Chapitre 1

Dérivation, développements limités et intégration

1.1 Dérivation

1.1.1 Définition

Dans toute la suite I désignera un intervalle du type

$$]a,b[,\ ]-\infty,b[,\ ]a,+\infty[.$$

Définition 1.1.1. (Dérivation, (Newton 1643-1727, Leibniz 1646-1716)).

Soit I un intervalle non vide et $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction. Soit x_0 un point de l'intervalle I. On dit que f est *dérivable* en x_0 si et seulement si la fonction *taux d'accroissement*

$$\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

admet une limite quand x tend vers x_0. Cette limite est appelée *nombre dérivé* de f en x_0, noté $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} \tau_{x_0}(x).$$

Remarque 1.1.2. On se ramène souvent à prendre une limite en 0 en posant $x = x_0 + h$:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \tau_{x_0}(x_0+h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

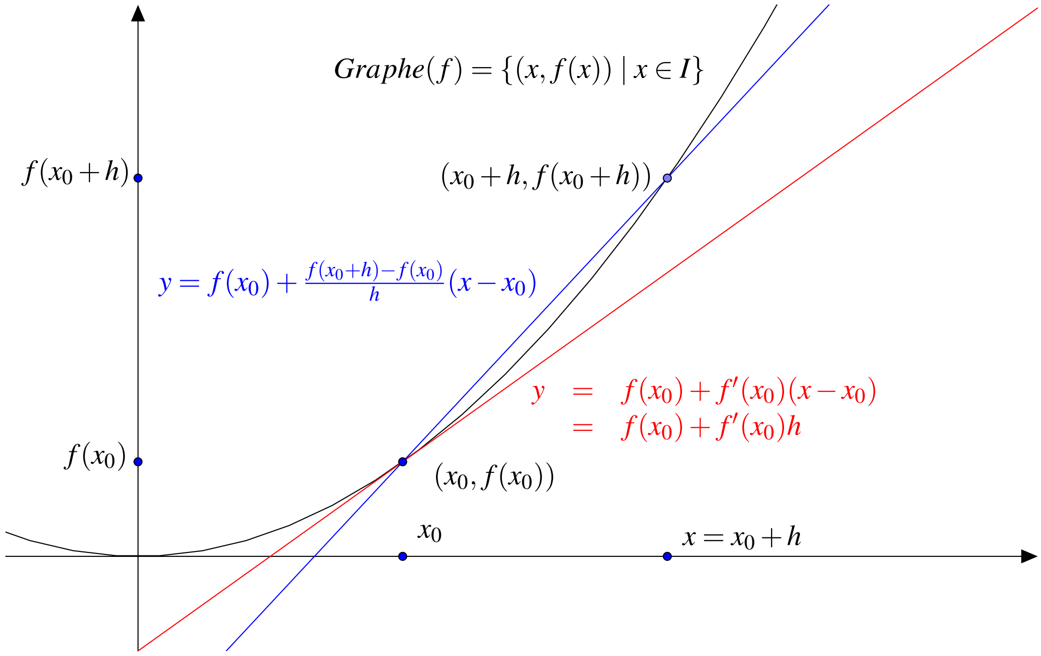
La fonction f est dite dérivable sur l'intervalle I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I. On appelle dérivée de f l'application

$$\begin{array}{rccc} f' & : & I & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & f'(x) \end{array}.$$

1.1.2 Interprétation géométrique

Le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est le *coefficient directeur* de la “corde” passant les points $M_{x_0} = (x_0, f(x_0)$ et $M_{x_0+h} = (x_0+h, f(x_0+h))$. Dire que f est dérivable en x_0 signifie géométriquement que le graphe de f admet une *tangente* au point $(x_0, f(x_0))$. Cette tangente est la droite limite des cordes $(M_{x_0}M_{x_0+h})$. Cette tangente a pour équation

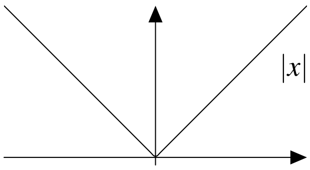
$$T_{x_0,f(x_0)} : y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$



Contre-exemple 1.1.3. La fonction $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. En effet

$$\lim_{h \to 0, h \geq 0} \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1 \text{ et } \lim_{h \to 0, h \leq 0} \frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = -1$$

Son graphe n'admet pas de tangente en 0.



1.1.3 Interprétation physique

Si $f(t)$ représente la position à l'instant t d'un mobile sur un axe, le quotient $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ représente la *vitesse moyenne* du mobile entre les temps t et t_0 alors que le nombre dérivée $f'(t_0)$ représente la *vitesse moyenne* du mobile au temps t_0.

1.1.4 Développement limité à l'ordre 1

Dire que f est dérivable en x_0 de dérivée $f'(x_0)$ signifie qu'il existe une fonction "erreur" $\varepsilon :]a,b[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]a,b[$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$.
Le produit $(x-x_0)\varepsilon(x)$ représente l'erreur commise dans l'approximation de f par le polynôme $f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$.

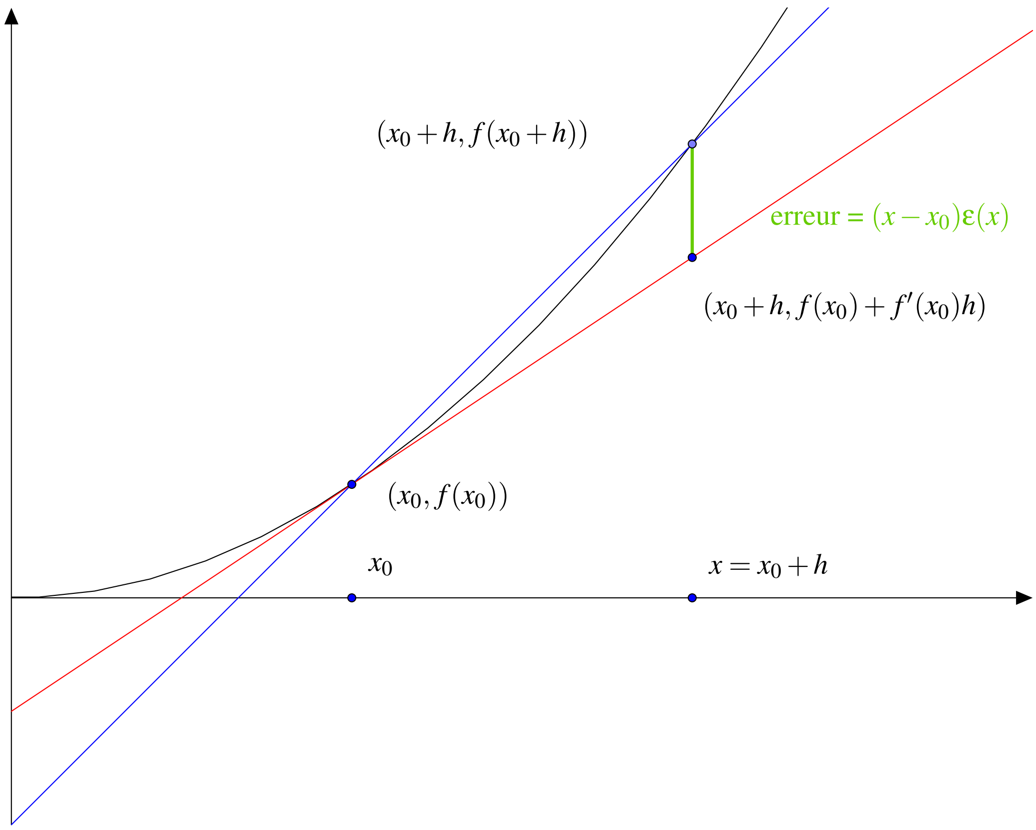
Remarque 1.1.4. La fonction erreur ε est tout simplement

