INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO DE LU

**João Pedro de F. Lourenço**
**Leandro R. de Souza**
**Vinícius A. Marins**
**Samara de M. Santos**

joao.franca@aluno.ifsp.edu.br
r.Leandro@aluno.ifsp.edu.br
v.marins@aluno.ifsp.edu.br
miranda.samara@aluno.ifsp.edu.br

Discentes do Curso Bacharelado a Ciência da Computação – IFSP – Campus Presidente Epitácio

# > Roteiro

- Fatoração de matrizes: método da decomposição de LU
  - Introdução;
  - História;
  - Explicação do Teorema;
  - Exemplos;
  - Prova Matemática;
  - Aplicações Gerais;
  - Aplicações na computação;
  - Codificação da fatoração de LU;
  - Desempenho computacional;
  - Vantagens e Desvantagens;

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# > Introdução

- Sistemas Lineares
  - Primeiro Contato
    - Ensino Fundamental.
    - Pequeno porte, poucas incógnitas, no máximo três equações.
    - Método da Substituição.
  - Um método para tratar sistemas lineares é considerado bom se puder ser expresso em linguagem de programação e tornar possível obter soluções de forma rápida e confiável.

# > Introdução

- Fatoração LU
  - Importante na resolução de sistemas lineares.
  - Torna o trabalho mis fácil e viável de ser executado computacionalmente.
  - Dado um sistema Ax=b, a ideia é fatorar a matriz A como um produto de uma matriz L com uma matiz U.

OBS: L é uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior.

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# > Introdução

- Fatoração LU
  - A matriz L é formada com diagonal unitária e demais elementos são os elementos multiplicadores do escalonamento.
  - A matriz U é a resultante do escalonamento da matriz A.

OBS: L é uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior.

# > Introdução

- Fatoração LU

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} U \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Portanto para resolver o sistema *Ax=b* utilizando a fatoração LU, deve-se proceder da seguinte forma:

A = LU

OBS: L é uma matriz triangular inferior e U uma matriz triangular superior.

# > Introdução

- Fatoração LU

Com isso, o sistema Ax=b pode ser reescrito na forma;

$$(LU)x = b \rightarrow L\,(Ux) = b.$$

Denotando Ux = y, podemos resolver o seguinte sistema triangular;

$$L\,y = b.$$

$$Ux = y.$$

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# > Introdução

Dado um sistema linear:

$$2x1 + 3x2 - x3 = 5$$

$$4x1 + 4x2 - 3x3 = 8$$

$$2x1 - 3x2 + x3 = -1$$

Extraindo a matriz A dos coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos agora, aplicar operações para zerar os elementos assinalados de azul.

$$Linha\ 2 \rightarrow L2 - 2L1$$

$$Linha\ 3 \rightarrow L3 - 1L1$$

# > Introdução

Resultando na matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Aplicando a operação para zerar o elemento -6:

$$Linha\,3 \rightarrow L3 - 3L2$$

Assim obtemos a matriz U resultante do escalonamento de A:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

# > Introdução

Operações usadas para o escalonamento:

$$Linha\ 2 \rightarrow L2 - 2L1$$

$$Linha\ 3 \rightarrow L3 - 1L1$$

$$Linha\ 3 \rightarrow L3 - 3L2$$

Note que os números em azul são os multiplicadores das operações, portanto, eles irão formar a matriz L que ficará assim:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

# > Introdução

Montando o primeiro sistema *Ly=b*:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo, conseguimos obter vetor y.

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

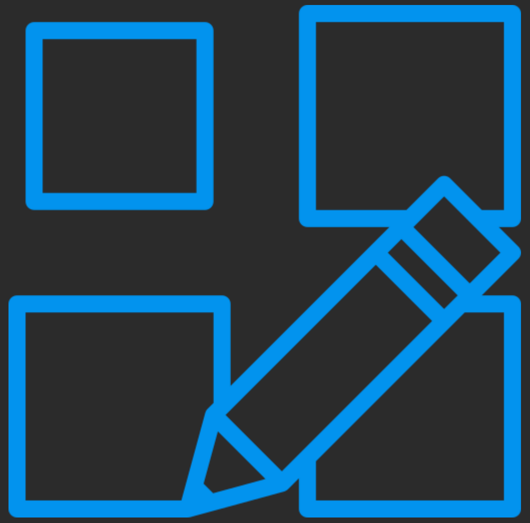
Montando o segundo sistema *Ux=y*.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# > Introdução

