Curs 2 Caz particular „$\mathbb{R}^n$" (L.D. și L.i a vectorilor din $\mathbb{R}^n$)

Fie spațiul liniar $V \equiv \mathbb{R}^n$ și fie vectorii oarecare:

$$(2.1)\begin{cases} u_1=(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n})^T \\ u_2=(a_{21},a_{22},\dots,a_{2n})^T \\ \dots\dots\dots \\ u_m=(a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn})^T \end{cases} \in \mathbb{R}^n$$

cunoscuți. (componentele lor a_{ij} sunt cunoscute)

Pentru a determina natura vectorilor (dacă sunt L.D. sau L.i.), impunem ca combinația liniară a lor să fie egală cu vectorul nul 0_n, adică:

(1) $\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_mu_m=0_n$ (scalarii $\alpha_i, i=\overline{1,m}$ sunt necunoscuți)

Înlocuind expresiile vectorilor din (2.1) în condiția (1) obținem:

(2) $\alpha_1(a_{11},a_{12},\dots,a_{1n})^T+\alpha_2(a_{21},a_{22},\dots,a_{2n})^T+\dots+\alpha_m(a_{m1},a_{m2},\dots,a_{mn})^T=(0,0,\dots,0)^T \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2.2)\begin{cases} a_{11}\alpha_1+a_{21}\alpha_2+\dots+\alpha_m a_{m1}=0 \\ a_{12}\alpha_1+a_{22}\alpha_2+\dots+\alpha_m a_{m2}=0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}\alpha_1+a_{2n}\alpha_2+\dots+\alpha_m a_{mn}=0 \end{cases}$$

→ sistem liniar omogen cu „n" ecuații, „m" necunoscute

Obs: știm că orice sistem liniar omogen (termenii liberi $=0$) este compatibil (determinat sau nedeterminat), având întotdeauna măcar o soluție, soluția banală: $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=0$

Fie matricea $A=(a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n}\\ j=\overline{1,m}}}$ – matricea coeficienților sistemului (2.2), adică:

$$(2.3)\ A=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_m \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ u_1 & u_2 & \dots & u_m \end{array} \end{array} \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$$

→ matricea este formată din componentele vectorilor $u_1,u_2,\dots,u_m$ scrise pe coloane (cf. 2.1)

Cf. teoriei rezolvării sistemelor liniare de la liceu (vezi seminarul 2), dacă:

a) $r_A(=r_{\bar{A}})=m$ (= nr. de necun.) $\Rightarrow$ sist. (2.2) este compatibil determinat, cu soluția unică soluția banală: $\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_m=0$

În acest caz din (1) $\alpha_1u_1+\dots+\alpha_mu_m=0_n \Rightarrow \alpha_1=\dots=\alpha_m=0 \Leftrightarrow$ vectorii $u_1,u_2,\dots,u_m$ – L.i

b) $r_A(=r_{\bar{A}})<m$ (nr. de nec.) $\Rightarrow$ sist. (2.2) este compatibil nedeterminat, deci are o infinitate de soluții $\alpha_i\in\mathbb{R}$ (printre ele și cea banală)

În acest caz, cond. (1) $\Rightarrow (\exists)\ \alpha_i\in\mathbb{R}, i=\overline{1,m}$ nu toți nuli $\Leftrightarrow$ vectorii $u_1,u_2,\dots,u_m$ – L.D.

Obs: deci pentru a determina natura (LD sau Li) vectorilor $u_1,u_2,\dots,u_m$ nu trebuie să rezolvăm efectiv sist. lin. omogen (2.2) ci doar să determinăm natura sa (comp. deter. sau compat. nedeterm.) $\Leftrightarrow$ stabilirea rangului matricii componentelor A și compararea acestuia cu nr. de vectori „m".

