Первые интегралы уравнений Лагранжа для систем с потенциальными силами.

В этом случае используется функция Лагранжа $L = T - V = L(\dot q, q, t)$,

где кинетическая энергия T и потенциальная энергия V выражены через q и $\dot q$

(1) Уравнения Лагранжа имеют вид $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$

Вообще такие уравнения можно написать для любой функции $L(\dot q, q, t)$.

Большинство из описанных здесь свойств имеют любые такие уравнения.

Первым интегралом системы (1) называется функция $f(\dot q, q, t)$, которая оказывается константой на любом решении (1).

Простейшие первые интегралы уравнений Лагранжа.

1. Если $\frac{\partial L}{\partial \bar q} \equiv 0$ т.е. $L = L(\dot{\tilde q}, \dot{\bar q}, \tilde q, t)$, $\bar q \in R^k$, $k \le n$ то $\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar q}} = \bar c = const.$

Это непосредственно следует из вида соответствующих уравнений $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar q}} = 0.$

Эти первые интегралы и координаты $\bar q$ называются циклическими.

2. Если $\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0$, то $H(\dot q, q, t) = \frac{\partial L}{\partial \dot q}^T \dot q - L = const.$

Действительно, $\frac{d}{dt} H\Big|_{q(t)} \equiv \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}^T\right)\dot q + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q}^T \ddot q} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot q}^T \ddot q} - \frac{\partial L}{\partial q}^T \dot q\right)\Big|_{q(t)} \equiv$
$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)^T\Big|_{q(t)} \dot q(t) \equiv 0$, если $q(t)$ – решение (1).

Замечание. Для уравнений механики

$$L = T_2 + T_1 + T_0 - V = L_2 + L_1 + L_0$$

По формуле Эйлера для однородных функций $\frac{\partial f}{\partial x}^T x \equiv n f(x)$,

если $f(\lambda x) \equiv \lambda^n f(x)$, имеем $\frac{\partial L}{\partial \dot q}^T \dot q \equiv 2T_2 + T_1$,

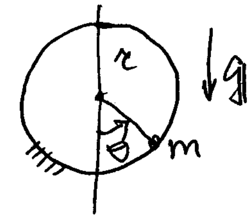
откуда $H = T_2 - T_0 + V = L_2 - L_0 = const$ - это интеграл Якоби.

При $T \equiv T_2$ он превращается в закон сохранения энергии – интеграл энергии

$$H = T + V = h = const.$$

Примеры.

1. Точка на неподвижной окружности в поле тяжести: $q = \theta$,



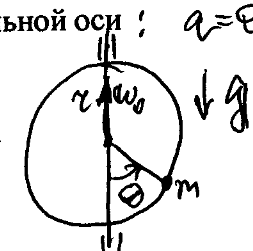
$$L = \frac{1}{2} m r^2 \dot\theta^2 + mgr\cos\theta.$$

Интеграл энергии $H = \frac{1}{2} m r^2 \dot\theta^2 - mgr\cos\theta$

2. Точка на окружности, равномерно вращающейся вокруг вертикальной оси: $q = \theta$,

$$L = \frac{1}{2} m\left(r^2\dot\theta^2 + r^2\omega_0^2 \sin^2\theta\right) + mgr\cos\theta$$

Интеграл Якоби $H = \frac{1}{2} m r^2 \dot\theta^2 - \frac{1}{2} m r^2 \omega_0^2 \sin^2\theta - mgr\cos\theta$



Поле симметрий.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений для координат q

$$q' = v(q), \quad (\,)' = \frac{d}{d\tau}(\,).$$

Решение этой системы с начальным условием q_0 при $\tau=0$

задает отображение, зависящее от параметра τ, которое при достаточно малых τ

имеет формулу $\quad q_0 \to q(\tau) = q_0 + v(q_0)\tau + \dots$

По этой формуле для любой функции $q_0(t)$ получаем

$$q_0(t) \to q(\tau,t) = q_0(t) + v(q_0(t))\tau + \dots$$

Отсюда получаем и соответствующее преобразование производной

$$\dot q_0(t) \to \dot q(\tau,t) = \dot q_0(t) + \frac{\partial v}{\partial q}\dot q\Big|_{q_0(t)}\tau + \dots$$

Тогда $\quad \dfrac{\dot q(\tau,t) - \dot q(0,t)}{\tau} = \dfrac{\partial v}{\partial q}\dot q\Big|_{q(0,t)} + \dots$

И при $\tau \to 0$ получаем $(\dot q)' = \dfrac{\partial v}{\partial q}\dot q$ для любой функции $q_0(t)$.

Таким образом, получаем систему дифференциальных уравнений, порождающую отображение фазового пространства по приведенным формулам:

(2) $$q' = v(q), \qquad (\dot q)' = \frac{\partial v}{\partial q}\dot q.$$

Вектор $v(q) \in R^n$ называется полем симметрий системы с функцией Лагранжа $L = L(\dot q, q, t)$, если на любом решении $q(\tau), \dot q(\tau)$ системы (2) для любого t

(3) $$\frac{d}{d\tau} L(\dot q(\tau), q(\tau), t) \equiv 0.$$

Теорема Нётер (Амалия, XIX – XX, Герм.)

Если $v(q)$ поле симметрий системы с функцией Лагранжа $L(\dot q, q, t)$,

то уравнения Лагранжа имеют первый интеграл $\quad I = \dfrac{\partial L}{\partial \dot q}^T v(q) = const.$

Док.

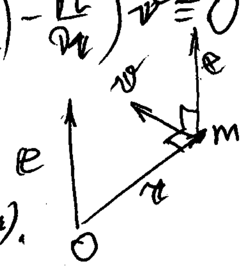
Условие (3) эквивалентно тождеству $\quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot q}(\dot q)' + \dfrac{\partial L}{\partial q}q' \equiv 0 \quad$ на решениях (2)

(4) или тождеству $\quad \dfrac{\partial L}{\partial \dot q}^T \dfrac{\partial v}{\partial q}\dot q + \dfrac{\partial L}{\partial q}v \equiv 0 \quad$ для функции от $(\dot q, q, t)$.

На любом решении уравнений $\quad \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial q} = 0 \quad$ имеем с учетом (4)

$$\frac{dI}{dt} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)^T v + \frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{\partial v}{\partial q}\dot q \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)^T v - \frac{\partial L}{\partial q}^T v = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial L}{\partial q}\right)^T v \equiv 0.$$

Что и требовалось доказать.



Пример1. Свободная точка в потенциальном поле сил.

$$q = r = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad L = \frac{1}{2}m(\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2) - V(x,y,z) = \frac{1}{2}m\dot r^2 - V(r).$$

Пусть $e \in R^3$, $|e| = 1$, $e = const$ и поле симметрий есть $v = e \times r$.

Это векторное поле скоростей при вращении вокруг неподвижной оси Oe.

Тогда $\quad I = \dfrac{\partial L}{\partial \dot r}^T v = m(\dot r, v) =$

$$= m(\dot r, e \times r) = (e, r \times m\dot r) = (e, K_0) = K_e = const.$$

Т.е. сохраняется проекция K_0 на направление e.

Что значит, $v = e \times r$ - поле симметрий? Имеем $r' = v = e \times r,\ (\dot r)' = \frac{\partial v}{\partial r}\dot r$.

Т.к. $v = e \times r = A_e r$, где A_e - соответствующая кососимметрическая матрица, то $\frac{\partial v}{\partial r} = A_e$, откуда $\frac{\partial v}{\partial r}\dot r = A_e \dot r = e \times \dot r$.

Следовательно, функция L должна сохраняться на решениях системы $\left\{ \begin{array}{l} r' = e \times r, \\ (\dot r)' = e \times \dot r \end{array} \right.$

Значит, должно быть $\frac{\partial L}{\partial \dot r}^T (\dot r)' + \frac{\partial L}{\partial r}^T r' \equiv 0$, т.е.

$$m(\dot r, e \times \dot r) - \left(\frac{\partial V}{\partial r}, e \times r\right) \equiv -\left(\frac{\partial V}{\partial r}, e \times r\right) \equiv \left(e, r \times \left(-\frac{\partial V}{\partial r}\right)\right) \equiv$$
$$\equiv (e, r \times F) \equiv (e, M_0) \equiv M_e \equiv 0$$

Т.е. момент силы относительно оси Oe должен быть равен нулю. Знакомая ситуация.

Пример 2. Если q_1 - циклическая координата, т.е. $L = L(\dot q, q_2, \dots, q_n, t)$, то полем симметрий является вектор $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, соответствующее отображение фазового пространства порождается системой $q' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ (\dot q)' = 0$, т.к. $\frac{\partial v}{\partial q} \equiv 0$, и является сдвигом вдоль координаты q_1. И первый интеграл по общей формуле будет $\frac{\partial L}{\partial \dot q_1} = c_1$, как и должно быть.

Понижение порядка системы уравнений Лагранжа по Раусу (XIX – XX, Великобрит.) – использование циклических интегралов.

Функция Рауса. Пусть система уравнений Лагранжа имеет $k \le n$ циклических координат. Перенумеруем координаты так, чтобы циклические оказались первыми, т.е. $q = \begin{pmatrix} \bar q \\ \tilde q \end{pmatrix},\ L = L(\dot q, \tilde q, t)$. Дополнительно предположим, что $\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\bar q}^2} \ne 0$.

(5) Тогда из первых интегралов $\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar q}} = \bar c$ как из системы независимых уравнений относительно $\dot{\bar q}$ найдем

(*)
$$\dot{\bar q} = \bar\varphi(\dot{\tilde q}, \tilde q, t, \bar c).$$

Функцией Рауса системы с функцией Лагранжа $L = L(\dot q, \tilde q, t)$ называется

(6)
$$R(\dot{\tilde q}, \tilde q, t, \bar c) = \left(L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar q}}^T \dot{\bar q}\right)_* = L|_* - \bar c^T \bar\varphi(\dot{\tilde q}, \tilde q, t, \bar c),$$

где $(*)$ означает подстановку $(*)$.

