RÉPUBLIQUE DU SÉNÉGAL
===================
UNIVERSITÉ ALIOUNE DIOP
DE BAMBEY-UFR SATIC

LICENCE I

COURS DE DR. PAPA. IBRAHIMA. NDIAYE

Table des matières

Chapitre 1

Les nombres réels

Introduction :

Soit $\mathbb{R}$ un ensemble non vide, appelé l'ensemble des nombres réels satisfaisant à un certains nombres d'axiomes. Sur ct ensemble on definit deux opérations :
prémière opération : l'addition, noté $+$
deuxieme opération : la multiplication, noté $\cdot$

1.1 Axiomes algébrique

$\rightarrow$ **Pour l'addition :**
A_1) Pour tout $a, b \in \mathbb{R},\ a.b = b.a$ (**commutativité**).
A_2) Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R},\ a.b.c = a.(b.c) = (a.b).c$ (**associativité**).
A_3) Il existe $0 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R},\ 0 + a = a + 0 = a$ (**zéro est l'élément neutre de l'addition**).
A_4) Pour tout $a \in \mathbb{R}$, il existe $-a \in \mathbb{R}$ tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (**tout réel admet un élément opposé**).

$\rightarrow$ **Pour la multiplication :**
M_1) Pour tout $a, b \in \mathbb{R},\ a + b = b + a$ (**commutativité**).
M_2) Pour tout $a, b, c \in \mathbb{R},\ a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$ (**associativité**).
M_3) Il existe $1 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R},\ 1.a = a.1 = a$ (**1 est l'élément neutre de la multiplication**).
M_4) Pour tout $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$, il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $a.b = 1$.
La multiplication est distributive par rapport à l'addition :

$$\text{Pour tout } a, b, c \in \mathbb{R},\ a.(b + c) = ab + ac$$

Nomenclature :

$$\text{Si } a \neq 0 \text{ alors } \begin{cases} \frac{1}{a}, \text{ est appelé inverse de } a \\ -a, \text{ est appelé l'opposé de } a. \end{cases}$$

Théorème 1.1.1
1. Soient $a, z \in \mathbb{R}$, l'équation $a + z = a$ implique $z = 0$.
2. Si a, b sont des réels non nuls tels que $ab = b$ alors $a = 1$.

Preuve :
1. Soient $a, z \in \mathbb{R}$ tels que $a + z = a$. Montrons que $z = 0$.

Comme $a \in \mathbb{R}$ alors il existe $-a \in \mathbb{R}$ tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$
or $a+z = a \Longrightarrow (-a)+a+z = (-a)+a \Longrightarrow ((-a)+a)+z = 0 \Longrightarrow 0+z = 0 \Longrightarrow z = 0$.
Pour tout $a, z \in \mathbb{R}$ tel que $a + z = a$ alors $z = 0$.
2. Supposons que $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ b \neq 0$ tel que $ab = b$. Montrons que $a = 1$.
$b \neq 0$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $bc = cb = 1$
or $ab = b \Longrightarrow abc = bc \Longrightarrow a(bc) = 1 \Longrightarrow a(1) = 1 \Longrightarrow a.1 = 1 \Longrightarrow a = 1$.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0,\ b \neq 0$ tel que $ab = b$ alors $a = 1$.■

Théorème 1.1.2
1. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a + b = 0$ alors $b = -a$.
2. Si $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $ab = 1$ alors $b = \frac{1}{a}$.

Preuve :
1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a + b = 0$. Montrons que $b = -a$.
Comme $a \in \mathbb{R}$ alors il existe $-a \in \mathbb{R}$ tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$
or $a + b = 0 \Longrightarrow (-a) + a + b = (-a) + 0 \Longrightarrow ((-a) + a) + b = (-a) \Longrightarrow 0 + b = (-a) = -a \Longrightarrow b = -a$.
Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a + b = 0$ alors $b = -a$.
2. Supposons $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $ab = 1$. Montrons que $b = \frac{1}{a}$.
Par hypothèse on a $a \neq 0$ alors $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ tel que $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$
or $ab = 1 \Longrightarrow \frac{1}{a}(ab) = \frac{1}{a}.1 \Longrightarrow (\frac{1}{a}a)b = \frac{1}{a} \Longrightarrow 1.b = \frac{1}{a} \Longrightarrow b = \frac{1}{a}$.
Pour tous $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $ab = 1$ alors $b = \frac{1}{a}$.■

