-3) = 0\cdot X^2 + 0\cdot X + 0 \iff$$

$$\iff (\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3)X^2 + (\alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3)X + (-\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3) = 0\cdot X^2 + 0\cdot X + 0 \iff$$

$$\iff (*) \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

→ sistem pătratic omogen cu 3 ec și 3 nec. Calculăm rangul matricii A a sist. pt. a vedea natura acestuia comp. < determinat ($r_A = 3$), nedeterminat ($r_A < 3$)

$$\begin{array}{cccc} & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{-5} & 5 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \cdot\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot\frac{2}{5} \cdot\frac{4}{5} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A^R_{G\text{-}J} \Rightarrow r_A = 2 < 3 \text{ (nr. nec.)}$$

$\Downarrow$

sist. (*) este comp. nedet. $\iff$ $(\exists)\, \alpha_i \neq 0$ soluție a comb. lin. $\iff$ polinoamele Q_1, Q_2, Q_3 – L.D

q.e.d