Avertissement

Ce document est un DRAFT, les erreurs et les suggestions sont à envoyer à abdoulaziz.fall@uadb.edu.sn

Matrices

Dr. Abdoul Aziz FALL

UFR Sciences Appliquées et Technologie de l'Information et de la Communication
Université Alioune Diop de Bambey

4 novembre 2020

Plan du cours

1. Définitions et exemples
2. Opérations sur les matrices
3. Matrices particulières et sous-matrices
4. Diagonalisation d'une matrice carrée

Définitions et exemples

Définition 1

On appelle matrice de type $(n;m)$ (ou de taille $n \times m$) un tableau à n lignes et m colonnes, comportant $n.m$ nombres d' éléments de K. Une matrice M sera notée :

$$M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} est l'élément à l'intersection de la ligne i et de la colonne j. On note par $\mathcal{M}_{n,m}$ l'ensemble des matrices de type $(n;m)$.

Définitions et exemples

Définition 1

On appelle matrice de type $(n;m)$ *(ou de taille* $n \times m$ *) un tableau à* n *lignes et* m *colonnes, comportant* $n.m$ *nombres d' éléments de* K*. Une matrice* M *sera notée :*

$$M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2}\cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} *est l'élément à l'intersection de la ligne* i *et de la colonne* j*. On note par* $\mathcal{M}_{n,m}$ *l'ensemble des matrices de type* $(n;m)$*.*

Définitions et exemples

Définition 2

1. *On appelle matrice-colonne ou un vecteur-colonne une matrice qui comporte une seule colonne* $(m = 1)$ *c'est-à -dire une matrice de type* $(n; 1)$.

Définitions et exemples

Définition 2

1. *On appelle matrice-colonne ou un vecteur-colonne une matrice qui comporte une seule colonne* $(m = 1)$ *c'est-à -dire une matrice de type* $(n; 1)$.
2. *On appelle matrice-ligne ou un vecteur-ligne une matrice qui comporte une seule ligne* $(n = 1)$ *c'est-à -dire une matrice de type* $(1; m)$.

Définitions et exemples

Définition 2

1. *On appelle matrice-colonne ou un vecteur-colonne une matrice qui comporte une seule colonne* $(m = 1)$ *c'est-à -dire une matrice de type* $(n; 1)$.
2. *On appelle matrice-ligne ou un vecteur-ligne une matrice qui comporte une seule ligne* $(n = 1)$ *c'est-à -dire une matrice de type* $(1; m)$.

Exemple 1

Définitions et exemples

Exemple 2

1. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 & 15 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

   c'est une matrice de 3 *lignes et* 4 *colonnes autrement dit c'est une matrice de taille* 3×4 *c'est-à -dire une matrice de type* $(3;4)$.

Définitions et exemples

Exemple 2

1. $$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 & 15 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

   c'est une matrice de 3 *lignes et* 4 *colonnes autrement dit c'est une matrice de taille* 3×4 *c'est-à -dire une matrice de type* $(3;4)$.

2. $$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   c'est une matrice-colonne de type $(4;1)$.

Définitions et exemples

Exemple 2

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 & 15 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice de 3 *lignes et* 4 *colonnes autrement dit c'est une matrice de taille* 3×4 *c'est-à -dire une matrice de type* $(3;4)$.

2.

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice-colonne de type $(4;1)$.

Définitions et exemples

Exemple 3

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice-ligne de type $(1;4)$.

Définitions et exemples

Exemple 3

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice-ligne de type $(1;4)$.

Remarque 1

✓ *Les indices* i, j *sont des variables muettes car nous pouvons les remplacer par d'autres indices.*

Définitions et exemples

Exemple 3

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c'est une matrice-ligne de type $(1;4)$.

Remarque 1

✓ *Les indices* $i,\ j$ *sont des variables muettes car nous pouvons les remplacer par d'autres indices.*
✓ *Deux matrices sont égales si elles ont la même taille et si leurs éléments de même indices sont identiques.*

Transposée d'une matrice

Proposition 1

Soit A la matrice de taille $m \times n$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

On appelle *matrice transposée de* A *la matrice* A^T *de taille* $n \times m$ *définie par :*

$$A^T = (a_{ji})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

Transposée d'une matrice

Remarque 2

Le coefficient à la place (i, j) de A^T est a_{ji}. Ou encore la i-ième ligne de A devient la i-ème colonne de A^T (et réciproquement la j-ème colonne de A^T est la j-ème ligne de A).

Transposée d'une matrice

Remarque 2

Le coefficient à la place (i, j) de A^T est a_{ji}. Ou encore la i-ième ligne de A devient la i-ème colonne de A^T (et réciproquement la j-ème colonne de A^T est la j-ème ligne de A).

Example 1.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -10 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ alors $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -10 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Transposée d'une matrice

Remarque 2

Le coefficient à la place (i,j) de A^T est a_{ji}. Ou encore la i-ième ligne de A devient la i-ème colonne de A^T (et réciproquement la j-ème colonne de A^T est la j-ème ligne de A).

Example 1.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -10 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ alors $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 \\ -10 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

Notation 1

La transposée de la matrice A se note aussi souvent ${}^tA$.

