Лекция №1

① Свободная механическая система

Свободная механическая система — $(m_i, \mathbb{r}_i)_{i=1}^{N}$, $\mathbb{r}_i = (x_i, y_i, z_i)^T$, движущаяся под действием $\mathbb{F} = (\mathbb{F}_i^T)_{i=1}^{N\,T} = \mathbb{F}(t, \mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}})$, где $\mathbb{r} = (\mathbb{r}_i^T)_{i=1}^{N\,T}$

Теорема (второй закон Ньютона)

$\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ — движение $(m_i, \mathbb{r}_i)_{i=1}^{N}$ под действием $\mathbb{F}$, $M\ddot{\mathbb{r}}(t_0) = \mathbb{F}\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}\big|_{t=t_0}$, где $M = \operatorname{diag}(m_i E_3)_{i=1}^{N} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad M\ddot{\mathbb{r}}(t) = \mathbb{F}\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}$

① Механическая система со связями

Механическая система со связями — $(m_i, \mathbb{r}_i)_{i=1}^{N}$, движущаяся под действием $\mathbb{F}$ с ограничением на $\mathbb{r}$ и $\dot{\mathbb{r}}$.

① Аксиома освобождение от связей

Аксиома (освобождение от связей)

$\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ — движение $(m_i, \mathbb{r}_i)_{i=1}^{N}$ под действием $\mathbb{F}$ со связями $\Longrightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \mathbb{R} = (\mathbb{R}_i^T)_{i=1}^{N\,T} = \mathbb{R}(t, \mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}}) :$ $[\, M\ddot{\mathbb{r}}(t_0) = (\mathbb{F} + \mathbb{R})|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}|_{t=t_0} \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}\quad M\ddot{\mathbb{r}}(t) = (\mathbb{F} + \mathbb{R})|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} \,]$

① Силы реакции связи

Силы реакции связи — $\mathbb{R}$ из аксиомы освобождение от связей

① Уравнение связей

Фазовое пространство — $\{(\mathbb{r}^T, \dot{\mathbb{r}}^T)^T\}$

Расширенное фазовое пространство — $\{(t, \mathbb{r}^T, \dot{\mathbb{r}}^T)^T\}$

Будем считать, что $\forall\, (t_0, \mathbb{r}_0^T, \dot{\mathbb{r}}_0^T)^T$ $\exists!$ решение $M\ddot{\mathbb{r}} = \mathbb{F} + \mathbb{R} :$ $\mathbb{r}(t_0) = \mathbb{r}_0,\ \dot{\mathbb{r}}(t_0) = \dot{\mathbb{r}}_0$.

Далее будем рассматривать связи, линейные по $\dot{\mathbb{r}}$

$A\dot{\mathbb{r}} + a = 0$, где $A = A(t, \mathbb{r}) \in GL(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{3N})$, $a = a(t, \mathbb{r}) \in \mathbb{R}^k$, $A = (a_j^T)_{j=1}^k$, $\operatorname{rk} A = k = \min\{k, 3N\} < 3N$

Пример:

$$\mathbb{f} = \mathbb{f}(t, \mathbb{r}) = \mathbb{c} \Rightarrow \frac{d}{dt}\mathbb{f} = \frac{\partial \mathbb{f}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbb{f}}{\partial \mathbb{r}}\dot{\mathbb{r}} = 0$$

① Пространство виртуальных скоростей

$\mathbb{r} \in \mathbb{R}^{3N}$, $\dot{\mathbb{r}}, \mathbb{F}, \mathbb{R} \ldots \in T_{\mathbb{r}} \mathbb{R}^{3N}$, $N_{\mathbb{r}} = \operatorname{span}\{a_i\}_{i=1}^{k}$

Пространство виртуальных скоростей $L_{\mathbb{r}} =$

$$= N_{\mathbb{r}}^{\perp} = \{\mathbb{v} \in \mathbb{R}^{3N} : A\mathbb{v} = 0\} = \operatorname{Ker} A$$

$\dim N_{\mathbb{r}} = k$, $\dim L_{\mathbb{r}} = 3N - k$, $T_{\mathbb{r}}{}^{3N} = N_{\mathbb{r}} \oplus L_{\mathbb{r}}$

Свойства:

1) $\forall \mathbb{v} \in T_{\mathbb{r}} \mathbb{R}^{3N}$ $\exists!\ \mathbb{v}_N \in N_{\mathbb{r}}, \mathbb{v}_L \in L_{\mathbb{r}} : \mathbb{v} = \mathbb{v}_N \oplus \mathbb{v}_L$

2) $\forall \mathbb{v} \in N_{\mathbb{r}}$ $\exists!\ \lambda \in \mathbb{R}^k :$ $\mathbb{v} = A^T \lambda$

$\exists!\ \mathbb{R}_N \in N_{\mathbb{r}}, \mathbb{R}_L \in L_{\mathbb{r}} :$ $\mathbb{R} = \mathbb{R}_N + \mathbb{R}_L \implies$

$\longrightarrow$ $M\ddot{\mathbb{r}} = \mathbb{F} + \mathbb{R}$ $\sim$ $\mathbb{R}_N = M\ddot{\mathbb{r}} - \mathbb{F} - \mathbb{R}_L$

① Принцип Даламбера–Лагранжа

Теорема (принцип Даламбера–Лагранжа)

$\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ – движение $(m_i, r_i)_{i=1}^{N}$ под действием $\mathbb{F}$

со связями $A\dot{\mathbb{r}} + a = 0 \iff$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R}\ \Big[\forall \mathbb{v} \in \operatorname{Ker} A|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)} \ \langle M\ddot{\mathbb{r}}(t) - \mathbb{F} - \mathbb{R}_L, \mathbb{v}\rangle|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = 0, \quad (A\dot{\mathbb{r}} + a)|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = 0.\Big]$$

Доказательство.

$\Rightarrow$ $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ – движение... $\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ $M\ddot{\mathbb{r}}(t) = (\mathbb{F} + \mathbb{R})|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}$, $(A\dot{\mathbb{r}} + \mathbb{a})|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \mathbb{0}$ $\Leftrightarrow$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(M\ddot{\mathbb{r}}(t) - \mathbb{F} - \mathbb{R}_L)|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \mathbb{R}_N|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} \in N_{\mathbb{r}(t)}$, $(A\dot{\mathbb{r}} + \mathbb{a})|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \mathbb{0}$ $\Leftrightarrow$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $(M\ddot{\mathbb{r}}(t) - \mathbb{F} - \mathbb{R}_L)|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} \perp L_{\mathbb{r}(t)} = \operatorname{Ker} A|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)}$, $(A\dot{\mathbb{r}} + \mathbb{a})|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \mathbb{0}$

$\Leftarrow$ $\mathbb{r} = \tilde{\mathbb{r}}(t)$ – удовлетворяет правой части $\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ $\exists \tilde{\lambda} = \tilde{\lambda}(t)$ $(M\ddot{\tilde{\mathbb{r}}}(t) - \mathbb{F} - \mathbb{R}_L)|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\tilde{\mathbb{r}}}(t)} = A^T|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t)} \tilde{\lambda}$, $(A\dot{\mathbb{r}} + \mathbb{a})|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\tilde{\mathbb{r}}}(t)} = \mathbb{0}$

Покажем, что $\exists! \ \lambda = \lambda(t, \mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}})$: $\forall t \in \mathbb{R}$ $\lambda|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\tilde{\mathbb{r}}}(t)} = \tilde{\lambda}$:

$\ddot{\tilde{\mathbb{r}}}(t) = M^{-1}(\mathbb{F} + \mathbb{R}_L + A^T\tilde{\lambda})|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\tilde{\mathbb{r}}}(t)}$

$A|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t)} \ddot{\tilde{\mathbb{r}}}(t) = \varphi|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\tilde{\mathbb{r}}}(t)}$, где $\varphi = \varphi(t, \mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}})$

$AM^{-1}(\mathbb{F} + \mathbb{R}_L + A^T\tilde{\lambda})|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\tilde{\mathbb{r}}}(t)} = \varphi|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\tilde{\mathbb{r}}}(t)}$

$AM^{-1}A^T|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\tilde{\mathbb{r}}}(t)} \tilde{\lambda} = (\varphi - AM^{-1}(\mathbb{F} + \mathbb{R}_L))|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\tilde{\mathbb{r}}}(t)}$

Лемма:

$\det AM^{-1}A^T|_{\mathbb{r}=\tilde{\mathbb{r}}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\tilde{\mathbb{r}}}(t)} > 0.$

Доказательство.