Замечание. В задачах механики $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\bar q}^2} \equiv \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{\bar q}^2}$ поэтому $\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\bar q}^2}$ – один из главных диагональных миноров матрицы A квадратичной формы T_2 в кинетической энергии $T = T_2 + T_1 + T_0$, $T_2 = \frac{1}{2}\dot q^T A \dot q$, $A = \frac{\partial r}{\partial q}^T M \frac{\partial r}{\partial q}$.

Но T_2 это кинетическая энергия в движении системы со связями, замороженными в момент t_0. Действительно, в таком движении $r = r(q(t), t_0)$, $\dot r = \frac{\partial r}{\partial q}\dot q$,

$$T = \frac{1}{2}\dot r^T M \dot r = \frac{1}{2}\dot q^T \frac{\partial r}{\partial q}^T M \frac{\partial r}{\partial q}\dot q = \frac{1}{2}\dot q^T A \dot q.$$

Поэтому $T_2 > 0$ при $\dot q \ne 0$, т.е. T_2 – положительно определенная квадратичная форма и все главные диагональные миноры ее матрицы положительны. В частности, $\det \frac{\partial^2 T_2}{\partial \dot{\bar q}^2} > 0$. Поэтому условие независимости уравнений (5) в механике всегда выполнено.

Теорема Рауса. Если $\bar{q}$ циклические координаты системы с функцией Лагранжа L и $\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\bar{q}}^2} \neq 0$, то уравнения

(7)
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

эквивалентны системе уравнений

(8)
(9)
$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\hat{q}}}\right) - \frac{\partial R}{\partial \hat{q}} = 0 \\ \dot{\bar{q}} = \bar{\varphi}(\dot{\hat{q}}, \hat{q}, t, \bar{c}), \quad \dot{\bar{c}} = 0 \end{cases}$$

где $R(\dot{\hat{q}}, \hat{q}, t, \bar{c})$ – функция Рауса системы с функцией Лагранжа L.

Док. В более подробной записи система (7) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \hat{q}} = 0. \end{cases}$$

Первая часть эквивалентна $\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} = \bar{c} = const$ или $\begin{cases} \dot{\bar{q}} = \bar{\varphi}(\dot{\hat{q}}, \hat{q}, t, \bar{c}) \\ \dot{\bar{c}} = 0 \end{cases}$

Подставив это во вторую часть, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \hat{q}}\right)_* = 0 \\ \dot{\bar{q}} = \bar{\varphi}(\dot{\hat{q}}, \hat{q}, t, \bar{c}) \\ \dot{\bar{c}} = 0 \end{cases}$$

Следовательно, остается доказать эквивалентность систем

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \hat{q}}\right)_* = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{\hat{q}}}\right) - \frac{\partial R}{\partial \hat{q}} = 0.$$

Используем, что $\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}}\right|_* \equiv \bar{c}$ т.к. $\bar{\varphi}$ – решение уравнения $\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}} = \bar{c}$.

По формуле $\frac{\partial f(y(x))}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}^T \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{y(x)}$ получаем из (6)

$$\frac{\partial R}{\partial \hat{q}} \equiv \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \hat{q}}^T \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}}\right|_* + \left.\frac{\partial L}{\partial \hat{q}}\right|_* - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \hat{q}}^T \bar{c} \equiv \left.\frac{\partial L}{\partial \hat{q}}\right|_*$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{\hat{q}}} \equiv \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \dot{\hat{q}}}^T \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}}\right|_* + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}}\right|_* - \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \dot{\hat{q}}}^T \bar{c} \equiv \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}}\right|_*$$

Отсюда $\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{\hat{q}}} \equiv \frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}}\right|_*\right)$

Осталось убедиться в том, что $\frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}}\right|_*\right) \equiv \left.\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\hat{q}}}\right)\right)\right|_*$.

Действительно, для функции $f(y, t)$ и подстановки $y = y(x, t)$, $\dot{y} = \frac{\partial y}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial y}{\partial t}$

получаем $\frac{d}{dt}\left(f(y,t)|_*\right) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}^T\right|_* \left(\frac{\partial y}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial y}{\partial t}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_*$

$$\left.\left(\frac{d}{dt} f(y,t)\right)\right|_* = \left.\left(\frac{\partial f}{\partial y}^T \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\right|_* = \left.\frac{\partial f}{\partial y}^T\right|_* \left(\frac{\partial y}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial y}{\partial t}\right) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_*$$

т.е. $\frac{d}{dt}\left(f(y,t)|_*\right) \equiv \left.\left(\frac{d}{dt} f(y,t)\right)\right|_*$

В нашем случае $x = \begin{pmatrix} \bar{c} \\ \dot{\hat{q}} \\ \hat{q} \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \dot{\bar{q}} \\ \dot{\hat{q}} \\ \hat{q} \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} \bar{\varphi}(x,t) \\ \dot{\hat{q}} \\ \hat{q} \end{pmatrix}.$

Теорема доказана.

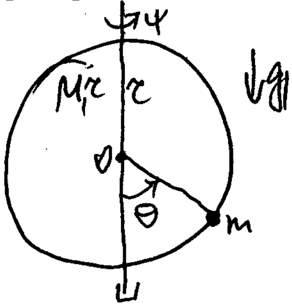
Термины. Система (8) - уравнения Рауса, система (8, 9) - приведенная система.

Переход от (7) к (8, 9) - понижение порядка по Раусу, игнорирование циклических координат, или просто – приведение. В задачах механики обычно оказывается

$$R = R_2 + R_1 + R_0,$$

где смысл индексов тот же, что и в типичной функции Лагранжа, только по отношению к $\dot{\hat{q}}$. Функция $V_{\bar{c}} = -R_0$ называется приведенным потенциалом.

Пример. Точка на массивной окружности с вертикальной осью вращения в поле тяжести.



В отличие от двух предыдущих примеров с точкой на окружности в этой задаче две степени свободы $(n = 2)$ и потому две координаты $q = \begin{pmatrix} \psi \\ \theta \end{pmatrix}$:

$$L = \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{2}\dot{\psi}^2 + \frac{1}{2}m\left(r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\psi}^2\right) + mgr\cos\theta,$$

ψ – циклическая координата, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \left(\frac{Mr^2}{2} + mr^2\sin^2\theta\right)\dot{\psi} = c$ – циклический интеграл. Из него находим $\dot{\psi} = \frac{c}{\frac{Mr^2}{2} + mr^2\sin^2\theta} = \bar{\varphi}(\dot{\hat{q}}, \hat{q}, t, c)$.

И получаем функцию Рауса

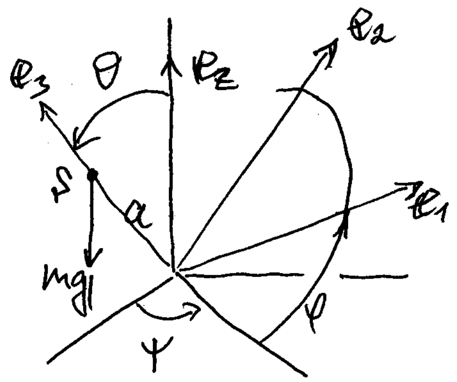
$$R = L\big|_{*} - c\bar{\varphi} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\cos\theta - \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{\frac{Mr^2}{2} + mr^2\sin^2\theta} = R_2 + R_0$$

Здесь приведенный потенциал будет

$$V_c(\theta) = -mgr\cos\theta + \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{\frac{Mr^2}{2} + mr^2\sin^2\theta}.$$

<u>Замечание</u>! Интересно сравнить ф-цию R здесь с ф-циями L в примерах на стр. 1.

Задача Лагранжа о движении твердого тела с неподвижной точкой. Это еще один пример использования понижения порядка уравнений Лагранжа по Раусу.



Особенности: два главных момента инерции для неподвижной точки равны - $A = B \neq C$ -, центр масс лежит на третьей оси, тело движется в однородном поле тяжести, других сил нет.

Обобщенные координаты – углы Эйлера: φ, ψ, θ.

Компоненты вектора угловой скорости в главных осях инерции для неподвижной точки – кинематические уравнения Эйлера:

(1) $$\omega_1 = \dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta\cos\varphi, \quad \omega_2 = \dot\psi\sin\theta\cos\varphi - \dot\theta\sin\varphi, \quad \omega_3 = \dot\varphi + \dot\psi\cos\theta.$$

Кинетическая энергия
$$T = \frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + A\omega_2^2 + C\omega_3^2\right).$$

Функция Лагранжа
$$L = \frac{1}{2}\left[C\dot\varphi^2 + A\dot\theta^2 + (A\sin^2\theta + C\cos^2\theta)\dot\psi^2 + 2C\dot\varphi\dot\psi\cos\theta\right] - mga\cos\theta.$$

Циклические координаты φ, ψ.

Циклические интегралы $\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = C(\dot\varphi + \dot\psi\cos\theta) = C\omega = const$
$$\frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = C\dot\varphi\cos\theta + \dot\psi(A\sin^2\theta + C\cos^2\theta) = k = const.$$

Механический смысл первого – сохранение проекции угловой скорости на ось Oe_3 - ось динамической симметрии, второго – сохранение проекции кинетического момента на вертикаль. Действительно, последнее следует из того, что
$$\mathbb{K}_0 = A\omega_1 e_1 + A\omega_2 e_2 + C\omega_3 e_3,$$
$$e_z = \sin\theta(\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2) + \cos\theta\, e_3,$$
$$K_z = (\mathbb{K}_0, e_z) = A\omega_1\sin\theta\sin\varphi + A\omega_2\sin\theta\cos\varphi + C\omega_3\cos\theta,$$
если поставить сюда формулы (1).

Из интегралов получаем выражения для производных циклических координат

(2) $$\dot\varphi = \omega - \frac{\cos\theta}{A\sin^2\theta}(k - C\omega\cos\theta)$$

(3) $$\dot\psi = \frac{k - C\omega\cos\theta}{A\sin^2\theta}.$$

Получаем функцию Рауса
$$R = \left(L - \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}\dot\varphi - \frac{\partial L}{\partial\dot\psi}\dot\psi\right)\Big|_{(2,3)} = \frac{1}{2}A\dot\theta^2 - V_{k\omega}(\theta)$$
где

(4) $$V_{k\omega} = \frac{(k - C\omega\cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + mga\cos\theta + \frac{1}{2}C\omega^2 -$$

приведенный потенциал.

