INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DE SÃO PAULO - CÂMPUS PRESIDENTE EPITÁCIO

BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

JOÃO PEDRO DE F. LOURENÇO

LEANDRO R. DE SOUZA

VINÍCIUS A. MARINS

SAMARA DE M. SANTOS

FATORAÇÃO DE MATRIZES:

MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO LU

PRESIDENTE EPITÁCIO

2021

JOÃO PEDRO DE F. LOURENÇO

LEANDRO R. DE SOUZA

VINÍCIUS A. MARINS

SAMARA DE M. SANTOS

FATORAÇÃO DE MATRIZES:

MÉTODO DA DECOMPOSIÇÃO LU

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Fernando Alves

PRESIDENTE EPITÁCIO

2021

SUMÁRIO

1. Introdução

A maioria de nós estudantes tem, ainda no ensino fundamental, contato com os sistemas de equações lineares. Neste ponto, tais sistemas são vistos de maneira um tanto quanto superficial. Além disso, pelo fato de serem tratados apenas sistemas de porte muito pequeno, em geral, com no máximo três equações e três incógnitas, o método mais usado para resolvê-los é o chamado método de substituição, que consiste em deixar incógnitas em função de outras de modo a conseguir, via substituição, fazer com que em uma equação apareça apenas uma incógnita e seu valor possa ser encontrado. Esse método simples funciona relativamente bem quando se trata de sistema desse porte, mas no caso de sistemas com mais variáveis, ele se torna inviável. Na verdade, resolver manualmente sistemas muito grandes não é uma boa ideia.

Um método para tratar sistemas com muitas equações e muitas variáveis é considerado bom se puder ser expresso em uma linguagem de programação e tornar possível obter soluções de forma rápida e confiável.

Portanto, a fatoração LU é importante na resolução de sistemas lineares por tornar esse trabalho mais fácil e viável de ser executado computacionalmente. Então de que modo é aplicado este método? Logo abaixo temos uma breve explicação e introdução ao método da Fatoração LU.

Dado um sistema $Ax = b$, a ideia é de fatorar a matriz A como o produto de uma matriz triangular inferior L com uma matriz triangular superior U.

OBS: L = Lower, Matriz triangular inferior, com diagonal unitária e demais elementos são os multiplicadores das etapas do escalonamento. U = Upper. Matriz triangular superior resultante do escalonamento da matriz.

Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

Portanto para resolver o sistema $Ax = b$ utilizando a fatoração LU, deve-se proceder da seguinte forma:

$$A = LU$$

Com isso, o sistema $Ax = b$ pode ser reescrito na forma

$$(LU)x = b \rightarrow L\,(Ux) = b.$$

Denotando, $Ux = y$, podemos resolver o seguinte sistema triangular

$$1.\ L\,y = b.$$

Tendo resolvido este sistema, a solução do sistema $Ax = b$ pode, então, ser computada como a solução do seguinte sistema triangular

$$2.\ Ux = y.$$

Ou seja, a decomposição LU nos permite resolver um sistema pela resolução de dois sistemas triangulares. (Sistemas 1 e 2).

Colocando em prática

Dado um sistema linear:

$2x1 + 3x2 - x3 = 5$

$4x1 + 4x2 - 3x3 = 8$

$2x1 - 3x2 + x3 = -1$

Extraindo a matiz A dos coeficientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Como precisamos zerar os números assinalados de vermelho devemos seguir os seguintes passos:

- Aplicar as operações para todos os elementos nessas 2 linhas, com o objetivo de zerar os elementos $a_{21}\ e\ a_{31}$:

$Linha\ 2 \rightarrow L2 - 2L1$

$Linha\ 3 \rightarrow L3 - 1L1$

Note que 2 é o multiplicador para zerar o elemento a_{21} e 1 é o multiplicador para zerar o elemento a_{31}.