$\forall u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ $\quad u^T A M^{-1} A|_{r=\tilde{r}(t), \dot{r}=\dot{\tilde{r}}(t)} u =$

$= (A^T u)^T M^{-1} (A^T u)|_{r=\tilde{r}(t), \dot{r}=\dot{\tilde{r}}(t)} > 0$, т.к.

$A^T|_{r=\tilde{r}(t), \dot{r}=\dot{\tilde{r}}(t)} u \neq 0$: $\operatorname{rk} A|_{r=\tilde{r}(t), \dot{r}=\dot{\tilde{r}}(t)} = k$. ∎

$$\tilde{\lambda} = \overset{(AM^{-1}A^T)^{-1}}{\cancel{A^{T-1} M A^{-1}}} (\varphi - AM^{-1}(F + R_L))|_{r=\tilde{r}(t), \dot{r}=\dot{\tilde{r}}(t)}$$

$$\lambda = \cancel{A^{T-1} M A^{-1}} (\varphi - AM^{-1}(F + R_L))$$

$$M\ddot{\tilde{r}}(t) = (F + R_L + A^T \lambda)|_{r=\tilde{r}(t), \dot{r}=\dot{\tilde{r}}(t)}$$

$$A^T \lambda =: \tilde{R}_N = \tilde{R}_N(t, r, \dot{r})$$

$$M\ddot{r}(t) = (F + R_L + R_N)|_{r=r(t), \dot{r}=\dot{r}(t)}$$

Покажем, что $\tilde{R}_N = R_N$ как $(t, r, \dot{r})$

Для $\tilde{r} = r$: $\tilde{R}_N|_{r=r(t), \dot{r}=\dot{r}(t)} = R_N|_{r=r(t), \dot{r}=\dot{r}(t)} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ по теореме о $\exists!$ решения $\tilde{R}_N = R_N$ как $(t, r, \dot{r})$. $\Rightarrow$ $r = \tilde{r}(t)$ - действительное движение. ∎

① Уравнение Лагранжа первого рода

Теорема (уравнение Лагранжа первого рода)

$r = r(t)$ - движение $(m_i, r_i)_{i=1}^N$ под действием F со связями $A\dot{r} + a = 0$ $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\left[\exists \lambda = \lambda(t) : \; M\ddot{r}(t) = (F + R_L + A^T\lambda)|_{r=r(t), \dot{r}=\dot{r}(t)}, \; (A\dot{r} + a)|_{r=r(t), \dot{r}=\dot{r}(t)} = 0. \right]$

Доказательство.

$\boxed{\Rightarrow}$ $\lambda := A^{T-1} M A^{-1} (\varphi - A M^{-1} (F + R_L))\big|_{r = r(t),\ \dot r = \dot r(t)}$

$\boxed{\Leftarrow}$ Принцип Даламбера - Лагранжа ■

Заметим, что если $r = r(t)$ - решение $M\ddot r =$
$= F + R_L + A^T \lambda$, где $\lambda := A^{T-1} M A^{-1} (\varphi - A M^{-1} (F + R_L))\big|_{r=r(t)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \Big[(A\dot r + a)\big|_{r = r(t),\ \dot r = \dot r(t)}\Big|_{t=t_0} = 0 \Longrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$
$(A\dot r + a)\big|_{r = r(t),\ \dot r = \dot r(t)} = 0 \Big]$.

$\forall t \in \mathbb{R} \quad (A\ddot r(t) - \varphi)\big|_{r = r(t),\ \dot r = \dot r(t)} = 0 \Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}\ (A\dot r + a)\big|_{r = r(t),}$
$_{\dot r = \dot r(t)} = C, \quad (A\dot r + a)\big|_{r = r(t),\ \dot r = \dot r(t)}\Big|_{t = t_0} = C = 0.$

① Идеальные связи

Далее будем рассматривать идеальные связи:

$R_L \equiv 0$

② Понятие об интегрируемости связей

Интегрируемые связи $A\dot{\mathbb{r}} + a = 0 \iff f = c$

Голономная система – с интегрируемыми связями

② Критерий интегрируемости (критерий Фробениуса, без доказательства)

Теорема: (критерий интегрируемости связей, Фробениус, без доказательства)

$A\dot{\mathbb{r}} + a = 0$ – интегрируемая $\iff$

$\iff \Big[\forall u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{3N+1} : (\langle a_j, \delta \mathbb{r}\rangle + a^j dt)(u_1) =$

$= (\langle a_j, \delta \mathbb{r}\rangle + a^j dt)(u_2) = 0, \ j = \overline{1,k} \implies$

$\implies d(\langle a_j, \delta \mathbb{r}\rangle + a^j dt)(u_1, u_2) = 0, \ j = \overline{1,k}.$

Лекция №2

② Обобщенные координаты системы с интегрируемыми связями

Далее будем рассматривать случай $A = (B^T, \frac{\partial g}{\partial r}^T)^T$,

$a = (b^T, \frac{\partial g}{\partial t}^T)^T$, где $B = B(t, r) \in GL(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{3N})$,

$b = b(t, r) \in \mathbb{R}^{k_1}$, $g = g(t, r) \in \mathbb{R}^{k_2}$, $\operatorname{rk} B = k_1 =$

$= \min\{k_1, 3N\} < 3N$, $\operatorname{rk} \frac{\partial g}{\partial r} = k_2$, $k_1 \geqslant 0$, $k_2 > 0$,

$\operatorname{rk} A = k = k_1 + k_2$, $n = 3N - k_2$

$M_{const}(t) = \{g = const\} \subset \mathbb{R}^{3N}$ — гладкое многообразие, заданное локально $r = r(t, q)$, $q \in \mathbb{R}^n$:

$\exists$ биекция между q и положениями системы:

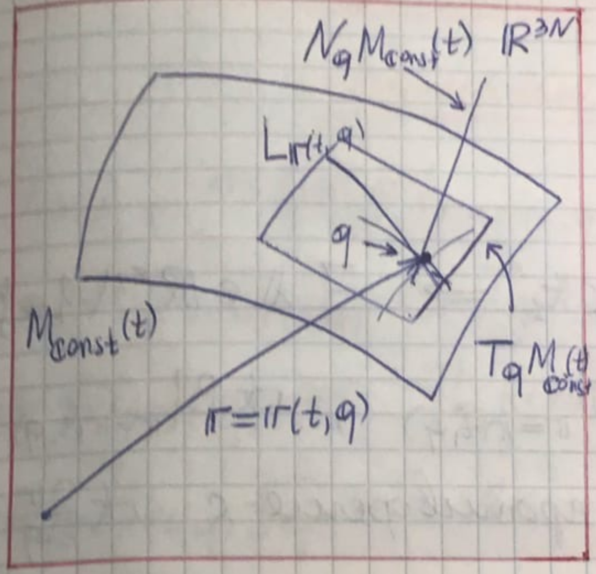
$g\Big|_{r = r(t,q)} \equiv const$: $\operatorname{rk} \frac{\partial r}{\partial q} \equiv n$

Обобщенные координаты — $q \in \mathbb{R}^n$ системы $(m_i, r_i)_{i=1}^N$ со связями $g = const$.

Конфигурационное многообразие — $M_{const}(t)$

$N_q M_{const}(t) = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial g_j}{\partial r}^T \Big|_{r = r(t,q)} \right\}_{j=1}^{k_2}$ ← базисы

$T_q M_{const}(t) = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial r}{\partial q^i} \right\}_{i=1}^{n} = N_q M_{const}^{\perp} = \operatorname{Ker} \frac{\partial g}{\partial r}\Big|_{r = r(t,q)}$



② Уравнение дифференциальных связей в обобщенных координатах

$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q) \Longrightarrow [\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ движение $\Longleftrightarrow q=q(t)$ – движение по $M_{const}(t)]$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t,q)=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\dot{q}=\dot{\mathbf{r}}(t,q,\dot{q})$$

$$\left(B\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\dot{q}\right)+\mathbf{b}\right)\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q)}=B\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q)}\dot{q}+$$

$$+\left(B\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\mathbf{b}\right)\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q)}=\mathcal{A}\dot{q}+\alpha,$$ где

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}(t,q)=B\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q)}, \qquad \alpha=\alpha(t,q)=$$

$$=\left(B\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\mathbf{b}\right)\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q)}$$ –

Уравнение связей в обобщенных координатах:

$$\mathcal{A}\dot{q}+\alpha=0, \qquad \mathcal{A}\in GL(\mathbb{R}^{k_1},\mathbb{R}^n), \quad \alpha\in\mathbb{R}^{k_1}$$

Лемма:

$rk\,A = k_1$

Доказательство.