Приведенная система имеет одну обобщенную координату θ и функцию Лагранжа R.

(5) Уравнение Лагранжа имеет вид $A\ddot{\theta} = -V'_{k\omega}(\theta)$

Известно, что для описания качественных свойств решений такого уравнения достаточно изучить график приведенного потенциала. Заметим для этого, что функция R не зависит от времени. Значит, уравнение имеет первый интеграл

(6) $$\frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 + V_{k\omega}(\theta) = h = const,$$

из которого следует, что на движении с фиксированными значениями k, ω, h

(7) угол θ может изменяться только в области $V_{k\omega}(\theta) \le h$

или

$$\frac{f(z)}{2A(1-z^2)} \le 0,$$

где $z = \cos\theta$, $f(z) = (k - c\omega z)^2 + 2Amga(z - \bar{z})(1 - z^2)$,

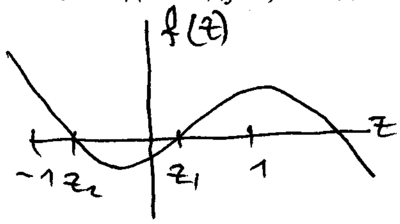
$\bar{z} = \frac{2h - c\omega^2}{2mga}$.

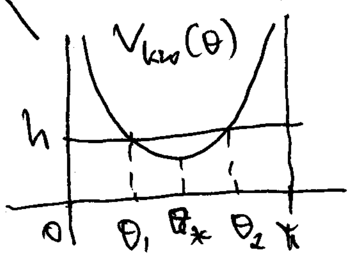
Рассмотрим только случай $(k \pm c\omega)^2 > 0$.

Заметим, что $f(z)$ многочлен третьей степени, что $f(\pm 1) > 0$, $f(\pm\infty) = \mp\infty$

и что при любых начальных условиях какое-то движение происходит, т.е. множество, на котором выполнено неравенство (7) на отрезке $[-1; 1]$ существует.

Отсюда следует, что для соответствующих значений констант k, ω, h график $f(z)$





имеет вид. Откуда с учетом формулы (4) следует, что график $V_{k\omega}(\theta)$ на промежутке $[0, \pi]$ имеет единственную точку минимума θ_* а на границах уходит в плюс бесконечность.

Таким образом, θ совершает колебания между θ_1 и θ_2. Причем $\dot{\theta} = 0$ только в точках θ_1 и θ_2.

Если $\frac{k}{c\omega} \notin [z_2, z_1]$ то $\dot{\psi} \ne 0$ (см. (3))

в процессе движения, поэтому вектор e_3

движется по единичной сфере так

Если $\frac{k}{c\omega} \in (z_2, z_1)$, то так

Здесь $\dot{\psi} = 0$ внутри интервала (z_2, z_1).

Если $\frac{k}{c\omega}$ на границе интервала $[z_2, z_1]$, то возможен только один вариант $\frac{k}{c\omega} = z_1$.

Действительно, в этом случае число $\hat{z} = \frac{k}{C\omega}$ является корнем уравнения $f(z) = 0$,
а значит, обращает в нуль и $2Amga\,(z - \bar{z})(1 - z^2)$,
т.е. $\bar{z} = \hat{z}$ ($|\hat{z}| \neq 1$) т.к. для такого $\hat{z}$ выражение $1 - z^2$
не равно нулю по предположению. Поэтому функция $f(z)$ в этом случае имеет вид

$$f(z) = C^2\omega^2(z - \hat{z})^2 + 2Amga\,(z - \hat{z})(1 - z^2) = $$
$$= (z - \hat{z})\left[C^2\omega^2(z - \hat{z}) + 2Amga(1 - z^2)\right]$$

Откуда следует, что второй корень уравнения $f(z) = 0$ находится из

$$C^2\omega^2(z - \hat{z}) + 2Amga\,(1 - z^2) = 0$$

т.е.

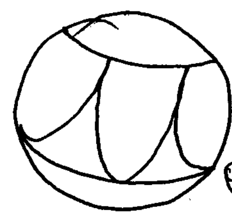
$$z - \hat{z} = -\frac{2Amga}{C^2\omega^2}(1 - z^2)$$

Следовательно, второй корень меньше первого,

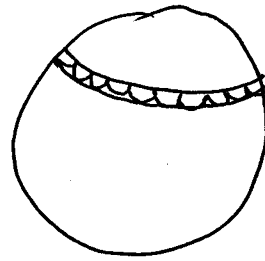
а соответствующий угол θ больше

В точке $z_1 = \hat{z}$ обращается в нуль $\dot{\psi}$,

т.е. это точка остановки конца вектора e_3



Предположим, что тело закручено достаточно быстро. Точнее, пусть при $t = 0$, $\theta = \theta_{01}$ $\dot{\varphi} = \omega$, $\dot{\psi} = \dot{\theta} = 0$. Это значит, что движение начинается в точке остановки. Так может быть реализован последний случай. Однако из уравнения для второго корня следует, что при достаточно большом ω этот корень будет сколь угодно близок к начальному значению $z_0 = \hat{z}$. Движение конца вектора e_3 будет происходить между сколь угодно близкими параллелями на единичной сфере,



Такое движение называют псевдорегулярной

прецессией. Внешне оно похоже на регулярную.

Регулярной прецессией называется движение,

в котором $\theta \equiv \theta_0 = const$,
$\dot{\varphi} = const$, $\dot{\psi} = const$,

в нем нет точек остановки конца e_3

Докажем, что для любого θ_0 существует регулярная прецессия с таким углом θ.

Достаточно доказать, что любое θ_0 может быть корнем уравнения $V'_{k\omega}(\theta) = 0$,

если подходящим образом выбрать значения произвольных постоянных k и ω

Тогда приведенная система будет иметь равновесие $\theta = \theta_0$, а твердое тело будет совершать регулярную прецессию, как это следует из формул (2),(3).

Вычисление производной $V'_{k\omega}(\theta)$

приводит к уравнению относительно $(C\omega z_0 - k)$ при заданном $z_0 = \cos\theta_0$:

$$\frac{z_0}{1 - z_0^2}(C\omega z_0 - k)^2 + C\omega(C\omega z_0 - k) + Amga(1 - z_0^2) = 0.$$

26.03

Если $z_0 \neq 0$, то при достаточно большом ω его корнями будут

$$C\omega z_0 - k = \frac{-C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 - 4Amgaz_0}}{2z_0}(1-z_0^2),$$

Откуда и находятся соответствующие значения k. При этом из (2),(7)

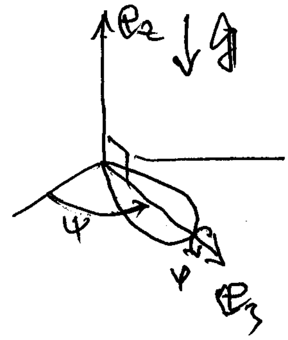
$$\dot\psi = \frac{C\omega \pm \sqrt{C^2\omega^2 - 4Amgaz_0}}{2Az_0}$$

$$\dot\varphi = \omega - z_0\dot\psi.$$

Если $z_0 = 0$ т.е. ось Oe_3 горизонтальна, то для любого $\omega \neq 0$

$$k = \frac{Amga}{C\omega}, \quad \dot\psi = \frac{mga}{C\omega}, \quad \dot\varphi = \omega$$

Такое движение тоже есть.



Равновесия.

Равновесие системы уравнений Лагранжа с заданной функцией Лагранжа в некоторых координатах q – это ее частное решение $q = q_* \equiv const.$

Для соответствующей механической системы с конфигурационным многообразием M это либо состояние покоя $r = r_* = r(q_*)$, когда уравнение многообразия имеет вид $r = r(q)$, либо специальное движение $r = r_*(t) = r(q_*, t)$, которое можно интерпретировать как равновесие на подвижном многообразии с уравнением $r = r(q,t)$ – относительное равновесие.

Уравнение равновесия.

Рассмотрим систему с конфигурационным многообразием $M: r = r(q)$ в координатах $q \in R^n$ и потенциальными силами с потенциальной энергией $V(q)$, не зависящей от времени. Для нее

(1) $$L = T - V = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(q)\cdot\dot{q} - V(q),$$

и $q_* = const$ – равновесие соответствующей системы уравнений Лагранжа тогда и только тога, когда

(2) $$\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_*} = 0.$$

(3) Действительно, уравнения $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$ записанные более подробно

(4) $$A\ddot{q} + \frac{d}{dt}(A)\cdot\dot{q} - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\dot{q}^T A\dot{q}\right) + \frac{\partial V}{\partial q} = 0,$$

показывают, что $q = q_* \equiv const$ их решение тогда и только тогда, когда $\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_*} = 0,$ т.к. для таких решений $\dot{q} \equiv 0.,\ \ddot{q} \equiv 0.$

Устойчивость равновесий.

(5) В пространстве $(q, \dot{q})$ для $a > 0$ обозначим C_a множество $|\dot{q}| < a,$ $|q - q_*| < a$ где под $|f| < a$ понимается $|f_i| < a,\ i = 1, 2, \dots, n.$

Определение.

Равновесие $q = q_*$ системы с функцией Лагранжа L (1) называется устойчивым по Ляпунову, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всякого решения $q(t)$ системы (3) с начальным условием $(q_0, \dot{q}_0) \in C_\delta$ при $t = 0$ для всех $t > 0$ верно $(q(t), \dot{q}(t)) \in C_\varepsilon.$

Теорема Лагранжа – Дирихле (Дирихле, XIX, Герм.) о достаточном условии устойчивости равновесия.