Resultando na matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

- Aplicar a operações para todos os elementos da linha 3, com o objetivo de zerar o elemento a_{32}:

$Linha\ 3 \rightarrow L3 - 3L2$

Note que 3 é o multiplicador para zerar o elemento a_{32}

Resultando na matriz U que é o resultado do escalonamento da matriz A:

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

E para obter a matriz L basta montar uma matriz triangular inferior com os elementos abaixo da diagonal principal formados pelos multiplicadores das operações usadas para dada posição da matriz:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Montando o primeiro sistema ***Ly = B***:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y1 \\ y2 \\ y3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Resolvendo, conseguimos obter o vetor y.

$$y = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Montando o segundo sistema ***Ux = y***:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x1 \\ x2 \\ x3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo, conseguimos obter o vetor x.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. História

Johann Carl Friedrich Gauss foi um matemático, astrônomo e físico alemão. Conhecido como o príncipe dos matemáticos, muitos o consideram o maior gênio da história da matemática. Seu QI foi estimado em cerca de 240. Gauss não encontrou nenhum colaborador entre os seus colegas matemáticos tendo trabalhado sempre sozinho. Mas, se é verdade que o seu isolamento relativo, a sua compreensão das matemáticas puras e aplicadas, a sua preocupação com a astronomia e o uso frequente que fez do latim, têm a marca do século XVIII, é inegável que, nos seus trabalhos, se reflete o espírito de um novo período. Se, tal como os seus contemporâneos Kant, Goethe, Beethoven e Hegel, se manteve à margem das grandes lutas políticas da sua época, a verdade é que, no seu próprio campo, Gauss expressou as novas ideias da sua época de uma forma muito poderosa.

As suas publicações, a sua abundante correspondência, as suas notas, e os seus manuscritos mostram que ele possuía uma das maiores virtuosidades científicas de todos os tempos. No ano de 1801 Carl Friedrich Gauss utilizou um método para calcular a órbita do asteroide Ceres com pouquíssimas informações. O trabalho de Gauss causou sensação quando Ceres reapareceu na constelação de Virgem, local aproximado aos seus cálculos.

Uma versão preliminar da eliminação de Gauss apareceu pela primeira vez no livro chinês "Nove Capítulo de Artes Matemática". Até então o poder do método não tinha sido reconhecido. Mais tarde o método foi popularizado quando Willian Jordan (engenheiro alemão) em 1888 publicou no seu livro de geodésica intitulado "Handbuch der Vermessungskund".

Embora as ideias tenham sido conhecidas antes, muitas vezes o crédito pela popularização da decomposição LU é atribuída ao lógico e matemático britânico Alan Turing (precursor da computação), pelo seu trabalho nesse assunto. Ao final dos anos 1970, a Fundação Nacional de Ciências e o Departamento de Energia dos EUA financiaram o desenvolvimento de rotinas computacionais para inverter matrizes e resolver sistemas de equações lineares. Aquela pesquisa levou a um conjunto de programas Fortran chamada LINPAC que são uma referência para muitos algoritmos computacionais até hoje. Inclusive o chamado MATLAB. As rotinas LIMPAC estão organizadas em torno de quatro fatorações de matrizes, uma das quais é a decomposição LU.

3. Explicação do Teorema

Teorema: Seja A uma matriz inversível, que pode ser posta na forma triangular por meio de operações elementares, mediante apenas a operações do tipo $L_i + aL_j$. Então, A = LU, onde L é uma matriz triangular inferior com 1s(Uns) na diagonal e U é uma matriz superior triangular com 0s(zeros) na diagonal (LIPSCHUTZ. l994, p.l58).

É importante frisar que o teorema acima só se aplica a matrizes inversíveis, que podem ser escalonadas sem qualquer permuta de linhas. Matrizes desse tipo são ditas fatoráveis - LU.

Ressaltamos ainda dois fatos importantes a respeito da decomposição A = LU: (1) O método de eliminação de Gauss fornece diretamente os elementos das matrizes L e U.