От противного: $rk\,A < k_1 \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^{k_1} \setminus \{0\}$:

$\lambda^T A = 0^T = \lambda^T \left(B \frac{\partial r}{\partial q}\right)\Big|_{r=r(t,q)}$, $rk\,B\big|_{r=r(t,q)} = k_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^T B\big|_{r=r(t,q)} \neq 0^T$ – противоречие с $rk \frac{\partial r}{\partial q} = n$

② Признак неинтегрируемости уравнений связи

Теорема (признак неинтегрируемости связей)

$A\dot{q} + \alpha$ – интегрируема $\Leftrightarrow$ $\varphi = \varphi(t, q) = \mathrm{const}$

$\varphi(t_1, q_1) \neq \varphi(t_2, q_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ систему из (t_1, q_1) в (t_2, q_2) нельзя перевести, не нарушая связи.

Лекция №2

② Обобщенные координаты системы с интегрируемыми связями

Далее будем рассматривать случай $A = (B^T, \frac{\partial g}{\partial \mathbb{r}}^T)^T$,

$a = (b^T, \frac{\partial g}{\partial t}^T)^T$, где $B = B(t, \mathbb{r}) \in GL(\mathbb{R}^{k_1}, \mathbb{R}^{3N})$,

$b = b(t, \mathbb{r}) \in \mathbb{R}^{k_1}$, $g = g(t, \mathbb{r}) \in \mathbb{R}^{k_2}$, $\mathrm{rk}\, B = k_1 =$

$= \min\{k_1, 3N\} < 3N$, $\mathrm{rk}\, \frac{\partial g}{\partial \mathbb{r}} = k_2$, $k_1 \geqslant 0$, $k_2 > 0$,

$\mathrm{rk}\, A = k = k_1 + k_2$, $n = 3N - k_2$

$M_{const}(t) = \{g = const\} \subset \mathbb{R}^{3N}$ – гладкое многообразие, заданное локально $\mathbb{r} = \mathbb{r}(t, q)$, $q \in \mathbb{R}^n$:

$\exists$ биекция между q и положениями системы:

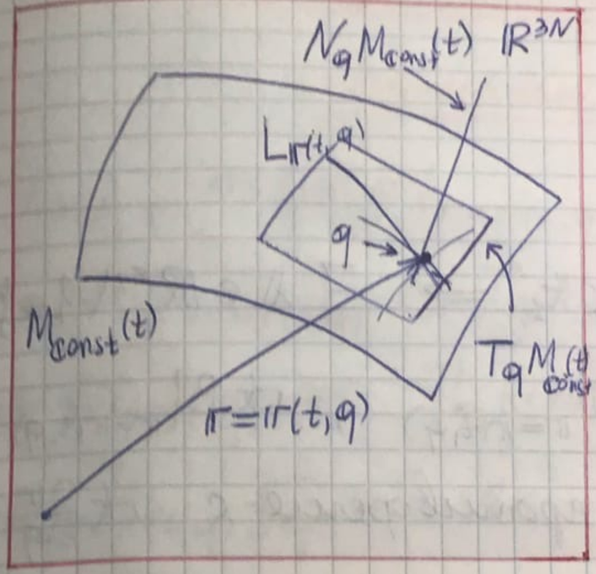
$g\big|_{\mathbb{r} = \mathbb{r}(t,q)} \equiv const$: $\mathrm{rk}\, \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q} \equiv n$

Обобщенные координаты – $q \in \mathbb{R}^n$ системы $(m_i, \mathbb{r}_i)_{i=1}^N$ со связями $g = const$.

Конфигурационное многообразие – $M_{const}(t)$

$N_q M_{const}(t) = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial g_j}{\partial \mathbb{r}}^T\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)}\right\}_{j=1}^{k_2}$ ← базисы

$T_q M_{const}(t) = \mathrm{span}\left\{\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q^i}\right\}_{i=1}^{n} = N_q M_{const}^{\perp} = \mathrm{Ker}\, \frac{\partial g}{\partial \mathbb{r}}\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)}$



② Уравнение дифференциальных связей в обобщенных координатах

$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q) \Longrightarrow [\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ движение $\Longleftrightarrow q=q(t)$ – движение по $M_{const}(t)]$

$$\frac{d}{dt}\mathbf{r}(t,q)=\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\dot{q}=\dot{\mathbf{r}}(t,q,\dot{q})$$

$$\left(B\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\dot{q}\right)+\mathbf{b}\right)\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q)}=B\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q)}\dot{q}+$$
$$+\left(B\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\mathbf{b}\right)\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q)}=\mathcal{A}\dot{q}+\alpha,\text{ где}$$

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}(t,q)=B\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q}\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q)},\qquad \alpha=\alpha(t,q)=$$
$$=\left(B\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t}+\mathbf{b}\right)\Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t,q)} -$$

Уравнение связей в обобщенных координатах:

$$\mathcal{A}\dot{q}+\alpha=0,\qquad \mathcal{A}\in GL(\mathbb{R}^{k_1},\mathbb{R}^{n}),\ \alpha\in\mathbb{R}^{k_1}$$

Лемма:

$\operatorname{rk} \mathcal{A} = k_1$

Доказательство.

От противного: $\operatorname{rk} \mathcal{A} < k_1 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^{k_1} \setminus \{0\}$:

$\lambda^T \mathcal{A} = 0^T = \lambda^T \left(B \frac{\partial r}{\partial q}\right)\Big|_{r = r(t,q)}$, $\operatorname{rk} B\big|_{r = r(t,q)} = k_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda^T B\big|_{r = r(t,q)} \neq 0^T$ – противоречие с $\operatorname{rk} \frac{\partial r}{\partial q} = n$

② Признак неинтегрируемости уравнений связи

Теорема (признак неинтегрируемости связей)

$\mathcal{A}\dot{q} + \alpha$ – интегрируемая $\Leftrightarrow$ $\varphi = \varphi(t,q) = \mathrm{const}$

$\varphi(t_1, q_1) \neq \varphi(t_2, q_2) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ систему из (t_1, q_1) в (t_2, q_2) нельзя перевести, не нарушая связи.

③ Принцип Даламбера-Лагранжа в обобщенных координатах

$$L_{\mathbb{r}(t,q)} = \operatorname{Ker} B|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)} \cap \operatorname{Ker} \frac{\partial q}{\partial \mathbb{r}}\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)} =$$

$$= \operatorname{Ker} B|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)} \cap T_q M_{const}(t)$$

$\mathbb{v} \in L_{\mathbb{r}(t,q)} \iff \exists!\, u \in \mathbb{R}^n: \quad \mathbb{v} = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q} u$ и

$B|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)} \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q} u = \mathcal{A} u = 0 \iff \exists!\, u \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}:$

$\mathbb{v} = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q} u$

Теорема (принцип Даламбера-Лагранжа в обобщенных координатах)

$q = q(t)$ — движение $(m_i, \mathbb{r}_i)_{i=1}^N$ под действием $\mathbb{F}$ по $M_{const}(t)$ со связями $\mathcal{A}\dot{q} + \alpha = 0 \iff$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \ \Big[\forall u \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}|_{q=q(t)} \ \left(M \frac{d}{dt}\dot{\mathbb{r}} - \mathbb{F}\right)^T\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot{q})} \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q}\Big|_{q=q(t),\, \dot{q}=\dot{q}(t),\, \ddot{q}=\ddot{q}(t)} u = 0,$$

$$(\mathcal{A}\dot{q} + \alpha)|_{q=q(t),\, \dot{q}=\dot{q}(t)} = 0\Big]$$

③ Обобщенные силы

Обобщенная сила — $Q^T = \mathbb{F}^T|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot{q})} \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q}$

③ Работа сил на перемещение вдоль координатной линии

Работа $\mathbb{F}$ на $\delta\mathbb{r}$ — $\delta A = \langle \mathbb{F}, \delta\mathbb{r}\rangle = \mathbb{F}^T\delta\mathbb{r}$

$$\delta\mathbb{r}(t,q) = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}\delta q \Rightarrow \delta A\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)} = \mathbb{F}^T\Big|_{\substack{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)\\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}}\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}\delta q$$

$$= Q^T\delta q \Rightarrow Q^i = \delta A\Big|_{\substack{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)\\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}}\left(\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q^i}\right)$$

$$Q^i\delta q^i = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q^i}^T\mathbb{F}\Big|_{\substack{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)\\ \dot{\mathbb{r}}=\dots}}\delta q^i = \left(\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q^i}\delta q^i\right)^T\mathbb{F}\Big|_{\substack{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)\\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial\mathbb{r}_\nu}{\partial q^i}\delta q^i\cdot\mathbb{F}_\nu\Big|_{\substack{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)\\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}} = \delta A\Big|_{\substack{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)\\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}}(\delta_i\mathbb{r}),$$