Théorème 1.1.3
Soient a et b deux nombres réels

1. *a.0=0*
2. *(-a)=(-1)a*
3. *-(a+b)=(-a)+(-b)*
4. *-(-a)=a*
5. *(-1)(-1)=1*

Preuve :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$

1. On sait que :
   $a(0 + 0) = a.0 + a.0 \Longrightarrow a.0 = a.0 + a.0$
   or $a, 0 \in \mathbb{R}$ alors $a.0 \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists -a.0 \in \mathbb{R}$ tel que $(-a.0) + a.0 = a.0 + (-a.0) = 0$.
   Donc : $a.0 = a.0 + a.0 \Longrightarrow (-a.0) + a.0 = (-a.0) + a.0 + a.0 \Longrightarrow 0 = ((-a.0) + a.0) + a.0 \Longrightarrow 0 = 0 + a.0 \Longrightarrow 0 = a.0$
2. On sait que :
   $a(1 + (-1)) = 1.a + (-1).a \Longrightarrow a.0 = 1a + (-1)a \Longrightarrow 0 = a + (-1)a$
   comme $a \in \mathbb{R}$, il existe $-a \in \mathbb{R}$ tel que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ et donc :
   $0 = a+(-1)a \Longrightarrow (-a)+0 = (-a)+a+(-1)a \Longrightarrow (-a) = ((-a)+a)+(-1)a \Longrightarrow (-a) = 0 + (-1)a \Longrightarrow (-a) = (-1)a$
3. D'après 2) on a :
   $-(a+b) = (-1)(a+b) \Longrightarrow -(a+b) = (-1)a+(-1)b \Longrightarrow -(a+b) = (-a)+(-b)$
4. On sait que :
   $a + (-a) = 0$
   $-a \in \mathbb{R}$, il existe $-(-a) \in \mathbb{R}$ tel que $-a + (-(-a)) = 0$.
   Donc :
   $a + (-a) = 0 \Longrightarrow a + (-a) + (-(-a)) = 0 + (-(-a)) \Longrightarrow a + (-(a) + (-(-a))) = (-(-a)) \Longrightarrow a + 0 = (-(-a)) \Longrightarrow a = -(-a)$

5. On sait que $-a = (-1)a$, pour tout $a \in \mathbb{R}$.
Prenons
$$a = -1$$
donc : -(-1)=(-1)(-1) or d'après 4) -(-1)=1 alors $1 = (-1)(-1)$. ■

Théorème 1.1.4
Soient a et b deux nombres réels

1. *Si $a \neq 0$ alors $\frac{1}{a} \neq 0$ et $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$*
2. *Si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$*
3. $(-a)(-b) = ab$
4. *Si $a \neq 0$ alors $\frac{1}{(-a)} = \frac{(-1)}{a} = -(\frac{1}{a})$*

Preuve :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$

1. Supposons $a \neq 0$ et $\frac{1}{a} = 0$.
$a \neq 0$, il existe $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ tel que $a.\frac{1}{a} = \frac{1}{a}.a = 1$
or $\frac{1}{a} = 0 \Longrightarrow a.\frac{1}{a} = a.0 \Longrightarrow 1 = 0$ absurde (M_3).

