Avertissement

Ce document est un DRAFT, les erreurs et les suggestions sont à envoyer à abdoulaziz.fall@uadb.edu.sn

Application Linéaire

Dr. Abdoul Aziz FALL

UFR Sciences Appliquées et Technologie de l'Information et de la Communication
Université Alioune Diop de Bambey

7 avril 2020

Plan du cours

1. Applications linéaires
2. Noyau, Image d'une application linéaire

Définition

Définition 1

On suppose que E et F sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels.

Définition

Définition 1

On suppose que E et F sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. f est une application linéaire si :

1. $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \ f(x+y) = f(x) + f(y)$

Définition

Définition 1

On suppose que E et F sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. f est une application linéaire si :

1. $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x).$

Définition

Définition 1

On suppose que E et F sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels. f est une application linéaire si :

1. $\forall x \in E, \ \forall y \in E, \ f(x+y) = f(x) + f(y)$
2. $\forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x).$

Exemple 1

Montrons que

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (-2x, y, 3z)$$

est une application linéaire

Définition

Remarque 1

- *Lorsque l'on écrit* $x + y$ *il s'agit de l'addition dans* E*, mais que lorsque l'on écrit* $f(x) + f(y)$ *il s'agit de l'addition dans* F.

Définition

Remarque 1

- *Lorsque l'on écrit* $x + y$ *il s'agit de l'addition dans* E*, mais que lorsque l'on écrit* $f(x) + f(y)$ *il s'agit de l'addition dans* F*.*
- *De plus,* $\lambda \cdot x$ *désigne la multiplication externe de* E*, et* $\lambda \cdot f(x)$ *désigne la multiplication externe de* F*.*

Définition

Remarque 1

- *Lorsque l'on écrit* $x + y$ *il s'agit de l'addition dans* E*, mais que lorsque l'on écrit* $f(x) + f(y)$ *il s'agit de l'addition dans* F*.*
- *De plus,* $\lambda \cdot x$ *désigne la multiplication externe de* E*, et* $\lambda \cdot f(x)$ *désigne la multiplication externe de* F*.*
- *Pour simplifier, on note de la même façon l'addition de vecteurs de* E *et celle de vecteurs de* F*.*

Définition

Remarque 1

- *Lorsque l'on écrit* $x + y$ *il s'agit de l'addition dans* E*, mais que lorsque l'on écrit* $f(x) + f(y)$ *il s'agit de l'addition dans* F*.*
- *De plus,* $\lambda \cdot x$ *désigne la multiplication externe de* E*, et* $\lambda \cdot f(x)$ *désigne la multiplication externe de* F*.*
- *Pour simplifier, on note de la même façon l'addition de vecteurs de* E *et celle de vecteurs de* F*.*
- *On omettra le plus souvent le point* $(\cdot)$ *signalant la multiplication externe.*

Définition

Exemple 2

Montrons que

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (-x, y+z, z+1)$$

n'est pas une application linéaire

Proprietés des application linéaire

Proposition 1

Si E et F sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et f une application lineaire de E dans F.

1. $f(0_E) = 0_F$

Proprietés des application linéaire

Proposition 1

Si E et F sont des $\mathbb{K}-$espaces vectoriels et f une application lineaire de E dans F.

1. $f(0_E) = 0_F$
2. $f(-u) = -f(u) \forall u \in E$

Propriétés des application linéaire

Proposition 2

f une application linéaire de E dans F si et seulement si pour tous vecteurs u et v de E et pour tous scalaires λ et μ de $\mathbb{K}$

Propriétés des application linéaire

Proposition 2

f une application linéaire de E dans F si et seulement si pour tous vecteurs u et v de E et pour tous scalaires λ et μ de $\mathbb{K}$

$$f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Exemple 3

Montrons que

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto (-2x, y, 3z)$$

est une application linéaire

Définitions et notations des applications linéaires

Définition 2

Une application linéaire de E dans F est aussi appelé morphisme d'espaces vectoriels

Définitions et notations des applications linéaires

Définition 2

Une application linéaire de E dans F est aussi appelé morphisme d'espaces vectoriels

Notation 1

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathbb{L}(E, F)$

Définitions et notations des applications linéaires

Définition 2

Une application linéaire de E dans F est aussi appelé morphisme d'espaces vectoriels

Notation 1

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathbb{L}(E, F)$

Définition 3

Une application linéaire de E dans E est aussi appelé endomorphisme.