Concluzie:

Pentru a determina natura unui set de vectori $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$, cel mai simplu și direct mod de lucru este următorul:

1) scriem matricea $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ (cu „n" linii și „m" coloane) corespunzătoare setului de vectori (componentele vectorilor se scriu pe coloană; un vector = o coloană)
2) determinăm (cu T.E.) rangul matricii A ($\operatorname{rang} A \overset{not}{=} r_A = r$)
3) dacă: $\begin{cases} a) \operatorname{rang} A = m \ (= \text{nr. de vectori}) \Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m \text{ sunt L.i.} \\ b) \operatorname{rang} A < m \ (= \text{nr. de vectori}) \Rightarrow u_1, u_2, \dots, u_m \text{ sunt L.D.} \end{cases}$

Ex: Stabiliți natura următoarelor mulțimi de vectori:

a) $\begin{cases} u_1 = (1, 0, -1)^T \\ u_2 = (-1, 1, 2)^T \in \mathbb{R}^3 \\ u_3 = (0, -1, -2)^T \end{cases} \xrightarrow[\text{matricea componentelor vectorilor}]{\text{asociem}} A = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \end{array}$

Dem:

Determinăm r_A cu T.E.:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} /\cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} /(-1)/(-1)/(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_{B-J} \Rightarrow r_A = 3 = \text{nr. vect.}$$

$\Downarrow$

u_1, u_2, u_3 – L.i

Obs:

Aplicând def. generală pt. a studia natura vectorilor (L.D sau L.i) impunem condiția:

$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 = 0_3 \Leftrightarrow \alpha_1 (1,0,-1)^T + \alpha_2(-1,1,2)^T + \alpha_3(0,-1,-2)^T = (0,0,0)^T \Leftrightarrow$

$$(*) \begin{cases} \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \ /\cdot(-2) \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \overset{+}{\Longrightarrow} -\alpha_1 = 0 \ (\Leftrightarrow \alpha_1 = 0) \Rightarrow \alpha_2 = 0 \Rightarrow \alpha_3 = 0 \overset{(1.3)}{\Leftrightarrow} u_1, u_2, u_3 \text{ – L.i}$$

$\downarrow$

matricea sist. (*) este matricea A; deoarece $r_A = 3 \Leftrightarrow \det A \neq 0 \Leftrightarrow$ sist. comp. determinat cu soluția unică $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$

b) $\begin{cases} v_1 = (1, -1, -1)^T \\ v_2 = (1, -2, 1)^T \in \mathbb{R}^3 \\ v_3 = (2, -3, 0)^T \end{cases} \longrightarrow A = \begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{-1} & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} /(-1) /\cdot 2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_{B-J}$

$\Downarrow$

$r_A = 2 < 3 = \text{nr. vect.}$

$\Updownarrow$

v_1, v_2, v_3 – L.D

Dem: $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0_3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha_1 (1,-1,-1)^T + \alpha_2 (1,-2,1)^T + \alpha_3 (2,-3,0)^T = (0,0,0)^T \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 & \text{ec. princ.} \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 & \text{ec. princ.} \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 & \text{ec. sec.} \end{cases} \longrightarrow A = \begin{array}{c} \begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \text{ cu } r_A = 2$$

cu $r_A = 2$: 2 ec. princ.; 2 variab. princ. (x_1, x_2); sist. comp. nedeterminat (o infinitate de soluții)

$\Downarrow \alpha_3 \overset{not}{=} \beta$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = -2\beta \\ -\alpha_1 - 2\alpha_2 = 3\beta \end{cases} \overset{+}{\Longrightarrow} -\alpha_2 = \beta \Leftrightarrow \alpha_2 = -\beta, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = -2\beta \Rightarrow \alpha_1 = -2\beta - \alpha_2 = -2\beta + \beta = -\beta$$

Deci mulț. soluțiilor sist. este: $S = \{(-\beta, -\beta, \beta) / \beta \in \mathbb{R}\} \xrightarrow[\beta = 1]{\text{ex.}} \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 1 \end{cases} \to$ soluție particulară

Avem atunci: $-v_1 - v_2 + v_3 = 0_3 \Leftrightarrow v_3 = v_1 + v_2 \to$ rel. de dependență liniară $\Leftrightarrow v_1, v_2, v_3$ – L.D

I.3) Baze de vectori. Coordonatele unui vector într-o bază

Def: Fie $(\mathcal{V},+,\cdot)$ un spațiu liniar oarecare și $A=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}\subsetneq\mathcal{V}$. Spunem că mulțimea A formează un <u>sistem de generatori</u> (S.G.) al spațiului liniar $\mathcal{V}$, dacă orice vector $w\in\mathcal{V}$ se scrie ca o combinație liniară de vectorii din A, adică:

(2.4) $A=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$ – S.G. $\Longleftrightarrow (\forall)\, w\in\mathcal{V},\ (\exists)\, \alpha_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,m}$ a.î.: $\underline{w=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_mu_m}$