   $a \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} \neq 0, \exists \frac{1}{\frac{1}{a}} \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{a}.\frac{1}{\frac{1}{a}} = 1 \Longrightarrow a.\frac{1}{a}.\frac{1}{\frac{1}{a}} = a.1 \Longrightarrow (a.\frac{1}{a}).\frac{1}{\frac{1}{a}} = a \Longrightarrow 1.\frac{1}{\frac{1}{a}} = a \Longrightarrow \frac{1}{\frac{1}{a}} = a$
2. Supposons que $ab = 0$
Supposons que $a \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{a}.a = 1$
comme $ab = 0 \Longrightarrow \frac{1}{a}ab = \frac{1}{a}.0 \Longrightarrow (\frac{1}{a}a)b = 0 \Longrightarrow 1.b = 0 \Longrightarrow b = 0$.
De fachon analogue si $b \neq 0$ alors $a = 0$.
Donc si $ab = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$
3. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrons que $(-a)(-b) = ab$.
$(-a)(-b) = (-1)a(-1)b = (-1)(-1)ab$
or d'après 5) du théorème 1.1.3 , on a $(-1)(-1) = 1$ donc $(-a)(-b) = 1.ab = ab$.
4. Supposons que $a \neq 0$. Montrons que $\frac{1}{(-a)} = \frac{(-1)}{a} = -(\frac{1}{a})$.
$a \neq \Longrightarrow -a \neq 0$, $\exists \frac{1}{(-a)} \in \mathbb{R}$ tel que $(-a).\frac{1}{(-a)} = 1 \Longrightarrow (-1).(-a).\frac{1}{(-a)} = (-1).1 \Longrightarrow (-1)(-1)a\frac{1}{(-a)} = (-1) \Longrightarrow 1.a\frac{1}{(-a)} = (-1) \Longrightarrow a\frac{1}{(-a)} = (-1)$
or $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \Longrightarrow \exists \frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{a}.a = a.\frac{1}{a} = 1$ donc on a :
$a\frac{1}{(-a)} = (-1) \Longrightarrow \frac{1}{a}a\frac{1}{(-a)} = \frac{1}{a}(-1) \Longrightarrow (\frac{1}{a}a)\frac{1}{(-a)} = \frac{(-1)}{a} \Longrightarrow 1.\frac{1}{(-a)} = \frac{(-1)}{a} \Longrightarrow \frac{1}{(-a)} = \frac{(-1)}{a}$.
Donc si $a \neq 0$ alors $\frac{1}{(-a)} = \frac{(-1)}{a} = -(\frac{1}{a})$. ■

1.2 Axiomes d'ordre

Supposons qu'il existe dans $\mathbb{R}$ une partie P ayant les propriétés suivantes :
θ_1) Si $a, b \in P$ alors $a + b \in P$;
θ_2) Si $a, b \in P$ alors $a.b \in P$;
θ_3) Si $a\mathbb{R}$ une des trois relations suivante et une seule est vraie :

$$\text{Soit } a \in P \text{ ou } a = 0 \in \{0\} \text{ ou } -a \in P.$$

P est appelé l'ensemble des nombres réels positifs.
On pose
$$N = \{a \in \mathbb{R} / -a \in P\}.$$

N est l'ensemble des nombres réels négatifs.

$$\mathbb{R} = P \cup \{0\} \cup N \ .$$

Soit $a \in \mathbb{R}$.
✓Si $a \in P$, on dit que a est strictement positif et on note $a > 0$.
✓Si $-a \in P$, on dit que a est strictement négatif et on note $a < 0$.
✓Si $a \in P \cup \{0\}$, on dit que a est un réel positif ou nul et on note $a \geq 0$.
✓Si $-a \in P \cup \{0\}$, on dit que a est un réel négatif ou nul et on note $a \leq 0$.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
✓Si $a - b \in P$, on note $a > b$ et on lit a supérieur à b.
✓Si $-(a - b) \in P$, on note $a < b$ et on lit a inférieur à b.
✓Si $a - b \in P \cup \{0\}$, on note $a \geq b$ et on lit a supérieur ou égale à b.
✓Si $-(a - b) \in P \cup \{0\}$, on note $a \leq b$ et on lit a inférieur ou égale à b.

Théorème 1.2.1
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. *Si $a > b$ et $b > c$ alors $a > c$.*
2. *On a : $a > b$ ou $a = b$ ou $a < b$.*
3. *Si $a \geq b$ et $b \geq a$ alors $a = b$.*

Preuve :

1. Supposons que $a > b$ et $b > c$. Montrons que $a > c$.

$$\begin{cases} a > b \Longrightarrow a - b \in P \\ b > c \Longrightarrow b - c \in P \end{cases} \Longrightarrow (a-b)+(b-c) \in P \Longrightarrow a-b+b-c \in P \Longrightarrow a-c \in P \Longrightarrow a > c.$$

2. $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \Longrightarrow a - b \in \mathbb{R}$ alors d'après θ_3 :

$$\text{soit } a - b \in P \text{ ou } a - b = 0 \text{ ou } -(a-b) \in P$$

$$\text{soit } a > b \text{ ou } a = b \text{ ou } a < b$$

3. Procédons par contraposé.
   Supposons que $a \neq b$. Montrons que $a < b$ ou $b < a$.
   $a \neq b \Longrightarrow a - b \neq 0 \Longrightarrow a - b \in P$ ou $-(a - b) \in P \Longrightarrow a > b$ ou $a < b$. ■