где $\delta_i\mathbb{r} = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q^i}\delta q^i$

3 Уравнение Лагранжа второго рода для голономных систем

$$T = \frac{1}{2}\langle M\dot{\mathbb{r}}, \dot{\mathbb{r}}\rangle = T(\dot{\mathbb{r}}), \quad \frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbb{r}}} = \dot{\mathbb{r}}^T M$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{r}(t,q)) = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}\dot q = \dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)$$

$$T\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)} = \frac{1}{2}\left\langle M\left(\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}\dot q\right), \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial t}+\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}\dot q\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\left\langle M\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}\dot q, \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}\dot q\right\rangle + \left\langle M\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial t}, \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}\dot q\right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle M\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial t}, \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial t}\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\dot q^T A\dot q + a^T\dot q + T_0, \text{ где } A = A(t,q) =$$

$$= \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}^T M\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}, \quad a^T = a^T(t,q) = \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial t}^T M\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}, \quad T_0 =$$

$$= T_0(t,q) = \frac{1}{2}\left\langle M\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial t}, \frac{\partial\mathbb{r}}{\partial t}\right\rangle$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)} = \frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbb{r}}}\frac{\partial\dot{\mathbb{r}}}{\partial\dot q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)} = \dot{\mathbb{r}}^T M\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)} = \frac{\partial T}{\partial\dot{\mathbb{r}}}\frac{\partial\dot{\mathbb{r}}}{\partial q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)} = \dot{\mathbb{r}}^T M\frac{\partial\dot{\mathbb{r}}}{\partial q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbb{r}}^T M\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)\right)^T M\frac{\partial\mathbb{r}}{\partial q} +$$

$$+ \dot{r}^T M \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial r}{\partial q}\right)\Big|_{\dot{r}=\dot{r}(t,q,\dot{q})}$$

$$\frac{\partial \dot{r}}{\partial q}\Big|_{\dot{r}=\dot{r}(t,q,\dot{q})} = \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial q}\dot{q}\right) = \frac{\partial^2 r}{\partial q \partial t} + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\partial r}{\partial q}\dot{q}\right)$$

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial r}{\partial q}\right)_{\dot{r}=\dot{r}(t,q,\dot{q})} = \frac{\partial^2 r}{\partial t \partial q} + \dots \qquad //$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\Big|_{\dot{r}=\dot{r}(t,q,\dot{q})}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\Big|_{\dot{r}=\dot{r}(t,q,\dot{q})} = \frac{d}{dt}[\dot{r}(t,q,\dot{q})]^T M \frac{\partial r}{\partial q}$$

Теорема: (принцип Даламбера-Лагранжа в обобщенных координатах)

$q = q(t)$ - движение $(m_i, r_i)_{i=1}^N$ под действием F по $M_{const}(t)$ со связями $A\dot{q} + \alpha = 0 \iff$

$$\iff \forall t \in \mathbb{R} \left[\forall u \in \operatorname{Ker} A|_{q=q(t)} \quad \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\Big|_{\dot{r}=\dot{r}(t,q,\dot{q})}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\Big|_{\dot{r}=\dot{r}(t,q,\dot{q})} - Q^T\right)\Big|_{q=q(t),\ \dot{q}=\dot{q}(t),\ \ddot{q}=\ddot{q}(t)} \cdot u = 0,\right.$$

$$(A\dot{q} + \alpha)|_{q=q(t),\ \dot{q}=\dot{q}(t)} = 0.$$

Пример:

$k_1 = 0$ - голономная система

Уравнение Лагранжа второго рода для голономных систем - $\forall t \in \mathbb{R}$

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\Big|_{\dot{r}=\dot{r}(t,q,\dot{q})}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\Big|_{\dot{r}=\dot{r}(t,q,\dot{q})}\right)\Big|_{q=q(t),\ \dot{q}=\dot{q}(t),\ \ddot{q}=\ddot{q}(t)} = Q^T|_{q=q(t),\ \dot{q}=\dot{q}(t)}$$

3) Случай потенциальных сил

Пример:

$$V=V(t,\mathbb{r}),\quad \mathbb{F}=-\frac{\partial V}{\partial \mathbb{r}}^T,\quad \mathbb{Q}=\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q}^T \mathbb{F}\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)}=$$

$$=-\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q}^T\frac{\partial V}{\partial \mathbb{r}}\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)}=-\frac{\partial V}{\partial q}^T\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)}$$

$$L=(T-V)\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q),\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}=L(t,q,\dot q)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial q}\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)}=\mathbb{Q}^T+\frac{\partial V}{\partial q}\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,q)}=\mathbb{0}^T$$

Уравнение Эйлера – Лагранжа: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q}-\frac{\partial L}{\partial q}=\mathbb{0}^T.$

③ Уравнение Лагранжа с множителями в обобщенных координатах

Теорема (уравнение Лагранжа с множителями в обобщенных координатах)

$q=q(t)$ – движение $(m_i,\mathbb{r}_i)_{i=1}^N$ под действием $\mathbb{F}$ по $M_{const}(t)$ со связями $\mathcal{A}\dot q+\alpha=\mathbb{0}$ $\Leftrightarrow$

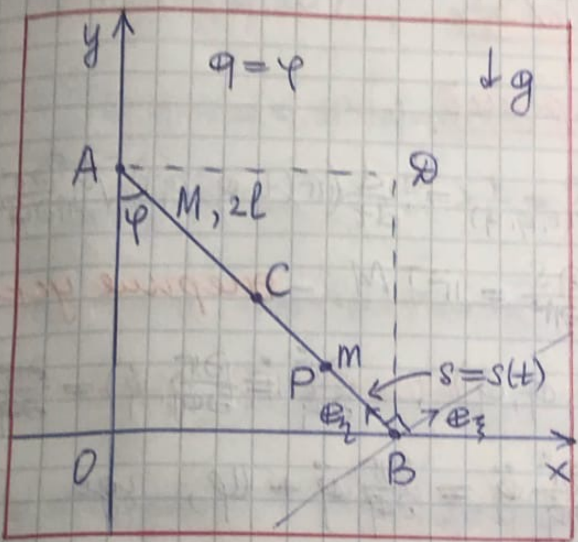
$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}\ \Big[\exists \lambda=\lambda(t):\ \Big(\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}\Big)-\frac{\partial T}{\partial q}\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot q)}-\mathbb{Q}^T\Big)\Big|_{q=q(t),\ \dot q=\dot q(t),\ \ddot q=\ddot q(t)}=\lambda^T\mathcal{A}\Big|_{q=q(t)},$

$(\mathcal{A}\dot q+\alpha)\Big|_{q=q(t),\ \dot q=\dot q(t)}=\mathbb{0}\Big]$

Пример: (задача Жуковского)

$$V=V_M+V_m=Mgy_C+mgy_P=Mgl\cos\varphi+mgs\cos\varphi$$

$$T=T_M+T_m,\qquad T_M=\frac12 J_O(e_z)\dot\varphi^2=\frac12(Ml^2+J_C(e_z))\dot\varphi^2$$



$$= \frac{1}{2}\left(Ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2\right)\dot\varphi^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}Ml^2\right)\dot\varphi^2$$

$$T_m = \frac{1}{2}m\mathbb{V}_P^2, \quad \mathbb{V}_P = \mathbb{V}_P^{(\text{пер})} + \mathbb{V}_P^{(\text{отн})}, \quad \mathbb{V}_P^{(\text{отн})} = \dot s\, e_\eta$$

$$\mathbb{V}_P^{(\text{пер})} = \mathbb{V}_B + \dot\varphi e_z \times \overrightarrow{BP} = \dot\varphi e_z \times (\overrightarrow{\mathcal{D}B} + \overrightarrow{BP}) = \dot\varphi e_z \times$$

$$\times(-2l\cos\varphi\, e_\xi + s\, e_\eta) = (2l\cos\varphi\, e_x - s\, e_\xi)\dot\varphi$$

$$L = T - V \qquad \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \frac{4}{3}Ml^2\dot\varphi + m\langle\mathbb{V}_P, 2l\cos\varphi\, e_x - s\, e_\xi\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} - \frac{\partial L}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi\equiv\varphi_0} = \overset{\to 0}{m\langle\mathbb{V}_P, -\dot s\, e_\xi\rangle} + m\langle\dot{\mathbb{V}}_P, 2l\cos\varphi_0\, e_x -$$

$$- s\, e_\xi\rangle - (Ml + ms)g\sin\varphi_0 = m\langle\ddot s\, e_\eta, 2l\cos\varphi_0\, e_x\rangle -$$

$$-(Ml + ms)g\sin\varphi_0 = -2ml\ddot s\cos\varphi_0\sin\varphi_0 - (Ml + ms)g\sin\varphi_0 =$$

$$0 = \sin\varphi_0\left(m\ddot s + \frac{mg}{2l\cos\varphi_0}\left(s + \frac{M}{m}l\right)\right)(-2l\cos\varphi_0)$$

$$1)\ \sin\varphi_0 = 0 \qquad 2)\ m\ddot s = -k\left(s + \frac{M}{m}l\right),\ k = \frac{mg}{2l\cos\varphi_0}$$

$$s = -\frac{M}{m}l + C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Лекция №3