(2) Ao iniciarmos o escalonamento de uma dada matriz A, não sabemos se vai haver a necessidade de permutarmos as linhas, somente no final do escalonamento é que podemos fazer tal afirmação. Havendo necessidade desta transposição, o processo é feito permutando as linhas da matriz identidade (na ordem em que foram feitas), obtendo assim, uma matriz $P \in M(n, R)$ denominada de matriz de permutações. Todas as transposições de linhas necessárias ao processo de

escalonamento formam o produto PA, que poderá ser escalonada utilizando apenas as operações elementares $L_i + aL_j$, dessa forma, temos a decomposição PA=LU.

4. Exemplo 1 - Decomposição de LU

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}$,faremos a sua decomposição na forma

A=LU

Solução: Primeiramente vamos escalonar a matriz A até chegar a uma matriz triangular

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{L_2-3L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix}^{L_3-4L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -9 & -5 \end{bmatrix}^{L_3-3L_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Em seguida, observamos que na decomposição houve a participação de três matrizes elementares M1, M2 e M3, e que (M3MzM¡)^-1= L.

Podemos verificar que essas matrizes elementares são dadas por

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Agora, calcularemos as inversas dessas matrizes da seguinte forma:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{L_2+3L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então,

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{L_3+4L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{L_3+3L_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$M_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Daí segue que:

$$(M_3 M_2 M_1)^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} M_3^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} = L$$

Note-se que os elementos 3, 4 e 3 provém das operações elementares sobre as linhas acima, ou seja, são os negativos dos multiplicadores. lsso ocorre devido à utilização de inversas das matrizes elementares.

Assim, temos a decomposição A = LU

Ou

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5. Exemplo 2 - Sistema Linear

Seja um sistema linear:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$$

Podemos escrevê-lo na forma matricial do tipo AX = b, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Após isso, iremos decompor a matriz de coeficientes A em duas matrizes, uma triangular inferior e outra triangular superior Le U, respectivamente.

Para que uma matriz tenha decomposição LU, o determinante de todos os seus menores principais deve ser diferente de zero. Vamos checar essa condição para nossa matriz A:

Primeiro menor principal:

$$\det([3]) = 3 \neq 0$$

Segundo menor principal:

$$det\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

Agora que sabemos que a matriz de coeficientes pode ser decomposta, vamos começar fazendo a Eliminação de Gauss. Porém, dessa vez, iremos guardar os fatores fij usados para zerar os elementos que ficam abaixo do pivô.

Primeiramente vamos supor uma matriz L de dimensão 3×3 triangular inferior do tipo:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ f21 & 1 & 0 \\ f31 & f32 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obteremos o valor desses fatores durante a Eliminação de Gauss.

O fator f21 é o fator utilizado na Eliminação de Gauss para zerar o elemento da segunda linha que está abaixo do primeiro pivô. Para a matriz A, obtemos da seguinte maneira:

$$f21\,\frac{A(2,1)}{A(1,1)} = \frac{1}{3}$$

Para zerar o elemento abaixo do pivô fazemos:

$$\mathrm{L2} \;=\; \mathrm{L2} \;- \mathrm{f21L1}$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

De maneira similar obtemos o fator f31, que será o fator utilizado para zerar elemento da terceira linha que está abaixo do primeiro pivô.

$$f31\,\frac{A(3,1)}{A(1,1)} = \frac{1}{4}$$

Para zerar o elemento fazemos:

$$\mathrm{L3} \;=\; \mathrm{L3} \;- \mathrm{f31L1}$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{1}{3} & -\dfrac{22}{3} \end{bmatrix}.$$

Por fim, como todos os elementos abaixo do primeiro pivô A11 estão zerados, temos agora como pivô o elemento A22 e precisamos zerar o que está abaixo dele:

$$f32\frac{A32}{A32}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=1$$

Para zerar o elemento:

L3 = L3 -f32L2

Assim,

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}.$$

A matriz triangular superior obtida no final da Eliminação de Gauss é chamada de matriz U. Já a matriz L será a matriz triangular inferior que contém os elementos da diagonal principal iguais a 1, além dos fatores que utilizamos para zerar os elementos, como vimos acima.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & 1 & 0\\ \frac{4}{3} & 1 & 1\end{bmatrix} U=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}$$

Por fim, podemos verificar que, de fato, LU=A:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ \frac{1}{3} & 1 & 0\\ \frac{4}{3} & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & -2\end{bmatrix}.$$

Agora que decompomos a nossa matriz A nas matrizes L e U, podemos usá-las para obter a solução do sistema linear do exemplo. Temos que:

$Ax=b$

$$A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 4\\ 1 & 1 & 2\\ 4 & 3 & -2\end{bmatrix} x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} b=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}.$$

Substituindo a matriz A pelas matrizes LU obtidas:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

O que temos acima é LUx=b. Agora usaremos o vetor de incógnitas auxiliar, y. Definindo Ux=y, temos que Ly=b, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \\ \frac{4}{3} & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

O sistema acima é do tipo triangular inferior, cuja forma de resolver já estudamos anteriormente:

$$y_1 = 1$$

$$y_2 = 2 - \tfrac{1}{3} * y_1 = \tfrac{5}{3}$$

$$y_3 = 3 - \tfrac{4}{3} y_1 - y_2 = 0.$$

Agora retornamos a nossa relação Ux=y:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{5}{3} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Para encontrar finalmente o valor de x, precisamos resolver o sistema triangular superior acima. Logo:

$$x_3 = 0$$

$$x_2 = 2 - \frac{\frac{5}{3} - \frac{2}{3} * 0}{\frac{1}{3}} = 0$$

$$x_1 = \frac{1 - 2 * 5 - 4 * 0}{3} = -3$$

que é a solução do sistema.

6. Exemplo 3 - Decomposição de Matrizes

Seja a matriz$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, vamos determinar a decomposição

A = LU dessa matriz.

Solução:

À

Vamos escalonar a matriz A até chegarmos a uma matriz triangular.

$$L_1 \Leftrightarrow L_2$$

$$L_3 - 4L_1$$

$$L_3 - 2L_2$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

temos que:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Observa-se ainda a participação das matrizes elementares:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} e M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

durante o processo de escalonamento. Em seguida, calculamos as inversas das matrizes:

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{L_3+4L_1} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo,

$$M_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{L_3+2L_2} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$L = (M_2 M_1)^{-1} = M_1^{-1} M_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Como houve a necessidade de permutar linhas da matriz A durante 0 processo de escalonamento, então, pela observação (2), temos uma matriz de permutações P, onde:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dessa forma, temos uma decomposição do tipo:

$$PA = LU$$

ou,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Prova Matemática:

Antes de se iniciar o processo de prova do Método de LU, se faz interessante revisar definições de Álgebra Linear e técnicas de provas que serão utilizadas no processo de validação do Método de Fatoração de LU, sendo esses a definição de Menor Principal e o Método de Prova por Indução.

Prova por Indução:

A Indução Matemática é um processo muito utilizado para se provar resultados em uma grande variedade de objetos discretos. Para se fazer uso desse método de prova é utilizado um determinado predicado P definido para os inteiros n ($P(n)$) e duas seguintes afirmações que são consideradas como verdadeiras à primeira vista:

Afirmação 1: $P(n_0)$ é verdadeiro.

Afirmação 2: Para todos inteiros $k \geq n_0$, se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ é verdadeiro.

Tendo as afirmações e o predicados definidos, o processo de prova é feito dois únicos passos:

Passo Base: provar que $P(n_0)$ é verdadeiro para um dado n_0 específico.

Passe Indutivo: provar que para todos os inteiros $k \geq n_0$, se $P(k)$ é verdadeiro, então $P(k+1)$ é verdadeiro.

Menor Principal (A_k):

A menor Principal de uma Matriz A são as matrizes geradas pelas k primeiras linhas e colunas de A.