Transposée d'une matrice

Proposition 2

1. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(AB)^T = B^T A^T$ *(on le verra plus tard avec le produit matriciel)*

Matrice symétrique

Définition 3

Une matrice A de taille $n \times n$ est symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si :

$$A = A^T \text{ ou encore si } a_{ij} = a_{ji} \text{ pour tout } i, j = 1, 2, ...n.$$

Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Matrice symétrique

Définition 3

Une matrice A de taille $n \times n$ est symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si :

$$A = A^T \text{ ou encore si } a_{ij} = a_{ji} \text{ pour tout } i, j = 1, 2, \ldots n.$$

Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Example 1.2

Les matrices suivantes sont symétriques :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

Matrice symétrique

Définition 3

Une matrice A de taille $n \times n$ est symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si :

$$A = A^T \text{ ou encore si } a_{ij} = a_{ji} \text{ pour tout } i, j = 1, 2, ...n.$$

Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Example 1.2

Les matrices suivantes sont symétriques :

Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Matrice anti-symétrique

Définition 4

Une matrice A de taille $n \times n$ est anti-symétrique *si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si :*

$$A^T = -A \text{ ou encore si } a_{ij} = -a_{ji} \text{ pour tout } i, j = 1, 2, ...n.$$

Matrice anti-symétrique

Définition 4

Une matrice A de taille $n \times n$ est anti-symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si :

$$A^T = -A \text{ ou encore si } a_{ij} = -a_{ji} \text{ pour tout } i, j = 1, 2, ...n.$$

Example 1.3

Les matrices suivantes sont symétriques :

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et

Matrice anti-symétrique

Définition 4

Une matrice A de taille $n \times n$ est anti-symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si :

$$A^T = -A \text{ ou encore si } a_{ij} = -a_{ji} \text{ pour tout } i, j = 1, 2, ...n.$$

Example 1.3

Les matrices suivantes sont symétriques :

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 3

Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls.

Matrice anti-symétrique

Définition 4

Une matrice A de taille $n \times n$ est anti-symétrique si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si :

$$A^T = -A \text{ ou encore si } a_{ij} = -a_{ji} \text{ pour tout } i, j = 1, 2, ...n.$$

Example 1.3

Les matrices suivantes sont symétriques :

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & 4 \\ -5 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 3

Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont toujours tous nuls. En effet $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, 2, ...n$. alors $a_{ii} = -a_{ii}$ c'est-à-dire $a_{ii} = 0$

Opérations sur les matrices

Opérations sur les matrices

Définition 5 (Somme de deux matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ *deux matrices de type* $(n;m)$*. On appelle la somme de* A *et* B*, notée* $A+B$*, la matrice* $S = (s_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ *telle que* $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *pour tout* $i,\ j$*.*

Opérations sur les matrices

Définition 5 (Somme de deux matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ *deux matrices de type* $(n; m)$*. On appelle la somme de* A *et* B*, notée* $A + B$*, la matrice* $S = (s_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ *telle que* $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *pour tout* $i,\ j$*.*

Example 2.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -10 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Opérations sur les matrices

Définition 5 (Somme de deux matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ *deux matrices de type* $(n; m)$. *On appelle la* *somme de* A *et* B, *notée* $A + B$, *la matrice* $S = (s_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ *telle que* $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *pour tout* i, j.

Example 2.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -10 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

Opérations sur les matrices

Définition 5 (Somme de deux matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ *deux matrices de type* $(n; m)$. *On appelle la somme de A et B, notée $A+B$, la matrice* $S = (s_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ *telle que* $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *pour tout* $i,\ j$.

Example 2.1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -10 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & 1 \\ -1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -6 \end{pmatrix}$

alors $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 6 \\ -4 & 6 & 5 & 2 \\ 5 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 6 (Produit d'une matrice par un scalaire)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ *une matrice de type* $(n; m)$ *et soit* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 6 (Produit d'une matrice par un scalaire)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ *une matrice de type* $(n; m)$ *et soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*. On appelle* ***produit de*** λ ***par*** A *la matrice* $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 6 (**Produit d'une matrice par un scalaire**)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ *une matrice de type* $(n;m)$ *et soit* $\lambda \in \mathbb{K}$*. On appelle produit de* λ *par* A *la matrice* $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

Example 2.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -10 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Produit d'une matrice par un scalaire

Définition 6 (Produit d'une matrice par un scalaire)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ *une matrice de type* $(n; m)$ *et soit* $\lambda \in \mathbb{K}$. *On appelle* ***produit de*** λ ***par*** A *la matrice* $\lambda A = (\lambda a_{ij})$

Example 2.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -10 & 5 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$ alors $3A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -30 & 15 \\ -9 & 6 & 9 & 3 \\ 15 & 12 & 6 & 18 \end{pmatrix}$.

Produit de deux matrices

Example 2.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $AB =$

Produit de deux matrices

Définition 7 (Produit de deux matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p \\ 1\leq j\leq m}}$ *deux matrices de type* $(n;m)$. *On appelle le produit de* A *et* B, *notée* AB, *la matrice* $P = (p_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ *telle que* $p_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$ *pour tout* $i,\ j$.

Produit de deux matrices

Définition 7 (Produit de deux matrices)

Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq m}}$ *deux matrices de type* $(n; m)$. *On appelle le produit de* A *et* B, *notée* AB, *la matrice* $P = (p_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m}}$ *telle que* $p_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$ *pour tout* $i, \ j$.