Définitions et notations des applications linéaires

Définition 2

Une application linéaire de E dans F est aussi appelé morphisme d'espaces vectoriels

Notation 1

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathbb{L}(E, F)$

Définition 3

Une application linéaire de E dans E est aussi appelé endomorphisme.

Notation 2

L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathbb{L}(E)$

Définitions et notations des applications linéaires

Définition 4

Une application linéaire bijective est dite isomorphisme

Définitions et notations des applications linéaires

Définition 4

Une application linéaire bijective est dite isomorphisme

Définition 5

Un endomorphisme bijectif est dit automorphisme

Définitions et notations des applications linéaires

Définition 4

Une application linéaire bijective est dite isomorphisme

Définition 5

Un endomorphisme bijectif est dit automorphisme

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 2

L'image d'une fonction est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre.

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 2

L'image d'une fonction est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre. Quand on étudie une fonction, il est important de connaitre son image, pour savoir si elle peut prendre n'importe qu'elle valeur,

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 2

L'image d'une fonction est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre. Quand on étudie une fonction, il est important de connaitre son image, pour savoir si elle peut prendre n'importe qu'elle valeur,ou bien seulement certaines,

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 2

L'image d'une fonction est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre. Quand on étudie une fonction, il est important de connaitre son image, pour savoir si elle peut prendre n'importe qu'elle valeur,ou bien seulement certaines, et si oui lesquelles.

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 2

L'image d'une fonction est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre. Quand on étudie une fonction, il est important de connaitre son image, pour savoir si elle peut prendre n'importe qu'elle valeur,ou bien seulement certaines, et si oui lesquelles. Par exemple, la fonction définie de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2$ *a pour image* $\mathbb{R}_+$.

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 2

L'image d'une fonction est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre. Quand on étudie une fonction, il est important de connaitre son image, pour savoir si elle peut prendre n'importe qu'elle valeur,ou bien seulement certaines, et si oui lesquelles. Par exemple, la fonction définie de $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^2$ *a pour image* $\mathbb{R}_+$*. Cela signifie en particulier que l'équation* $f(x) = -3$ *n'a pas de solution dans* $\mathbb{R}$

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 2

L'image d'une fonction est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre. Quand on étudie une fonction, il est important de connaitre son image, pour savoir si elle peut prendre n'importe qu'elle valeur,ou bien seulement certaines, et si oui lesquelles. Par exemple, la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ a pour image $\mathbb{R}_+$. Cela signifie en particulier que l'équation $f(x) = -3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Définition 6

Soit f une application linéaire de E dans F.
L'image de f est l'ensemble des $f(x)$, quand $x \in E$. On la note $Im(f)$ ou $f(E)$. C'est une partie de F.

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 2

L'image d'une fonction est l'ensemble des valeurs qu'elle peut prendre. Quand on étudie une fonction, il est important de connaitre son image, pour savoir si elle peut prendre n'importe qu'elle valeur,ou bien seulement certaines, et si oui lesquelles. Par exemple, la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ a pour image $\mathbb{R}_+$. Cela signifie en particulier que l'équation $f(x) = -3$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$

Définition 6

Soit f une application linéaire de E dans F.
L'image de f est l'ensemble des $f(x)$, quand $x \in E$. On la note $Im(f)$ ou $f(E)$. C'est une partie de F.

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 3

L'ensemble

$$f(E) = \{f(x), x \in E\}$$

est dit image de f*, on note* Imf*.*

Example 2.1

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ est une application linéaire.

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 3

L'ensemble

$$f(E) = \{f(x), x \in E\}$$

est dit image de f, on note Imf.

Example 2.1

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ est une application linéaire.
On remarque que si $y = f(x)$, alors $y = (y_1, y_2)$ est tel que $y_2 = 2y_1$.

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 3

L'ensemble

$$f(E) = \{f(x), x \in E\}$$

est dit image de f, on note Imf.