$\downarrow$ vectorul w este "generat" de vectorii $u_1,u_2,\ldots,u_m$

Obs:

i) un spațiu liniar $\mathcal{V}$ are o infinitate de sisteme de generatori (diferite între ele măcar printr-un singur vector);

ii) două sisteme de generatori pot avea
- $\rightarrow$ același număr de vectori
- $\rightarrow$ un număr diferit de vectori

Ex: $\left.\begin{cases}A=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}\\ B=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\}\end{cases}\right\}$ S.G cu $m=p$ sau $m\neq p$

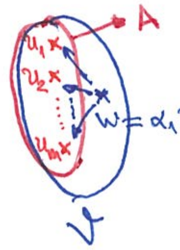
iii) vectorii care formează un S.G. pot fi L.D sau L.i

iv) într-un sistem de generatori fixat, <u>format din vectori L.D</u>, un vector oarecare al spațiului liniar, are o infinitate de descompuneri diferite:

$$w=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots+\alpha_mu_m=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\ldots+\beta_mu_m=\delta_1u_1+\delta_2u_2+\ldots+\delta_mu_m=\ldots\ldots$$

cu scalarii $\alpha_i,\beta_i,\delta_i,\ldots\in\mathbb{R}$ și $\alpha_i\neq\beta_i\neq\delta_i\neq\ldots$, $i=\overline{1,m}$

v) dacă $A=\{u_1,u_2,\ldots,u_m\}$ – S.G, notăm: $[A]=\mathcal{V}$ $\rightarrow$ mulț. A generează sp. lin $\mathcal{V}$



$w=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\ldots\alpha_mu_m$ (orice vector $w\in\mathcal{V}$ se scrie ca o comb. lin. de vectorii din A)

Def: O mulțime de vectori $B=\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}\subset(\mathcal{V},+,\cdot)$ se numește <u>bază</u> în sp. lin. $\mathcal{V}$ (not: $B\leq\mathcal{V}$) dacă:

(2.5) $\begin{cases}\text{(i) } B-\text{L.i.}\\ \text{(ii) } B-\text{S.G} \overset{(2.4)}{\Longleftrightarrow} (\forall)\, w\in\mathcal{V},\ (\exists)\,\lambda_i\in\mathbb{R},\ i=\overline{1,n} \text{ a.î.: (2.6) } w=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\ldots+\lambda_nu_n\end{cases}$

Obs:

i) relația (2.6) se numește: descompunerea vectorului „w" în baza B; <u>scalarii</u> λ_i, $i=\overline{1,n}$ din (2.6) se numesc coordonatele vectorului „w" în baza B.

ii) relația (2.6) poate fi scrisă și folosind următoarele notații:

(2.6') $\begin{cases}w_B=[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]\\ \text{sau}\\ w=[\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n]_B\end{cases}$ $\rightarrow$ coordonatele vectorului „w" în baza B sunt $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ {adică w are descompunerea (2.6)}

(4)

iii) putem da două definiții echivalente ale bazei:

Def 1: $B \leq \mathcal{V} \Leftrightarrow B$ - S.G. minimal (mulț. B este o bază a sp. lin $\mathcal{V} \Leftrightarrow B$ este un S.G. minimal (cu un nr. minim de vectori)

Obs: condiția ca B să conțină un nr. minim de vectori $\Leftrightarrow B$ - L.i

Def 2: $B \leq \mathcal{V} \Leftrightarrow B$ - L.i. maximal (mulț. B este bază în sp. lin $\mathcal{V} \Leftrightarrow B$ este o mulț. L.i care conține un nr. maxim posibil de vectori)

Obs: cond. ca B să conțină un nr. max de vectori L.i $\Leftrightarrow B$ este S.G.

iv) din orice sistem de generatori A se poate extrage minim o bază $B \subset A$.

Fie $A = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ - S.G al lui $\mathcal{V} \Rightarrow (\exists)\ B \subseteq A$, $B = \{u_{i_1}, u_{i_2}, \dots, u_{i_n}\} \leq \mathcal{V}$

{cu $i_1, i_2, \dots, i_n \in \{1, 2, \dots, m\}$ și $n \leq m$}

v) într-un sp. lin. $\mathcal{V}$ există o infinitate de baze; toate bazele dintr-un sp. lin au același număr de vectori(!)