Produit de deux matrices

Remarque 4

✓ *Le produit de deux matrices n'existe que si le nombre de colonnes de l'une est égale au nombre de lignes de l'autre.*

Produit de deux matrices

Remarque 4

✓ *Le produit de deux matrices n'existe que si le nombre de colonnes de l'une est égale au nombre de lignes de l'autre.*
✓ *On retient que le produit s'obtient "ligne par colonne".*

Example 2.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Produit de deux matrices

Remarque 4

✓ *Le produit de deux matrices n'existe que si le nombre de colonnes de l'une est égale au nombre de lignes de l'autre.*
✓ *On retient que le produit s'obtient "ligne par colonne".*

Example 2.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

alors $AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 \\ 3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$

Propriétés sur les opérations matricielles

Proposition 3

Soit A et B deux matrices avec des tailles adéquates suivant les opérations utilisées. Alors on a :

1. $A + B = B + A$; *(commutativité)*

Propriétés sur les opérations matricielles

Proposition 3

Soit A et B deux matrices avec des tailles adéquates suivant les opérations utilisées. Alors on a :

1. $A+B=B+A$; *(commutativité)*
2. $(A+B)+C=A+(B+C)$; *(associativité)*

Propriétés sur les opérations matricielles

Proposition 3

Soit A et B deux matrices avec des tailles adéquates suivant les opérations utilisées. Alors on a :

1. $A + B = B + A$; *(commutativité)*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$; *(associativité)*
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$; *(distributivité par rapport à un scalaire)*

Propriétés sur les opérations matricielles

Proposition 3

Soit A et B deux matrices avec des tailles adéquates suivant les opérations utilisées. Alors on a :

1. $A + B = B + A$; *(commutativité)*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$; *(associativité)*
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$; *(distributivité par rapport à un scalaire)*
4. $(AB)C = A(BC)$;

Propriétés sur les opérations matricielles

Proposition 3

Soit A et B deux matrices avec des tailles adéquates suivant les opérations utilisées. Alors on a :

1. $A + B = B + A$; *(commutativité)*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$; *(associativité)*
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$; *(distributivité par rapport à un scalaire)*
4. $(AB)C = A(BC)$;
5. $A(B + C) = AB + BC$; *(distributivité)*

Propriétés sur les opérations matricielles

Proposition 3

Soit A et B deux matrices avec des tailles adéquates suivant les opérations utilisées. Alors on a :

1. $A + B = B + A$; *(commutativité)*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$; *(associativité)*
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$; *(distributivité par rapport à un scalaire)*
4. $(AB)C = A(BC)$;
5. $A(B + C) = AB + BC$; *(distributivité)*
6. $(B + C)A = BA + CA$; *(distributivité)*

Propriétés sur les opérations matricielles

Proposition 3

Soit A et B deux matrices avec des tailles adéquates suivant les opérations utilisées. Alors on a :

1. $A + B = B + A$; *(commutativité)*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$; *(associativité)*
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$; *(distributivité par rapport à un scalaire)*
4. $(AB)C = A(BC)$;
5. $A(B + C) = AB + BC$; *(distributivité)*
6. $(B + C)A = BA + CA$; *(distributivité)*
7. $(A + B)^T = A^T + B^T$; *(transposée)*

Propriétés sur les opérations matricielles

Proposition 3

Soit A et B deux matrices avec des tailles adéquates suivant les opérations utilisées. Alors on a :

1. $A + B = B + A$; *(commutativité)*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$; *(associativité)*
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$; *(distributivité par rapport à un scalaire)*
4. $(AB)C = A(BC)$;
5. $A(B + C) = AB + BC$; *(distributivité)*
6. $(B + C)A = BA + CA$; *(distributivité)*
7. $(A + B)^T = A^T + B^T$; *(transposée)*
8. $(AB)^T = B^T A^T$;

Propriétés sur les opérations matricielles

Proposition 3

Soit A et B deux matrices avec des tailles adéquates suivant les opérations utilisées. Alors on a :

1. $A + B = B + A$; *(commutativité)*
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$; *(associativité)*
3. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$; *(distributivité par rapport à un scalaire)*
4. $(AB)C = A(BC)$;
5. $A(B + C) = AB + BC$; *(distributivité)*
6. $(B + C)A = BA + CA$; *(distributivité)*
7. $(A + B)^T = A^T + B^T$; *(transposée)*
8. $(AB)^T = B^T A^T$;
9. $AB \neq BA$ *(en général).*

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 8

Une matrice $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ *est dite nulle si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i,\ j$

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 8

Une matrice $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$ *est dite nulle si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i,\ j$ *et on note*

$$O_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 8

Une matrice $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq m}}$ *est dite nulle si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i,\ j$ *et on note*

$$O_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit une matrice est nulle si tous ses éléments sont nuls.

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 8

Une matrice $M = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}$ *est dite nulle si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i,\ j$ *et on note*

$$O_{nm} = \begin{pmatrix} 0 & 0\cdots & 0 \\ 0 & 0\cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0\cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit une matrice est nulle si tous ses éléments sont nuls.