Example 2.1

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ est une application linéaire.
On remarque que si $y = f(x)$, alors $y = (y_1, y_2)$ est tel que $y_2 = 2y_1$.
L'image de f est $(\lambda, 2\lambda; \lambda \in \mathbb{R}) = Vect(U)$, où $U = (1, 2)$. C'est une droite vectorielle.

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 3

Etudier une fonction f, c'est souvent aussi être capable de résoudre l'équation $f(x) = 0$.

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 3

Etudier une fonction f, c'est souvent aussi être capable de résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Quand f est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'équation $f(x) = 0$ signifie que l'on cherche les vecteurs x de E tels que $f(x)$ soit égal au vecteur nul dans F.

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 3

Etudier une fonction f, c'est souvent aussi être capable de résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Quand f est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'équation $f(x) = 0$ signifie que l'on cherche les vecteurs x de E tels que $f(x)$ soit égal au vecteur nul dans F.
L'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ s'appelle alors le noyau de l'application linéaire f, et c'est un sous espace vectoriel dont les propriétés aident à comprendre le comportement de f.

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 3

Etudier une fonction f, c'est souvent aussi être capable de résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Quand f est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'équation $f(x) = 0$ signifie que l'on cherche les vecteurs x de E tels que $f(x)$ soit égal au vecteur nul dans F.
L'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ s'appelle alors le noyau de l'application linéaire f, et c'est un sous espace vectoriel dont les propriétés aident à comprendre le comportement de f.

Définition 7

Le noyau de f est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = 0$. On le note $Ker(f)$. C'est un sous-espace vectoriel de E.

Noyau, Image d'une application linéaire

Remarque 3

Etudier une fonction f, c'est souvent aussi être capable de résoudre l'équation $f(x) = 0$.
Quand f est une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F, l'équation $f(x) = 0$ signifie que l'on cherche les vecteurs x de E tels que $f(x)$ soit égal au vecteur nul dans F.
L'ensemble des solutions de $f(x) = 0$ s'appelle alors le noyau de l'application linéaire f, et c'est un sous espace vectoriel dont les propriétés aident à comprendre le comportement de f.

Définition 7

Le noyau de f est l'ensemble des $x \in E$ tels que $f(x) = 0$. On le note $Ker(f)$. C'est un sous-espace vectoriel de E.

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 4

$$Ker(f) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0_F\}$$

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 4

$$Ker(f) = \{x \in E \text{ \textit{tel que} } f(x) = 0_F\} = f^{-1}\{0_F\}$$

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 4

$$Ker(f) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0_F\} = f^{-1}\{0_F\}$$

Example 2.2

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ est une application linéaire.

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 4

$$Ker(f) = \{x \in E \textit{ tel que } f(x) = 0_F\} = f^{-1}\{0_F\}$$

Example 2.2

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ est une application linéaire.
Le noyau de f est $Ker(f) = \{f(x_1, x_2)$

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 4

$$Ker(f) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0_F\} = f^{-1}\{0_F\}$$

Example 2.2

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ est une application linéaire.
Le noyau de f est $Ker(f) = \{f(x_1, x_2) = (0, 0)\}$

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 4

$$Ker(f) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0_F\} = f^{-1}\{0_F\}$$

Example 2.2

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ est une application linéaire.
Le noyau de f est $Ker(f) = \{f(x_1, x_2) = (0, 0)\}$ c-a-d

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 4

$$Ker(f) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0_F\} = f^{-1}\{0_F\}$$

Example 2.2

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ est une application linéaire.
Le noyau de f est $Ker(f) = \{f(x_1, x_2) = (0, 0)\}$ c-a-d
c-a-d $x_1 + x_2 = 0$

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 4

$$Ker(f) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0_F\} = f^{-1}\{0_F\}$$

Example 2.2

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ est une application linéaire.
Le noyau de f est $Ker(f) = \{f(x_1, x_2) = (0, 0)\}$ c-a-d
c-a-d $x_1 + x_2 = 0 \implies x_1 = -x_2$

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 4

$$Ker(f) = \{x \in E \textit{ tel que } f(x) = 0_F\} = f^{-1}\{0_F\}$$

Example 2.2

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ est une application linéaire.
Le noyau de f est $Ker(f) = \{f(x_1, x_2) = (0, 0)\}$ c-a-d
c-a-d $x_1 + x_2 = 0 \implies x_1 = -x_2$
Que nous pouvons définir par $\{(\lambda, -\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\} = vect(V)$, où $V = (1, -1)$.