Ex: $\begin{cases} B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \leq \mathcal{V} \\ B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \leq \mathcal{V} \\ \vdots \end{cases}$

vi) dacă $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \leq \mathcal{V} \Rightarrow B_\alpha = \{\underbrace{\alpha u_1}_{=v_1}, \underbrace{\alpha u_2}_{=v_2}, \dots, \underbrace{\alpha u_n}_{=v_n}\} \leq \mathcal{V}$, $(\forall)\ \alpha \in \mathbb{R}^*$

(adică dintr-o bază oarecare putem obține o infinitate de alte baze, înmulțind toți vectorii cu un scalar nenul)

Def. Numim dimensiunea spațiului liniar $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ (not: $\dim \mathcal{V}$) numărul de vectori dintr-o bază a lui $\mathcal{V}$, adică:

(2.7) $\dim V \overset{def}{=} \text{card}\, B$ {card $B \rightarrow$ cardinalul mulțimii B = numărul de elem. din B}

Obs:

i) dacă $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \leq \mathcal{V} \Rightarrow \dim \mathcal{V} = n$ (dimensiunea sp. lin $\mathcal{V}$ este „n" sau $\mathcal{V}$ este un sp. lin. n-dimensional)

ii) dacă $B \leq \mathcal{V}$ și $\text{card}\, B = +\infty \Rightarrow \mathcal{V}$ sp. lin infinit dimensional

iii) Fie $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\} \leq \mathcal{V} \Leftrightarrow \dim \mathcal{V} = n$ Deoarece B - sist. L.i maximal $\Bigg| \Rightarrow (\forall)\ A = \{v_1, v_2, \dots, v_m\} \subset \mathcal{V}$ cu $m > n$ este L.D.

adică:

Fie sp. lin $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ cu $\dim \mathcal{V} = n$ și $A \subset \mathcal{V}$ cu $\text{card}\, A = m$. Atunci, dacă:

$\begin{cases} \text{i) } m > n \Rightarrow A - \text{L.D} & (\text{card}\, A > \dim \mathcal{V} \Rightarrow A - \text{L.D.}) \\ \text{ii) } m \leq n \Rightarrow A < {}^{\text{L.D}}_{\text{L.i}} & (\text{card}\, A \leq \dim \mathcal{V} \Rightarrow A < {}^{\text{L.D.}}_{\text{L.i.}}) \end{cases}$

Ex pp. $\dim \mathcal{V} = 7$ și $A \subset \mathcal{V}$. Dacă:

$\begin{cases} \text{i) card}\, A > 7 \Rightarrow A - \text{L.D (dacă } A \text{ are mai mult de 7 vectori atunci este L.D)} \\ \text{ii) card}\, A \leq 7 \Rightarrow A \text{ poate fi L.D. sau L.i. (trebuie să verificăm prin calcul)} \end{cases}$

T_1: Coordonatele unui vector într-o bază sunt unice

Dem: Fie $(V,+,\cdot)$ sp. lin. și $B=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}\leq V$ $(\dim V=n)$

Pp. că $w\in V$ oarecare are două seturi de coordonate, adică:

$$(\exists)\begin{cases} w_B=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n] \\ \text{și} \\ w_B=[\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n]\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w=\alpha_1u_1+\alpha_2u_2+\dots+\alpha_nu_n \\ w=\beta_1u_1+\beta_2u_2+\dots+\beta_nu_n\end{cases}$$

$$\text{,,}-\text{''}\quad 0_V=(\alpha_1-\beta_1)u_1+(\alpha_2-\beta_2)u_2+\dots+(\alpha_n-\beta_n)u_n$$

Deoarece $B\leq V\Rightarrow u_1,u_2,\dots,u_n$ – L.i

$$\Rightarrow\begin{cases}\alpha_1-\beta_1=0\\ \alpha_2-\beta_2=0\\ \dots\dots\\ \alpha_n-\beta_n=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha_1=\beta_1\\ \alpha_2=\beta_2\\ \dots\dots\\ \alpha_n=\beta_n\end{cases}$$

q.e.d

T_2: $\dim\mathbb{R}^n=n$ (dimensiunea sp. liniar $\mathbb{R}^n$ este egală cu ,,n'')