$$\varepsilon \;:\; \begin{array}{ccc} x & \mapsto & \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) \\ x_0 & \mapsto & 0 \end{array}.$$

L'écriture

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + (x-x_0)\varepsilon(x)$$

est le développement limité à l'ordre 1 de f en x_0.



D'après ce qui précède, f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 si et seulement si f est dérivable en x_0.

1.1.5 Opérations sur les dérivées

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. La fonction $f+g$ est dérivable et sa dérivée est la fonction
$$(f+g)' = f' + g'.$$
2. Le produit fg est dérivable et sa dérivée est la fonction
$$(fg)' = f'g + fg'.$$
3. Si de plus la fonction g ne s'annule pas, alors la fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable et sa dérivée est la fonction
$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2},$$
de même la fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable et sa dérivée est la fonction
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

Proposition 1.1.5. *(Dérivée des applications composées).*
Soit $u :]a,b[\to]c,d[$ et $f :]c,d[\to \mathbb{R}$ deux applications. La fonction composée
$$f \circ u : x \in]a,b[\to f(u(x))$$
est bien définie.
Soit $x_0 \in]a,b[$. Si u est dérivable en x_0, si f est dérivable en $u(x_0)$ alors $f \circ u$ est dérivable en x_0 et
$$(f \circ u)'(x_0) = f'(u(x_0))u'(x_0).$$

Remarque 1.1.6. Moyen mnémotechnique avec les notations de Leibniz : si l'on note $F = f \circ u$ alors

$$\frac{dF}{dx} = \frac{df}{du}\frac{du}{dx}.$$

Exemple 1.1.7. Considérons la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$. Cette fonction est la composée de

$$u : x \mapsto x^2 + 1 \text{ et } f : y \mapsto \sqrt{y}$$

leur dérivée sont

$$u'(x) = 2x \text{ et } f'(y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

par application de la proposition précédente, la fonction g est dérivable et

$$g'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1.1.6 Fonction réciproque et dérivée

Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est une fonction strictement croissante ou strictement décroissante alors tout point de l'image de f admet un unique antécédent, dit autrement, toute valeur de f est atteinte une seule fois.

Contre-exemple 1.1.8. La fonction $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}^2$, le point 1 admet deux antécédents 1 et -1, mais cette fonction n'est pas strictement monotone).

Sous l'hypothèse précédente, la fonction f est une bijection de $]a,b[$ sur son image $f(]a,b[)$.
On peut alors définir son *application réciproque* f^{-1} qui a une image de f associe son unique antécédent

$$\begin{array}{ccccccc} f & : &]a,b[& \to & f(]a,b[) & & \\ & & x & \mapsto & f(x) & & \\ & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ & & f^{-1}(y) & \leftarrow & y & & \\ & &]a,b[& \leftarrow & f(]a,b[) & : & f^{-1}. \end{array}$$

Graphe d'une application réciproque. Par définition

$$\text{Graphe}\, f = \{(x, f(x)) \mid x \in]a,b[,\, f(x) \in f(]a,b[)\}$$

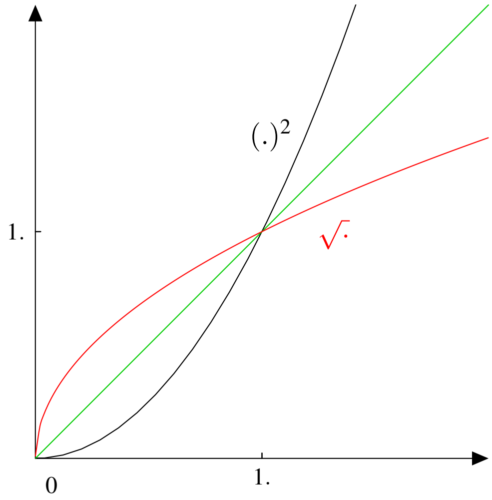
et

$$\text{Graphe}\, f^{-1} = \{(y = f(x), f^{-1}(y) = x) \mid x \in]a,b[,\, y = f(x) \in f(]a,b[)\}$$

Ces graphes sont symétriques l'un par rapport à l'autre par rapport à la droite $\Delta : y = x$.
Remarquons en effet que la symétrie s_Δ envoie le point (x,y) sur le point (y,x).

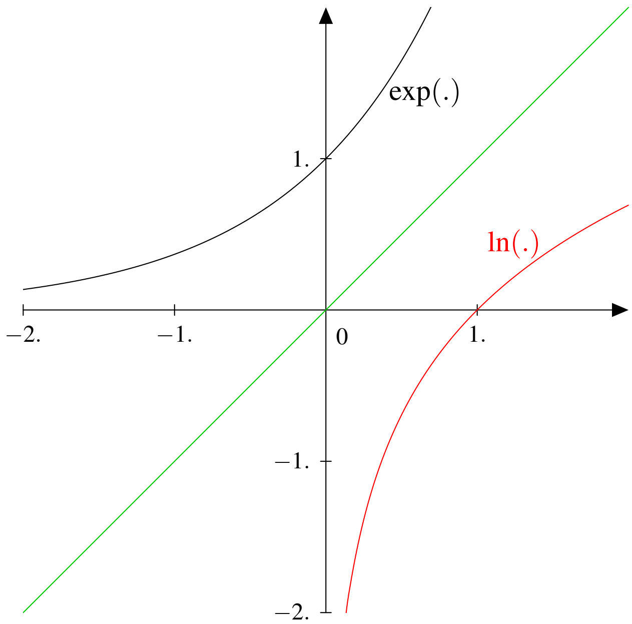
Exemple 1.1.9.