Théorème 1.2.2
L'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation $\leq$ est ordonné c'est-à-dire les trois propriétés sont à la fois verifiées :
i) ***La reflexivité :***

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ x \leq x \ .$$

ii) ***L'antisymetrie :***

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \ si \, x \leq y \ et \, y \leq x \ \ alors \, x = y \ .$$

iii) ***La transivité :***

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \ si \, x \leq y \ et \, y \leq z \ \ alors \, x \leq z \ .$$

Il est de plus ***totalement ordonné****, c'est-à-dire la propriété suivante est verifiée :*
iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$x \leq \ \ ou \, y \leq x \ .$$

Preuve :
$ii)$ et $iii)$ ok
Montrons $i)$.
Soit $x \in \mathbb{R} : x - x = 0 \in \{0\} \Longrightarrow x - x \in P \cup \{0\}$ car $\{0\} \subset P \cup \{0\} \Longrightarrow x \leq x$.
Montrons $iv)$.
Soient $x, y \in \mathbb{R} \Longrightarrow x - y \in \mathbb{R}$ alors : $x - y \in P$ ou $x - y = 0$ ou $-(x - y) \in P$.
$x = y \Longrightarrow x - y = -x = 0 \in P \cup \{0\} \Longrightarrow x \leq y$ ou $y \leq x$.
$x \neq y \Longrightarrow x - y \in P$ ou $-(x - y) \in P$ or $P \subset P \cup \{0\}$ donc $x - y \in P \cup \{0\}$ ou $-(x - y) \in P \cup \{0\} \Longleftrightarrow x \leq y$ ou $\leq x$. ■

Définition 1.2.3

1. *On definit l'ensemble des entiers naturels noté* $\mathbb{N}$ *par*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 1 + 1, 1 + 1 + 1, \cdots\}.$$

   On note :

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \backslash \{0\}.$$

2. *Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$ *et soit à démontrer que* $\forall \in \mathbb{N}$ *et soit* $n \geq n_0$*,* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie où* $\mathcal{P}$ *est une propriété dependant de* n*.*
   La demonstration par recurrence consiste à :
   a) Verifier que la propriété est vraie au rang n_0 *;*
   b) Verifier que si n *est un entier naturel* $\geq n_0$ *quelconq tel que :*
   $\mathcal{P}(k)$ *est vraie pour tout* $k = n_0, n_0 + 1, \cdots, n$ *alors* $\mathcal{P}(n + 1)$ *est vraie.*
   On peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq n_0$*,* $\mathcal{P}(n)$ *est vraie.*

Théorème 1.2.4
i) Si $(a \in \mathbb{R},\ a \neq 0)$ *alors* a^2 *(notée par a.a) est que* $a^2 > 0$*.*
ii) $1 > 0$*.*
iii) Si $n \in \mathbb{N}^*$ *alors* $n > 0$*.*

Preuve :
$i)$ Soit $a \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ alors $a \in P$ ou $-a \in P$.
$a \in P \Longrightarrow a^2 = a.a \in P \Longleftrightarrow a^2 > 0$.
$-a \in P \Longrightarrow (-a).(-a) \in P \Longleftrightarrow a^2 \in P \Longleftrightarrow a^2 > 0$.
$ii)$ $1 \in \mathbb{R},\ 1 \neq 0$ alors $1 = (-1)(-1) = (-1)^2 > 0$.
$iii)$ Montrons pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ n > 0$.
Procédons par recurence.
Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > 0$.
Initialement :
Pour $n = 1 > 0 \Longrightarrow \mathcal{P}(1)$ est vraie.
Supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour $k = 1, 2, \cdots, n$. Montrons que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie cad $n + 1 > 0$.
On a :

$$\begin{cases} 1 \in P \\ n \in P \end{cases} \Longrightarrow n + 1 \in P \Longleftrightarrow n + 1 > 0$$

d'où $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie en particulier $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n > 0$. ■

Théorème 1.2.5
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*.*

1. *Si* $a > b$ *alors* $a + c > b + c$.
2. *Si* $a > b$ *et* $c > d$ *alors* $a + c > b + d$.
3. *Si* $a > b$ *et* $c > 0$ *alors* $ac > bc$.
4. *Si* $a > 0$ *alors* $\frac{1}{a} > 0$.

