UFR SATIC

Licence I D2A : TD Algèbre, Fiche : 1

Resp. Dr FALL/M. FALL/M. NDONGO *Année Académique 2019-2020*

Exercice 1 : Soient P, Q et R trois propositions. Montrer que les propositions suivantes sont vraies.

1. $P \Longleftrightarrow non(nonP)$,
2. $(P$ et $Q) \Longleftrightarrow (Q$ et $P)$
3. $(P$ ou $Q) \Longleftrightarrow (P$ ou $Q)$
4. $non(P$ et $Q) \Longleftrightarrow (nonP)$ ou $(nonQ)$
5. $non(P$ ou $Q) \Longleftrightarrow (nonP)$ et $(nonQ)$
6. P et $(Q$ ou $R) \Longleftrightarrow (P$ et $Q)$ ou $(P$ et $R)$
7. P ou $(Q$ et $R) \Longleftrightarrow (P$ ou $Q)$ et $(P$ ou $R)$
8. $(P \implies Q) \Longleftrightarrow (NonQ \implies nonP)$

Exercice 2 : Soient P, Q et R trois propositions. Déterminer la table de vérité des propositions suivantes :

1. $[(P \wedge R) \Longrightarrow Q] \vee [(\overline{P \vee Q}) \Longrightarrow R]$
2. $[(P \vee Q) \wedge R] \Longrightarrow [P \wedge (Q \vee R)]$
3. $[(P \vee Q) \wedge R] \Longleftrightarrow [P \vee (Q \wedge R)]$
4. $[(P \Longrightarrow Q) \wedge \overline{Q}] \Longrightarrow \overline{P}$
5. $[(R \Longrightarrow S) \wedge (S \Longrightarrow T] \Longrightarrow [(R \Longrightarrow S)]$

Exercice 3 :

1. En raisonnant par contraposition, soit x un irrationnel positif. Montrer que $\sqrt{x}$ est un irrationnel.
2. En raisonnant par récurrence, Montrer que $2^n > n^2$ pour tout entier $n \geq 5$.
3. En raisonnant par récurrence, Montrer que $n! \geq n^2$ pour tout entier $n \geq 4$.
4. En raisonnant par la méthode direct.

   Montrer que si x est un réel strictement positif $\dfrac{x+2}{x+3} < \dfrac{x+4}{x+5}$.

Exercice 4 : Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\, u_n > 3$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ u_n > (\frac{3}{2})^n + 3$.
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 5 : Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$

$$a)\ S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}, \qquad b)\ S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$$

$$c)\ S_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}, \quad d)\ S_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$$

Exercice 6 : Les parties suivantes suivantes sont-elles des sev de $\mathbb{R}^3$?

1. $A = \{(x, y, 2x - y), x, y \in \mathbb{R}\}$
2. $B = \{(x^2, y, 2x - y), x, y \in \mathbb{R}\}$
3. $C = \{(x + 2, y, 2x - y), x, y \in \mathbb{R}\}$
4. $D = \{(x, y, 3), x, y \in \mathbb{R}\}$

Exercice 7 :

1. Montrer que les vecteurs u,v,w constituent une base de $\mathbb{R}^3$,
   avec $u_1 = (2, 1, 0); u_2 = (0, 2, 1); u_3 = (2, 0, 1)$.
2. Exprimer le vecteur $u = (2, 2, 3)$ dans cette base.
3. Soient $\{v_1 = (1, 2, -5, 3); v = (2, -1, 4, 7)\}$. Déterminer les réels α et β pour que le vecteur $(\alpha, \beta, -37, -3) \in \text{vect}(v_1, v_2)$.

Exercice 8 : Soient $F_1 = \text{vect}(G_1)$ et $F_2 = \text{vect}(G_2)$ les sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ engendrés respectivement par $G_1 = (u_1, u_2, u_3)$ et $G_2 = (v_1, v_2)$ avec
$u_1 = (1, 0, 4, 2); u_2 = (1, 2, 3, 1); u_3 = (1, -2, 5, 3), v_1 = (4, 2, 0, 1); v_2 = (1, 4, 2, 1)$.

1. Montrer que la famille $G_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est liée et donner une relation de dependance linéaire.
2. Montrer que la famille $G_1' = G_1 \backslash (u_3)$ et G_2 sont libres.
3. En déduire la dimension et une base des sous espaces vectoriels de F_1 et F_2.
4. Montrer que les sous espaces vectoriels F_1 et F_2 sont supplémentaires.

Exercice 9 : Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ x + y + z = 0\}$.
Soient $u_1 = (1, -2, 3)$ et $u_2 = (2, 1, -1)$ deux vecteurs. On pose $F = \text{vect}(u_1, u_2)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Determiner $E + F$ en déduire la dimension de $E + F$.
3. E et F sont ils supplémentaires.

Exercice 10 : Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ \ x + 2y - 3z = 0\}$. $u = (1, 2, -3)$;
On pose $G = \text{vect}(u)$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2. Determiner une base de F et en déduire la dimension.
3. Verifier si F et G sont des supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.