$$\begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \to & x^2 \\ \sqrt{y} & \leftarrow & y \end{array}$$



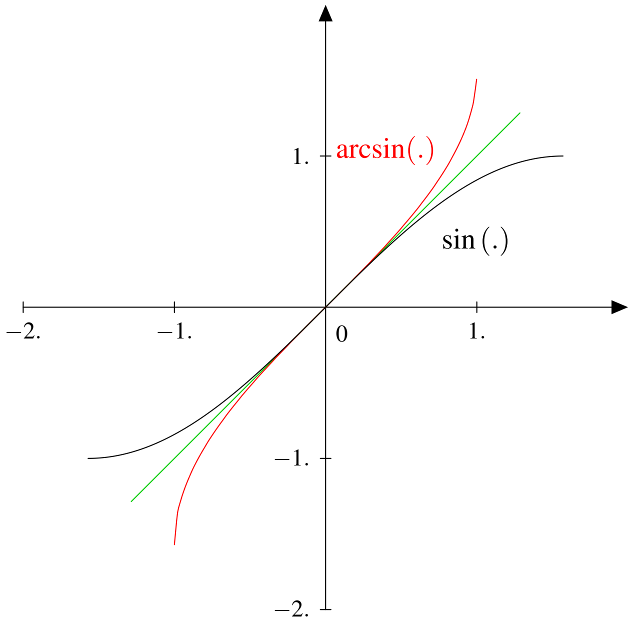
Exemple 1.1.10.

$$\begin{array}{ccc}]-\infty,+\infty[& \to &]0,+\infty[\\ x & \to & \exp(x) \\ \ln(y) & \leftarrow & y \end{array}$$



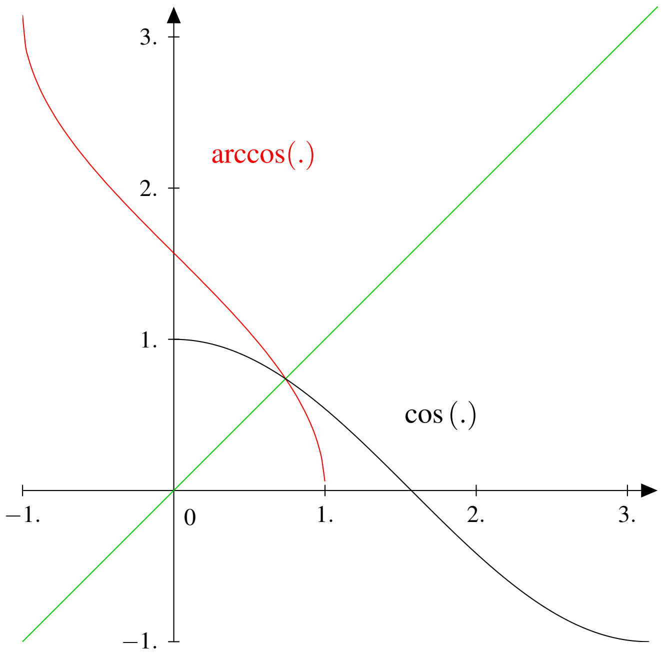
Exemple 1.1.11.

$$\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] & \to & [-1,1] \\ x & \to & \sin(x) \\ \arcsin(y) & \leftarrow & y \end{array}$$



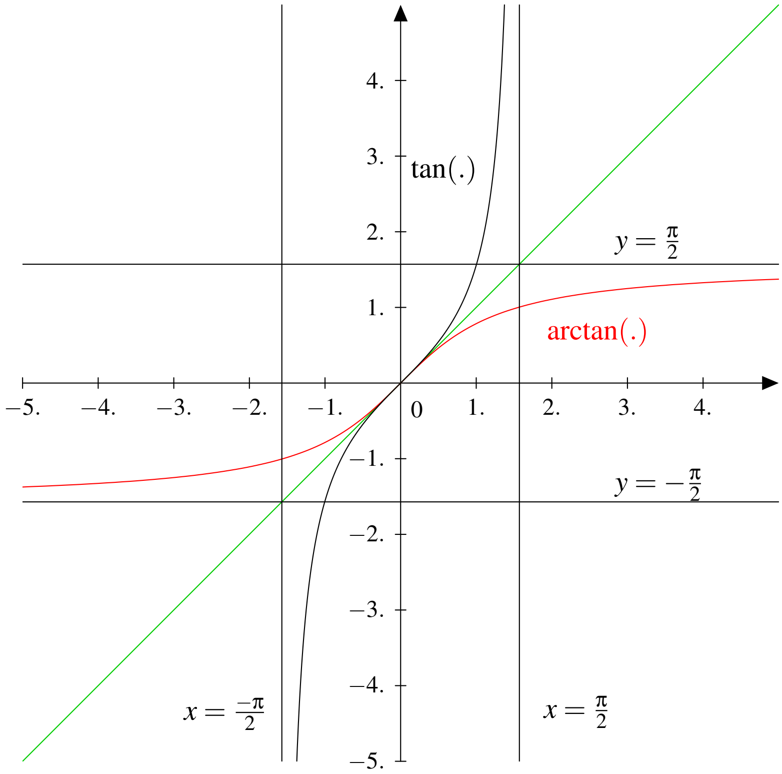
Exemple 1.1.12.

$$\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \to & \cos(x) \\ \arccos(y) & \leftarrow & y \end{array}$$



Exemple 1.1.13.

$$\begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \to & \mathbb{R} \\ x & \to & \tan(x) \\ \arctan(y) & \leftarrow & y \end{array}$$



Proposition 1.1.14. *(Dérivée d'une fonction réciproque).*
Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et strictement monotone. La fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} dérivable. La dérivée est

$$f^{-1}(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Démonstration. Remarquons que pour tout x appartenant à $]a,b[$, nous avons l'égalité

$$f^{-1}(f(x)) = x.$$

Si l'on dérive cette égalité nous obtenons

$$f'(x).(f^{-1})'(f(x)) = 1$$

d'où l'on déduit

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

en notant $x = f^{-1}(y)$ et $y = f(x)$ nous obtenons la relation

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

□

Exemple 1.1.15. On applique cette formule aux exemples précédents :

1. $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

$$(\sqrt{.})'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

2. $f(x) = \exp(x)$, $f'(x) = \exp(x)$

$$(ln)'(y) = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}.$$

3. $f(x) = \sin(x)$, $f'(x) = \cos(x)$, pour tout $y \in]-1,1[$

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin y))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

4. $f(x) = \cos(x)$, $f'(x) = -\sin(x)$, pour tout $y \in]-1,1[$

$$\arccos'(y) = \frac{1}{-\sin(\arccos(y))} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

5. $f(x) = \tan(x)$, $f'(x) = 1+\tan^2(x)$, pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} = \frac{1}{1+y^2}.$$

1.2 Développements limités

Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$, une fontion dérivable. Si f' est dérivable, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f' et on l'appelle dérivée seconde de f. Si f est n-fois dérivable, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.