Preuve : Exercice

Théorème 1.2.6
Si $a > b$ *alors* $a > \frac{a+b}{2} > b$.

Preuve :

$$\begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ a > b \end{cases} \Longrightarrow a + a > a + b \Longleftrightarrow 2a > a + b$$

or $2 > 0 \Longrightarrow \frac{1}{2} > 0$ donc $\frac{1}{2}(2a) > \frac{1}{2}(a+b) \Longleftrightarrow a > \frac{a+b}{2}$.
De même qu'on a : $\frac{a+b}{2} > b$.
Ainsi, on a : $a > b \Longrightarrow a > \frac{a+b}{2} > b$. ■

Théorème 1.2.7
Soient $a, b \in \mathbb{R}$.
Si $ab > 0$ *alors* $a > 0$ *et* $b > 0$ *ou* $a < 0$ *et* $b < 0$.

Preuve :
Supposons que $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $ab > 0$.
$ab > 0 \Longrightarrow a \neq 0$ et $b \neq 0$.
cas1 : Supposons que $a > 0$.
$a > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} > 0$ or $ab > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a}ab > \frac{1}{a}0 \Longleftrightarrow b > 0$.
cas2 : Supposons que $a < 0$.
$a < 0 \Longrightarrow \frac{1}{a} < 0$ or $ab > 0 \Longrightarrow \frac{1}{a}ab < \frac{1}{a}0 \Longleftrightarrow b < 0$. ■

Corollaire 1.2.8
Si $ab < 0$ *alors* $a < 0$ *et* $b > 0$ *ou* $a > 0$ *et* $b < 0$.

Preuve : Exercice

Définition 1.2.9
Si $a \in \mathbb{R}$, *on appelle valeur absolue de a notée* $|a|$ *l'élément de* $\mathbb{R}$ *definie par :*

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0, \\ -a & si\ a \leq 0. \end{cases}$$

C'est une application de $\mathbb{R}$ *dans* $P \cup \{0\} = \mathbb{R}_+$.

Théorème 1.2.10
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$.

1. $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$.
2. $|a| = |-a|$.
3. $|ab| = |a||b|$.
4. $-|a| \leq a \leq |a|$.
5. *Si* $c \geq 0$, $|a| \leq c \Longleftrightarrow -c \leq a \leq c$.

Preuve : Exercice

Théorème 1.2.11
Soient $a, b \in \mathbb{R}$:
$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|.$$

Preuve :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ alors :
$-|a| \leq a \leq |a|$ et $-|b| \leq \pm b \leq |b| \Longrightarrow -(|a| + |b|) \leq a \pm b \leq |a| + |b| \Longleftrightarrow |a \pm b| \leq |a| + |b|$.
On sait que :
$|b| = |b + a - a| \leq |b \pm a| + | \pm a| \Longrightarrow |b| \leq |b \pm a| + |a| \Longleftrightarrow |b| - |a| \leq |a \pm b|$.
Idem $|a| - |b| \leq |a \pm b|$ d'où $||b| - |a|| \leq |a \pm b|$. ■

Théorème 1.2.12
Si $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ où $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ alors
$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Preuve : Exercice

1.3 Propriétés de complétude

1.3.1 Bornes supérieures-bornes inférieures

Soit $S \subset \mathbb{R}$ tel que $S \neq \emptyset$.

Définition 1.3.1
On dit que :

1. *$M \in \mathbb{R}$ est un majorant de S si et seulement si pour tout $x \in S$, $x \leq M$.*
2. *$m \in \mathbb{R}$ est un minorant de S si et seulement si pour tout $x \in S$, $x \geq m$.*
3. *$M \in \mathbb{R}$ est le plus grand élément de S si et seulement si $M \in S$ et M est un majorant de S (**maximum**).*
4. *$m \in \mathbb{R}$ est le plus petit élément de S si et seulement si $m \in S$ et m est un minorant de S (**minimum**).*

Définition 1.3.2
On dit que S est :

1. *majoré s'il admet un majorant ;*
2. *minoré s'il admet un minorant ;*
3. *borné s'il est à la fois minoré et majoré.*

Exemple 1.3.3
$S =]1, 2[= \{x \in \mathbb{R} / \ 1 < x < 2\}$.
5 *est un mjorant de S.*
0 *est un minorant de S.*

NB : 0 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$. Mais $\mathbb{N}$ n'admet pas de plus grand élément.