Remarque 5

La matrice nulle O_{nm} *est neutre pour l'addition c'est-à -dire pour toute matrice* M *de taille* nm*, on a*

$$M + O_{nm} = O_{nm} + M = M.$$

Matrices particulières et sous-matrices

Remarque 6

On peut avoir deux matrices non nulles dont le produit est nulle.

Pour s'en convaincre, considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ *alors* $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Matrices particulières et sous-matrices

Remarque 6

On peut avoir deux matrices non nulles dont le produit est nulle.

Pour s'en convaincre, considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

alors $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition 9

On appelle matrice carrée toute matrice de type $(n; n)$ *et note par* $\mathcal{M}_n$ *l'ensemble des matrices carrées.*

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 10

Une matrice carrée $M = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$ *est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i > j$ *(resp. pour tout* $j > i$ *)*

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 10

Une matrice carrée $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ *est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i > j$ *(resp. pour tout* $j > i$ *)*

Example 3.1

$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 10

Une matrice carrée $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ *est dite triangulaire supérieure (resp. inférieure) si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i > j$ *(resp. pour tout* $j > i$ *)*

Example 3.1

$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure.

$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire inférieure

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 11

Une matrice carrée $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ *est dite diagonale si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i \neq j$.

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 11

Une matrice carrée $M = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ *est dite diagonale si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i \neq j$.

Remarque 7

En d'autres termes, une matrice carrée est dite diagonale si elle est à la fois une matrice triangulaire supérieure et une matrice triangulaire inférieure.

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 11

Une matrice carrée $M = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ *est dite diagonale si* $a_{ij} = 0$ *pour tout* $i \neq j$.

Remarque 7

En d'autres termes, une matrice carrée est dite diagonale si elle est à la fois une matrice triangulaire supérieure et une matrice triangulaire inférieure.

Example 3.2

$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice diagonale.

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 12

La matrice identité est la matrice carrée notée $I_n = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$ *telle que* $\begin{cases} a_{ij} = 1 \ si & i = j & , \\ a_{ij} = 0 \ si & i \neq j & . \end{cases}$ $,i.e,$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 12

La matrice identité est la matrice carrée notée $I_n = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ *telle que* $\begin{cases} a_{ij} = 1 \; si & i = j \quad , \\ a_{ij} = 0 \; si & i \neq j \quad . \end{cases}$ $,i.e,$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarque 8

La matrice identité est neutre pour le produit matriciel c-à -d pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n$*,*

$$MI_n = I_nM = M.$$

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 13

Toute matrice construite à partir d'une matrice A par élimination de lignes ou de colonnes est dite sous-matrice de A. En particulier, toute ligne ou toute colonne de A est une sous matrice de A.

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 13

Toute matrice construite à partir d'une matrice A par élimination de lignes ou de colonnes est dite sous-matrice de A. En particulier, toute ligne ou toute colonne de A est une sous matrice de A.

Définition 14

La trace d'une matrice carrée A notée $tr(A)$ est la somme des éléments sur le diagonal de A.

Matrices particulières et sous-matrices

Définition 13

Toute matrice construite à partir d'une matrice A par élimination de lignes ou de colonnes est dite sous-matrice de A. En particulier, toute ligne ou toute colonne de A est une sous matrice de A.

Définition 14

La trace d'une matrice carrée A notée $tr(A)$ est la somme des éléments sur le diagonal de A.

Example 3.3

1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $tr(A) = 3 + 0 + 2 = 5$.
2. $tr(I_n) = n$.

Trace d'une matrice carrée

Proposition 4

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ *et soit* $A,\ B \in \mathcal{M}_n$ *alors*

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$;

Trace d'une matrice carrée

Proposition 4

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ *et soit* $A, \; B \in \mathcal{M}_n$ *alors*

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$;
2. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$;

Trace d'une matrice carrée

Proposition 4

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ *et soit* $A,\ B \in \mathcal{M}_n$ *alors*

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$;
2. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$;
3. $tr(A^{'}) = tr(A)$;

Trace d'une matrice carrée

Proposition 4

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ *et soit* $A,\ B \in \mathcal{M}_n$ *alors*

1. $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$;
2. $tr(\lambda A) = \lambda tr(A)$;
3. $tr(A^{'}) = tr(A)$;
4. $tr(AB) = tr(BA)$;

Déterminant d'une matrice carrée

Définition 15

Toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *admet un déterminant réel noté* $\det(A)$ *ou* $|A|$.

Déterminant d'une matrice carrée

Définition 15

Toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *admet un déterminant réel noté* $\det(A)$ *ou* $|A|$.

1. *Pour* $n = 1$, *la matrice se réduit au seul élément* $A = (a_{11})$ *et on a*

$$\det(A) = a_{11}.$$

Déterminant d'une matrice carrée

Définition 15

Toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{n \times n}$ *admet un déterminant réel noté* $\det(A)$ *ou* $|A|$.

1. *Pour* $n = 1$, *la matrice se réduit au seul élément* $A = (a_{11})$ *et on a*
$$\det(A) = a_{11}.$$

2. *Pour* $n = 2$, *la matrice se réduit à* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Déterminant d'une matrice carrée

Définition 15

Toute matrice carrée $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *admet un déterminant réel noté* $\det(A)$ *ou* $|A|$.