Définition 1.2.1. Soit $f :]a;b[\to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in]a,b[$. On dit que f admet un *développement limité* à l'ordre n en x_0 si et seulement si il existe un polynôme P_{n,x_0} de degré inférieur à n et une fonction erreur $\varepsilon_{n,x_0} :]a,b[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \in]a,b[,\ f(x) = P_{n,x_0} + (x-x_0)^n \varepsilon_{n,x_0}(x)$$

avec $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_{n,x_0}(x) = 0$

Remarque 1.2.2. Cette fonction ε_{n,x_0} est totalement déterminée par

$$\begin{array}{cccc} \varepsilon_{n,x_0} & : &]a,b[& \to & \mathbb{R} \\ & & x \neq x_0 & \mapsto & \frac{f(x)-P_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^n} \\ & & x_0 & \mapsto & 0. \end{array}$$

Exemple 1.2.3. La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ admet un développement limité à l'ordre n en 0 :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + x^n \varepsilon_{n,0}(x) \tag{1.1}$$

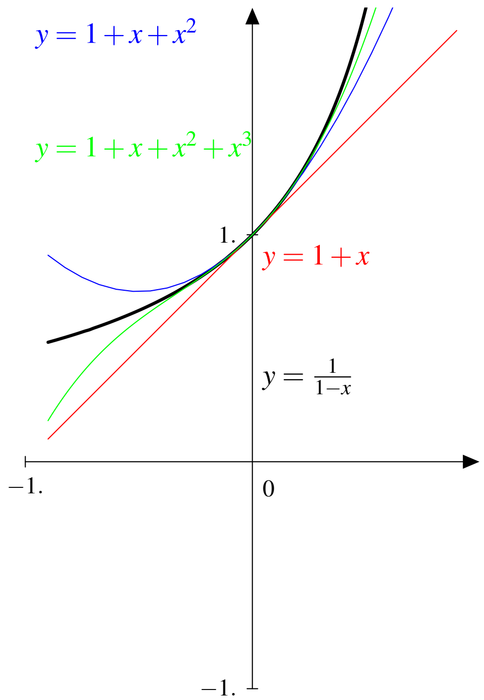
avec $\varepsilon_{n,0}(x) = \frac{x}{1-x}$. On vérifie bien que $\lim_{x \to x_0} \varepsilon_{n,0}(x) = 0$. L'égalité 1.1 vient de la formule de sommation d'une série géométrique

$$1 + x + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Dans le dessin suivant nous traçons les approximations suivantes de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$:

1. $x \mapsto 1 + x$
2. $x \mapsto 1 + x + x^2$
3. $x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3$

Observez comme l'approximation devient de plus en plus précise localement au point $(0,1)$:



Plus l'on monte en degré plus l'approximation est précise.

Proposition 1.2.4. *(Unicité d'un développement limité).*
Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, celui-ci est unique.

Démonstration. Supposons que f admette deux développements limités en 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \varepsilon(x) = b_0 + \ldots + b_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n \eta(x)$$

avec $\lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = \lim_{x\to x_0} \eta(x) = 0$. Notons i le plus petit entier tel que a_i et b_i sont différents, par différence on obtient donc

$$(a_i - b_i)(x-x_0)^i + \ldots + (a_n - b_n)(x-x_0)^n + (x-x_0)^n(\varepsilon(x) - \eta(x)) = 0,$$

on divise alors tout par $(x-x_0)^i$ et l'on obtient

$$(a_i - b_i) + (a_{i+1} - b_{i+1})(x-x_0) + \ldots + (a_n - b_n)(x-x_0)^{n-i} + (x-x_0)^{n-i}(\varepsilon(x) - \eta(x)) = 0$$

on fait alors tendre x vers x_0 et l'on obtient $a_i = b_i$. Contradiction. On obtient ainsi que $a_i = b_i$ pour tout i et l'on conclut que $\varepsilon(x) = \eta(x)$. □

La proposition suivante, montre que sous certaines conditions un développement limité existe toujours.

Proposition 1.2.5. *(Formule de Taylor-Young) (Taylor (1685-1731)).*
Si $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ est n-fois dérivable alors f admet un développement limité à l'ordre n : il existe une fonction erreur ε_{n,x_0} : $]a,b[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]a,b[$

$$f(x) = T_{n,x_0}(x) + (x-x_0)^n \varepsilon_{n,x_0}(x)$$

avec

$$T_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f^{(2)}(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

et $\lim_{x\to x_0} \varepsilon_{n,x_0} = 0$. Le polynôme $T_{n,x_0}(x)$ est appelé polynôme de Taylor de f en x_0 à l'ordre n.

Démonstration. Donnons les principales idées de preuve. La preuve se fait par récurrence sur n.
Si $n = 1$ l'existence du développement limité est donnée par la dérivabilité voir la section précédente.
Supposons la formule vraie pour toute fonction n-fois dérivable sur $]a,b[$ en tout point x_0 de $]a,b[$. Considérons une fonction $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$. Sa dérivée f' vérifie les hypothèses de l'hypothèse de récurrence. Par conséquent pour tout point x_0 de $]a,b[$ elle admet un développement limité à l'ordre n que l'on peut intégrer par le théorème d'intégration terme à terme ci-dessous. On conclut alors par le théorème de récurrence. □

Remarque 1.2.6. (Exactitude de la formule pour les polynômes). Soit P un polynôme à coefficients réels de degré d, pour tout α réel on a

$$P(x) = P(\alpha) + P^{(1)}(\alpha)(x-\alpha) + \ldots + \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k + \ldots + \frac{P^{(d)}(\alpha)}{d!}(x-\alpha)^d.$$

Démonstration. Soit P un polynôme à coefficients réels, de degré d. Par divisions euclidiennes successives on obtient une écriture de P sous la forme

$$P(x) = a_0 + a_1(x-\alpha) + \ldots + a_k(x-\alpha)^k + \ldots + a_d(x-\alpha)^d.$$

Montrons l'égalité pour tout k : $a_k = \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!}$.
Ecrivons $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i(x-\alpha)^i$. Montrons par récurrence sur l'ordre de dérivation la formule

$$P^{(k)}(x) = \sum_{i \geq k} a_i(i.(i-1)\ldots(i-k+1))(x-\alpha)^{i-k}.$$

1. En dérivant la formule $P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i(x-\alpha)^i$ nous obtenons l'égalité $P'(x) = \sum_{i=1}^{d} ia_i(x-\alpha)^{i-1}$ qui est de la forme souhaitée.
2. On suppose la formule vraie à l'ordre k. En la dérivant on obtient la formule à l'ordre $k+1$.
3. On conclut par le principe de récurrence.