Définition 1.3.4
Si S admet un majorant, on appelle borne supérieure(resp borne inférieure) de S le plus petit de ses majorant (resp le plus grand de ses minorant).

Théorème 1.3.5
$u \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de $S \subset \mathbb{R}$ tel que $S \neq \emptyset$ si et seulement si les propriétés suivantes sont à la fois verifiées :
$i)$ Il n'existe pas de $s \in S$ tel que $u < s$.
$ii)$ Si $v \in \mathbb{R}$ tel que $v < u$ alors il existe $s_0 \in S$ tel que $s_0 > v$.

Preuve :
$\Longleftarrow$ Supposons $i)$ et $ii)$ soient verifiées.
$i) \Longleftrightarrow \forall s \in S,\ s \leq u,\ i.e,\ u$ est un majorant de S.
Par absurdité :
Soit $v \in \mathbb{R},\ v < u$ tel que $\forall s \in S,\ s \leq v$ donc v est un majorant de S.
Alors $ii)$ implique qu'il existe $s_0 \in S$ tel que $s_0 > v$ ce qui est absurde car v est un majorant de S.
Donc u est le plus petit des majorant de S cad u est la borne supérieure de S.
$\Longrightarrow$ Reciproquement supposons que u est la borne supérieure de S alors u est un majorant de S cad $\forall s \in S,\ s \leq u$ alors il n'existe pas de $s \in S$ tel que $s > u$ donc $i)$ est verifiée.
Montrons $ii)$.
Soit $v \in \mathbb{R}$ tel que $v < u$.
Par absurdité :
Supposons $\forall s \in S,\ s \leq v$ alors v est un majorant de S. Ceci est absurde car $v < u$ et u est la borne supperieure de S. ■

Définition 1.3.6

1. *Lorsque la borne supérieure existe et appartient à S, on l'appelle maximum.*
2. *Lorsque la borne inférieure existe et appartient à S, on l'appelle minimum.*

Notation :
✓$Sup(S)$: la borne superieure de S.
✓$Inf(S)$: la borne inferieure de S.
✓$\max(S)$: le maximum de S.
✓$\min(S)$: le minimum de S.

Axiomes :
$C_1)$ Tout ensemble $S \subset \mathbb{R}$; non vide majoré ; admet une borne superieure appartenant à $\mathbb{R}$.
$C_2)$ Tout ensemble $S \subset \mathbb{R}$; non vide minoré ; admet une borne inferieure appartenant à $\mathbb{R}$.

Convention :

$$\begin{cases} Sup(\emptyset) &= -\infty, \\ Inf(\emptyset) &= +\infty. \end{cases}$$

Propriété 1.3.7 ***(Propriété d'Archimède)***
Soit $x \in \mathbb{R}$ alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.

Preuve :
Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrons qu'i existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > x$.
Procédons par absurdité.
Supposons $(\forall n \in \mathbb{N}),\ n \leq x \iff \mathbb{N}$ est majoré par x.
Or $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{N} \neq \emptyset$ donc d'après l'axiome $C_1)$, il existe $u \in \mathbb{R}$ tel que $Sup\mathbb{N} = u$.
Prenons $v = u - 1 < u = Sup\mathbb{N}$ alors compte tenu de la relation $i)$ du théorème 1.3.5, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > v \Longleftrightarrow n_0 > u-1 \Longleftrightarrow u < (n_0+1) \in \mathbb{N}$ absurde car $u = Sup\mathbb{N}$.
■

Lemme 1.3.8
Toute paritie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.

Preuve : Exercice

Corollaire 1.3.9
Soient z et y deux réels strictement positifs alors on a :
i) $\exists n \in \mathbb{N}^* : \; ny > z$.
ii) $\exists n \in \mathbb{N}^* : \; 0 < \frac{1}{n} < z$.
iii) $\exists n \in \mathbb{N}^* : \; n - 1 \leq y < n$.