④ Энергия ускорений

Энергия ускорений — $S = \frac{1}{2}\langle M\ddot{r}, \ddot{r}\rangle = S(\ddot{r}), \frac{\partial S}{\partial \ddot{r}} = \ddot{r}^T M$

④ Псевдоскорости

$$\frac{d}{dt} r(t,q) = \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial q}\dot{q} = \dot{r}(t,q,\dot{q}), \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \dot{r}(t,q,\dot{q}) = \frac{\partial r}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{r}(t,q,\dot{q})\right] = \frac{\partial \dot{r}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}}\ddot{q} = \frac{\partial r}{\partial q}\ddot{q} + \psi, \text{ где}$$

$$\psi = \psi(t,q,\dot{q}) : \quad \frac{\partial}{\partial \ddot{q}} \ddot{r}(t,q,\dot{q},\ddot{q}) = \frac{\partial r}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\Big|_{\dot{r}=\dot{r}(t,q,\dot{q})}\right) - \frac{\partial T}{\partial q}\Big|_{\dot{r}=\dot{r}(t,q,\dot{q})} = \frac{d}{dt}\left[\dot{r}(t,q,\dot{q})\right]^T M \frac{\partial r}{\partial q}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}}\Big|_{\ddot{r}=\ddot{r}(t,q,\dot{q},\ddot{q})} = \frac{\partial S}{\partial \ddot{r}}\frac{\partial \ddot{r}}{\partial \ddot{q}}\Big|_{\ddot{r}=\ddot{r}(t,q,\dot{q},\ddot{q})} = \ddot{r}^T M \frac{\partial r}{\partial q} \quad //$$

$\dim \operatorname{Ker} A = n-k_1, \quad (u_j)_{j=1}^{n-k_1}$ — базис, $U = (u_j)_{j=1}^{n-k} \in$

$\in GL(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n-k_1})$, $n-k_1$ — число степеней свободы

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}}\Big|_{\ddot{r}=\ddot{r}(t,q,\dot{q},\ddot{q})} - Q^T\right) U = 0^T, \quad A\dot{q} + \alpha = 0$$

$q_{чн}$ — частное решение $A\dot{q} + \alpha = 0$

$$A\dot{q} = 0 \iff \exists!\, \omega \in \mathbb{R}^{n-k_1}: \quad \dot{q} = U\omega$$

Псевдоскорости ω: $\dot{q} = U\omega + \dot{q}_{чн}$

④ Уравнения Аппеля

$\dot{q} = U\omega + \dot{q}_{чн} = \dot{q}(t,q,\omega)$ — замена

$$\frac{d}{dt}\left[\dot{q}(t,q,\omega)\right] = U\dot{\omega} + \frac{d}{dt}U \cdot \omega + \ddot{q}_{чн} \equiv U\dot{\omega} + \psi, \text{ где}$$

$\psi = \psi(t, q, \omega)$, $\frac{\partial}{\partial \dot\omega} \ddot q(t, q, \omega, \dot\omega) = U$

$$\frac{\partial S}{\partial \dot\omega}\Big|_{\ddot r = \ddot r(t, q, \dot q, \ddot q)}\Big|_{\dot q = \dot q(t, q, \omega),\ \ddot q = \ddot q(t, q, \omega, \dot\omega)} = \frac{\partial S}{\partial \ddot q}\Big|_{\ddot r = \ddot r(t, q, \dot q, \ddot q)} \cdot$$

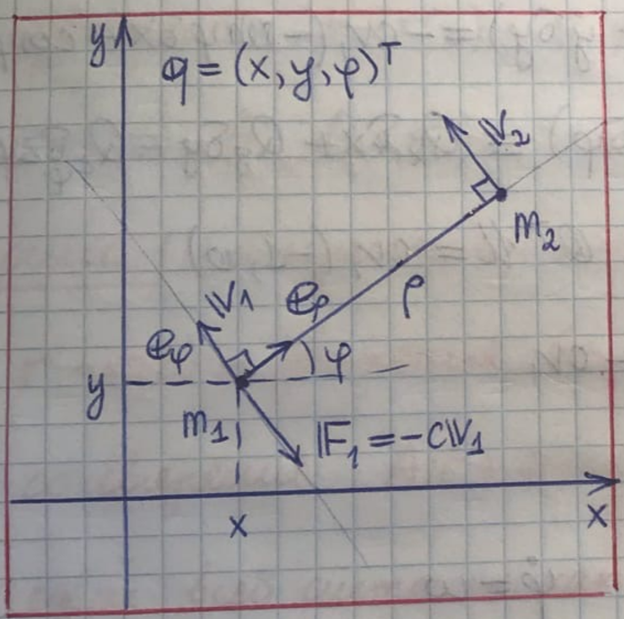
$$\cdot \frac{\partial \ddot q}{\partial \dot\omega}\Big|_{\dot q = \dot q(t, q, \omega),\ \ddot q = \ddot q(t, q, \omega, \dot\omega)} = \frac{\partial S}{\partial \ddot q}\Big|_{\ddot r = \ddot r(t, q, \dot q, \ddot q)}\Big|$$

$$\Big|_{\dot q = \dot q(t, q, \omega),\ \ddot q = \ddot q(t, q, \omega, \dot\omega)} U$$

Уравнение Аппеля – $\frac{\partial S}{\partial \dot\omega}\Big|_{\ddot r = \ddot r(t, q, \dot q, \ddot q)}\Big|_{\dot q = \dot q(t, q, \omega),\ \ddot q =}$

$$= \ddot q(t, q, \omega, \dot\omega) = Q^T\Big|_{\dot q = \dot q(t, q, \omega)} U, \qquad \ddot q = U\dot\omega + \ddot q_{\text{ги}}$$

Пример:



$$\mathbb{V}_2 = \mathbb{V}_1 + \dot\varphi e_z \times \rho e_\rho, \quad \langle \mathbb{V}_2, e_\rho \rangle = \langle \mathbb{V}_1, e_\rho \rangle = 0 \iff$$

$$\iff \mathbb{V}_1 = V_1 e_\varphi$$

$$\mathbb{V}_1 = (\dot x, \dot y, 0)^T, \quad e_\rho = \cos\varphi\, e_x + \sin\varphi\, e_y :$$

$\dot x \cos\varphi + \dot y \sin\varphi = 0$ – связь

$$\dot x = -V_1 \sin\varphi, \quad \dot y = V_1 \cos\varphi, \quad \dot\varphi = \omega$$

$$(\dot x, \dot y, \dot\varphi)^T = \overset{U}{\begin{pmatrix} -\sin\varphi & 0 \\ \cos\varphi & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}} (v_1, \omega)^T$$

$$\dot{\mathbf r}_1 = \mathbf V_1 = v_1 \mathbf e_\varphi, \quad \ddot{\mathbf r}_1 = \dot v_1 \mathbf e_\varphi + v_1 \dot{\mathbf e}_\varphi = \dot v_1 \mathbf e_\varphi + v_1(-\dot\varphi \mathbf e_\rho) =$$

$$= \dot v_1 \mathbf e_\varphi - v_1 \omega \mathbf e_\rho$$

$$\ddot{\mathbf r}_2 = \ddot{\mathbf r}_1 + \ddot\varphi \mathbf e_z \times \rho \mathbf e_\rho - \dot\varphi^2 \rho \mathbf e_\rho = \dot v_1 \mathbf e_\varphi - v_1 \omega \mathbf e_\rho + \dot\omega \rho \mathbf e_\varphi -$$

$$- \omega^2 \rho \mathbf e_\rho = -(v_1\omega + \omega^2\rho)\mathbf e_\rho + (\dot v_1 + \dot\omega\rho)\mathbf e_\varphi$$

$$S = \frac{1}{2}(m_1 \ddot{\mathbf r}_1^2 + m_2 \ddot{\mathbf r}_2^2) = \frac{1}{2} m_1 (\dot v_1^2 + v_1^2 \omega^2) + \frac{1}{2} m_2 \cdot$$