Por fim, obtemos o vetor x:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



# > História

- Johann Carl Friedrich Gauss
  - Matemático, astrônomo e físico alemão
  - Príncipe da matemática
  - QI 240
  - Trabalhou sempre sozinho
  - Em seu campo de pesquisa, expressou as novas ideias da sua época de uma forma muito poderosa.
  - Em 1801 utilizou um método para calcular a órbita do asteroide Ceres.

# > História

- Sua versão preliminar da eliminação de Gauss apareceu pela primeira vez no livro chinês “Nove Capítulos de Artes Matemática”. Até então o método não era reconhecido.

Embora as ideias tenham sido conhecida antes, muitas vezes o crédito da decomposição LU é atribuída ao lógico e matemático Alan Turing.

# > Explicação do Teorema

- **Teorema:** Seja A uma matriz inversível, que pode ser posta na forma triangular por meio de operações elementares, mediante apenas a operações do tipo $L_i + aL_j$. Então, $A = LU$, onde L é uma matriz triangular inferior com 1s(Uns) na diagonal e U é uma matriz superior triangular com 0s(zeros) na diagonal (LIPSCHUTZ. 1994, p.158).

- Regras Para Aplicação
  - A Matriz deve ser invertível.
  - a Matriz pode ser escalonada.
  - Matriz Quadrática.

# > Explicação do Teorema

- Método de Eliminação de Gauss
  - Fornece as Matrizes L e U.
- Escalonamento de uma Matriz
  - Talvez haja a necessidade de permutação de linhas
    - Perceptível somente no final do escalonamento.
  - Permutação das Linhas da Matriz Identidade (respeitando a ordem).
    - O Processo resulta em uma Matriz PM(n, R) (Matriz de Permutação).
  - As transposições geram o produto PA.
    - Pode ser escalonada utilizando as operações elementares:
      - Li + Alj
    - PA = LU

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# > Exemplo 1 – decomposição de LU

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, faremos a sua decomposição na forma A=LU

**Solução**: Primeiramente vamos escalonar a matriz A até chegar a uma matriz triangular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{L_2 - 3L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{L_3 - 4L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & -5 \end{bmatrix}^{L_3 - 3L_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Em seguida, observamos que na decomposição houve a participação de três matrizes elementares M1, M2 e M3, e que (M3M2M1)^-1= L.

Podemos verificar que essas matrizes elementares são dadas por

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

# > Exemplo 1 – decomposição de LU

Agora, calcularemos as inversas dessas matrizes da seguinte forma:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{L_2+3L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então,

$$\mathrm{M}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{L_3+4L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# > Exemplo 1 – decomposição de LU

Logo,

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{M}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{L}_3+3\mathrm{L}_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí segue que:

# > Exemplo 1 – decomposição de LU

$$(M_3M_2M_1)^{-1} = M_1^{-1}M_2^{-1}M_3^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\4 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 3 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\4 & 3 & 1\end{bmatrix} = L$$

Note-se que os elementos 3, 4 e 3 provém das operações elementares sobre as linhas acima, ou seja, são os negativos dos multiplicadores. lsso ocorre devido à utilização de

inversas das matrizes elementares.

Assim, temos a decomposição A = LU

Ou

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\3 & 3 & 4\\4 & -1 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\4 & 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\0 & -3 & -2\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# > Exemplo 2 – Sistema Linear

Seja um sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Podemos escrevê-lo na forma matricial do tipo AX = b, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Após isso, iremos decompor a matriz de coeficientes A em duas matrizes, uma triangular inferior e outra triangular superior Le U, respectivamente.

Para que uma matriz tenha decomposição LU, o determinante de todos os seus menores principais devem ser diferentes de zero. Vamos checar essa condição para nossa matriz A:

# > Exemplo 2 – Sistema Linear

Primeiro menor principal:

$det([3])=3\neq 0$

Segundo menor principal:

$$det\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Agora que sabemos que a matriz de coeficientes pode ser decomposta, vamos começar fazendo a Eliminação de Gauss. Porém, dessa vez, iremos guardar os fatores fij usados para zerar os elementos que ficam abaixo do pivô.