Ainsi en évaluant en α nous obtenons

$$P^{(k)}(\alpha) = a_k k!.$$

□

Remarque 1.2.7. Attention admettre un développement limité à l'ordre 2 en un point n'implique pas que la fonction soit dérivable deux fois ! Par exemple la fonction

$$f : x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3 \sin\frac{1}{x}$$

prolongée par 0 en 0 admet comme développement limité

$$f(x) = 1 + x + x^2 + x^2(x\sin\frac{1}{x})$$

mais n'est pas deux fois dérivables.

Remarque 1.2.8. Attention le développement limité d'une fonction peut être nul à tout ordre en un point x_0 sans que la fonction soit elle même nulle sur un voisinage :

$$x \mapsto \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.2.1 Développements usuels en 0

Par application de la formule de Taylor-Young et des opérations sur les développements limités qui suivent nous obtenons les développements limités des fonctions usuelles en 0 à l'ordre n ou $2n$:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + x^n\varepsilon_n(x)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + (-1)^n\frac{1}{2n!}x^{2n} + x^{2n}\varepsilon_{2n}(x)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + (-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon_{2n+1}(x)$$

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2} = 1 + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{1}{2n!}x^{2n} + x^{2n}\varepsilon_{2n}(x)$$

$$\mathrm{sh}\,(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1} + x^{2n+1}\varepsilon_{2n+1}(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon_n(x)$$

Exemple : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon_2(x)$.

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \ldots + x^n + x^n\varepsilon_n(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \ldots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon_n(x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \ldots - \frac{1}{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_{n+1}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}x^{n+1} + x^{n+1}\varepsilon_{n+1}(x)$$

tout ceci avec la convergence vers 0 des diverses fonctions $x \mapsto \varepsilon_k(x)$ lorsque x tend vers 0, pour $k = n, n+1, 2n, 2n+1$.

Remarque 1.2.9 (Où l'on se ramène à un développement limité en 0)**.** On peut calculer le développement limité d'une fonction f en un point x_0 en se ramenant à calculer le développement limité en 0 de la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$.

Par exemple la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ admet un développement limité en 1. On le calcul à partir du développement limité en 0 de la fonction $h \mapsto \frac{1}{1+h}$:

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 + \ldots + (-1)^{n+1}h^n + h^n\varepsilon_n(h)$$

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 + \ldots + (-1)^{n+1}(x-1)^n + (x-1)^{\varepsilon}_n(x-1)$$

avec $\lim_{h\to 0}\varepsilon_n(h) = 0$.

1.2.2 Utilisations des développements limités

L'approximation fournie par la théorie des développements limités rend de grand service dans les problèmes suivants

Calculs de limite Calculons la limite quand x tend vers 0 de la fonction $\frac{\sin 3x - \sin 2x}{x}$.

On utilise le développement limité à l'ordre 2 des fonctions $\sin 3x$ et $\sin 2x$: pour tout réel x nous avons

$$\sin 3x = 3x + x^2\varepsilon_2(x) \text{ et } \sin 2x = 2x + x^2\eta_2(x)$$

où ε_2 et η_2 sont deux fonctions qui tendent vers 0 quand x tend 0.
On obtient alors pour tout réel x

$$\frac{\sin 3x - \sin 2x}{x} = \frac{(3x + x^2\varepsilon_2(x)) - (2x + x^2\eta_2(x))}{x} = 1 + x(\varepsilon_2(x) - \eta_2(x)).$$

Nous pouvons ainsi conclure

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x - \sin 2x}{x} = 1.$$

Position d'une courbe par rapport à sa tangente Considérons la fonction $\sin 3x$ et précisons la position du graphe par rapport à sa tangente en 0. En effectuant le développement limité à l'ordre 3 en 0 nous obtenons

$$\sin 3x = x - \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon_3(x).$$

La tangente en 0 est la droite $y = x$. Ainsi nous avons l'approximation

$$\sin 3x - x \simeq -\frac{1}{3!}x^3.$$

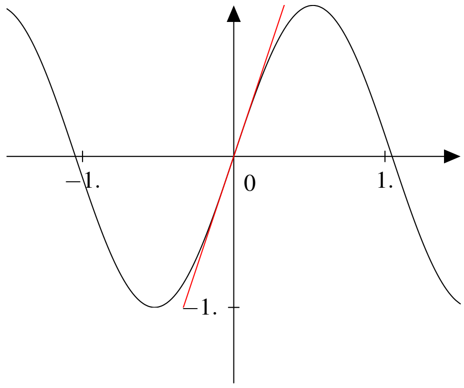
ceci induit les inégalités

$$\text{pour } 0 \leq x << 1 \text{ on a, } \sin 3x \leq x$$

et

$$\text{pour } 0 \geq x >> -1 \text{ on a, } \sin 3x \geq x$$

ce qui signifie qu'au voisinage de 0, le graphe de cette fonction est sous sa tangente pour $x > 0$ et au-dessus de sa tangente pour $x < 0$.



Asymptote et position d'une courbe par rapport à son asymptote.
On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$. On pose $h = \frac{1}{x}$ et $F(h) = f(x)$.