1. *Pour* $n = 1$, *la matrice se réduit au seul élément* $A = (a_{11})$ *et on a*

$$\det(A) = a_{11}.$$

2. *Pour* $n = 2$, *la matrice se réduit à* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *et on a*

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Déterminant d'une matrice carrée

Définition 16

Pour $n = 3$*, la matrice se réduit à* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ *et on a* $\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - (a_{31}a_{22}a_{13} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{33}a_{21}a_{12})$.

Trace d'une matrice carrée

Example 3.4

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = (2)(3) - (-1)(-5) = 11.$

Trace d'une matrice carrée

Example 3.4

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = (2)(3) - (-1)(-5) = 11.$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Trace d'une matrice carrée

Example 3.4

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = (2)(3) - (-1)(-5) = 11.$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\det(B) =$ calcul à faire

Trace d'une matrice carrée

Example 3.4

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = (2)(3) - (-1)(-5) = 11.$
2. $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\det(B) =$ calcul à faire
   et on trouve $\det(B) =$

Matrices particulières et sous-matrices

Proposition 5

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n$ *alors*

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$;

Matrices particulières et sous-matrices

Proposition 5

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n$ *alors*

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$;
2. $\det(A') = \det(A)$;

Matrices particulières et sous-matrices

Proposition 5

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n$ *alors*

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$;
2. $\det(A^{'}) = \det(A)$;
3. $\det(AB) = \det(BA)$.

Matrices particulières et sous-matrices

Proposition 5

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n$ *alors*

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$;
2. $\det(A') = \det(A)$;
3. $\det(AB) = \det(BA)$.

Matrices particulières et sous-matrices

Proposition 5

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n$ *alors*

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$;
2. $\det(A^{'}) = \det(A)$;
3. $\det(AB) = \det(BA)$.

Proposition 6

Soit $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *alors* $\det(A) = 0$ *si la matrice* A *a une des caractéristiques suivantes :*

1. *une ligne (ou une colonne) est composée uniquement de zéro ;*

Matrices particulières et sous-matrices

Proposition 5

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n$ *alors*

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$;
2. $\det(A^{'}) = \det(A)$;
3. $\det(AB) = \det(BA)$.

Proposition 6

Soit $A = (a_{ij})_{n\times n}$ *alors* $\det(A) = 0$ *si la matrice* A *a une des caractéristiques suivantes :*

1. *une ligne (ou une colonne) est composée uniquement de zéro ;*
2. *deux lignes (ou deux colonnes) sont proportionnelles ;*

Matrices particulières et sous-matrices

Proposition 5

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ *et soit* $A \in \mathcal{M}_n$ *alors*

1. $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$;
2. $\det(A^{'}) = \det(A)$;
3. $\det(AB) = \det(BA)$.

Proposition 6

Soit $A = (a_{ij})_{n \times n}$ *alors* $\det(A) = 0$ *si la matrice* A *a une des caractéristiques suivantes :*

1. *une ligne (ou une colonne) est composée uniquement de zéro ;*
2. *deux lignes (ou deux colonnes) sont proportionnelles ;*
3. *une ligne (ou une colonne) est une combinaison linéaires des suites lignes (colonnes).*

Les déterminants

Remarque 9

✓ *Les déterminants ne change pas, on on ajoute une ligne (une colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (colonnes).*

Les déterminants

Remarque 9

✓ *Les déterminants ne change pas, on on ajoute une ligne (une colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (colonnes).*
✓ *Le déterminant change de signe si on permute deux lignes (ou deux colonnes).*

Les déterminants

Remarque 9

✓ *Les déterminants ne change pas, on on ajoute une ligne (une colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (colonnes).*
✓ *Le déterminant change de signe si on permute deux lignes (ou deux colonnes).*
✓ *Le déterminant est multiplier par $\lambda \in \mathbb{K}$, si on multiplie une ligne (ou une colonne) par λ.*

Les déterminants

Remarque 9

✓ *Les déterminants ne change pas, on on ajoute une ligne (une colonne) une combinaison linéaire d'autres lignes (colonnes).*
✓ *Le déterminant change de signe si on permute deux lignes (ou deux colonnes).*
✓ *Le déterminant est multiplier par $\lambda \in \mathbb{K}$, si on multiplie une ligne (ou une colonne) par λ.*

Définition 17

Le rang d'une matrice $A = (a_{ij})_{n\times m}$, noté $rg(A)$ est égale au nombre de colonnes (ou de lignes) de A linéaires indépendantes.

Les déterminants

Définition 18

Les lignes (colonnes) sont linéairement indépendantes si et si seulement si l'équation $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbb{R}^n}$ *admet une unique solution* $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_{n-1},\ \lambda_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Les déterminants

Définition 18

Les lignes (colonnes) sont linéairement indépendantes si et si seulement si l'équation $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbb{R}^n}$ *admet une unique solution* $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_{n-1},\ \lambda_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$*.*

Example 3.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les déterminants

Définition 18

Les lignes (colonnes) sont linéairement indépendantes si et si seulement si l'équation $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbb{R}^n}$ *admet une unique solution* $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_{n-1},\ \lambda_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$*.*

Example 3.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda L_1 + \beta L_2 + \alpha L_3 = 0$ alors $\begin{cases} \lambda + \beta + 3\alpha & = & 0, \\ 2\lambda - \beta & = & 0, \\ 2\beta + \alpha & = & 0. \end{cases}$

Les déterminants

Définition 18

Les lignes (colonnes) sont linéairement indépendantes si et si seulement si l'équation $\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_n L_n = 0_{\mathbb{R}^n}$ *admet une unique solution* $(\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_{n-1},\ \lambda_n) = 0_{\mathbb{R}^n}$*.*

Example 3.5

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda L_1 + \beta L_2 + \alpha L_3 = 0$ alors $\begin{cases} \lambda + \beta + 3\alpha & = & 0, \\ 2\lambda - \beta & = & 0, \\ 2\beta + \alpha & = & 0. \end{cases}$

En résolvant le système on obtient : $\alpha = \lambda = \beta = 0$.