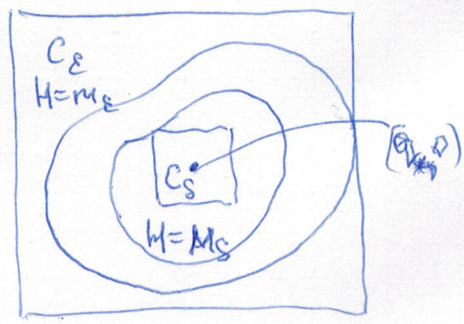
Если $q = q_*$ – точка строгого локального минимума функции $V(q)$, то равновесие $q = q_*$ системы уравнений Лагранжа с функцией Лагранжа (1) устойчиво по Ляпунову.

Доказательство.

Если q_* — строгий локальный минимум $V(q)$, то точка $(q_*, 0)$ — строгий локальный минимум функции $H = T + V$, т.к. T — положительно определенная квадратичная форма относительно $\dot q$. В самом деле, пусть в области C_a, $a > 0$ точка q_* — абсолютный минимум $V(q)$ (такая область существует в достаточно малой окрестности строгого локального минимума). Для любой точки $(q, \dot q)$, не совпадающей с точкой $(q_*, 0)$ в C_a, верно либо $q \neq q_*$ и тогда $T + V > 0 + V(q_*)$, т.к. $T \geq 0$, $V > V(q_*)$, либо $q = q_*$, $\dot q \neq 0$ и тогда $T + V = T + V(q_*) > 0 + V(q_*)$.

Будем считать, что $V(q_*) = 0$ (константа не меняет уравнений) и что $H = T + V$ — гладкая функция в C_a. Используем то, что $H = T + V$ — первый интеграл уравнений (3). В наших условиях для любого $0 < \varepsilon < a$ существует такое $0 < \delta < \varepsilon$, что

$$0 < M_\delta = \max_{C_\delta} H < \min_{\partial C_\varepsilon} H = m_\varepsilon,$$



где ∂C_ε - граница области C_ε. Если бы это было не так, то для некоторого $\varepsilon > 0$ можно было бы построить последовательность точек $(q_k, \dot q_k) \to 0$ на которой $H(q_k, \dot q_k) \geq m_\varepsilon$, т.е. $H(q_k, \dot q_k) \not\to 0$, что противоречило бы непрерывности H. Тогда для любого $(q_0, \dot q_0) \in C_\delta$ верно $H(q_0, \dot q_0) = H_0 < M_\delta$. Но тогда и на решении (3) $q(t)$ с начальным условием $(q_0, \dot q_0)$ при $t = 0$ верно

$$H(q(t), \dot q(t)) \equiv H_0 < M_\delta < m_\varepsilon = \min_{\partial C_\varepsilon} H$$

для любого $t > 0$. Значит, точка $(q(t), \dot q(t))$ не пересекает границу C_ε, т.е. остается внутри C_ε при любом $t > 0$, т.к. при $t = 0$ она там находится. Итак, при всех $t > 0$ верно $(q(t), \dot q(t)) \in C_\varepsilon$. Что и требовалось доказать.

Замечание.

Для некоторых классов функций L, например аналитических, доказана и обратная теорема.

Линеаризация уравнений Лагранжа около состояния равновесия.

Рассмотрим левую часть (3,4) как функцию от $(\ddot q, \dot q, q)$ и разложим ее в ряд Тейлора в окрестности точки $(0, 0, q_*)$, где q_* равновесие, т.е. $\left.\frac{\partial V}{\partial q}\right|_{q_*} = 0$.

Получим

(6) $$A_* \ddot q + \Pi_* (q - q_*) + o_2(\ddot q, \dot q, q - q_*) = 0,$$

2.04

где $\qquad A_* = A(q_*)\,,\quad \Pi_* = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial q^2}\right|_{q_*},$

а O_2 – члены ряда Тейлора более высоких степеней.

Линеаризованное уравнение – это

(7) $$A_*\ddot{q} + \Pi_*(q - q_*) = 0.$$

Его решение приближенно представляет решение (6), пока $|q - q_*|$ и $|\dot{q}|$ достаточно малы. Не забудем, что это система уравнений. Она имеет функцию Лагранжа

(8) $$L = \frac{1}{2}\dot{q}^T A_*\dot{q} - \frac{1}{2}(q - q_*)^T \Pi_*(q - q_*).$$

Существуют линейное преобразование координат $\quad q - q_* = Cx$

(9)

и соответствующее преобразование производных $\quad \dot{q} = C\dot{x},\quad$ приводящие функцию L к виду

(10) $$L = \frac{1}{2}\dot{x}^T\dot{x} - \frac{1}{2}x^T\Lambda x\,,\qquad \Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_i\},\ i = 1,\dots,n,$$

т.е.

(11) $$C^T A_* C = E\,,\qquad C^T\Pi_* C = \Lambda.$$

Сначала матрица A_* приводится к E, при этом $\Pi_* \to \Pi'_*$

Затем с помощью ортогонального преобразования $\quad E \to E,\ \Pi'_* \to \Lambda.$

Уравнения (7) в координатах x, называемых нормальными, принимают вид

(12) $$\ddot{x} + \Lambda x = 0\,,\qquad \ddot{x}_i + \lambda_i x_i = 0,\ i = 1,\dots,n.$$

Числа λ_i называются собственными числами пары квадратичных форм с матрицами A_* и Π_*. Из их свойств отметим два.

(13) *Свойство 1.* Собственные числа λ_i корни уравнения $\quad \det(\lambda A_* - \Pi_*) = 0.$

Действительно, (13) эквивалентно $\quad \det D^T(\lambda A_* - \Pi_*)D = 0$

(14) или $\det(\lambda D^T A_* D - D^T\Pi_* D) = 0$ для любой невырожденной матрицы D.

Если $\quad D = C$ (9), то получим $\quad \det(\lambda E - \Lambda) = 0,\ \prod\limits_i(\lambda - \lambda_i) = 0.$

Что и требовалось доказать.

Свойство 2. Собственные числа λ_i не зависят от выбора координат q.

В самом деле. Если $\quad q = q(\varphi),\quad$ то $\quad q_* = q(\varphi_*),$

$$q - q_* = \frac{\partial q}{\partial\varphi}(\varphi - \varphi_*) + O_2(\varphi - \varphi_*),\quad \dot{q} = \frac{\partial q}{\partial\varphi}\dot{\varphi},\quad \ddot{q} = \frac{\partial q}{\partial\varphi}\ddot{\varphi} + O_2(\dot{\varphi})$$

Уравнения (6) принимают вид

$$A_*\left.\frac{\partial q}{\partial\varphi}\right|_{\varphi_*}\ddot{\varphi} + \Pi_*\left.\frac{\partial q}{\partial\varphi}\right|_{q_*}(\varphi - \varphi_*) + O_2(\ddot{\varphi}, \dot{\varphi}, \varphi - \varphi_*) = 0.$$

4 2.04

Тогда соответствующая линеаризованная система будет

$$A_* \frac{\partial q}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi_*} \ddot{\varphi} + \Pi_* \frac{\partial q}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi_*} (\varphi - \varphi_*) = 0.$$

Умножим ее слева на матрицу $\frac{\partial q}{\partial \varphi}\Big|^T_{\varphi_*}$ и получим

$$\frac{\partial q}{\partial \varphi}\Big|^T_{\varphi_*} A_* \frac{\partial q}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi_*} \ddot{\varphi} + \frac{\partial q}{\partial \varphi}\Big|^T_{\varphi_*} \Pi_* \frac{\partial q}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi_*} (\varphi - \varphi_*) = 0,$$

Уравнение для собственных чисел такой системы – это уравнение (14), где $D = \frac{\partial q}{\partial \varphi}\Big|_{\varphi_*}$

Поэтому оно эквивалентно (13).

Вектор $c_i \in R^n$, удовлетворяющий уравнению $(\lambda_i A_* - \Pi_*) c_i = 0,$

Называется собственным вектором, соответствующим собственному ~~значению~~ числу λ_i.

Утверждение.

Столбец c_i матрицы C (9, 11) – собственный вектор, соответствующий собственному числу λ_i.

Доказательство. Для любого i верно равенство $(\lambda_i E - \Lambda)\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = 0.$

В нем в столбце на i -том месте сверху стоит 1 а остальные элементы нули.

Но тогда верно и равенство

$$C^{-1T}(\lambda_i E - \Lambda) C^{-1} C \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix} = 0$$

т.е. (11) $(\lambda_i A_* - \Pi_*) c_i = 0,$

что и требовалось доказать.

(15) Формулы (9) можно переписать так $q - q_* = \sum_1^n x_i c_i.$

Они представляют движение в окрестности равновесия q_* как сумму движений $x_i(t)$ вдоль собственных векторов c_i.

Заметим, что $x_i(t)$ – это решения независимых уравнений в нормальных координатах

$$\ddot{x}_i + \lambda_i x_i = 0.$$

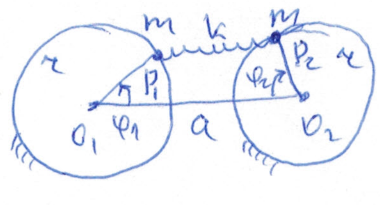
Если $\lambda_i = 0,$ то $x_i = x_i^0 + \dot{x}_i^0 t.$

Если $\lambda_i < 0,$ то $x_i = x_i^0 \operatorname{ch}(n_i t) + \frac{\dot{x}_i^0}{n_i} \operatorname{sh}(n_i t), \quad n_i = \sqrt{|\lambda_i|}.$

Если $\lambda_i > 0,$ то $x_i = x_i^0 \cos \omega_i t + \frac{\dot{x}_i^0}{\omega_i} \sin \omega_i t, \quad \omega_i = \sqrt{\lambda_i}.$

Если все $\lambda_i > 0$ то движения (15) называют малыми колебаниями, они приближенно описывают движение системы в окрестности равновесия, если их амплитуды достаточно малы. Числа ω_i – частоты малых колебаний.

Пример. Одинаковые точки, связанные пружиной, на одинаковых окружностях.