1. Nous avons $F(h) = \frac{1}{|h|}\sqrt{1+h+h^2}$.
2. On suppose $h \geq 0$. On a donc

$$F(h) = \frac{1}{h}\sqrt{1+h+h^2} = \frac{1}{h}(1+\frac{1}{2}h+\frac{3}{8}h^2+o(h^2))$$

   c'est à dire

$$F(h) = \frac{1}{h}+\frac{1}{2}+\frac{3}{8}h+o(h).$$

   En remplaçant h par $1/x$ nous obtenons

$$f(x) = x+\frac{1}{2}+\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

   appelé développement asymptotique à l'ordre 1 de f en $+\infty$.
   La courbe représentative de f admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote d'équation $y = x+\frac{1}{2}$ avec

$$f(x)-\left(x+\frac{1}{2}\right) \simeq \frac{3}{8x}$$

   (par un raisonnement analogue au précédent) on en déduit que cette différence est positive au voisinage de $+\infty$, la courbe est au dessus de son asymptote.
3. On suppose $h \leq 0$. En ce cas

$$F(h) = -\frac{1}{h}\sqrt{1+h+h^2} = -\frac{1}{h}-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}h+o(h)$$

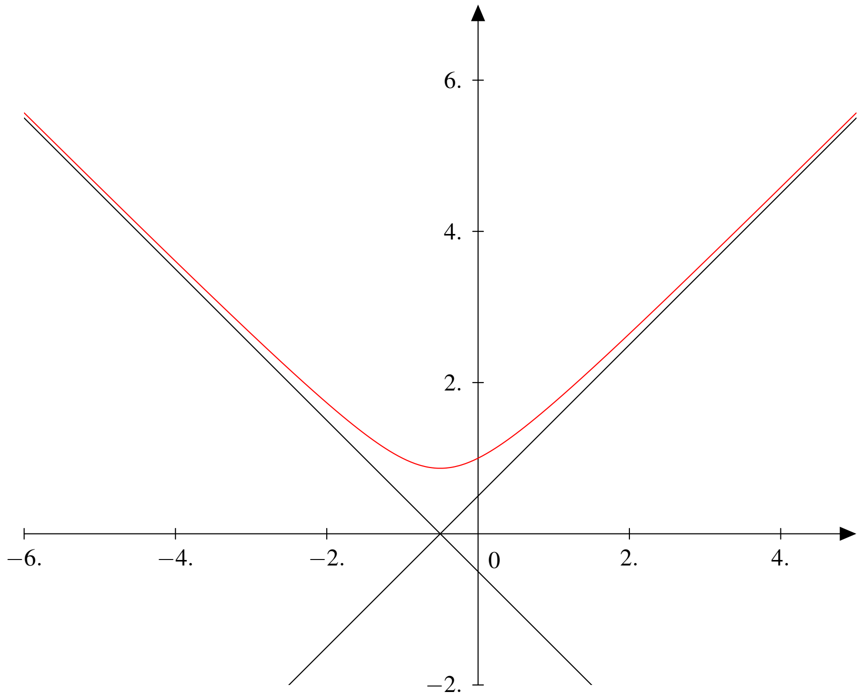
   d'où le développement asymptotique

$$f(x) = -x-\frac{1}{2}-\frac{3}{8x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

La courbe représentative de f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote d'équation $y = -x - \frac{1}{2}$ et nous avons au voisinage de $-\infty$

$$f(x) - (-x - \frac{1}{2}) \simeq -\frac{3}{8x}$$

qui entraîne qu'au voisinage de $-\infty$, le graphe est au dessus de cette asymptote.



1.2.3 Opérations sur les développements limités

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a,b[$ et admettant un développement limité à l'ordre n en un point x_0 : il existe donc deux polynômes $P_{n,x_0}(x)$ et $Q_{n,x_0}(x)$ de degré inférieur à n et deux fonctions erreurs $\varepsilon_n(x)$ et $\eta_n(x)$ qui tendent vers 0 quand x tend vers 0 et telle que

$$f(x) = P_{n,x_0}(x) + (x - x_0)^n \varepsilon_n(x)$$

$$g(x) = Q_{n,x_0}(x) + (x - x_0)^n \eta_n(x)$$

Somme La fonction somme $f + g$ admet un développement limité à l'ordre n au point x_0

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = P(x) + Q(x) + (x - x_0)^n (\varepsilon_n(x) + \eta_n(x))$$

avec $\lim_{x \to x_0} (\varepsilon_n(x) + \eta_n(x)) = 0$.

Produit La fonction $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0 obtenu en faisant le produit des développements limités à l'ordre n de f et de g et en le tronquant à l'ordre n.

Exemple 1.2.10. Considérons

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^2 \varepsilon(x)$$

et

$$g(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \eta(x)$$

avec $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = \lim_{x \to 0} \eta(x) = 0$.
On effectue le produit et on obtient

$$f(x).g(x) = (1 + x + x^2 + x^2 \varepsilon(x))(1 - \frac{x^2}{2} + x^2 \eta(x))$$

que l'on calcule comme suit, en tronquant à l'ordre 2

$$\begin{array}{rcllllll}
f(x)g(x) & = & 1 & & - & \frac{1}{2}x^2 & + & x^2\eta(x) \\
& & + & x & & & & -\frac{1}{2}x^3+x^3\eta(x) \\
& & & + & x^2 & & & -\frac{1}{2}x^4+x^4\eta(x) \\
& & & & + & x^2\varepsilon(x) & & -\frac{1}{2}x^4+x^4\varepsilon(x)\eta(x) \\
& = & 1 & + & x & + & \frac{1}{2}x^2 & + \; x^2\gamma(x)
\end{array}$$

avec

$$\gamma(x)=\eta(x)+\varepsilon(x)-\frac{x}{2}+x\eta(x)-\frac{x^2}{2}(1+\varepsilon(x))+x^2\eta(x)+\eta(x)\varepsilon(x)$$

qui est bien une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

Développement limité d'une composée

Soit $u :]a,b[\to\mathbb{R}$ et $f :]c,d[\subset u(]a,b[)\to\mathbb{R}$ deux fonctions.
Si u admet un développement limité à l'ordre n en x_0

$$u(x)=P_{n,x_0}(x)+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

avec $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x)=0$, si f admet un développement limité à l'ordre n en $u(x_0)$

$$f(y)=Q_{n,u(x_0)}(y)+(y-u(x_0))^n\eta(y)$$

alors $f\circ u$ admet un développement limité à l'ordre n en x_0 obtenu comme suit

1. on remplace y par $u(x)$
$$f(u(x))=Q_{n,u(x_0)}(u(x))+(u(x)-u(x_0))^n\eta(u(x))$$
2. on remplace $u(x)$ par son développement limité :
$$f(u(x))=Q_{n,u(x_0)}(P_{n,x_0}(x)+(x-x_0)^n\varepsilon(x))+(u(x)-u(x_0))^n\eta(P_{n,x_0}(x)+(x-x_0)^n\varepsilon(x))$$
3. on développe, les termes d'ordre $\leq n$ forment le polynôme d'approximation, les autres forment le terme d'erreur.

Exemple 1.2.11. Donnons le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $g(x)=\frac{1}{1-\sin x}$ définie sur $]-\pi/2,\pi/2[$.