Rang d'une matrice rectangulaire

Définition 19

Le rang d'une matrice A, noté $rg(A)$ est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Proposition 7

Soit $A = (a_{ij})_{n\times m}$

1. $rg(A) = rg(A^T)$;
2. $r(A) \leq \min(n, m)$.

Rang d'une matrice rectangulaire

Définition 19

Le rang d'une matrice A, noté $rg(A)$ est le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Proposition 7

Soit $A = (a_{ij})_{n \times m}$

1. $rg(A) = rg(A^T)$;
2. $r(A) \leq \min(n, m)$.

Définition 20

Si la matrice $A = (a_{ij})_{n \times m}$ est telle que $rg(A) = \min(n, m)$ elle est dite de plein rang.

Rang d'une matrice rectangulaire

Proposition 8

Le rang d'une matrice ne change pas lorsque :

1. *les colonnes (ou lignes) sont permutées ;*

Rang d'une matrice rectangulaire

Proposition 8

Le rang d'une matrice ne change pas lorsque :

1. *les colonnes (ou lignes) sont permutées ;*
2. *une colonne (ou ligne) est multipliée par un réel non nul ;*

Rang d'une matrice rectangulaire

Proposition 8

Le rang d'une matrice ne change pas lorsque :

1. *les colonnes (ou lignes) sont permutées ;*
2. *une colonne (ou ligne) est multipliée par un réel non nul ;*
3. *une combinaison d'autres lignes (ou colonnes) est ajoutée à une ligne (ou) colonne donnée.*

Inversion d'une matrice carrée

Définition 21

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible (régulière) s'il existe une matrice $A^{'} \in \mathcal{M}_n$ telle que $A'A = AA' = I_n$ et on note $A' = A^{-1}$ la matrice inverse de A.

Inversion d'une matrice carrée

Définition 21

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible (régulière) s'il existe une matrice $A^{'} \in \mathcal{M}_n$ telle que $A'A = AA' = I_n$ et on note $A' = A^{-1}$ la matrice inverse de A.

Proposition 9

1. *Si $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible alors :*

Inversion d'une matrice carrée

Définition 21

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible (régulière) s'il existe une matrice $A^{'} \in \mathcal{M}_n$ telle que $A'A = AA' = I_n$ et on note $A' = A^{-1}$ la matrice inverse de A.

Proposition 9

1. *Si $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible alors :*
   1. *A^{-1} est aussi inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$;*

Inversion d'une matrice carrée

Définition 21

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible (régulière) s'il existe une matrice $A^{'} \in \mathcal{M}_n$ telle que $A'A = AA' = I_n$ et on note $A' = A^{-1}$ la matrice inverse de A.

Proposition 9

1. *Si $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible alors :*
    1. *A^{-1} est aussi inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$;*
    2. *A' est inversible et $(A')^{-1} = (A^{-1})^{'}$;*

Inversion d'une matrice carrée

Définition 21

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible (régulière) s'il existe une matrice $A^{'} \in \mathcal{M}_n$ telle que $A'A = AA' = I_n$ et on note $A' = A^{-1}$ la matrice inverse de A.

Proposition 9

1. *Si $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible alors :*
   1. A^{-1} *est aussi inversible et* $(A^{-1})^{-1} = A$ *;*
   2. A' *est inversible et* $(A')^{-1} = (A^{-1})^{'}$ *;*
   3. $\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0,\ (\lambda A)$ *est inversible et* $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.

Inversion d'une matrice carrée

Définition 21

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible (régulière) s'il existe une matrice $A^{'} \in \mathcal{M}_n$ telle que $A'A = AA' = I_n$ et on note $A' = A^{-1}$ la matrice inverse de A.

Proposition 9

1. *Si $A \in \mathcal{M}_n$ est inversible alors :*
   1. A^{-1} *est aussi inversible et* $(A^{-1})^{-1} = A$;
   2. A' *est inversible et* $(A')^{-1} = (A^{-1})^{'}$;
   3. $\lambda \in \mathbb{K},\ \lambda \neq 0,\ (\lambda A)$ *est inversible et* $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$.
2. *Si $A,\ B \in \mathcal{M}_n$ sont inversibles alors le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

Inversion d'une matrice carrée

Remarque 10 (Inverse d'une matrice d'ordre 2)

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *telle que* $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$

Inversion d'une matrice carrée

Remarque 10 (Inverse d'une matrice d'ordre 2)

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ *telle que* $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.
Alors on a

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

inversibilité d'une matrice et application linéaire associée

Définition 22 (application linéaire associée à une matrice)