Preuve :
$i)$ Soient $z, y \in \mathbb{R}$ tels que $z > 0$ et $y > 0 \Longrightarrow \frac{z}{y} > 0$ alors en vertu de la propriété d'Archimède $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{z}{y} \Longrightarrow nz > y$.
$ii)$ Soit $z > 0$ alors $\frac{1}{z}$ donc d'après la propriété d'Archmède $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n > \frac{1}{z}$.
$iii)$ Soit $y > 0$ alors li existe $m \in \mathbb{N}$: $m > y$ donc m est un élément de $A_y = \{k \in \mathbb{N} : \; y < k\}$.
Donc $A_y \neq \emptyset$ et $A_y \subset \mathbb{N}$ (par définition). Alors d'après le lemme 1.3.8 , il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \in A_y, \; n \leq k$.
Donc $n - 1 \leq y < n$ par définition de n. $\blacksquare$

Corollaire 1.3.10
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $E(x) \in \mathbb{Z}$, appeléé partie entière de x telle que

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \text{ ou encore } x - 1 < E(x) \leq x.$$

Preuve : Exercice

Remarque 1.3.11
Soit $x \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{Z}$ alors $E(x + a) = E(x) + a$.

En effet :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \iff E(x) + a \leq x + a < (E(x) + a) + 1.$$

Comme $E(x) \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{Z}$ alors $(E(x) + a) \in \mathbb{Z}$ et donc par définition, il en découle que $E(x + a) = E(x) + a$.

Exercice 1
Montrer si $x \geq 0$ tel que $x \leq \frac{1}{n}, \; \forall n \in \mathbb{N}^*$ alors $x = 0$

Théorème 1.3.12
Si $|a| \leq \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0 \iff a = 0$

Preuve : Exercice

Théorème 1.3.13
Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$.

Preuve :
Considérons l'ensemble $S = \{y \in \mathbb{R}$ tel que $y \geq 0$ et $y^2 \leq 2\}$.
$1 \in \mathbb{R}, \; 1 > 0, \; 1^2 = 1 < 2$ alors $1 \in S$ donc $S \neq \emptyset$.
Montrons que S admet une borne supperieure.
Procédons par absurdité.
Supposons S est non majoré alors 2 n'est pas un majorant de S alors il existe $s_0 \in S$ tel

que $2 < s_0 \Longrightarrow 4 < s_0$.
Comme $s_0 \in S$ alors $s_0^2 \leq 2$ et donc $4 \leq 2$ ce qui est absurde donc 2 est un majorant de S.
Donc S est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, alors d'après l'axiome C_1), il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $Sup(S) = x$.
Montrons que $x^2 = 2$.
Faisons un raisonnement par absurdité. Supposons $x^2 \neq 2$ alors $x^2 < 2$ ou $x^2 > 2$.
Cas 1 : Supposons que $x^2 < 2$.

$$\begin{cases} 1 \in S \\ x = Sup(S) \end{cases} \Longrightarrow x \geq 1 > 0 \Longrightarrow \ x > 0.$$

$\begin{cases} x^2 < 2 \\ x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2 - x^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{2-x^2}{2x+1} > 0$ alors d'après le corrollaire 1.3.9 d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{1}{n} < \frac{2-x^2}{2x+1}$ et donc $x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n} < 2$.
Or $(x+\frac{1}{n})^2 = x^2+\frac{2x}{n}+\frac{1}{n^2} < x^2+\frac{2x}{n}+\frac{1}{n} < 2 \Longrightarrow x+\frac{1}{n} \in S$ absurde car $x+\frac{1}{n} > x = Sup(S)$.
Cas 2 : Supposons que $x^2 > 2$.
$\begin{cases} x^2 > 2 \\ x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 - 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \Longrightarrow \frac{2-x^2}{2x} > 0$ alors d'après le corrollaire 1.3.9 d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{1}{n} < \frac{2-x^2}{2x}$ et donc $x^2 - \frac{2x}{n} > 2$.
Comme $(x - \frac{1}{n})^2 = x^2 - \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} > x^2 - \frac{2x}{n} \Longrightarrow (x - \frac{1}{n})^2 > 2$.

$$\text{Or} \begin{cases} Sup(S) = x \\ x - \frac{1}{n} < x \end{cases} \Longrightarrow \text{ il existe } s_0 \in S \text{ tel que } \begin{cases} s_0 > x - \frac{1}{n} \\ \text{or } x - \frac{1}{n} > 0 \end{cases} \Longrightarrow (x - \frac{1}{n})^2 < s_0^2$$

alors $(x - \frac{1}{n})^2 < 2$ puisque $s_0^2 \leq 2$. Ceci contredit $(x - \frac{1}{n})^2 > 2$.
Dans les deux cas on aboutie à une contradiction alors $x^2 = 2$. ■

Exercice 2
Si $a > 0$ alors il existe un nombre positif b tel que $b^2 = a$.

