Лабораторная работа 1

Анастасия Баркина

30 октября 2023 г.

Часть 1. Аналитический метод

1. Найти стационарные точки, т.е. точки, удовлетворяющие необходимому условию экстремума.

$f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$

Найдём первые частные производные:

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \ln(x^2+y^2)\right)$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2y\left(\frac{y^2}{x^2+y^2} + \ln(x^2+y^2)\right)$

Решим систему:

$$\begin{cases} 2xy^2\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} + \ln(x^2+y^2)\right) = 0 \\ 2x^2y\left(\frac{y^2}{x^2+y^2} + \ln(x^2+y^2)\right) = 0 \end{cases}$$

Видим, что корнями являются $x = 0 \land y \neq 0$ а так же $x \neq 0 \land y = 0$, положим, что $x, y \neq 0$, тогда можем переписать в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} + \ln(x^2+y^2) = 0 \\ \frac{y^2}{x^2+y^2} + \ln(x^2+y^2) = 0 \end{cases}$$

Вычтем одно из другого и получим:

$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = 0 \Rightarrow x = y$, подставим в любое из верхних уравнений:

$\frac{x^2}{2x^2} + \ln(2x^2) = 0 \Rightarrow 2\ln(x) = \pm\left(-\frac{1}{2} - \ln(2)\right) \Rightarrow x = \pm e^{-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln(2)} \Rightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{e}}$ Аналогично с y.

Получаем 4 решения $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{e}} \land y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{e}}$.

Теперь проверим достаточное условие, для этого посчитаем вторые частные производные:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2y^2\left(3x^4 + 5x^2y^2 + \left(x^2+y^2\right)^2\ln(x^2+y^2)\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2\left(3y^4 + 5x^2y^2 + \left(x^2+y^2\right)^2\ln(x^2+y^2)\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{4xy\left(x^4 + x^2y^2 + y^4\left(x^2+y^2\right)^2\ln(x^2+y^2)\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Заметим, что для решений $x = 0 \land y \neq 0$ и $x \neq 0 \land y = 0$ матрица Гессе будет неопределена, так как 3 элемента будут равняться 0.

Заметим, что $f(x,y) = 0$ для таких точек, причём при $x^2+y^2 > 1$ и $x \neq 0 \land y \neq 0$, $f(x,y) > 0$ и аналогично $f(x,y) < 0$ при $x^2+y^2 < 1$ и $x \neq 0 \land y \neq 0$.

Тогда решим для $x = 0 \land y \neq 0$, для второго случая аналогично, так как функция симметрична относительно точки $(0,0)$. Положим $x = \Delta x, y_1 = y + \Delta y$. Тогда

$\Delta f = f(0,y) - f(x,y_1) = 0 - \Delta x^2 \left(y + \Delta y\right)^2 \ln\left(\Delta x^2 + \left(y + \Delta y\right)^2\right)$ При $\Delta x = 0$, $\Delta f = 0$, а при $\Delta x \neq 0 \wedge \Delta y \neq 0$ $\Delta f \neq 0$, значит эти точки не являются точками экстремума.

Теперь про оставшиеся 4 точки, аналогично рассмотрим только одну из них. Пусть $x = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{e}} \wedge y = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt[4]{e}}$.

Тогда рассмотрим матрицу Гессе для этой точки:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{e}} & \frac{1}{2\sqrt{e}} \\ \frac{1}{2\sqrt{e}} & \frac{3}{2\sqrt{e}} \end{pmatrix}$$

Заметим, что угловые миноры этой матрицы положительны, значит она положительна определена, следовательно данная точка является точкой минимума.

2. График самой функции.