$$\cdot \left((v_1\omega + \omega^2\rho)^2 + (\dot v_1 + \dot\omega\rho)^2 \right)$$

$$\delta A = \langle \mathbf F_1, \delta \mathbf r_1 \rangle = -c(\dot x \delta x + \dot y \delta y) = -c v_1(-\sin\varphi \delta x + \cos\varphi \delta y) =$$

$$= c v (\sin\varphi \delta x - \cos\varphi \delta y + 0 \delta\varphi) \equiv Q_x \delta x + Q_y \delta y + Q_\varphi \delta \varphi$$

$$Q = c v_1 (\sin\varphi, -\cos\varphi, 0)^T, \quad Q^T U = c v_1 (-1, 0)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial \dot v_1} = m_1 \dot v_1 + m_2(\dot v_1 + \dot\omega\rho) = -c v_1 \\ \dfrac{\partial S}{\partial \dot\omega} = m_2 (\dot v_1 + \dot\omega \rho)\rho = 0 \\ \dot x = -v_1 \sin\varphi \quad \dot y = v_1 \cos\varphi \quad \dot\varphi = \omega \end{cases}$$

$$m_1 \dot v_1 = -c v_1, \quad v_1 = v_1(0) e^{-ct/m_1}, \quad v_1 \to 0, t \to \infty$$

$$\dot\omega = -\frac{\dot v_1}{\rho} = \frac{c v_1}{m_1 \rho}, \quad \omega = \omega(0) - \frac{v_1(0)}{\rho}\left(e^{-\frac{ct}{m_1}} - 1\right), \quad \omega \to \omega(0) + \frac{v_1(0)}{\rho}, t \to \infty$$

$$k = \frac{|\dot{\mathbf r}_1 \times \ddot{\mathbf r}_1|}{|\dot{\mathbf r}_1|^3} = \frac{v_1^2 \omega}{v_1^3} = \frac{\omega}{v_1} \to \infty, t \to \infty$$

Лекция №4

⑤ Теоремы об изменении импульса, кинетического момента и кинетической энергии для систем со связями и следствия из них

Фиксируем $t_0, \mathbb{r}_0$ и $\mathbb{v} \in \operatorname{Ker} A|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}_0}$: $\exists$ кривая $\mathbb{r}=\mathbb{r}(\tau)$: $\mathbb{r}(0)=\mathbb{r}_0$, $\mathbb{r}'(0)=\mathbb{v}$ – скорость в мнимом движении $\mathbb{r}=\mathbb{r}(\tau)$, а связи допускают движение $\mathbb{r}=\mathbb{r}(\tau)$ в $(t_0, \mathbb{r}_0)$

Теорема 1 (об изменении импульса)

$\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)$ – движение $(m_i, \mathbb{r}_i)_{i=1}^N$ под действием $\mathbb{F}$ со связями $A\dot{\mathbb{r}}+\mathbb{a}=\mathbb{0}$, $\forall t \in \mathbb{R}$ связи допускают сдвиг всей системы как твердого тела в направлении $\mathbb{e} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbb{e}=\mathrm{const}$, $|\mathbb{e}|=1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} \quad \frac{d}{dt}\langle \mathbb{P}, \mathbb{e}\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)} = \sum_{i=1}^N \langle \mathbb{F}_i^{(e)}, \mathbb{e}\rangle\Big|_{\substack{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}}$$

Доказательство.

$\forall t \in \mathbb{R} \quad \mathbb{v} = (\mathbb{e}^T)_{i=1}^{N\,T} \in \operatorname{Ker} A|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \langle M\ddot{\mathbb{r}}(t) - \mathbb{F}, \mathbb{V}\rangle\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \sum_{i=1}^{N} \langle m_i\ddot{\mathbb{r}}_i(t) -$$

$$-\mathbb{F}_i, \mathbb{e}\rangle\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \langle m\ddot{\mathbb{r}}_c(t), \mathbb{e}\rangle - \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbb{F}_i, \mathbb{e}\rangle\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),}$$

$$_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \langle \frac{d}{dt}\mathbb{P}\big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}, \mathbb{e}\rangle - \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbb{F}_i^{(e)}, \mathbb{e}\rangle\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} =$$

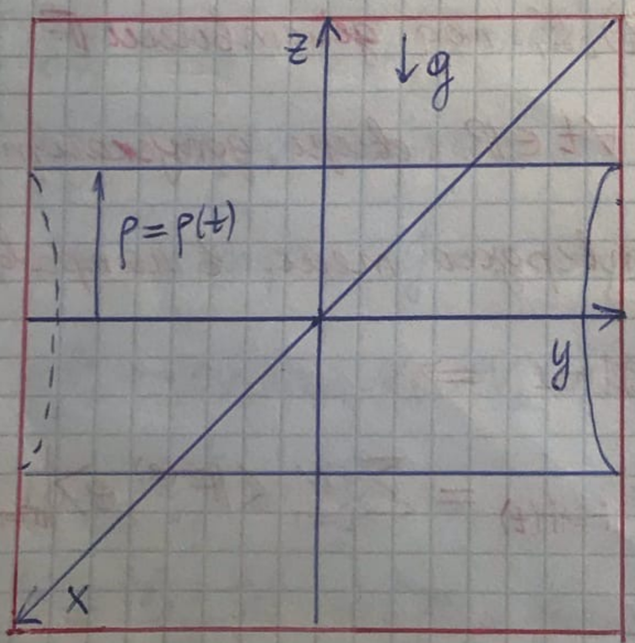
$$= \frac{d}{dt}\langle \mathbb{P}, \mathbb{e}\rangle\big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} - \sum_{i=1}^{N} \langle \mathbb{F}_i^{(e)}, \mathbb{e}\rangle\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = 0. \blacksquare$$

Следствие 1 (закон сохранение импульса)

$\sum_{i=1}^{N} \langle \mathbb{F}_i^{(e)}, \mathbb{e}\rangle = 0$ как $(t, \mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}})$, $\forall (t, \mathbb{r})$ связи допускают сдвиг всей системы как твердого тела в направлении $\mathbb{e} \in \mathbb{R}^3$, $\mathbb{e} = \mathrm{const}$, $|\mathbb{e}| = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, \mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ – движения, $\forall t \in \mathbb{R}$ $\langle \mathbb{P}, \mathbb{e}\rangle\big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \mathrm{const}.$

Пример:



$\mathbb{P} = m\dot{\mathbb{r}}_c$, $\mathbb{e} = \mathbb{e}_y \Rightarrow \langle \mathbb{P}, \mathbb{e}_y\rangle = m\langle \dot{\mathbb{r}}_c, \mathbb{e}_y\rangle = \mathrm{const}$

Теорема 2 (об изменении кинетического момента)

$\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)$ – движение $(m_i, \mathbb{r}_i)_{i=1}^N$ под действием $\mathbb{F}$ со связями $A\dot{\mathbb{r}}+\mathbb{a}=0$, $\forall t\in\mathbb{R}$ связи допускают поворот всей системы как твердого тела вокруг оси $O\mathbb{e}$, $\mathbb{e}\in\mathbb{R}^3$, $\mathbb{e}=\mathrm{const}$, $|\mathbb{e}|=1 \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \forall t\in\mathbb{R} \quad \frac{d}{dt}\langle \mathbb{K}_0, \mathbb{e}\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \langle \mathbb{M}_0^{(e)}, \mathbb{e}\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}$$

Доказательство.

$$\forall t\in\mathbb{R} \quad \mathbb{V}=\left(\left(\mathbb{e}\times\mathbb{r}_i(t)\right)_{i=1}^{N}\right)^T \in \operatorname{Ker} A\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \langle M\ddot{\mathbb{r}}(t)-\mathbb{F}, \mathbb{V}\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \sum_{i=1}^N \langle m_i\ddot{\mathbb{r}}_i(t) - \mathbb{F}_i, \mathbb{e}\times\mathbb{r}_i\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \langle \sum_{i=1}^N \mathbb{r}_i \times m_i\ddot{\mathbb{r}}_i(t), \mathbb{e}\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)} - \langle \sum_{i=1}^N \mathbb{r}_i\times\mathbb{F}_i, \mathbb{e}\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} =$$

$$= \left\langle \frac{d}{dt}\mathbb{K}_0\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}, \mathbb{e}\right\rangle - \langle \mathbb{M}_0^{(e)}, \mathbb{e}\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} =$$

$$= \frac{d}{dt}\langle \mathbb{K}_0, \mathbb{e}\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} - \langle \mathbb{M}_0^{(e)}, \mathbb{e}\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = 0. \blacksquare$$