1. On regarde $u(x)=\sin x$ et $f(y)=\frac{1}{1-y}$ de sorte que $g(x)=f(u(x))$.
2. On effectue le développement limité à l'ordre 2 de $\sin x$ en 0
$$u(x)=x+x^2\varepsilon(x).$$
avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$.
3. On effectue le développement limité à l'ordre 2 de f en $u(0)=0$
$$f(y)=1+y+y^2+y^2\eta(y),$$
avec $\lim_{y\to 0}\eta(y)=0$.
4. On compose :
$$f(u(x))=1+(x+x^2\varepsilon(x))+(x+x^2\varepsilon(x))^2+(x+x^2\varepsilon(x))^2\eta(x+x^2\varepsilon(x)).$$

5. On développe

$$\begin{aligned}
f(u(x)) &= 1 \\
&\quad + x + x^2\varepsilon(x) \\
&\quad + x^2 + 2x^3\varepsilon(x) + x^4\varepsilon(x)^2 \\
&\quad + (x+x^2\varepsilon(x))^2\eta(x+x^2\varepsilon(x)) \\
&= 1 + x + x^2 + x^2\gamma(x)
\end{aligned}$$

avec

$$\gamma(x) = \varepsilon(x) + 2x\varepsilon(x) + x^2\varepsilon(x)^2 + (1+x\varepsilon(x))^2\eta(x+x^2\varepsilon(x)).$$

Notations de Landau

On utilise la notation de Landau suivante : toute fonction de la forme $x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$ sera notée $o(x^n)$. Ceci est un abus de notation car on ne voit plus la dépendance en ε. Il faut donc être prudent dans son utilisation. Donnons les règles d'utilisation :

$$o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$$

en effet ces $o(x^n)$ s'écrivent sous la forme

$$o(x^n) = x^n\varepsilon(x) \text{ et } o(x^n) = x^n\eta(x)$$

et en sommant on obtient

$$x^n\varepsilon(x) + x^n\eta(x) = x^n(\varepsilon(x) + \eta(x))$$

qui est bien un $o(x^n)$ car

$$\lim_{x\to 0}(\varepsilon(x)+\eta(x)) = \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) + \lim_{x\to 0}\eta(x) = 0.$$

De même

$$o(x^n).o(x^m) = o(x^{n+m}).$$

Une fonction $o(x^n)$ est aussi un $o(x^{n-k})$: cette fonction s'écrit en effet sous la forme $x^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$, on peut donc l'écrire sous la forme $x^{n-k}(x^k\varepsilon(x))$ et l'on a toujours $\lim_{x\to 0} x^k\varepsilon(x) = 0$.
On étend cette notion à $o((x-x_0)^n)$ qui symbolise une fonction de la forme $(x-x_0)^n\varepsilon(x)$ avec $\lim_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$.

Reprenons le calculs précédent :

$$\begin{aligned}
f(u(x)) &= 1 \\
&\quad + x + o(x^2) \\
&\quad + x^2 + o(x^2) \\
&\quad + o(x^2) \\
&= 1 + x + x^2 + o(x^2).
\end{aligned}$$

Intégration et dérivation d'un développement limité Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, si la dérivée f' admet un développement limité à l'ordre n en un point x_0

$$f'(x) = f'(x_0) + q_1(x-x_0) + \ldots + q_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ obtenu en intégrant terme à terme à partir de la formule suivante (que nous reverrons dans le paragraphe suivant)

$$f(x) - f(x_0) = \int_x^{x_0} f'(t)dt$$

c'est à dire

$$f(x)-f(x_0)=\int_{x_0}^{x} f'(x_0)dt+\int_{x_0}^{x} q_1(t-x_0)dt+\ldots+\int_{x_0}^{x} q_n(t-x_0)^n dt+\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n\varepsilon(t)dt$$

donc

$$f(x)-f(x_0)=(x-x_0)f'(x_0)+q_1\frac{(x-x_0)^2}{2}+\ldots+q_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}+\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n\varepsilon(t)dt.$$

Montrons que $\lim_{x\to x_0}\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n\varepsilon(t)dt=0$. En effet la fonction $t\mapsto\varepsilon(t)$ tend vers 0 quand $x\to x_0$. En particulier pour tout $\alpha>0$, il existe $\beta>0$ tel que pour tout $t\in]x_0-\beta,x_0+\beta[$, $|\varepsilon(t)|\leq\alpha$. En particulier, pour tout $x\in]x_0-\beta,x_0+\beta[$,

$$\frac{\left|\int_{x_0}^{x}(t-t_0)^n\varepsilon(t)dt\right|}{|x-x_0|^{n+1}}\leq\frac{\alpha\left|\int_{x_0}^{x}(t-t_0)^n\varepsilon(t)dt\right|}{|x-x_0|^{n+1}}\leq\alpha$$

ceci montre que $\lim_{x\to x_0}\int_{x_0}^{x}(t-x_0)^n\varepsilon(t)dt=0$.

Exemple 1.2.12. Par intégration, on déduit du développement limité en 0

$$\frac{1}{1-x}=1+\ldots+x^n+x^n\varepsilon(x)$$

le développement limité à l'ordre $n+1$ de la fonction

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{n+1}+x^{n+1}\gamma(x).$$

De même, si f est une fonction dérivable en un point x_0 et f admet un développement limité à l'ordre n en x_0 :

$$f(x)=f(x_0)+q_1(x-x_0)+\ldots+q_n(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x)$$

alors f' admet un développement limité à l'ordre $n-1$ en x_0 obtenu en dérivant termes à termes le développement limité :

$$f'(x)=q_1+2q_2(x-x_0)+\ldots+nq_n(x-x_0)^{n-1}+(x-x_0)^{n-1}((x-x_0)\varepsilon'(x)+n(x-x_0)\varepsilon(x)),$$

on vérifie bien que

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\varepsilon'(x)+n(x-x_0)\varepsilon(x)=0.$$

Exemple 1.2.13. Nous savons que la dérivée de l'exponentielle e^x est elle-même, vérifions la formule :

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)$$

dérivons

$$e^x=0+1+\frac{2x}{2!}+\ldots+\frac{nx^{n-1}}{n!}+x^n\varepsilon'(x)+nx^{n-1}\varepsilon(x)$$

c'est à dire

$$e^x=1+x+\ldots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+x^{n-1}(x\varepsilon'(x)+n\varepsilon(x))$$

on vérifie bien que $\lim_{x\to 0}x\varepsilon'(x)+n\varepsilon(x)=0$, ce qui montre que l'on retrouve bien la formule souhaitée.