$O_1 O_2 = a > 2r, \quad k > 0$

5 2.04

$$T=\frac{1}{2}mr^2(\dot\varphi_1^2+\dot\varphi_2^2) \Rightarrow A=\begin{pmatrix} mr^2 & 0 \\ 0 & mr^2\end{pmatrix}=A_*,$$

$$V=\frac{1}{2}k\,P_1P_2^2=\frac{1}{2}kr^2\left(\left(\cos\varphi_1+\cos\varphi_2-\frac{a}{r}\right)^2+(\sin\varphi_1-\sin\varphi_2)^2\right).$$

Ясно, что минимум потенциальной энергии достигается при $\varphi_1=\varphi_2=0$.

Имеем:

$$V=const+\frac{1}{2}kr^2\left(\left(\frac{a}{r}-1\right)\varphi_1^2-2\varphi_1\varphi_2+\left(\frac{a}{r}-1\right)\varphi_2^2\right)+V_3(\varphi_1,\varphi_2)$$

$$\Pi_*=kr^2\begin{pmatrix}\left(\frac{a}{r}-1\right) & -1 \\ -1 & \left(\frac{a}{r}-1\right)\end{pmatrix}$$

$$\lambda A_*-\Pi_*=\begin{pmatrix}\lambda mr^2-kr^2\left(\frac{a}{r}-1\right) & 1 \\ 1 & \lambda mr^2-kr^2\left(\frac{a}{r}-1\right)\end{pmatrix}.$$

Собственные числа $\lambda_1=\frac{k}{m}\frac{a}{r}$, $\lambda_2=\frac{k}{m}\left(\frac{a}{r}-2\right)$.

Для $\lambda_1=\frac{k}{m}\frac{a}{r}$, $\omega_1=\sqrt{\frac{ka}{mr}}$. Собственный вектор находится из уравнения

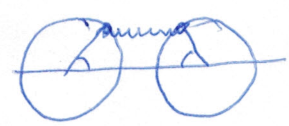
$$\begin{pmatrix}kr^2 & kr^2 \\ kr^2 & kr^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} \\ c_{21}\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}c_{11} \\ c_{21}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}.$$

В соответствующем колебании $\begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 \\ -x_1\end{pmatrix}$,

где $x_1=x_1^0\cos\omega_1 t+\frac{\dot x_1^0}{\omega_1}\sin\omega_1 t$.

Для $\lambda_2=\frac{k}{m}\left(\frac{a}{r}-2\right)$, $\omega_2=\sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{a}{r}-2\right)}$. Собственный вектор находится из уравнения

$$\begin{pmatrix}-kr^2 & kr^2 \\ kr^2 & -kr^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{12} \\ c_{22}\end{pmatrix}=0 \Rightarrow \begin{pmatrix}c_{12} \\ c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}.$$



В соответствующем колебании $\begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_2 \\ x_2\end{pmatrix}$,

где $x_2=x_2^0\cos\omega_2 t+\frac{\dot x_2^0}{\omega_2}\sin\omega_2 t$.

В произвольном движении $\begin{pmatrix}\varphi_1 \\ \varphi_2\end{pmatrix}=x_1(t)\begin{pmatrix}1 \\ -1\end{pmatrix}+x_2(t)\begin{pmatrix}1 \\ 1\end{pmatrix}$.

Одновременно мы нашли матрицу преобразования к нормальным координатам

$$C=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

9.04

Уравнения Гамильтона (XIX, Ирландия)

(1) Уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0, \quad q\in R^n; \; L=L(\dot q, q, t)$

(2) при условии $\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot q^2}\neq 0$ могут быть записаны в форме, которая предоставляет новые возможности для исследования механических систем.

Перепишем (1) в виде системы уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot q = v \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0, \end{cases} \tag{3}$$

где $L=L(v,q,t)$. В фазовом пространстве (q, v) введем новые координаты (q, p) по формулам

$$p=\frac{\partial L}{\partial v} \iff v=\varphi(q,p,t), \tag{$*$}$$

обратимым при условии (2).

В механике числа p_i называют обобщенными импульсами.

Введем функцию Гамильтона

$$H=\left(\frac{\partial L}{\partial v}^T v - L\right)\Big|_* = H(q,p,t). \tag{4}$$

Утверждение. Уравнения (3) после замены $(*)$ принимают вид

$$\begin{cases} \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}. \end{cases} \tag{5}$$

Это уравнения Гамильтона.

Доказательство. После $(*)$ уравнения (3) превращаются в

$$\begin{cases} \dot q = \varphi(q,p,t) \\ \dot p = \frac{\partial L}{\partial q}\Big|_* . \end{cases}$$

Но

$$H = p^T\varphi(q,p,t) - L|_* \quad (\text{см. } (*), (4)).$$

Поэтому

$$\frac{\partial H}{\partial p} \equiv \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial p}^T p - \frac{\partial \varphi}{\partial p}^T\frac{\partial L}{\partial v}\Big|_* \equiv \varphi,$$

т.к. $p-\frac{\partial L}{\partial v}\Big|_* \equiv 0$ (см. $(*)$).

Аналогично

$$\frac{\partial H}{\partial q} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial q}^T p - \frac{\partial \varphi}{\partial q}^T \frac{\partial L}{\partial v}\Big|_* - \frac{\partial L}{\partial q}\Big|_* \equiv -\frac{\partial L}{\partial q}\Big|_*.$$

Что и требовалось доказать.

Для уравнений механики $L = T_2+T_1+T_0-V = \frac{1}{2}\dot{q}^T A \dot{q} + a^T\dot{q} + T_0 - V$,

поэтому $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \equiv A(q,t)$, $\det \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} > 0$,

как было доказано ранее.

Следовательно, условие (2) в уравнениях механики всегда выполнено, а уравнения движения механической системы с голономными связями и потенциальными силами всегда можно записать в виде уравнений Гамильтона.

Явная формула для функции Гамильтона.

Преобразование (*) имеет вид

$$p = Av + a \Leftrightarrow v = A^{-1}(p-a) \equiv \varphi(q,p,t).$$

По формуле Эйлера $\frac{\partial L}{\partial v}^T v = 2T_2 + T_1$.

Поэтому $H = (2T_2+T_1-(T_2+T_1+T_0-V))\big|_* =$

$$= (T_2 - T_0 + V)\big|_* = \frac{1}{2}(p-a)^T A^{-1}(p-a) - T_0 + V.$$

Примеры.

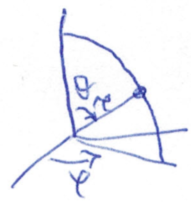
1) Для свободной точки в поле сил с потенциальной энергией V

а) в декартовых координатах $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - V$,

$$p_x = m\dot{x},\quad p_y = m\dot{y},\quad p_z = m\dot{z},$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2+p_y^2+p_z^2) + V = \frac{1}{2m}p^2 + V,$$

здесь $p = mv$ – это обычный импульс.

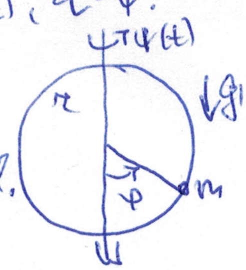


б) в сферических координатах $L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2) - V$,

$$p_r = m\dot{r},\quad p_\varphi = mr^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi},\quad p_\theta = mr^2\dot{\theta},$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2\sin^2\theta}\right).$$

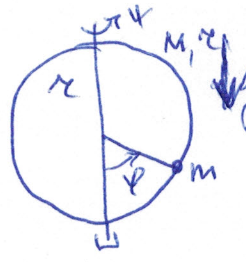
2) Для точки на вращающейся по заданному закону окружности $\psi = \psi(t)$, $q = \varphi$:



$$L = \underbrace{\frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2}_{T_2} + \underbrace{\frac{1}{2}mr^2\dot{\psi}^2(t)\sin^2\varphi}_{T_0} + \underbrace{mgr\cos\varphi}_{-V}$$

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi},\quad H = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{1}{2}mr^2\dot{\psi}^2(t)\sin^2\varphi - mgr\cos\varphi.$$

3)Для обруча и точки на нем : $q = \binom{\psi}{\varphi}$.



$$L = \underbrace{\frac{1}{2}\left[r^2\left(\frac{M}{2} + m\sin^2\varphi\right)\dot{\psi}^2 + mr^2\dot{\varphi}^2\right]}_{T_2} + \underbrace{mgr\cos\varphi}_{-V},$$

$$A = \begin{pmatrix} r^2\left(\frac{M}{2} + m\sin^2\varphi\right) & 0 \\ 0 & mr^2 \end{pmatrix},\quad p_\psi = r^2\left(\frac{M}{2}+m\sin^2\varphi\right)\dot{\psi},\quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi},$$

$$H = \frac{1}{2r^2}\left(\frac{p_\psi^2}{\frac{M}{2}+m\sin^2\varphi} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2}\right) - mgr\cos\varphi.$$

9.04

(6) Системы уравнений вида $\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}, \ q, p \in R^n,$

$H = H(q, p, t).$

появляются во многих разделах математики и в приложениях. В механике их общие свойства позволили решить ряд задач, которые иначе не решались, разработать эффективные методы приближенного исследования движений. В последней части курса лекций представлены некоторые из этих свойств.

Первые интегралы уравнений Гамильтона.

Первым интегралом системы (6) называется функция $f = f(q, p, t)$,

которая на любом решении (6)-тождественная константа. Т.е. для любого решения

(7) $q(t), \ p(t)$ системы (6) тождественно по t

(8) $$\frac{d}{dt} f(q(t), p(t), t) \equiv \frac{d}{dt}\left(f\big|_{(7)}\right) \equiv 0.$$

Т.к. на каждом решении (7) верны тождества

$$\begin{cases} \dot{q}(t) \equiv \frac{\partial H}{\partial p}\big|_{(7)} \\ \dot{p}(t) \equiv -\frac{\partial H}{\partial q}\big|_{(7)}, \end{cases}$$

то (8) можно записать так

$$\frac{\partial f}{\partial q}\Big|_{(7)}^{T} \dot{q}(t) + \frac{\partial f}{\partial p}\Big|_{(7)}^{T} + \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{(7)} \equiv 0$$

или

(9) $$\frac{\partial f}{\partial q}\Big|_{(7)}^{T} \cdot \frac{\partial H}{\partial p}\Big|_{(7)} - \frac{\partial f}{\partial p}\Big|_{(7)}^{T} \frac{\partial H}{\partial q}\Big|_{(7)} + \frac{\partial f}{\partial t}\Big|_{(7)} \equiv 0.$$

Рассмотрим область в расширенном фазовом пространстве (q, p, t), через каждую точку которой проходит решение системы. Условие (9) эквивалентно тому, что в каждой точке этой области

$$\frac{\partial f}{\partial q}^{T} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial f}{\partial p}^{T} \frac{\partial H}{\partial q} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

т.е. это тождество по (q, p, t).