# > Exemplo 2 – Sistema Linear

Primeiramente vamos supor uma matriz L de dimensão 3×3 triangular inferior do tipo:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f21 & 1 & 0 \\ f31 & f32 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obteremos o valor desses fatores durante a Eliminação de Gauss.

O fator f21 é o fator utilizado na Eliminação de Gauss para zerar o elemento da segunda linha que está abaixo do primeiro pivô. Para a matriz A, obtemos da seguinte maneira:

$$f21 \frac{A(2,1)}{A(1,1)} = \frac{1}{3}$$

# > Exemplo 2 – Sistema Linear

Para zerar o elemento abaixo do pivô fazemos:

L2 = L2 −f21L1.

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

De maneira similar obtemos o fator f31, que será o fator utilizado para zerar o elemento da terceira linha que está abaixo do primeiro pivô.

$$f31 \frac{A(3,1)}{A(1,1)} = \frac{4}{3}$$

# > Exemplo 2 – Sistema Linear

Para zerar o elemento fazemos:

$$L3 = L3 - f31L1$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{22}{3} \end{bmatrix}.$$

Por fim, como todos os elementos abaixo do primeiro pivô A11 estão zerados, temos agora como pivô o elemento A22 e precisamos zerar o que está abaixo dele:

$$f32 \frac{A32}{A32} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = 1$$

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# > Exemplo 2 – Sistema Linear

Para zerar o elemento:

$$L3 = L3 - f32L2 .$$

Assim,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

A matriz triangular superior obtida no final da Eliminação de Gauss é chamada de matriz U. Já a matriz L será a matriz triangular inferior que contém os elementos da diagonal principal iguais a 1, além dos fatores que utilizamos para zerar os elementos, como vimos acima.

# > Exemplo 2 – Sistema Linear

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & 1 & 0\\ \frac{4}{3} & 1 & 1\end{bmatrix} U=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}$$

Por fim, podemos verificar que, de fato, LU=A:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & 1 & 0\\ \frac{4}{3} & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & -2\end{bmatrix}.$$

# > Exemplo 2 – Sistema Linear

Agora que decompomos a nossa matriz A nas matrizes L e U, podemos usá-las para obter a solução do sistema linear do exemplo. Temos que:

$$Ax = b$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Substituindo a matriz A pelas matrizes LU obtidas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

# > Exemplo 2 – Sistema Linear

O que temos acima é LUx=b. Agora usaremos o vetor de incógnitas auxiliar, y. Definindo Ux=y, temos que Ly=b, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

O sistema acima é do tipo triangular inferior, cuja forma de resolver já estudamos anteriormente:

$y_1 = 1$

$y_2 = 2 - \frac{1}{3} * y_1 = \frac{5}{3}$

$y_3 = 3 - \frac{4}{3} y_1 - y_2 = 0$

# > Exemplo 2 – Sistema Linear

Agora retornamos a nossa relação Ux=y:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar finalmente o valor de x, precisamos resolver o sistema triangular superior acima. Logo:

$$x_3 = 0$$

$$x_2 - 2\frac{\frac{5}{3} - \frac{2}{3} * 0}{\frac{1}{3}} = 5$$

$$x_1 = \frac{1 - 2 * 5 - 4 * 0}{3} = -3$$

que é a solução do sistema.

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# > Exemplo 3 – Decomposição de matrizes

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, vamos determinar a decomposição

A = LU dessa matriz.