1.3 Intégration et primitives

1.3.1 Primitives et intégrales d'une fonction continue

Définition 1.3.1. Soit f une fonction continue d'une variable réelle définie sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction F dérivable dont la dérivée est f.

Remarque 1.3.2. Si F est une primitive de f alors toute fonction de la forme $x \mapsto F(x) + C$ avec C une constante réelle est une primitive de f. Réciproquement si on considère deux primitives de f, F_1 et F_2, leur différence est de dérivée nulle $(F_1 - F_2)' = 0$. Comme on travaille sur un intervalle, ceci entraîne (théorème des accroissements finis par exemple) qu'il existe une constante C telle que $F_2 = F_1 + C$.

Théorème 1.3.3. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I, soit a un point de I.*

1. *La fonction*
$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$
est l'unique primitive de f qui s'annule en a.
2. *Pour toute primitive F de f sur I on a*
$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Démonstration. 1. Notons $\Phi : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)dt$. Remarquons que $\Phi(a) = 0$. Nous voulons montrer que Φ est dérivable en tout point x_0 de I de dérivée $f(x_0)$. Par définition il s'agit donc de montrer que
$$\lim_{h \to 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0),$$
ou encore
$$\lim_{h \to 0} [\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)] - hf(x_0) = 0.$$
Fixons h réel, par la relation de Chasles nous avons
$$[\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)] - hf(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - hf(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)]\, dt.$$
On souhaite montrer que cette intégrale tend vers 0 quand h tend vers 0. Ceci provient de la continuité de f en x_0 :
Pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe η avec $1 > \eta > 0$ tel que pour tout $t \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta] \cap I$ on ait $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$.
Par conséquent pour $|h| \leq \eta$ nous obtenons
$$\left| [\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)] - hf(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - hf(x_0) \right| \leq \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt \leq \varepsilon\eta \leq \varepsilon.$$
On obtient ainsi le résultat par définition de la limite.
Soit F est une autre primitive de f qui s'annule en a. Comme on travaille sur un intervalle I, il existe une constante C tel que $F = \Phi + C$. En évaluant en a nous obtenons $C = 0$. La fonction Φ est donc l'unique primitive de f qui s'annule en a.

2. Soit F une primitive de f. Par l'argument précédent il existe une unique constante C telle que $F = \Phi + C$. En évaluant en a on obtient $C = F(a)$. Ceci montre que pour tout $x \in I$
$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt.$$

□

→ Par conséquent le calcul de l'intégrale d'une fonction continue se ramène à la détermination d'une primitive de cette fonction :
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

1.3.2 Calculs de primitives

Rappelons les primitives usuelles :

intervalle	fonction	primitive
$\mathbb{R}_+^*$	$x^m, m \neq -1$	$\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$
$\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$
$\mathbb{R}$	$e^{\lambda x}, \lambda \neq 0$	$\frac{1}{\lambda}e^{\lambda x} + C$
$\mathbb{R}$	$a^x, a > 0 \,\mathrm{et}\, a \neq 1$	$\frac{1}{\ln a}a^x + C$
$\mathbb{R}$	$\cos ax, a \neq 0$	$\frac{1}{a}\sin ax + C$
$\mathbb{R}$	$\sin ax, a \neq 0$	$-\frac{1}{a}\cos ax + C$
$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
$]-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\tan x + C$
$]0 + k\pi, \pi + k\pi[, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\frac{1}{\tan x} + C$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{ch}\, ax, a \neq 0$	$\frac{1}{a}\mathrm{sh}\, ax + C$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{sh}\, ax, a \neq 0$	$\frac{1}{a}\mathrm{ch}\, ax + C$
$\mathbb{R}$	$\mathrm{th}\, x$	$\ln \mathrm{ch}\, x + C$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} = 1 - \mathrm{th}^2 x$	$\mathrm{th}\, x + C$
$\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$	$-\frac{1}{\mathrm{th}\, x} + C$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{x^2+1}$	$\arctan x + C$
$]-1, 1[$	$\frac{1}{1-x^2}$	$\mathrm{argth}\, x + C = \frac{1}{2}\ln\left\lvert\frac{x+1}{x-1}\right\rvert$
$]-1, 1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + C$
$]1, +\infty[$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\mathrm{argch}\, x + C$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\mathrm{argsh}\, x + C$

1.3.3 Intégration par parties

Théorème 1.3.4 (Intégration par parties)**.** *Soit u et v deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$ on a l'égalité*

$$\int_a^x u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^x - \int_a^x u(t)v'(t)dt.$$

Démonstration. En effet u et v étant dérivables, le produit uv est dérivable avec $(uv)' = u'v + uv'$. La formule d'intégration par parties découle de l'intégration de cette formule : pour tout $x \in [a,b]$

$$[u(t)v(t)]_a^x = \int_a^x (uv)'(t)dt = \int_a^x u'(t)v(t)dt + \int_a^x u(t)v'(t)dt.$$

□

Exemple 1.3.5. Calculons la primitive de $x \mapsto \ln x$ qui s'annule en 1. Toutes les autres primitives s'en déduiront par ajout d'une constante. On procède par intégration par parties : Pour $x \in]0,+\infty[$ on a

$$\int_1^x \ln t dt = \int_1^x 1.\ln t dt = [t\ln t]_1^x - \int_1^x 1dt = x\ln x - x + 1.$$

Les primitives de $x \mapsto \ln x$ sont donc les fonctions $x \mapsto x\ln x - x + C$ où C est une constante réelle.

1.3.4 Changements de variables

Théorème 1.3.6 (Changements de variables)**.** *Soit f une fonction continue sur un intervalle I et φ une fonction de classe C^1 sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans I. On a*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f. On consière la fonction $g = F \circ \varphi$. Cette fonction est dérivable, sa dérivée est continue et vérifie

$$g'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

On a d'une part

$$g(b) - g(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt,$$

et d'autre part

$$g(b) - g(a) = \int_a^b g'(t)dt = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Ce qui donne la formule. □

Exemple 1.3.7. Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi/2} (\sin^3(x) + 1)\cos x dx$.
On pose pour cela

$$t = \varphi(x) = \sin x$$

fonction de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$. Nous avons

$$dt = \varphi'(x)dx = \cos x dx$$

et $\varphi(0) = \varphi(\pi/2) = 1$.
Par la formule de changement de variables nous obtenons l'égalité

$$\int_0^{\pi/2} (\sin^3 x + 1)\cos x dx = \int_0^1 (t^3 + 1)dt = \left[\frac{t^4}{4} + t\right]_0^1 = \frac{5}{4}.$$