Скобкой Пуассона двух функций $F(q, p, t)$, $G(q, p, t)$ называется функция

$$\Phi(q, p, t) = \{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q}^{T} \frac{\partial G}{\partial p} - \frac{\partial F}{\partial p}^{T} \frac{\partial G}{\partial q}.$$

Следовательно, $f(q, p, t)$ - первый интеграл уравнений (6) тогда и только тогда, когда в переменных (q, p, t) выполнено тождество

$$\{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0.$$

В частности, если $f = f(q, p)$, оно принимает вид $\{f, H\} \equiv 0.$

Свойства скобок Пуассона

1) $\{F, G\} = -\{G, F\},$

2) $\{a_1 F_1 + a_2 F_2, G\} = a_1\{F_1, G\} + a_2\{F_2, G\}$,
если $a_i = const$.

3) Если $F = E(\varphi_1(q, p, t), \dots, \varphi_k(q, p, t))$,

то
$$\{F, G\} = \sum_i \frac{\partial E}{\partial \varphi_i}\{\varphi_i, G\},$$

4) (тождество Якоби)
$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} \equiv 0.$$

Справедливость (1, 2, 3) следует из определения и правил дифференцирования.

Докажем (4). Используем матрицу $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, $E(n \times n)$,
$I^{-1} = I^T = -I$.

и обозначение $z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$. Имеем:
$$\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial z}^T I \frac{\partial G}{\partial z},$$

т.к.
$$\{F, G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}^T, \frac{\partial F}{\partial p}^T\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial p} \\ -\frac{\partial G}{\partial q} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial F}{\partial q}^T, \frac{\partial F}{\partial p}^T\right)\begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial q} \\ \frac{\partial G}{\partial p} \end{pmatrix}.$$

Тогда
$$\{F, \{G, H\}\} = \frac{\partial F}{\partial z}^T I \frac{\partial}{\partial z}\{G, H\},$$
$$\frac{\partial}{\partial z}\{G, H\} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial G}{\partial z}^T I \frac{\partial H}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} I \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} I \frac{\partial G}{\partial z}$$

т.к. $\frac{\partial}{\partial z} a^T(z) M b(z) = \frac{\partial a}{\partial z}^T M b + \frac{\partial b}{\partial z}^T M^T a$

при $M = const$, и матрицы $\frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}$ симметричные.

Отсюда
$$\{F, \{G, H\}\} = \frac{\partial F}{\partial z}^T I\left(\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} I \frac{\partial H}{\partial z} - \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} I \frac{\partial G}{\partial z}\right),$$

аналогично
$$\{G, \{H, F\}\} = \frac{\partial G}{\partial z}^T I\left(\frac{\partial^2 H}{\partial z^2} I \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} I \frac{\partial H}{\partial z}\right),$$
$$\{H, \{F, G\}\} = \frac{\partial H}{\partial z}^T I\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} I \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} I \frac{\partial F}{\partial z}\right).$$

Отсюда и следует тождество 4), т.к. матрицы $\begin{cases} I \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} I, \\ I \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} I, \\ I \frac{\partial^2 G}{\partial z^2} I \end{cases}$ симметричные.

Простейшие первые интегралы уравнений Гамильтона.

1) Если $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$ т.е. $H = H(q, p)$, то $H = const$.

Действительно, $\{H, H\} \equiv 0$.

В механических задачах это либо интеграл Якоби $T_2 + T_0 - V = const$,

либо интеграл энергии $T + V = const$, когда $T \equiv T_2$.

2) Если $\frac{\partial H}{\partial \bar{q}} \equiv 0$, т.е. $H = H(\tilde{q}, p, t)$, $q = \begin{pmatrix} \tilde{q} \\ \bar{q} \end{pmatrix}$,

то $\bar{p} = const$, что следует прямо из уравнений. В этом случае координаты $\bar{q}$ и интегралы $\bar{p} = const$ называются циклическими.

3) Если $H = E(f(\bar{q}, \bar{p}), \tilde{q}, \tilde{p}, t)$ (пары координат $(\bar{q}, \bar{p})$ отделяются в гамильтониане в виде некоторой функции), то $f(\bar{q}, \bar{p}) = const$.

Действительно,

$$\{f, H\} = \{f, E(f, \tilde{q}, \tilde{p}, t)\} = \frac{\partial E}{\partial f}\{f, f\}_{\bar{q}, \bar{p}} + \{f, E\}_{\tilde{q}, \tilde{p}} \equiv 0,$$

т.к. f от $(\tilde{q}, \tilde{p})$ не зависит.

Пример. Пространственная задача Кеплера. В сферических координатах

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)\right) - \frac{\mu m}{r}$$

(см. выше).

Интегралы: $p_\varphi = const$ т.к. φ циклическая координата,

$$f = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = f(\varphi, p_\varphi, \theta, p_\theta) = const, -$$

отделение координат,

$H = const$, т.к. $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$ (закон сохранения энергии).

Первые два случая существования простейших первых интегралов совпадают с теми же случаями для уравнений Лагранжа

$$\frac{\partial L}{\partial t} \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0, \qquad \frac{\partial L}{\partial q} \equiv 0 \Rightarrow \frac{\partial H}{\partial q} \equiv 0.$$

Это следует из (9.04; (*), (4)).

Случай (3) отделения переменных в функции Гамильтона – это уже нечто новое. Справедливо и некоторое обобщение этой ситуации – аналог теоремы Нетер для уравнений Лагранжа.

Утверждение. Функция $F(q,p)$ - первый интеграл системы уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона $H = H(q,p,t)$ тогда и только тогда, когда при каждом фиксированном t функция $H(q,p,t)$ — первый интеграл уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона $F(q,p)$:

(1) $$\begin{cases} q' = \dfrac{\partial F}{\partial p} \\ p' = -\dfrac{\partial F}{\partial q}, \end{cases}$$

где $(\,)' = \frac{d}{d\tau}(\,)$.

Доказательство. Первая часть утверждения означает $\{F, H\} \equiv 0$, т.к. $F(q,p)$ от t явно не зависит. Вторая - $\{H, F\} \equiv 0$, если t фиксированный параметр, т.к. $H(q,p,t)$ не зависит явно от τ, что то же самое.

Еще одна теорема о первых интегралах уравнений Гамильтона.

Теорема Пуассона. Если $F(q,p,t)$ и $G(q,p,t)$ – первые интегралы уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона $H(q,p,t)$, то и функция $\Phi(q,p,t) \equiv \{F, G\}$ — первый интеграл тех же уравнений.

Доказательство. Убедимся, что $\{\Phi, H\} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv 0.$

Действительно, из тождества Якоби следует

$$\{\{F,G\},H\} \equiv -\{\{G,H\},F\} - \{\{H,F\},G\}.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\{F,G\} \equiv \left\{\frac{\partial}{\partial t}F, G\right\} + \left\{F, \frac{\partial}{\partial t}G\right\},$$

т.к.

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\right) \equiv \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right), \ldots$$

Получаем $\{\Phi, H\} + \frac{\partial \Phi}{\partial t} \equiv \{F,\{G,H\}\} + \{F, \frac{\partial}{\partial t}G\} + \{\{F,H\},G\} +$

$$+ \left\{\frac{\partial}{\partial t}F, G\right\} \equiv \left\{F, \{G,H\} + \frac{\partial G}{\partial t}\right\} + \left\{\{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t}, G\right\} \equiv 0,$$

т.к.

$$\{G,H\} + \frac{\partial G}{\partial t} \equiv 0 \quad \text{и} \quad \{F,H\} + \frac{\partial F}{\partial t} \equiv 0$$

по условию.

Замечание. Формально эти две теоремы дают новые способы получения первых интегралов уравнений движения соответствующих механических систем. Но эффективность первой сильно зависит от выбора координат. А попытки использования второй часто приводят либо к уже известным другим первым интегралам, либо к интегралам, функционально зависимым с двум первыми, либо к тождественным нулям.

Примеры.

1. Для точки в потенциальном поле сил в декартовых координатах $q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $p = \begin{pmatrix} m\dot{x} \\ m\dot{y} \\ m\dot{z} \end{pmatrix}$,

$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + V(x, y, z).$$

Выразим компоненты вектора кинетического момента через обобщенные импульсы

$$K_0 = r \times m v = r \times p = \begin{pmatrix} y p_z - z p_y \\ z p_x - x p_z \\ x p_y - y p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_x \\ K_y \\ K_z \end{pmatrix}.$$

Вычислим скобку Пуассона

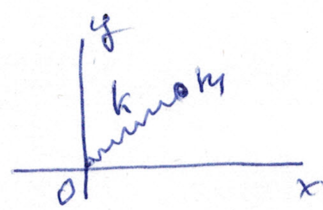
$$\{K_x, K_y\} \equiv \frac{\partial K_x}{\partial z}\frac{\partial K_y}{\partial p_z} - \frac{\partial K_x}{\partial p_z}\frac{\partial K_y}{\partial z} \equiv x p_y - y p_x \equiv K_z.$$

Аналогично $\{K_y, K_z\} \equiv K_x$, $\{K_z, K_x\} \equiv K_y$.

Следовательно, по теореме Пуассона, если в системе на каждом решении сохраняются две компоненты вектора K_0, то сохраняется и третья, причем функции K_x, K_y, K_z независимы, т.е. $\operatorname{rank} \dfrac{\partial(K_x, K_y, K_z)}{\partial(x, y, z, p_x, p_y, p_z)} = 3$.