Noyau, Image d'une application linéaire

Notation 4

$$Ker(f) = \{x \in E \text{ tel que } f(x) = 0_F\} = f^{-1}\{0_F\}$$

Example 2.2

L'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2x_1 + 2x_2)$ est une application linéaire.
Le noyau de f est $Ker(f) = \{f(x_1, x_2) = (0, 0)\}$ c-a-d
c-a-d $x_1 + x_2 = 0 \implies x_1 = -x_2$
Que nous pouvons définir par $\{(\lambda, -\lambda); \lambda \in \mathbb{R}\} = vect(V)$, où $V = (1, -1)$. C'est également une droite vectorielle.

Noyau, Image d'une application linéaire

Théorème 1

Soient E *et* F *deux espaces vectoriels reels et* f *une application linéaire de* E *dans* F. *On suppose que* E *est de dimension finie et* $B = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ *une base de* E, *alors* $G = \{f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_n)\}$ *est une partie génératrice de* Imf.

Noyau, Image d'une application linéaire

Proposition 3

Soit f une application linéaire de E dans F. L'image de f est un sous espace vectoriel de F. Le noyau de f est un sous espace vectoriel de E.

Noyau, Image d'une application linéaire

Proposition 3

Soit f une application linéaire de E dans F. L'image de f est un sous espace vectoriel de F. Le noyau de f est un sous espace vectoriel de E.

Proposition 4

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

1. *f est surjective si et seulement si $Imf = E$.*

Noyau, Image d'une application linéaire

Proposition 3

Soit f une application linéaire de E dans F. L'image de f est un sous espace vectoriel de F. Le noyau de f est un sous espace vectoriel de E.

Proposition 4

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E vers F.

1. *f est surjective si et seulement si $Imf = E$.*
2. *f est injective si et seulement si $Ker(f) = 0_E$*

Noyau, Image d'une application linéaire

Example 2.3

Soit f l'application définie par $f(x, y) = (x, 2y, x + y)$

1. Montrer que f est linéaire
2. Determiner $Kerf$ et Imf

Noyau, Image d'une application linéaire

Théorème 2

Soient E et F deux espaces vectoriels , V un sous–espace vectoriel de E, f une application linéaire de E dans F et I un ensemble non–vide.

1. *Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de V , alors $f(e_i)_{i \in I}$ est génératrice de $f(V)$.*

Noyau, Image d'une application linéaire

Théorème 2

Soient E et F deux espaces vectoriels , V un sous–espace vectoriel de E, f une application linéaire de E dans F et I un ensemble non–vide.

1. *Si $(e_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de V , alors $f(e_i)_{i\in I}$ est génératrice de $f(V)$.*
2. *Si f est injective et si $(e_i)_{i\in I}$ est libre dans E, alors $f(e_i)_{i\in I}$ est libre dans F.*

Noyau, Image d'une application linéaire

Théorème 2

Soient E et F deux espaces vectoriels , V un sous–espace vectoriel de E, f une application linéaire de E dans F et I un ensemble non–vide.

1. *Si $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de V , alors $f(e_i)_{i \in I}$ est génératrice de $f(V)$.*
2. *Si f est injective et si $(e_i)_{i \in I}$ est libre dans E, alors $f(e_i)_{i \in I}$ est libre dans F.*

Corollaire 1

Si E et F sont deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F, alors si E est de dimension finie, $f(E)$ l'est aussi.

Noyau, Image d'une application linéaire : rang et dimension

Définition 8

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. On appelle rang de f et on note rang(f), la dimension du sous espace vectoriel Imf

Notation 5

$$rang(f) = dim(Imf)$$

Théorème 3

Soient E et F deux espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Alors

$$dim(E) = dim(kerf) + dim(Imf)$$

Merci de votre attention

Merci de votre attention