Por Exemplo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad A_1 = (a_{11}) \quad A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Generalizando:

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}, k = 1, 2, 3 \ldots . n$$

Tendo isso em vista, se faz possível iniciar o processo de prova do Método de Decomposição de LU.

Teorema: Seja $A = \ a_{ij}$ uma matriz quadrada de ordem n, e A_k o menor principal k. Assumimos que $\det(A_k) \ \neq \ 0$ para $k = 1, 2 , \ldots , k - 1$. Então existe uma única matriz triangular inferior L_{ij}, com $l_{11} = l_{22} = \cdots = l_{nn} = 1$ e uma única matriz triangular superior $U = u_{ij}$, tal que $LU = A$. Além disso, $\det(LU) = \ u_{11}u_{22} \ldots u_{kk}$

De maneira resumida, podemos obter as seguintes informações do Teorema:

Se $\det(A_k) \ \neq \ 0, k = 1, \ldots , n - 1$ então

- L e U existem e são únicas.
- $\det(LU) = \ u_{11}u_{22} \ldots u_{kk}$

Provando por indução, temos dois únicos passos:

Passo 1: Prova-se que o teorema é verdadeiro para $n = 1$.

Passe 2: Prova-se que se o teorema é verdadeiro para $n = k - 1$, ele será verdadeiro para $n = k$.

Passo 1: $A = (a_{11})$

Os únicos L e U que satisfazem são $L = (1), U = (a_{11}) \rightarrow LU = \ A = (a_{11})$

Passo 2: Seja a Matriz A de dimensão k. Pela hipótese do teorema, existe a decomposição LU para A_{k-1}

Pode-se escrever a matriz A como:

$$A = \begin{pmatrix} A_{k-1} & r \\ s & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Definindo as Matrizes:

$$L = \begin{pmatrix} L_{k-1} & 0 \\ m & 1 \end{pmatrix};\ U = \begin{pmatrix} U_{k-1} & p \\ 0 & u_{kk} \end{pmatrix}$$

Fazendo $LU = A$.

$$\begin{pmatrix} L_{k-1}U_{k-1} & L_{k-1}p \\ mU_{k-1} & mp + u_{kk} \end{pmatrix} = A = \begin{pmatrix} A_{k-1} & r \\ s & a_{kk} \end{pmatrix}$$

Da igualdade é possível concluir:

- $L_{k-1}U_{k-1} = A_{k-1}$ confirmando a hipótese de indução.
- $L_{k-1}p = r$
- $mU_{k-1} = s$
- $mp + u_{kk} = a_{kk}$

Isolando os termos resultantes da igualdade:

- $p = L_{k-1}r$
- $m = sU_{k-1}^{-1}$
- $u_{kk} = a_{kk} - mp$

Ademais, é possível notar que

$$\det(A) = \det(L) * \det(U) = 1 * u_{11}u_{22} \dots u_{kk}$$

8. Aplicações na computação

Em **Machine learning**, geralmente lidamos com dados de alta dimensão. Por conveniência, geralmente usamos matrizes para representar dados. A otimização numérica em Machine learning geralmente envolve transformação e computação de matrizes. Para tornar o cálculo de matrizes mais eficiente, sempre fatoramos uma matriz em várias matrizes especiais, como matrizes triangulares por exemplo.

A maneira mais comum de resolver a **Regressão Linear** é por meio de uma otimização de mínimos quadrados que é resolvida usando métodos de fatoração de matrizes de regressão linear, como uma decomposição LU

Podemos utilizar a decomposição LU de matrizes para utilizar o **Esquema de Autenticação de Usuário Remoto.** Este esquema permite que o usuário e o servidor remoto possam se autenticar mutuamente uns aos outros dentro de um ambiente de rede pública. Isto visa melhorar a segurança e fornecer melhor desempenho para o esquema de autenticação de usuários remotos.