**Solução:** Vamos escalonar a matriz A até chegarmos a uma matriz triangular.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{L_1 \Leftrightarrow L_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}^{L_3 - 4L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}^{L_3 - 2L_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

temos que:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# > Exemplo 3 – Decomposição de matrizes

Observa-se ainda a participação das matrizes elementares:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} e \; M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

durante o processo de escalonamento. Em seguida, calculamos as inversas das matrizes:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{L_3 + 4L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

# > Exemplo 3 – Decomposição de matrizes

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{L_3+2L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$L = (M_2 M_1)^{-1}$$

# > Exemplo 3 – Decomposição de matrizes

$$= M_1^{-1} M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como houve a necessidade de permutar linhas da matriz A durante o processo de escalonamento, então, pela observação (2), temos uma matriz de permutações P, onde:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# > Exemplo 3 – Decomposição de matrizes

Dessa forma, temos uma decomposição do tipo:

$$PA = LU$$

ou,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

# > Prova Matemática

- Conceitos
  - Prova por Indução
    - Demonstrar para 1
    - Demonstrar para k-1
  - Menor Complementar $A_k$
    - Matriz Gerada pelas K primeiras linha e colunas de A.

# > Prova Matemática

- **Teorema**: Seja $A_{ij}$ uma matriz quadrada de ordem $n$, e $A_k$ o menor principal $k$. Assumimos que para $\det(A) \neq 0$ para $k = 1,2, \dots k-1$. Então existe uma única matriz triangular inferior $L_{ij}$, com $l_{11} = l_{22} = \cdots = l_{nn} = 1$ e uma única matriz triangular superior $U_{ij}$, tal que $LU = A$. Além disso, $\det(LU) = u_{11} * u_{22} * \cdots * u_{kk}$
- Resumindo
  - Se $\det(A_k) \neq 0, k = 1, \dots, n-1$
    - L e U existem e são únicas
    - $\det(LU) = u_{11} * u_{22} * \cdots * u_{kk}$

# > Aplicações Gerais – Sistemas Lineares

Dada a equação matricial

$$Ax = LUx = b$$

Para acharmos

1. Primeiro passo, resolver $Ly = b \, para \, y$.
2. Segundo passo, resolver $Ux = y \, para \, x$.

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# > Aplicações Gerais – Matriz Inversa

As matrizes **L** e **U** podem ser utilizadas para calcular a matriz inversa.

$$Ax = LUx = b$$

Ao trocar o vetor x pela matriz X e o vetor b pela matriz B.

$$AX = LUX = B$$

# > Aplicações Gerais – Determinante

As matrizes $L$ e $U$ podem ser utilizadas

$$A = LU$$

Sabemos que,

$$\det(A) = \det(L)\det(U)$$

e os determinantes de matrizes triangulares são simplesmente o produto dos elementos de suas diagonais.

# > Aplicações na Computação – Machine Learning

Em Machine learning, geralmente lidamos com dados de alta dimensão.

A otimização numérica em Machine learning geralmente envolve transformação e computação de matrizes.

# > Aplicações na Computação – Regressão Linear

A maneira mais comum de resolver a Regressão Linear é por meio de uma otimização de mínimos quadrados.

# > Aplicações na Computação – Autenticação

O esquema permite que o usuário e o servidor possam se autenticar uns aos outros dentro de uma rede pública.

Este esquema realiza decomposição *LU* de matrizes para apresentar um novo esquema de autenticação.

# Implementação em Python



INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# > Desempenho Computacional

- Estratégia para Cálculo de Gasto
  - Dividir o programa em partes e calcular a parte individualmente.
- Custo da Fatoração da Matriz
  - $\frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6}\ flops$
- Custo da Resolução do Sistema
  - $2n^2\ flops$
- Custo Total
  - $\frac{2n^3}{3} + \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{6}\ flops$
- Representação Final:
  - $O\left(\frac{2\mathrm{n}^3}{3}\right)$

INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# > Vantagens e Desvantagens

- Vantagem:
  - Permite a resolução de múltiplos sistemas que utilizam a mesma matriz A.
- Desvantagem
  - Passos adicionais quando comparada com outros métodos.