On appelle **système linéaire** *de n équations à p inconnues un système du type*

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,p}x_p &= & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,p}x_p &= & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,p}x_p &= & b_n. \end{cases}$$

Les nombres (réels ou complexes) $a_{i,j}$ et b_i sont donnés, on les appelle les coefficients du système. Les x_i sont les inconnues du système, résoudre le système revient à déterminer les valeurs possibles des x_i.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.1

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.1

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = -2(1) - 3(2) = -8 \neq 0$

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.1

Soit $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\det(A) = -2(1) - 3(2) = -8 \neq 0$ et donc $A^{-1} = \frac{1}{-8} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 23

Deux matrices carrées A *et* B *d'ordre* n *sont dites semblables s'il existe une matrice* P *carrée d'ordre* n *inversible telle que :* $A = P^{-1}BP$ *(ou* $B = PAP^{-1}$ *).* P *est appelée matrice de passage.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 23

Deux matrices carrées A et B d'ordre n sont dites semblables s'il existe une matrice P carrée d'ordre n inversible telle que : $A = P^{-1}BP$ (ou $B = PAP^{-1}$). P est appelée matrice de passage.

Définition 24

Une matrice carrée A d'ordre n est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 25

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

1. *Le vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $i.e$, $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 25

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

1. *Le vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $i.e$, $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A si et seulement si*
   1. $X \neq 0$ *;*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 25

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

1. *Le vecteur colonne $X \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, $i.e$, $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A si et seulement si*
   1. $X \neq 0$;
   2. *il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$.*
2. *On dit que λ est valeur propre associée au vecteur propre X.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.2

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Déterminons la valeur propre de A associée à X.

$$AX = \lambda X \iff \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \lambda = 2.$$

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 10

$\lambda \in \mathbb{K}$ *est valeur propre de* A *si et seulement si* $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 10

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition 26

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

1. *Le polynôme $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ de degré n est dit polynôme caractéristique de A.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 10

$\lambda \in \mathbb{K}$ *est valeur propre de* A *si et seulement si* $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition 26

Soit A *une matrice carrée d'ordre* n.

1. *Le polynôme* $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ *de degré* n *est dit polynôme caractéristique de* A.
2. *L'équation* $P_A(\lambda) = 0$ *est appelée équation caractéristique de* A.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 10

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition 26

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

1. *Le polynôme $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ de degré n est dit polynôme caractéristique de A.*
2. *L'équation $P_A(\lambda) = 0$ est appelée équation caractéristique de A.*
3. *L'ensemble des solutions complexes de l'équation caractéristique de A constitue le spectre de A et est noté $spec(A)$.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 10

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si et seulement si $P_A(\lambda) := \det(A - \lambda I_n) = 0$.

Définition 26

Soit A une matrice carrée d'ordre n.

1. *Le polynôme $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ de degré n est dit polynôme caractéristique de A.*
2. *L'équation $P_A(\lambda) = 0$ est appelée équation caractéristique de A.*
3. *L'ensemble des solutions complexes de l'équation caractéristique de A constitue le spectre de A et est noté $spec(A)$.*
4. *La multiplicité algébrique d'une valeur propre est sa multiplicité comme solution de l'équation caractéristique.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 27

On appelle sous espace propre associée à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ *d'une matrice carrée* A *le noyau de* $A\lambda - I_n$ $i.e \ker(A - \lambda I_n)$ *notée* E_λ. E_λ *contient* 0 *et le vecteur propre associé à* λ*, par suite* $\dim E_\lambda \geq 1$.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 27

On appelle sous espace propre associée à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ d'une matrice carrée A le noyau de $A\lambda - I_n$ $i.e\ \ker(A - \lambda I_n)$ notée E_λ. E_λ contient 0 et le vecteur propre associé à λ, par suite $\dim E_\lambda \geq 1$.

Remarque 11

Le spectre comporte n nombre complexes distincts ou non.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 11

Le spectre d'une matrice A admet les propriétés suivantes

1. A *et* $A^{'}$ *ont le même spectre*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 11

Le spectre d'une matrice A admet les propriétés suivantes

1. A *et* A' *ont le même spectre*
2. *Si* A *est inversible alors* 0 *n'est pas valeur propre de* A.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 11

Le spectre d'une matrice A admet les propriétés suivantes

1. A *et* $A^{'}$ *ont le même spectre*
2. *Si* A *est inversible alors* 0 *n'est pas valeur propre de* A*.*
3. *Si* A *est inversible* λ *une valeur propre de réelle de* A *alors* $\dfrac{1}{\lambda}$ *est une valeur propre de* A^{-1}*.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 11

Le spectre d'une matrice A admet les propriétés suivantes

1. A *et* $A^{'}$ *ont le même spectre*
2. *Si* A *est inversible alors* 0 *n'est pas valeur propre de* A.
3. *Si* A *est inversible* λ *une valeur propre de réelle de* A *alors* $\dfrac{1}{\lambda}$ *est une valeur propre de* A^{-1}.
4. *Les matrices semblables ont toute le même le spectre.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $P_A(\lambda)$.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $P_A(\lambda)$.
2. En déduire que $spec(A) = \{1, 2, -1\}$

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer $P_A(\lambda)$.
2. En déduire que $spec(A) = \{1, 2, -1\}$
3. Déterminer le sous espace propre de chaque valeur propre.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 28