Dem: Fie mulțimea: $B_C=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}\subset\mathbb{R}^n$ unde vectorii e_i sunt definiți astfel:

$$(2.8)\begin{cases}e_1=(1,0,\dots,0)^T\\ e_2=(0,1,\dots,0)^T\\ \dots\dots\dots\dots\\ e_n=(0,0,\dots,1)^T\end{cases}\rightarrow \text{sunt coloanele matricii unitate } I_n\overset{def}{=}\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

Vom demonstra că mulțimea $B_C\leq\mathbb{R}^n\Leftrightarrow\begin{cases}(i)\ B_C-\text{L.i}\\(ii)\ B_C-\text{S.G.}\end{cases}$ ($B_C\rightarrow$ baza canonică din $\mathbb{R}^n$)

i) B_C – L.i

a) cu matricea componentelor (cf. cazului particular al vectorilor din $\mathbb{R}^n$)

Matricea asociată vectorilor $e_1,e_2,\dots,e_n\in\mathbb{R}^n$ este:

$$A=\begin{array}{c} \begin{matrix}e_1&e_2&\dots&e_n\end{matrix}\\ \begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots&1\end{pmatrix}\end{array}\equiv I_n$$

Atunci $r_A=r_{I_n}=n=$ nr. vectorilor $\Leftrightarrow$ B_C – L.i

sau:

b) cu definiția generală

Din condiția: $\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n=0_n\Leftrightarrow\alpha_1(1,0,\dots,0)^T+\alpha_2(0,1,\dots,0)^T+\dots+\alpha_n(0,0,\dots,1)^T=(0,0,\dots,0)^T$

$\Leftrightarrow(\alpha_1,0,\dots,0)^T+(0,\alpha_2,\dots,0)^T+\dots+(0,0,\dots,\alpha_n)^T=(0,0,\dots,0)^T\Leftrightarrow(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)^T=(0,0,\dots,0)^T\Leftrightarrow\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_n=0$

$\Updownarrow$ (1.3)

B_C – L.i

ii) B_C – S.G.

cf def (2.4): B_C – S.G. $\Leftrightarrow(\forall)\ w=(w_1,w_2,\dots,w_n)^T\in\mathbb{R}^n$, $(\exists)\ \lambda_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,n}$ a.î.: (1) $w=\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_ne_n$

Dar $w=(w_1,w_2,\dots,w_n)^T=(w_1,0,\dots,0)^T+(0,w_2,\dots,0)^T+\dots+(0,0,\dots,w_n)^T=$

$$=w_1\underbrace{(1,0,\dots,0)^T}_{=e_1}+w_2\underbrace{(0,1,\dots,0)^T}_{=e_2}+\dots+w_n\underbrace{(0,0,\dots,1)^T}_{=e_n}=$$

$$=w_1e_1+w_2e_2+\dots+w_ne_n\quad(2)$$

Cf. rel. (2), rezultă că rel. (1) este satisfăcută, deci B_C – S.G; mai mult: $\lambda_i=w_i$ (3), $i=\overline{1,n}$

coordonatele lui w în B_C ↓ ... ↓ componentele lui w

Din i) + ii) $\Rightarrow B_C\leq\mathbb{R}^n\Rightarrow\dim\mathbb{R}^n=\text{card }B_C=n$

q.e.d

Obs:

i) (!!!) conform demonstrației de mai sus: "coordonatele unui vector din $\mathbb{R}^n$ în baza canonică B_c, coincid cu componentele vectorului", adică:

$$(2.9)\quad (\forall)\ v=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)^T\in\mathbb{R}^n\text{, avem: } v_{B_c}=[\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n] \iff v=\alpha_1e_1+\alpha_2e_2+\dots+\alpha_ne_n$$

Ex a) $B_c=\{e_1,e_2\}\leq\mathbb{R}^2$ cu $\begin{cases}e_1=(1,0)^T\\ e_2=(0,1)^T\end{cases}$ → baza canonică din $\mathbb{R}^2$