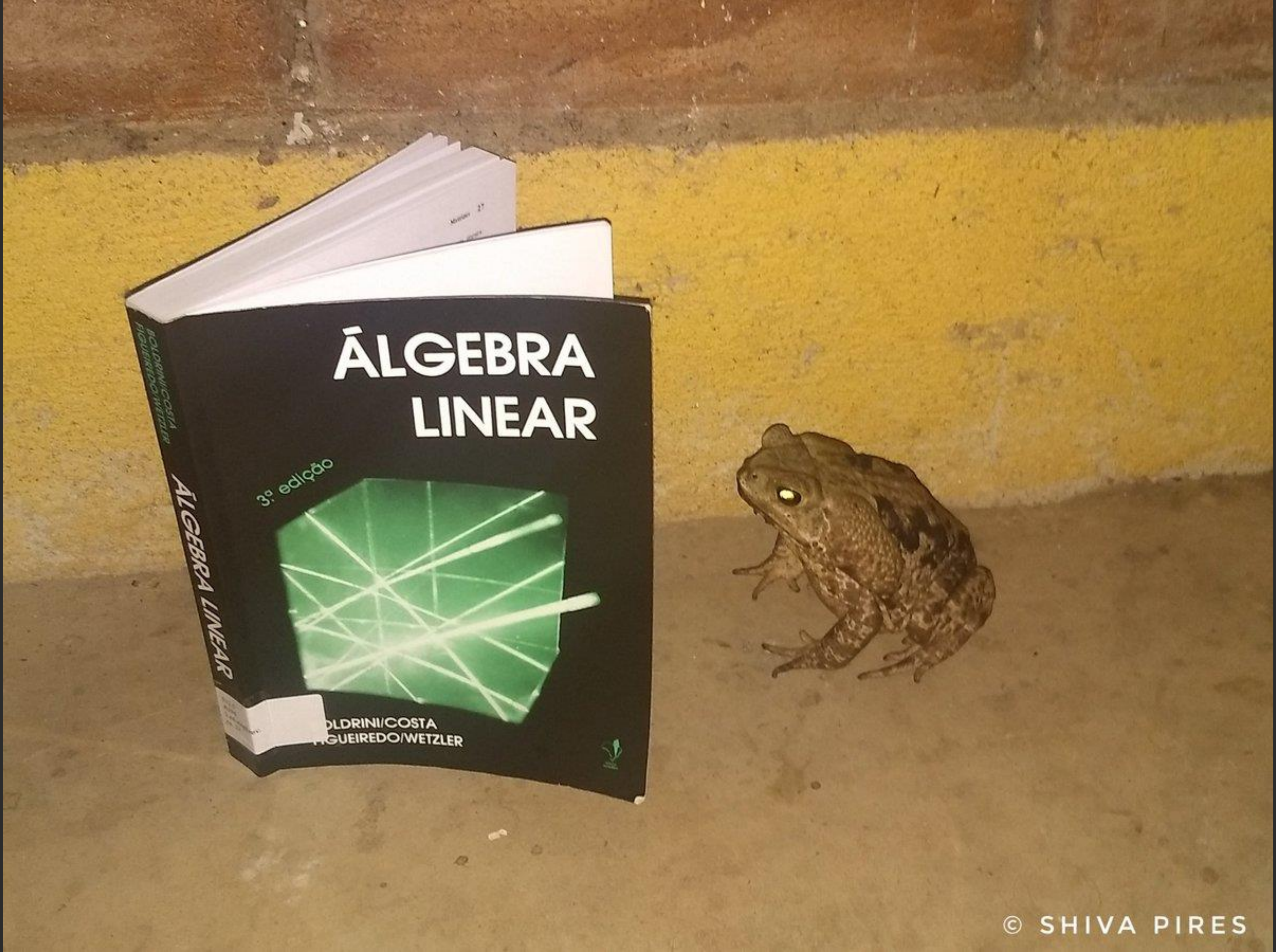
INSTITUTO FEDERAL
SÃO PAULO
Câmpus Presidente Epitácio

# OBRIGADO PELA ATENÇÃO

**João Pedro de F. Lourenço**
**Leandro R. de Souza**
**Vinícius A. Marins**
**Samara de M. Santos**

joao.franca@aluno.ifsp.edu.br
r.Leandro@aluno.ifsp.edu.br
v.marins@aluno.ifsp.edu.br
miranda.samara@aluno.ifsp.edu.br

Discentes do Curso Bacharelado a Ciência da Computação – IFSP – Campus Presidente Epitácio


ÁLGEBRA
LINEAR
3ª edição
ÁLGEBRA LINEAR
© SHIVA PIRES