O **Esquema de Autenticação de Usuário Remoto** aplica a decomposição LU de matrizes para apresentar um novo esquema de autenticação bilateral. Com isso eles utilizaram a decomposição LU de matrizes para reduzir a complexidade computacional e melhorar a segurança. A decomposição LU de matrizes garante a troca secreta de informações entre o usuário e o servidor e aumenta a segurança do esquema de autenticação.

9. Implementação Computacional

A linguagem utilizada para se implementar a Decomposição de LU foi Python, uma linguagem de alto nível, interpretada e imperativa. A ideia de resolução proposta abaixo consiste na abordagem do problema (Decomposição de LU) em problemas menores, sendo criadas funções encarregadas de resolverem partes individuais do problema. Portanto, a resolução do problema é feita através da junção da resolução de problemas menores.

A primeira função criada é a "*identidade*". Essa função recebe um parâmetro "*n*" e retorna uma matriz Identidade de grandeza $n \times n$.

A próxima função desenvolvida foi a "*lu*". Como o próprio nome sugere, ela é encarregada de gerar as matrizes L e U. Como parâmetro, a mesma recebe uma Matriz A e retorna outras duas matrizes, L e U respectivamente.

As duas funções apresentadas acima são exclusivamente referentes a fatoração da Matriz A em outras duas matrizes (L e U). As próximas funções descritas serão utilizadas para a resolução de sistemas utilizando as matrizes geradas pela decomposição e impressão de matrizes de forma mais clara.

A terceira função criada é a "*formata_matriz*". Essa função recebe uma matriz "M" e retorna um texto formatado para a impressão da matriz passada como parâmetro.

A quarta e a quinta respectivamente são responsáveis por realizar a substituição sucessiva e retroativa de uma determinada Matriz.

Por fim, a sexta função utiliza as funções definidas anteriormente para resolver um sistema, recebendo como parâmetro a Matriz L, Matriz U e o outro lado da igualdade (b). Ou seja, a função "*lux*" resolve a equação $LUx = B$.

Implementação em Python:

```
def identidade(n):
    '''Cria uma matriz identidade de ordem n.
    Parâmetros de entrada:  n é a ordem da matriz.
    Saída: matriz identidade de ordem n.
    '''
    m = []

    for i in range(0, n):
        linha = [0] * n
        linha[i] = 1
        m.append(linha)

    return m

def lu(A):
    '''
    Decompõe a matriz A no produto de duas matrizes L e U. Onde L é uma matriz
    triangular inferior unitária e U é uma matriz triangular superior.
    Parâmetros de entrada: A é uma matriz quadrada de ordem n.
    Saída: (L,U) tupla com as matrizes L e U
    '''
```

```
    n = len(A)

    ## Inicializa a matriz L com a matriz identidade
    L = identidade(n)

    for k in range (0, n-1):

        # Para cada Linha i
        for i in range(k+1, n):

            # Calcula o Fator m
            m = - A[i][k]/A[k][k]
            L[i][k] = -m
            # Atualiza a linha i da matriz, percorrendo as colunas j
            for j in range(k+1, n):
                A[i][j] = m * A[k][j] + A[i][j]

            # Zera o elemento Aik
            A[i][k] = 0

    return (L, A)
def formata_matriz(M):
    m = len(M) # número de linhas
    n = len(M[0]) # número de colunas
    s = ""
    for i in range(m):
```

```
        for j in range(n):
            s += "%9.3f " % M[i][j]
        s += "\n"
    return s


A = [[1, -3, 2],
     [-2, 8, -1],
     [4, -6, 5]]
(L, U) = lu(A)
print("L: \n%s" % formata_matriz(L))
print("U: \n%s" % formata_matriz(U))


def substituicoes_sucessivas(A, b):
    '''Executa o método das substituições sucessivas para resolver o sistema
       linear triangular inferior Ax=b.
       Parâmetros de entrada: A é uma matriz triangular inferior e b é o vetor constante.
       Saída: vetor x
    '''
    ## n é a ordem da matriz A
    n = len(A)

    x = n * [0]

    for i in range(0, n):
        s = 0
        for j in range (0, i):
```

```
        s = s + A[i][j]*x[j]
    x[i] = (b[i]-s)/A[i][i]

  return x



def substituicoes_retroativas(A, b):
  '''Executa o método das substituições retroativas para resolver o sistema
     linear triangular superior Ax=b.
     Parâmetros de entrada: A é uma matriz triangular superior e b é o vetor constante.
  '''
  ## n é a ordem da matriz A
  n = len(A)

  ## inicializa o vetor x com tamanho n e elementos iguais a 0
  x = n * [0]

  for i in range(n-1, -1, -1):
    s = 0
    for j in range(i+1, n):
        s = s + A[i][j] * x[j]
    x[i] = (b[i]-s)/A[i][i]

  return x
def lux(L,U,b):
  '''
```

```
    Resolve o sistema LUx=b.
    Esse método resolve os dois sistemas lineares triangulares.
    Parâmetros de entrada: L é uma matriz triangular inferior de ordem n,
    U é uma matriz triangular superior e b é o vetor constante.
    Saída: vetor x solução do sistema.
    '''

    y = substituicoes_sucessivas(L, b)
    x = substituicoes_retroativas(U, y)

    return x

A = [[1, -3, 2],
     [-2, 8, -1],
     [4, -6, 5]]
b = [11, -15, 29]
(L, U) = lu(A)
x = lux(L, U, b)
print(x)
```