Например, если известно, что K_x и K_y - первые интегралы, то теорема дает новый интеграл K_z. Но его существование следует и из других соображений – из теоремы об изменении кинетического момента. Действительно, если $K_x = \mathrm{const}$, $K_y = \mathrm{const}$, то момент силы, действующей на точку, относительно осей Ox и Oy в любом положении равен нулю. Отсюда следует, что почти в любом положении (всюду, кроме плоскости Oxy) линия действия силы пересекает обе эти оси, т.е. проходит через начало координат. Значит, поле сил центральное всюду (по непрерывности). Поэтому при любом движении сохраняются все три компоненты K_0.

2. Плоский гармонический осциллятор.



$$H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2\right) + \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right),$$

$$K_0 = (x p_y - y p_x) e_z.$$

По правилу отделения переменных есть два интеграла

$$H_x = \frac{1}{2m}p_x^2 + \frac{k}{2}x^2 \quad \text{и} \quad H_y = \frac{1}{2m}p_y^2 + \frac{k}{2}y^2.$$

Из центральности поля следует третий $K_z = x p_y - y p_x$.

По теореме Пуассона находим $\Phi_x = \{K_z, H_x\} \equiv \frac{1}{m}p_x p_y + k x y$,

$$\Phi_y = \{K_z, H_y\} \equiv -\Phi_x.$$

Т.е. четвертым интегралом оказывается $\Phi = \frac{1}{m} p_x p_y + kxy$.

Он, конечно, не может быть функционально независимым с H_x, H_y, K_z.

Т.к. четыре независимых уравнения $H_x = h_1, H_y = h_2, K_z = c_1, \Phi = c_2$

с константами в правых частях в качестве решений могут иметь только изолированные точки в четырехмерном фазовом пространстве (x, y, p_x, p_y).

Но это противоречит нашим знаниям о движении осциллятора. Тождественную зависимость между этими интегралами нетрудно найти:

$$4 H_x H_y \equiv \Phi^2 + \frac{k}{m} K_z^2.$$

3. Сложное разделение переменных.

Если $$H = \frac{\sum f_k(x_k)}{\sum g_k(x_k)}, \quad x_k = \begin{pmatrix} q_k \\ p_k \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n,$$

то $\varphi_k = f_k - H g_k$ – первые интегралы, т.к. (9.04; стр. 3,4)

$$\{\varphi_k, H\} = \{f_k, H\} - H\{g_k, H\} =$$
$$= \frac{\partial H}{\partial g_k}\{f_k, g_k\} - H\frac{\partial H}{\partial f_k}\{g_k, f_k\} =$$
$$= \{f_k, g_k\}\left(\frac{\partial H}{\partial g_k} + H\frac{\partial H}{\partial f_k}\right) \equiv 0.$$

Несмотря на кажущуюся искусственность этого примера, некоторые новые механические задачи, впервые решенные именно с помощью методов исследования уравнений Гамильтона, имели функции Гамильтона как раз такого вида. Например, задача о движении точки по поверхности неподвижного эллипсоида без трения по инерции или под действием упругой силы притяжения к центру эллипсоида (Якоби).

Канонические преобразования.

И сами уравнения Гамильтона, и координаты, в которых они имеют такой вид, называют каноническими.

Произвольная замена неизвестных в этих уравнениях – переход к другим координатам в фазовом пространстве – разрушает, вообще говоря, каноническую форму уравнений. Конечно, движение системы от выбора координат не зависит, но изучать это движение часто оказывается удобнее именно в канонических координатах.

Существует класс преобразований координат в фазовом пространстве, которые сохраняют каноническую форму уравнений Гамильтона. Мы рассмотрим его подмножество – унивалентные канонические преобразования. Для краткости будем их называть просто каноническими.

Воспользуемся обозначением $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$ для исходных канонических координат.

(2) Уравнения в них $\begin{cases} \dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$, $H = H(q, p, t) = H(z, t)$

запишем в виде $\dot{z} = I \dfrac{\partial H}{\partial z}$, где $I = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix}$, $(E - (n \times n))$.

Пусть $\zeta = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$ — новые координаты, связанные с исходными формулами

(3) $\begin{cases} Q = Q(q, p, t) \\ P = P(q, p, t) \end{cases}$, $\zeta = \zeta(z, t)$,

$Y = \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}$, $\det Y \neq 0$

Определение. Преобразование (3) называется каноническим, если

(4) $$P = Y I Y^T \equiv I.$$

Все эквивалентные условия будем называть критериями каноничности преобразования.

Начнем с простой переформулировки определения.

Утверждение. Матрица P состоит из скобок Пуассона функций, задающих преобразование.

Действительно, т.к. $Y = \left(\begin{array}{c|c} Q_q & Q_p \\ \hline P_q & P_p \end{array}\right)$, $Q_q = \dfrac{\partial Q}{\partial q}$, ...,

то
$$P = \left(\begin{array}{c|c} Q_q Q_p^T - Q_p Q_q^T & Q_q P_p^T - Q_p P_q^T \\ \hline P_q Q_p^T - P_p Q_q^T & P_q P_p^T - P_p P_q^T \end{array}\right)$$

Левая верхняя подматрица состоит из элементов

$$\left(Q_q Q_p^T - Q_p Q_q^T\right)_{ij} = \sum_k \left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial Q_j}{\partial p_k} - \frac{\partial Q_i}{\partial p_k} \frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\right)$$

Аналогично остальные. Следовательно,

(5) $$P = \left(\begin{array}{c|c} \{Q_i, Q_j\} & \{Q_i, P_j\} \\ \hline \{P_i, Q_j\} & \{P_i, P_j\} \end{array}\right).$$

Получаем критерий каноничности преобразования (3) в виде:

(6) $\{Q_i, Q_j\} \equiv 0$, $\{P_i, P_j\} \equiv 0$, $\{Q_i, P_j\} \equiv \delta_{ij}$,
$i, j = 1, \dots, n$; $\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j \\ 1 & \text{при } i = j \end{cases}$.

Следствие. В случае $n=1$ от условий (6) остается только $\{Q, P\} \equiv 1$

или $\frac{\partial Q}{\partial q}\frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial Q}{\partial p}\frac{\partial P}{\partial q} \equiv 1$, что означает $\det \mathcal{Y} \equiv 1$.

Примеры.

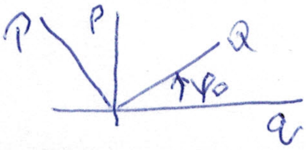
1. Тождественное преобразование, очевидно, каноническое.

2. Преобразование, обратное к каноническому, тоже каноническое:

$$\mathcal{Y} I \mathcal{Y}^T \equiv I \Longleftrightarrow I \equiv \mathcal{Y}^{-1} I (\mathcal{Y}^{-1})^T.$$

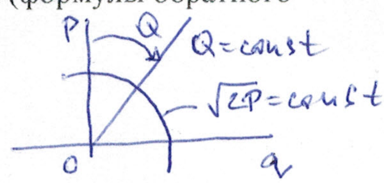
3. Ортогональное преобразование координат на фазовой плоскости каноническое

$$\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_0 & \sin\varphi_0 \\ -\sin\varphi_0 & \cos\varphi_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$$



4. Полярные канонические координаты на фазовой плоскости (формулы обратного преобразования)

$$\begin{cases} q = \sqrt{2P}\sin Q \\ p = \sqrt{2P}\cos Q \end{cases}$$



5. Каноническая перестановка: координата становится импульсом, а импульс – минус координатой:

$$\begin{cases} Q = p \\ P = -q. \end{cases}$$

6. Каноническое изменение масштабов на координатных осях

$$\begin{cases} Q = \lambda q \\ P = \frac{1}{\lambda} p. \end{cases}$$

7. Линейные преобразования в подпространствах $\mathbf{Q} = A\mathbf{q}$ и $\mathbf{P} = B\mathbf{p}$

задают каноническое преобразование (координат в) пространстве $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ тогда и только тогда, когда $AB^T = E$.

Действительно,

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y} I = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{Y} I \mathcal{Y}^T = \begin{pmatrix} 0 & A \\ -B & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^T & 0 \\ 0 & B^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & AB^T \\ -BA^T & 0 \end{pmatrix},$$

$$AB^T = E \Rightarrow BA^T = (AB^T)^T = E.$$

Если A ортогональная, то $B = A$.

Критерии и свойства канонических преобразований.

Утверждение. Если каноническое преобразование не зависит от времени, то уравнения Гамильтона в новых координатах имеют каноническую форму с той же функцией Гамильтона, только выраженной через новые координаты.

Доказательство. Пусть в координатах $z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ уравнения имеют вид

(1) $$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad H = H(q, p, t) \quad \text{или} \quad \dot z = I \frac{\partial H}{\partial z}, \quad H = H(z, t)$$

и пусть $$Q = Q(q, p, t), \quad P = P(q, p, t) \quad \text{или} \quad \zeta = \zeta(z, t) -$$

формулы канонического преобразования, $\det Y \neq 0, \ Y = \dfrac{\partial \zeta}{\partial z}$.

В новых координатах имеем
$$\dot\zeta = Y \dot z = \left(Y I \frac{\partial H}{\partial z} \right)\Big|_{\zeta},$$

где $\left.\dfrac{\partial H}{\partial z}\right|_{\zeta}$ — столбец частных производных по z, выраженный через ζ.

(2) Обозначим $$\mathcal{H}(\zeta, t) = H(z(\zeta), t),$$

тогда
$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} = \frac{\partial z}{\partial \zeta}^T \left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_{\zeta} \Rightarrow \left.\frac{\partial H}{\partial z}\right|_{\zeta} = \left.\frac{\partial \zeta}{\partial z}\right|_{\zeta}^T \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta},$$

(3) Т.о. в новых координатах $$\dot\zeta = (Y I Y^T)_{\zeta} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta} \equiv I \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \zeta}$$

получаем каноническую форму, т.к. преобразование каноническое.

Общий случай канонического преобразования рассмотрен ниже.

Замечание. Из (3) следует возможность простого обобщения определения канонического преобразования: $Y I Y^T \equiv C I$,

где $C = \text{const}$. Тогда новая функция Гамильтона получается не только подстановкой формул преобразования в старую, но еще и умножением старой на C.