1. *Une matrice A d'ordre n est dite symétrique si $A^{'} = A$.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 28

1. *Une matrice A d'ordre n est dite symétrique si $A^{'} = A$.*
2. *Une matrice A d'ordre n est dite antisymétrique si $A^{'} = -A$.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 28

1. *Une matrice A d'ordre n est dite symétrique si $A^{'} = A$.*
2. *Une matrice A d'ordre n est dite antisymétrique si $A^{'} = -A$.*

Proposition 12

1. *Si D est une matrice carrée diagonale alors ses valeurs propres sont les n valeurs se trouvant sur la diagonales c'est-à -dire si*
$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 28

1. *Une matrice A d'ordre n est dite symétrique si $A^{'} = A$.*
2. *Une matrice A d'ordre n est dite antisymétrique si $A^{'} = -A$.*

Proposition 12

1. *Si D est une matrice carrée diagonale alors ses valeurs propres sont les n valeurs se trouvant sur la diagonales c'est-à -dire si* $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & d_n \end{pmatrix}$ *alors* $spec(D) = \{d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}, d_n\}$.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Définition 28

1. *Une matrice A d'ordre n est dite symétrique si $A^{'} = A$.*
2. *Une matrice A d'ordre n est dite antisymétrique si $A^{'} = -A$.*

Proposition 12

1. *Si D est une matrice carrée diagonale alors ses valeurs propres sont les n valeurs se trouvant sur la diagonales c'est-à -dire si* $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & d_n \end{pmatrix}$ *alors* $spec(D) = \{d_1, d_2, \cdots, d_{n-1}, d_n\}$.
2. *Si une matrice carrée d'ordre n est symétrique alors elle est diagonalisable.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 13 (Condition nécessaire de diagonalisation)

Si A admet n valeurs propres distinctes 2 à 2 alors A est diagonalisable.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 13 (Condition nécessaire de diagonalisation)

Si A admet n valeurs propres distinctes 2 à 2 alors A est diagonalisable.

Proposition 14 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation)

Pour chaque matrice carrée A d'ordre n les assertions suivantes sont équivalentes

1. *A est diagonalisable*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 13 (Condition nécessaire de diagonalisation)

Si A admet n valeurs propres distinctes 2 à 2 alors A est diagonalisable.

Proposition 14 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation)

Pour chaque matrice carrée A d'ordre n les assertions suivantes sont équivalentes

1. *A est diagonalisable*
2. *Les deux conditions suivantes sont vérifiées*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 13 (Condition nécessaire de diagonalisation)

Si A admet n valeurs propres distinctes 2 à 2 alors A est diagonalisable.

Proposition 14 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation)

Pour chaque matrice carrée A d'ordre n les assertions suivantes sont équivalentes

1. *A est diagonalisable*
2. *Les deux conditions suivantes sont vérifiées*
    1. *$P_A(\lambda)$ est totalement réductible*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Proposition 13 (Condition nécessaire de diagonalisation)

Si A admet n valeurs propres distinctes 2 à 2 alors A est diagonalisable.

Proposition 14 (Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation)

Pour chaque matrice carrée A d'ordre n les assertions suivantes sont équivalentes

1. *A est diagonalisable*
2. *Les deux conditions suivantes sont vérifiées*
   1. *$P_A(\lambda)$ est totalement réductible*
   2. *La dimension de chaque sous-espace propre est égale à la multiplicité de sa valeur propre associée*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Remarque 12

Dire qu'une matrice carrée d'ordre n *est diagonalisable revient à dire que* $\sum_{i=1}^{n} \dim E_{\lambda_i} = n$ *avec* E_{λ_i} *est le sous espace propre associée à la valeur propre* $\lambda_i \in \mathbb{K}$*.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Remarque 13

Si A est diagonalisable alors :

Diagonalisation d'une matrice carrée

Remarque 13

Si A est diagonalisable alors :

1. *l'une des matrices semblable à A est la matrice diagonale D constituée des valeurs propres de A :*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & \lambda_n \end{pmatrix};$$

Diagonalisation d'une matrice carrée

Remarque 13

Si A est diagonalisable alors :

1. *l'une des matrices semblable à A est la matrice diagonale D constituée des valeurs propres de A :*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & \lambda_n \end{pmatrix};$$

2. *les colonnes de la matrice de passage P sont constituées des vecteurs propres v_i associée à chaque valeur propre λ_i.*

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$.
2. Donner l'ensemble $spec(A)$.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$.
2. Donner l'ensemble $spec(A)$.
3. Déterminer le sous-espace propre E_λ associée à chaque valeur propre λ.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$.
2. Donner l'ensemble $spec(A)$.
3. Déterminer le sous-espace propre E_λ associée à chaque valeur propre λ.
4. Montrer que A est diagonalisable.

Diagonalisation d'une matrice carrée

Example 4.4

Soit $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer le polynôme caractéristique $P_A(\lambda)$.
2. Donner l'ensemble $spec(A)$.
3. Déterminer le sous-espace propre E_λ associée à chaque valeur propre λ.
4. Montrer que A est diagonalisable.
5. Donner la matrice diagonale D semblable à A et la matrice de passage P associée à D.

Merci de votre attention

Merci de votre attention