10. Funcionamento do Algoritmo

O algoritmo usará como exemplo a matriz A definida como:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}$$

Logo no início do código é definida uma função de auxílio que irá retornar uma matriz identidade de ordem *n.* No caso da matriz utilizada no algoritmo *n = 3*.

Depois de definir a matriz identidade, é definida a função lu que decompõe a matriz A nas matrizes L e U, onde U é uma matriz triangular superior e L inferior. Esta função recebe a matriz A quadrada de ordem 3. No código inicializamos a matriz L com a matriz identidade.

Respectivamente as matrizes L e U:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 \end{bmatrix}$$

Em seguida temos a função lux, que é encarregada de resolver os dois sistemas lineares, $Ly = b$ e $Ux = y$ onde a função recebe 3 parâmetros que são: L, que é uma matriz triangular inferior de ordem n, U é uma matriz triangular superior e b é o vetor constante, onde x é o vetor solução do sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 8 & -1 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 11 \\ -15 \\ 29 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

O algoritmo imprime no console do compilador as matrizes *L, U e o vetor solução X*. É valido notar que os números nas matrizes ficam no formato de float e por isso possuem casas decimais.

```
L:
    1.000     0.000     0.000
   -2.000     1.000     0.000
    4.000     3.000     1.000

U:
    1.000    -3.000     2.000
    0.000     2.000     3.000
    0.000     0.000   -12.000

[2.0, -1.0, 3.0]
```

11. Desempenho Computacional

Uma das melhores estratégias para o cálculo de gasto computacional de um determinado algoritmo é dividir o mesmo em partes menores e analisa-las individualmente.

A primeira etapa do algoritmo é a fatoração da matriz A em duas matrizes: A Matriz L, sendo ela uma matriz triangular inferior e a Matriz U, uma matriz triangular superior. Após o cálculo, é possível verificar que o custo computacional desse processo é

$$\frac{2n^3}{3} - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6}\ flops$$

Com essa parte concluída, é iniciado o processo de resolução de sistema, que deve ser computador duas vezes pois são resolvidos os sistemas $Ly = b$ e $Ux = y$.

$$2n^2\ flops$$

Realizando a soma dos custos, se obtém o custo total da resolução de um sistema linear utilizando a Decomposição de LU:

$$\frac{2n^3}{3} - \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{6}\ flops$$