Fie $v=(3,-4)^T \iff v=3e_1-4e_2 \iff v_{B_c}=[3,-4]$

într-adevăr: $v=(3,-4)^T=(3,0)^T+(0,-4)^T=3(1,0)^T-4(0,1)^T=3e_1-4e_2 \iff v_{B_c}=[3,-4]$

ii) Într-un sp. lin. oarecare $(V,+,\cdot)$, dacă cunoaștem apriori (dinainte) dimensiunea acestuia putem folosi următoarea definiție (echivalentă) a bazei:

$$(2.10)\quad B\leq V \iff \begin{cases}i)\ \operatorname{card}B=\dim V \text{ (adică nr. de vect. L.i este maximal)}\\ ii)\ B\text{-L.i.}\end{cases}$$

iii) cf. T_2, deoarece $\dim\mathbb{R}^n=n$, vom folosi întotdeauna următoarea definiție pentru a dem. că o mulțime de vectori (not. B) este (formează) o bază în $\mathbb{R}^n$:

$$(2.11)\quad B\leq\mathbb{R}^n \iff \begin{cases}i)\ \operatorname{card}B=n\ (=\dim\mathbb{R}^n) & \to \text{nr. de vectori L.i să fie maxim posibil.}\\ ii)\ B\text{-L.i } (\iff r_A=n=\text{nr. vect.}) & \to \text{cf. cazului partic. de L.i în } \mathbb{R}^n\end{cases}$$

iv) deoarece $\dim\mathbb{R}^n=n$, atunci o mulțime (set) de vectori $A=\{v_1,v_2,\dots,v_k\}\subset\mathbb{R}^n$ este:

(a) dacă $k>n \Rightarrow A$-L.D (nefiind necesară o altă demonstrație)

(b) dacă $k\leq n \Rightarrow A=?\begin{smallmatrix}\text{L.D}\\ \text{L.i}\end{smallmatrix}$ (deci trebuie verificată prin calcul natura vectorilor

Ex: a) Fie $A=\{v_1,v_2,v_3\}\subset\mathbb{R}^2 \Rightarrow A$-L.D deoarece nr. vectorilor din A ($\operatorname{card}A=3$) este strict mai mare decât $\dim\mathbb{R}^2=2$ (nr. maxim posibil de vectori L.i din $\mathbb{R}^2$ este doi)

b) Fie $A:\begin{cases}u_1=(1,0,1)^T\\ u_2=(1,-1,2)^T\\ u_3=(-2,1,3)^T\\ u_4=(3,-2,1)^T\end{cases}\in\mathbb{R}^3$; deoarece $\operatorname{card}A=4>\dim\mathbb{R}^3=3 \Rightarrow A$-L.D

c) Fie $A:\begin{cases}v_1=(1,-1,-1)^T\\ v_2=(0,1,-1)^T\\ v_3=(-1,-1,2)^T\end{cases}\in\mathbb{R}^3$; deoarece $\operatorname{card}A=3=\dim\mathbb{R}^3 \Rightarrow A=?\begin{smallmatrix}\text{L.D}\\ \text{L.i}\end{smallmatrix}$

[prin calcul, rangul matricei componentelor = 3 = nr. vect. $\Rightarrow$ A-L.i.]

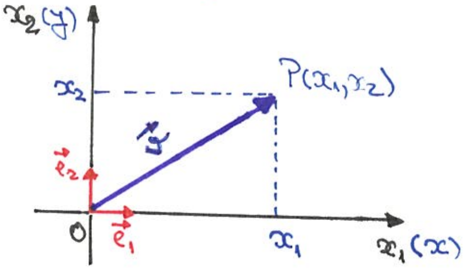
d) Fie $A:\begin{cases}w_1=(1,2,0,-3)^T\\ w_2=(-3,1,2,-1)^T\\ w_3=(-1,5,2,-7)^T\end{cases}\in\mathbb{R}^4$; deoarece $\operatorname{card}A=3<4=\dim\mathbb{R}^4 \Rightarrow A=?\begin{smallmatrix}\text{L.D}\\ \text{L.i}\end{smallmatrix}$

[rang A = 2 < 3 = nr. vectorilor $\Rightarrow$ A-L.D;
obs. că: $w_3=2w_1+w_2$ → rel. de dependență liniară]

Baze canonice în spații liniare particulare

a₁) $\vec{V_2} \stackrel{def}{=} \{\vec{v} = \vec{AB} \,/\, A, B \in \mathbb{R}^2\}$ → sp. lin. 2-dimensional al vectorilor liberi

$B_c = \{\vec{i}, \vec{j}\} \stackrel{not}{\equiv} \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$ - baza canonică din $\vec{V_2}$ $\Big| \Rightarrow$ $\dim \vec{V_2} = 2$ (= card B_c)