Définition 1.3.14
On appelle racine carré positive d'un nombre positif a, le réel positif b tel que $b^2 = a$ on note $b = \sqrt{a}$.

Définition 1.3.15

1. *On appelle nombre rationnelle les éléments de $\mathbb{R}$ qui s'écrivent sous la forme $\frac{m}{n}$ où $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$, leur opposée.*
2. *On dit qu'un nombre réel est irrationnel s'il appartient à $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ où $\mathbb{Q}$ designe l'ensemble des nombres rationnels.*

Exercice 3
Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Corollaire 1.3.16
Soit ζ un nombre irrationnel positif.
Soit $z \in \mathbb{R}$ et $z > 0$ alors il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{\zeta}{m} < z$.

Preuve :
Soit ζ un nombre irrationel tel que $\zeta > 0$ et soit $z \in \mathbb{R}$ tel que $z > 0 \Longrightarrow \frac{\zeta}{z} > 0$ alors d'après le corrollaire 1.3.9 d'Archimède, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < \frac{1}{m} < \frac{z}{\zeta}$ or $\zeta > 0$ donc $0 < \frac{\zeta}{m} < z$. ■

Théorème 1.3.17
i) Il existe un rationnel r *tel que* $x < r < y$ *(*$\mathbb{Q}$ ***est dense dans*** $\mathbb{R}$*).*
ii) Si $\zeta > 0$ *est irrationnel alors il existe un rationnel* s *tel que* $x \leq s\zeta < y$*.*

Preuve : Exercice

1.3.2 Intervalles, droite numerique et voisinages

Définition 1.3.18
Soit I *une partie non vide de* $\mathbb{R}$*, on dit que* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *lorsque pour tout* $x, \in I$*, pour tout* $z \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \leq z \leq$ *alors* $z \in I$*.*

NB : Par convention $\emptyset$ est un intervalle.

Exemple 1.3.19 *:* ***Exemple d'intervalle****.*
Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ *tel que* $a < b$ *soit* $\varepsilon > 0$*.*
Les intervales suivants sont des intervalles de $\mathbb{R}$ *:*
$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \backslash x \geq a\}$*(non majoré, fermé).*
$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \backslash x > a\}$*(non majoré, ouvert).*
$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \backslash x < b\}$*(non minoré, ouvert).*
$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \backslash x \leq b\}$*(non minoré, fermé).*
$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \backslash x < b\}$*(ouvert et borné).*
$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \backslash a \leq x < b\}$*.*
$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \backslash a \leq a < x \leq b\}$*.*
$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \backslash a \leq a \leq x \leq b\}$*(fermé et borné).*
$]a + \varepsilon, a - \varepsilon[= \{x \in \mathbb{R} \backslash |x - a| < \varepsilon\}$ *ouvert centré en* a *et de rayon* ε*.*

Propriété 1.3.20
Soient I_1 *et* I_2 *deux intervalles de* $\mathbb{R}$ *alors on a :*
i) $I_1 \cap I_2$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*.*
ii) $I_1 \cup I_2$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$ *de ssi* $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$*.*

Définition 1.3.21
Soit $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$*.*

1. *On dit que* x *point adhérant de* A *(noté* $\overline{A}$ *) si* $\forall\, \varepsilon > 0$, $]a + \varepsilon, a - \varepsilon[\cap A \neq \emptyset$*.*
2. *On dit que* x *point d'acculation de* A *(notée* A' *) si* $\forall \varepsilon > 0$, $]a+\varepsilon, a-\varepsilon[\cap A \backslash \{x\} \neq \emptyset$*.*

NB :
Tout point d'acculation est un point adhérant mais la reciproque n'est pas vraie.

Définition 1.3.22
x *point intérieur à* A *s'il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que* $]x + \varepsilon, x - \varepsilon[\subset A$*.*