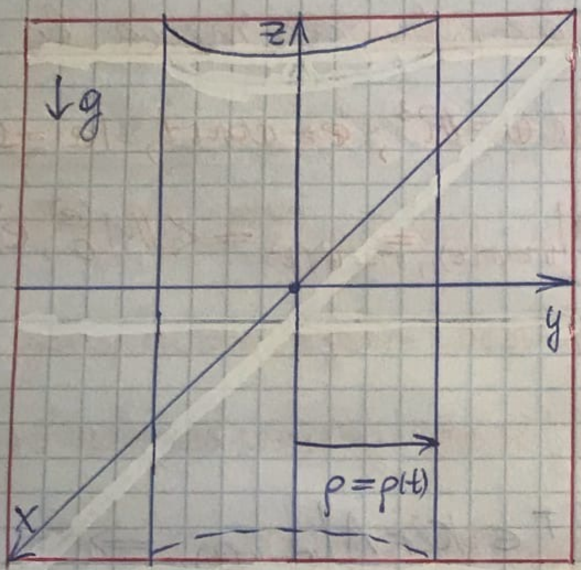
Следствие 2 (закон сохранения кинетического момента)

$\langle \mathbb{M}_0^{(e)}, \mathbb{e}\rangle = 0$ как $(t, \mathbb{r}, \dot{\mathbb{r}})$, $\forall (t, \mathbb{r})$ связи допускают поворот всей системы как твердого тела вокруг оси $O\mathbb{e}$, $\mathbb{e}\in\mathbb{R}^3$, $\mathbb{e}=\mathrm{const}$, $|\mathbb{e}|=1 \Longrightarrow$

$\Rightarrow \forall\, \mathbb{r}=\mathbb{r}(t)$ — движении, $\forall t\in\mathbb{R}\ \ \langle \mathbb{K}_0, e\rangle|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\,\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} =$

$=\text{const}$.

Пример:



$$\mathbb{K}_0=\sum_{i=1}^N \mathbb{r}_i\times m_i\dot{\mathbb{r}}_i,\quad e=e_z \Rightarrow \langle\mathbb{K}_0, e_z\rangle=\text{const}$$

Теорема 3 (об изменении кинетической энергии)

$\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)$ — движение $(m_i,\mathbb{r}_i)_{i=1}^N$ под действием $\mathbb{F}$

со связями $A\dot{\mathbb{r}}+a=0$, $\forall t\in\mathbb{R}\ \ \dot{\mathbb{r}}(t)\in \operatorname{Ker}A|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}T\Big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \langle \mathbb{F},\dot{\mathbb{r}}\rangle|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\,\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}$$

Доказательство.

$\forall t\in\mathbb{R}\ \ \dot{\mathbb{r}}(t)\in\operatorname{Ker}A|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)} \Rightarrow \langle M\ddot{\mathbb{r}}(t)-\mathbb{F},\dot{\mathbb{r}}\rangle|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),}$

$_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \frac{d}{dt}T|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} - \langle\mathbb{F},\dot{\mathbb{r}}\rangle|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\,\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = 0.$ ■

Это выполнено, если $\mathbf{a}=0$ или $\mathbb{F}=\mathbb{F}(\mathbf{r})$.

Следствие 3: (закон сохранение энергии)

$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ – движение $(m_i,\mathbf{r}_i)_{i=1}^{N}$ под действием $\mathbb{F}$ со связями $A\dot{\mathbf{r}}+\mathbf{a}=0$, $V=V(\mathbf{r})$, $\mathbb{F}=-\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}^{T}$,

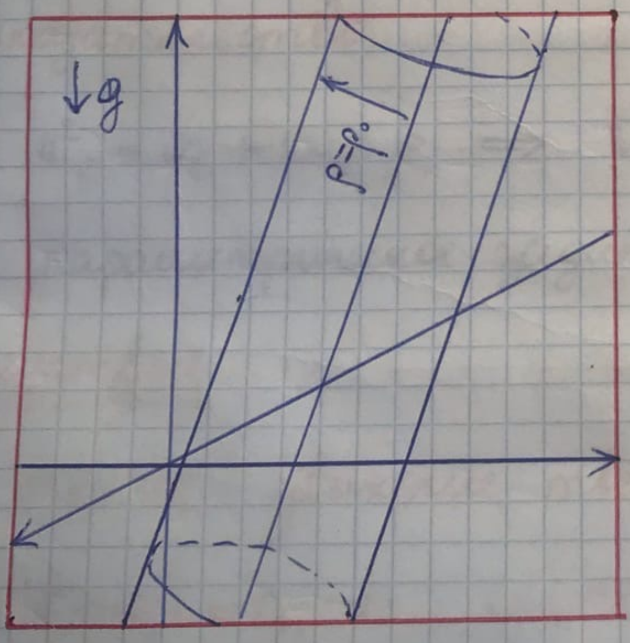
$\forall t\in\mathbb{R}\quad \dot{\mathbf{r}}(t)\in \operatorname{Ker} A|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)} \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \forall t\in\mathbb{R}\quad (T+V)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\,\dot{\mathbf{r}}=\dot{\mathbf{r}}(t)}=const.$

Доказательство.

$$\forall t\in\mathbb{R}\ \frac{d}{dt}T|_{\dot{\mathbf{r}}=\dot{\mathbf{r}}(t)} = \langle \mathbb{F},\dot{\mathbf{r}}\rangle|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\,\dot{\mathbf{r}}=\dot{\mathbf{r}}(t)} = \langle -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}},\dot{\mathbf{r}}\rangle|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\,\dot{\mathbf{r}}=\dot{\mathbf{r}}(t)} = -\frac{d}{dt}V|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)} \Longrightarrow (T+V)|_{\mathbf{r}=\mathbf{r}(t),\,\dot{\mathbf{r}}=\dot{\mathbf{r}}(t)}=const. \blacksquare$$

Пример:



$V=\sum_{i=1}^{N} mgz_i \Longrightarrow T+V=const$

Лекция №5

⑥ Эквивалентность принципа Даламбера-Лагранжа и уравнений движения свободного твердого тела

Теорема: (принцип Даламбера-Лагранжа для свободного твердого тела)

$\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ – движение твердого тела $(m_i, \mathbb{r}_i)_{i=1}^N$:

$|\mathbb{r}_i - \mathbb{r}_j| = c_{ij} > 0$, $i < j = \overline{1, N}$ под действием $\mathbb{F} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ $\forall \mathbb{v}_c, \omega \in \mathbb{R}^3$ $\left[|\mathbb{r}_i - \mathbb{r}_j|\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)} = c_{ij}, i<j=\overline{1,N} \right.$

$\left. \langle M\ddot{\mathbb{r}}(t) - \mathbb{F}, \mathbb{v} \rangle = 0, \text{ где } \mathbb{v} = \left((\mathbb{v}_c + \omega \times \rho_i)^T{}_{i=1}^N\right)^T \right]$

Доказательство.

$\dot{\mathbb{r}}_i = \mathbb{v}_c + \omega \times \rho_i \Rightarrow \mathbb{v} = \left((\mathbb{v}_c + \omega \times \rho_i)^T{}_{i=1}^N\right)^T$ –

параметрическое задание $\operatorname{Ker} A$. ■

Следствие:

$\mathbb{r} = \mathbb{r}(t)$ – движение твердого тела $(m_i, \mathbb{r}_i)_{i=1}^N$:

$|\mathbb{r}_i - \mathbb{r}_j| = c_{ij} > 0$, $i < j = \overline{1, N}$ под действием $\mathbb{F} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ $\left[|\mathbb{r}_i - \mathbb{r}_j|\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t)} = c_{ij}, \ i<j=\overline{1,N}, \quad m\ddot{\mathbb{r}}_c(t) = \right.$

$= \sum_{i=1}^N \mathbb{F}_i^{(e)}\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}, \quad \frac{d}{dt}\mathbb{K}_c^{(отн)}\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t), \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} =$

$$= \mathbb{M}_C^{(e)}\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} \;]$$

Доказательство.