$(\forall)\ \vec{v} = \vec{OP} \in \vec{V_2}$, cu $P(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, admite descompunerea unică în B_c:

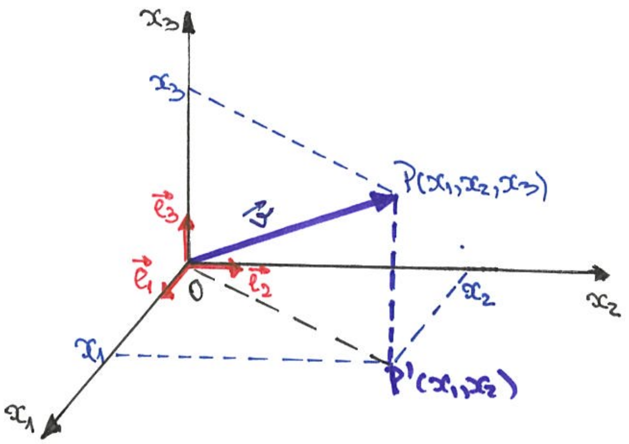
(1) $\vec{v} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2}$ (sau: ~~$v = x\vec{e_1} + y\vec{e_2}$~~ $v = x\vec{i} + y\vec{j}$)

coord. lui $\vec{v}$ în baza B_c

$B_c = \{\vec{e_1}, \vec{e_2}\}$

a₂) $\vec{V_3} \stackrel{def}{=} \{\vec{v} = \vec{AB} \,/\, A, B \in \mathbb{R}^3\}$ - sp. lin 3-dimensional al vectorilor liberi

$B_c = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \stackrel{not}{\equiv} \{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ - baza canonică din $\vec{V_3}$ $\Big| \Rightarrow$ $\dim \vec{V_3} = 3$ (= card B_c)



$(\forall)\ \vec{v} = \vec{OP}$, cu $P(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, are descompunerea unică în B_c:

(1') $\vec{v} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + x_3\vec{e_3}$ (sau $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$)

Obs: $\begin{cases} \text{vectorii } \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3} \text{ se numesc și versori ai axelor de coordonate, deoarece: } \begin{cases} \vec{e_1} \perp \vec{e_2} \perp \vec{e_3} \\ \|\vec{e_1}\| = \|\vec{e_2}\| = \|\vec{e_3}\| = 1 \end{cases} \\ x_1, x_2, x_3 \text{ sunt coord. vect. } \vec{v} \text{ în } B_c \end{cases}$

b) $\mathcal{P}_n(X) = \{P(X) \,/\, \text{gradul } P(X) \le n\}$ → spațiul liniar al polinoamelor de grad cel mult „n"

$B_c = \{E_0(X), E_1(X), E_2(X), \dots, E_n(X)\}$ - baza canonică din $\mathcal{P}_n(X)$ $\Big| \Rightarrow$ $\dim \mathcal{P}_n(X) = n+1$ (= card B_c)

unde: $\begin{cases} E_0(X) = X^0 \equiv 1 & \text{(polinomul constant 1)} \\ E_1(X) = X^1 \equiv X \\ E_2(X) = X^2 \\ - - - - - - - \\ E_n(X) = X^n \end{cases}$ → polinoame elementare

$(\forall)\ P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathcal{P}_n(X)$ are o descompunere unică în B_c, de forma:

$P(X) = a_nE_n(X) + a_{n-1}E_{n-1}(X) + \dots + a_2E_2(X) + a_1E_1(X) + a_0E_0(X)$

coeficienții polinomului $P(X)$ sunt coordonatele vectorului (polin.) $P(X)$ în baza canonică B_c

c) $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = \{A \mid A \text{ matrice cu „m" linii și „n" coloane}\}$ – sp. lin. al matricelor de tip (m,n).