É possível estimar o custo computacional para a resolução de m sistemas lineares, sendo necessário somente multiplicar o custo de um sistema pela quantidade de sistemas a serem resolvidos:

$$m\left(\frac{2n^3}{3} - \frac{3n^2}{2} - \frac{n}{6}\right)\ flops$$

Expandido o pensamento acima, caso a quantidade de sistemas seja igual a n é possível se obter o seguinte custo computacional:

$$\frac{2n^4}{3} - \frac{3n^3}{2} - \frac{n^2}{6}\ flops$$

Conforme o n aumenta, o termo que possuir maior representatividade no total do custo é o de mais alta ordem, portanto é possível simplificar o custo computacional da resolução de um único sistema para o seguinte valor:

$$O\left(\frac{2\mathrm{n}^3}{3}\right)$$

12. Referências

AGULLO, Emmanuel. LU factorization for accelerator-based systems. **Multicore architectures enhanced with multiple GPUs are likely to become mainstream High Performance Computing**, [*S. l.*], p. 1-9, 22 abr. 2013.

Álgebra linear e aplicações. 6. ed. rev. São Paulo Atual, 1990.

ANTON, H. & BUSBY, R. **Algebra Linear Contemporânea**. Editora Bookman. Porto Alegre'

RUGGIERO, M.G. & LOPES, V.L.R. **Cálculo Numérico – Aspectos Computacionais**, Pearson Education. São Paulo

ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra Linear com Aplicações**. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012.
Lay,David,C. LAY, **Álgebra Linear e Suas Aplicações** . 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1999.

CALLIOLI, Carlos A. (1926-89); DOMINGUES, Hygino H; COSTA, Roberto C. F.

CMAC NORDESTE 2012, 2012, Nordeste. **Comparativo entre fatoração LU tradicional e através das fórmulas de Crout e Doolitlle** [...]. [*S. l.*: *s. n.*], 2012. Disponível em: http://arquivo.sbmac.org.br/cmacs/cmac-ne/2012/trabalhos/PDF/201.pdf. Acesso em: 19 mar. 2022.

COSTA, Alysson. **Cálculo Numérico / Métodos Numéricos**: Sistemas lineares Decomposição LU. [*S. l.*], 2008. Disponível em: https://sites.icmc.usp.br/andretta/ensino/aulas/sme0301-1-11/SistemasLinearesLU.pdf. Acesso em: 19 mar. 2022.

EL SHAHAWY, Salma. Understanding Matrix Factorization for recommender systems. *In*: EL SHAHAWY, Salma. **Understanding Matrix Factorization for recommender systems**. [*S. l.*], 17 jan. 2020. Disponível em: https://towardsdatascience.com/understanding-matrix-factorization-for-recommender-systems-4d3c5e67f2c9. Acesso em: 19 mar. 2022.

FILHO, Claudio; PEREIRA, Clovemilton. **Diagonalização e Decomposição de LU de Matrizes**. Orientador: Roberto Corrêa da Silva. 2009. Trabalho de conclusão de Curso (Especialização em Matemática) - Discente, [*S. l.*], 2009. Disponível em: https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/107664/MTM0027-M.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 19 mar. 2022.

KOZAKEVICH, Daniel; BEAN, Sonia Elena Palomino Castro. **Álgebra linear I.** Florianópolis: UFSC/EAD/CED/CFM, 200

LI, Xiong. Applying LU Decomposition of Matrices to Design Anonymity Bilateral Remote User Authentication Scheme. **LU decomposition of matrices to present an anonymous bilateral authentication scheme**, [*S. l.*], p. 1-11, 11 mar. 2013.

MATRIZES, Sistemas Lineares e Fatoração LU. Orientador: Fagner Lemos de Santana. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Discente, [*S. l.*], 2017. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/bitstream/123456789/25982/1/MatrizesSistemasFatoracao_Vicente_2017.pdf. Acesso em: 19 mar. 2022.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Álgebra linear**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.
BOLDRINI, José Luiz. [et al.]. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

UFRGS. **Fatoração LU.** [*S. l.*], 2020. Disponível em: https://www.ufrgs.br/reamat/CalculoNumerico/livro-py/sdsl-fatoracao_lu.html. Acesso em: 19 mar. 2022.