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \langle M\ddot{\mathbb{r}}(t) - \mathbb{F}, \mathbb{v}\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \sum_{i=1}^N \langle m_i \ddot{\mathbb{r}}_i(t) -$$

$$- \mathbb{F}_i, \mathbb{v}_c + \omega \times \rho_i\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \langle m\ddot{\mathbb{r}}_c(t) -$$

$$- \sum_{i=1}^N \mathbb{F}_i^{(e)}, \mathbb{v}_c\rangle + \langle \sum_{i=1}^N \rho_i \times (m_i \ddot{\mathbb{r}}_i(t) - \mathbb{F}_i), \omega\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}$$

$$= \langle m\ddot{\mathbb{r}}_c(t) - \sum_{i=1}^N \mathbb{F}_i^{(e)}\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}, \mathbb{v}_c\rangle +$$

$$+ \langle \frac{d}{dt}\mathbb{K}_C^{(отн)} - \mathbb{M}_C^{(e)}, \omega\rangle\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = 0 \quad \forall \mathbb{v}_c, \omega \in \mathbb{R}^3 \iff$$

$$\iff m\ddot{\mathbb{r}}_c(t) = \sum_{i=1}^N \mathbb{F}_i^{(e)}\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)}, \quad \frac{d}{dt}\mathbb{K}_C^{(отн)}\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} = \mathbb{M}_C^{(e)}\Big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t),\, \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t)} \quad \blacksquare$$

⑦ Уравнение Лагранжа второго рода

$$T = \frac{1}{2}\langle M\dot{\mathbb{r}}, \dot{\mathbb{r}}\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\mathbb{r}(t,q) = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q}\dot{q}$$

$T\big|_{\dot{\mathbb{r}} = \dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot{q})} = T_2 + T_1 + T_0,\quad T_2 = \frac{1}{2}\dot{q}^T A \dot{q},$

$T_1 = a^T \dot{q},\quad T_0 = \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbb{r}}{\partial t}^T M \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial t},\quad A = A(t,q) =$
$= \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q}^T M \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q},\quad a^T = a^T(t,q) = \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial t}^T M \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial q}$

$$T\big|_{\dot{\mathbb{r}} = \dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot{q})} = T_2 \iff \frac{\partial \mathbb{r}}{\partial t} = 0 \iff \mathbb{r} = \mathbb{r}(q)$$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\Big|_{\dot{\mathbb{r}} = \dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot{q})} = \dot{q}^T A + a^T \Rightarrow$ уравнение Лагранжа второго рода – второго порядка

⑦ Калибровка

Далее будем рассматривать потенциальный случай:

$V = V(t,\mathbb{r}),\quad \mathbb{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbb{r}}^T,\quad L = (T-V)\big|_{\mathbb{r} = \mathbb{r}(t,q),\ \dot{\mathbb{r}} = \dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot{q})} = L(t,q,\dot{q})$

Калибровка – L и $\tilde{L}$ дают одинаковые уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \iff \frac{d}{dt}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q}$$

Например, $\tilde{L} = \mathrm{const}\, L$ или $\tilde{T} = \mathrm{const}\, L$, $\tilde{Q} = \mathrm{const}\, Q$

$$\tilde{L} = L + \varphi, \quad \varphi = \frac{d}{dt}\psi(t,q) = \varphi(t,q,\dot{q}):$$

$$\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{\partial\psi}{\partial q}\dot{q}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}} = \frac{\partial\psi}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}} - \frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial q} - \frac{\partial^2\psi}{\partial q\partial t} - \dot{q}^T\frac{\partial^2\psi}{\partial q^2} = 0$$

Пример:

$$n=1, \quad L = \frac{1}{2}A\dot{q}^2 + a\dot{q} + L_0, \quad L_0 = T_0 - V$$

$$\psi = \int_{q_0}^{q} a\,dq = \psi(t,q), \quad \varphi = \frac{d}{dt}\psi(t,q) = \dot{q}a + \int_{q_0}^{q}\frac{\partial a}{\partial t}dq$$

$$L = \frac{1}{2}A\dot{q}^2 + \varphi + L_0 - \int_{q_0}^{q}\frac{\partial a}{\partial t}dq \sim \frac{1}{2}A\dot{q}^2 + L_0 - \int_{q_0}^{q}\frac{\partial a}{\partial t}dq$$

Если $\frac{\partial a}{\partial t} = 0$, то $L \sim \frac{1}{2}A\dot{q}^2 + L_0$

7 Преобразование уравнений при замене координат

$\mathbb{x}$ – другие локальные координаты на $M_{const}(t)$:

$$\mathbb{r} = \mathbb{r}(t,\mathbb{x}), \quad \mathbb{r} = \mathbb{r}(t,q), \quad q = q(t,\mathbb{x}), \quad \det\frac{\partial q}{\partial \mathbb{x}} \neq 0.$$

$$\mathbb{r}(t,\mathbb{x}) = \mathbb{r}(t,q)\big|_{q=q(t,\mathbb{x})}, \quad \frac{d}{dt}q(t,\mathbb{x}) = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial \mathbb{x}}\dot{\mathbb{x}} = \dot{q}(t,\mathbb{x},\dot{\mathbb{x}})$$

$$\frac{d}{dt}\left[\mathbb{r}(t,q)\big|_{q=q(t,\mathbb{x})}\right] = \left(\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{r}(t,q) + \frac{\partial}{\partial q}\mathbb{r}(t,q)\dot{q}\right)\Big|_{q=q(t,\mathbb{x}),}$$

$$\dot{q} = \dot{q}(t,\mathbb{x},\dot{\mathbb{x}}) \quad : \quad \frac{\partial\dot{q}}{\partial\dot{\mathbb{x}}} = \frac{\partial q}{\partial \mathbb{x}}$$

$$T\big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,\mathbb{x},\dot{\mathbb{x}})} = T\big|_{\dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,q,\dot{q})}\Big|_{q=q(t,\mathbb{x}),\ \dot{q}=\dot{q}(t,\mathbb{x},\dot{\mathbb{x}})}$$

$$\mathbb{X}^T = \mathbb{F}^T\big|_{\mathbb{r}=\mathbb{r}(t,\mathbb{x}),\ \dot{\mathbb{r}}=\dot{\mathbb{r}}(t,\mathbb{x},\dot{\mathbb{x}})}\frac{\partial}{\partial\mathbb{x}}\mathbb{r}(t,\mathbb{x})$$

$$\delta A = \mathbb{X}^T\delta\mathbb{x} = Q^T\delta q\big|_{q=q(t,\mathbb{x}),\ \dot{q}=\dot{q}(t,\mathbb{x},\dot{\mathbb{x}})}$$

Теорема (преобразование уравнений при замене координат)

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot x}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,x,\dot x)}\right] - \frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,x,\dot x)} = \left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot q}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,q,\dot q)}\right] - \frac{\partial T}{\partial q}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,q,\dot q)}\right)\Bigg|_{q=q(t,x),\ \dot q=\dot q(t,x,\dot x)} \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$X^T = Q^T\Big|_{q=q(t,x),\ \dot q=\dot q(t,x,\dot x)} \frac{\partial q}{\partial x}$$

Доказательство

$$\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,x,\dot x)} = \left(\frac{\partial T}{\partial q}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,q,\dot q)}\frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \dot q}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,q,\dot q)}\frac{\partial}{\partial x}\dot q(t,x,\dot x)\right)$$

$$\Big|_{q=q(t,x),\ \dot q=\dot q(t,x,\dot x)}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot x}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,x,\dot x)} = \frac{\partial T}{\partial \dot q}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,q,\dot q)}\Big|_{q=q(t,x),\ \dot q=\dot q(t,x,\dot x)}\frac{\partial \dot q}{\partial \dot x} =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial \dot q}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,q,\dot q)}\Big|_{q=q(t,x),\ \dot q=\dot q(t,x,\dot x)}\frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot x}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,q,\dot q)}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot q}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,q,\dot q)}\Big|_{q=q(t,x),\ \dot q=\dot q(t,x,\dot x)}\right]\frac{\partial q}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial T}{\partial \dot q}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,q,\dot q)}\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial x}q(t,x)\right]\Big|_{q=q(t,x),\ \dot q=\dot q(t,x,\dot x)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\dot q(t,x,\dot x) = \frac{\partial^2 q}{\partial x\,\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial q}{\partial x}\dot x\right]$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x}q(t,x) = \frac{\partial^2 q}{\partial t\,\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial q}{\partial x}\right]\dot x$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot q}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,q,\dot q)}\Big|_{q=q(t,x),\ \dot q=\dot q(t,x,\dot x)}\right] = \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q}\Big|_{\dot{\mathbf r}=\dot{\mathbf r}(t,q,\dot q)}\right)\Bigg|$$

$$\Big|_{q=q(t,x),\ \dot q=\dot q(t,x,\dot x)}$$

$$\delta q(t,x) = \frac{\partial q}{\partial x}\delta x \Longrightarrow X^T = Q^T\Big|_{q=q(t,x),\ \dot q=\dot q(t,x,\dot x)}\frac{\partial q}{\partial x} \quad \blacksquare$$