$B_C = \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{ij}, \dots, E_{mn}\}$ – baza canonică din $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\dim \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}) = m \cdot n$ ($=\operatorname{card} B_C$)

Matricile E_{ij} se numesc matrice elementare și sunt de forma:
(au toate elementele egale cu „0" cu excepția unui elem. egal cu „1" aflat la intersecția liniei „i" cu coloana „j")

$$E_{ij} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ m \end{array}\begin{array}{c} 1 \; \cdots \; j \; \cdots \; n \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ex:

1) Fie mulțimea $B = \{u_1, u_2\}$ cu $\begin{cases} u_1 = (1,-2)^T \\ u_2 = (-2,3)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^2$. Se cere:

a) arătați că (B) este bază în $\mathbb{R}^2$ $(B \leq \mathbb{R}^2)$;

b) fie $v = (4,5)^T \in \mathbb{R}^2$. Determinați coordonatele lui v în (B_C) $(v_{B_C} = ?)$ și în baza (B) $(v_B = ?)$

Dem: $(B_C)\begin{cases} e_1 = (1,0)^T \\ e_2 = (0,1)^T \end{cases} \leq \mathbb{R}^2$

a) cf. (2.11): $B \leq \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} i) \operatorname{card} B = 2 = \dim \mathbb{R}^2 \text{ (Adevărat)} \\ ii) B\text{-L.i} \Leftrightarrow r_A = 2 \text{ (= nr. vect.), unde } A = \begin{array}{cc} u_1 & u_2 \\ \end{array} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \boxed{-1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{r_A = 2} \end{cases}$

b) b₁) evident coord. lui „v" în baza canonică coincid cu componentele acestuia, adică:
$\underline{v_{B_C} = [4,5]} \Leftrightarrow v = 4e_1 + 5e_2 \left(= 4(1,0)^T + 5(0,1)^T = (4,0)^T + (0,5)^T = \underline{(4,5)^T}\right)$

b₂) notăm coord. lui „v" în baza (B) cu α_1, α_2, adică $v_B = [\alpha_1, \alpha_2]$, deci:
$v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \Leftrightarrow (4,5)^T = \alpha_1(1,-2)^T + \alpha_2(-2,3)^T \Leftrightarrow (*)\begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 = 4 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{metoda Gauss}} \bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{array}\right) \\ \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & v \end{array} \end{array} \sim$

$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 13 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha_1 & \alpha_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -22 \\ 0 & 1 & -13 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -22 \\ \alpha_2 = -13 \end{cases} \Leftrightarrow \underline{v = -22u_1 - 13u_2} \Leftrightarrow \underline{v_B = [-22, -13]}$

(Verificare calcule: $\underset{\#}{v} = -22u_1 - 13u_2 = -22(1,-2)^T - 13(-2,3)^T = (-22,44)^T + (26,-39)^T = \underline{\underline{(4,5)^T}} \to$ corect.)
q.e.d.

2) Fie $(B)\begin{cases} u_1 = (1,-1,0)^T \\ u_2 = (0,1,-1)^T \\ u_3 = (1,-1,1)^T \end{cases} \in \mathbb{R}^3$. Arătați: $\begin{cases} a) \; B \leq \mathbb{R}^3 \; (B\text{ – bază în sp. lin. } \mathbb{R}^3) \\ b) \; v = (2,-3,4)^T \Rightarrow v_B = ? \\ c) \; w_B = [1,-2,3] \Rightarrow w = ? \; (\Leftrightarrow w_{B_C} = ?) \end{cases}$

Dem:

a) $B \leq \mathbb{R}^3 \Leftrightarrow \begin{cases} i) \operatorname{card} B = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \text{ (A)} \\ ii) B\text{-L.i.} \Leftrightarrow r_A = 3 \text{ (= nr. vect.), cu } A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$

$\Downarrow$ $\underline{r_A = 3}$

b) Fie $v_B \overset{not}{=} [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \Leftrightarrow v = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \Leftrightarrow (2,-3,4)^T = \alpha_1(1,-1,0)^T + \alpha_2(0,1,-1)^T + \alpha_3(1,-1,1)^T$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = -3 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{met. Gauss}} \bar{A} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \\ \begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & v \end{array} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = -1 \\ \alpha_3 = 3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \underline{v = -u_1 - u_2 + 3u_3} \Leftrightarrow \underline{v_B = [-1,-1,3]}$ (Verif: $\underset{\#}{v} = -(1,-1,0)^T - (0,1,-1)^T + 3(1,-1,1)^T = \underline{(2,-3,4)^T} \to$ (A))

c) $w_B = [1,-2,3] \Leftrightarrow \underset{\#}{w} = u_1 - 2u_2 + 3u_3 = (1,-1,0)^T - 2(0,1,-1)^T + 3(1,-1,1)^T = \underline{(4,-6,5)^T} \Leftrightarrow \underline{w_{B_C} = [4,-6,5]}$
q.e.d.