Число C называется валентностью канонического преобразования. У нас $C = 1$.

Критерии каноничности преобразования.

(4) Пусть формулы преобразования имеют вид $\zeta = \zeta_0(z, t)$, $\begin{cases} Q = Q_0(q, p, t) \\ P = P_0(q, p, t) \end{cases}$

и $Y = \dfrac{\partial \zeta_0}{\partial z}$; ζ — координаты, ζ_0 — функции.

(5) 1. Преобразование (4) каноническое тогда и только тогда, когда $Y^T I Y \equiv I$.

Действительно, это тождество эквивалентно тождеству для обратных матриц

$Y^{-1} I^{-1} (Y^T)^{-1} \equiv I^{-1}$, но $I^{-1} = -I$, поэтому $Y^{-1} I (Y^T)^{-1} \equiv I$.

Домножив слева на Y, справа на Y^T, получим эквивалентное тождество

$I \equiv Y I Y^T$, верное по определению.

Для функций $f(z,t)$, $g(z_0,t)$ обозначим $\delta f = \frac{\partial f^T}{\partial z} dz$,

(6) $\delta g = \frac{\partial g^T}{\partial z_0} dz_0$ — их дифференциалы как функций только от z и z_0.

2. Преобразование (4) каноническое тогда и только тогда, когда тождественно равна нулю 2 - форма

$$\sum dp_i \wedge dq_i - \sum \delta P_{0i} \wedge \delta Q_{0i} \equiv 0$$

(7) или $dp^T \wedge dq - \delta P_0^T \wedge \delta Q_0 \equiv 0$ (для краткости).

Второе слагаемое в левой части можно представить в виде

$$\delta P_0^T \wedge \delta Q_0 \equiv -\frac{1}{2} \delta z_0^T \wedge I \delta z_0.$$

Действительно, $\delta z_0^T \wedge I \delta z_0 \equiv (\delta Q_0^T, \delta P_0^T) \wedge \begin{pmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta Q_0 \\ \delta P_0 \end{pmatrix} \equiv$

$$\equiv (\delta Q_0^T, \delta P_0^T) \wedge \begin{pmatrix} \delta P_0 \\ -\delta Q_0 \end{pmatrix} \equiv -2\, \delta P_0^T \wedge \delta Q_0,$$

т.к. $\delta f \wedge \delta g = -\delta g \wedge \delta f$ для любых функций $f(z,t)$, $g(z,t)$.

Первое слагаемое (7) – частный случай второго, поэтому вместо (7) получаем

$$dz^T \wedge I dz - \delta z_0^T \wedge I \delta z_0 \equiv 0.$$

Но $\delta z_0 = Y dz$, поэтому

$$dz^T \wedge I dz - dz^T Y^T \wedge I Y dz \equiv 0.$$

Операция „$\wedge$" не связана ни с каким дифференцированием, поэтому ее можно переставить

$$dz^T \wedge I dz - dz^T \wedge Y^T I Y dz \equiv 0$$

(7)' или $dz^T \wedge (I - Y^T I Y) dz \equiv 0.$

Это действительно эквивалентно критерию 1, т.к. $(5) \Rightarrow (7)'$ очевидно,

А если верно $(7)'$, то матрица $I - Y^T I Y$ симметричная, т.е.

$$I - Y^T I Y \equiv (I - Y^T I Y)^T \Rightarrow$$

$$I - Y^T I Y \equiv -I + Y^T I Y$$

т.к. $I^T = -I$. Отсюда $I - Y^T I Y \equiv 0$ т.е. $(7)' \Rightarrow (5)$.

Используем известные формулы, которые в наших обозначениях имеют вид:

если $\Omega = a^T(z,t)\, \delta b(z,t)$, то $\delta\Omega = \delta a^T \wedge \delta b$, в частности, если $\omega = a^T(z,t)\,dz = \sum a_i\,dz_i$,

то $\delta\omega = \delta a^T \wedge dz = \sum \frac{\partial a_i}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_i = \sum_{k<i}\left(\frac{\partial a_i}{\partial z_k} - \frac{\partial a_k}{\partial z_i}\right) dz_k \wedge dz_i$

Например, для $\omega = \delta f(z,t)$ имеем $\delta\omega \equiv 0$.

Вообще верна

Лемма Пуанкаре. Для 1- формы ω тождество $\delta\omega \equiv 0$ верно тогда и только тогда, когда существует такая функция $f(z,t)$, что $\omega \equiv \delta f$.

Используем эту лемму. Для формы $\mathbb{P}_0^T \delta \mathbb{Q}_0$ имеем

$$\delta\left(\mathbb{P}_0^T \delta \mathbb{Q}_0\right) = \delta \mathbb{P}_0^T \wedge \delta \mathbb{Q}_0,$$

поэтому (7) можно переписать в виде

$$\delta\left(p^T dq - \mathbb{P}_0^T \delta \mathbb{Q}_0\right) \equiv 0.$$

По лемме это значит, что

3. существует такая функция $\Pi(z,t)$, что

$$p^T dq - \mathbb{P}_0^T(z,t)\,\delta \mathbb{Q}_0(z,t) \equiv \delta \Pi(z,t). \tag{8}$$

Это тоже критерий каноничности преобразования.

Преобразование функций Гамильтона при канонических преобразованиях, зависящих от времени.

Лемма. Уравнения Гамильтона $\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$ — это уравнения Лагранжа в координатах $z = \binom{q}{p}$ с функцией Лагранжа

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\dot z, z, t) = p^T \dot q - H(q,p,t). \tag{9}$$

Доказательство. В самом деле, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} \equiv p$, $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot p} \equiv 0$,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \iff \dot p + \frac{\partial H}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot p} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = 0 \iff -\dot q + \frac{\partial H}{\partial p} = 0. \tag{9'}$$

Из свойств уравнений Лагранжа следует, что если сделать преобразование координат $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}_0(z,t)$, то уравнения (9)' превратятся в уравнения, эквивалентные тем, которые получатся как уравнения Лагранжа с той же функцией Лагранжа, только выраженной через новые координаты.

Вспомним также об операции калибровки, в результате которой функция Лагранжа изменяется, а уравнения нет. Например, те же уравнения Гамильтона дает функция Лагранжа

$$\mathcal{L}' = -q^T \dot p - H(q,p,t), \tag{10}$$

23.04

т.к. $$\mathcal{L} = \mathcal{L}' + \frac{d}{dt}(\mathbb{p}^T \mathbb{q}).$$

Из критерия 3. следует, что для любой функции $\mathbb{z}(t)$

$$\mathbb{p}^T \dot{\mathbb{q}} - \mathbb{P}_0^T \left(\frac{d}{dt}\mathbb{Q}_0 - \frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial t}\right) \equiv \frac{d}{dt}\Pi - \frac{\partial \Pi}{\partial t}$$

т.к. $$d\mathbb{z}\big|_{\mathbb{z}(t)} = \dot{\mathbb{z}}\,dt, \quad \delta f(\mathbb{z},t)\big|_{\mathbb{z}(t)} = \frac{\partial f}{\partial \mathbb{z}}\bigg|^T_{\mathbb{z}(t)} \dot{\mathbb{z}}\,dt =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial \mathbb{z}}^T \dot{\mathbb{z}} + \frac{\partial f}{\partial t}\right)\bigg|_{\mathbb{z}(t)} dt - \frac{\partial f}{\partial t}\bigg|_{\mathbb{z}(t)} dt = \left(\frac{d}{dt} f - \frac{\partial f}{\partial t}\right)\bigg|_{\mathbb{z}(t)} dt.$$

Поэтому в переменных $(\mathbb{z}, t)$ верно тождество

$$\mathbb{p}^T \dot{\mathbb{q}} \equiv \mathbb{P}_0^T \dot{\mathbb{Q}}_0 + \frac{d\Pi}{dt} - \left(\frac{\partial \Pi}{\partial t} + \mathbb{P}_0^T \frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial t}\right). \qquad (10)'$$

Следовательно, в координатах $\mathbb{z}$

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbb{z}}, \mathbb{z}, t) \equiv \mathbb{P}_0^T \dot{\mathbb{Q}}_0 + \dot{\Pi} - \left(H + \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \mathbb{P}_0^T \frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial t}\right).$$

Но $\dot{\Pi}(\mathbb{z}, t)$ не влияет на уравнения Лагранжа, значит, можно взять

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbb{z}}, \mathbb{z}, t) \equiv \mathbb{P}_0^T \dot{\mathbb{Q}}_0 - \left(H + \frac{\partial \Pi}{\partial t} + \mathbb{P}_0^T \frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial t}\right).$$

В новых координатах получим

$$\mathcal{L}(\dot{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}, t) \equiv \mathbb{P}^T \dot{\mathbb{Q}} - \mathcal{H}(\mathbb{Q}, \mathbb{P}, t)$$

где

$$\mathcal{H} \equiv \left(H + \frac{\partial \Pi(\mathbb{z}, t)}{\partial t} + \mathbb{P}^T \frac{\partial \mathbb{Q}_0(\mathbb{z}, t)}{\partial t}\right)\bigg|_{\mathbb{Z}}. \qquad (11)$$

Теперь уравнения Лагранжа будут (см. (9),(9)′)

$$\dot{\mathbb{Q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbb{P}}, \quad \dot{\mathbb{P}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbb{Q}}.$$

Итак, (11) – это формула для новой функции Гамильтона, в случае, когда каноническое преобразование зависит от времени.

Эта формула оказывается более простой и полезной, когда преобразование задано с помощью производящей функции.

Производящие функции канонических преобразований.

Рассмотрим только два случая.

Свободное каноническое преобразование.

Пусть в формулах (4) канонического преобразования $\det\left(\frac{\partial \mathbb{Q}_0}{\partial \mathbb{p}}\right) \neq 0.$

23.04

(*) Тогда его можно записать в неявном виде $\begin{cases} P = \bar{P}(q, Q, t) \\ \mathbb{P} = \bar{\mathbb{P}}(q, Q, t) \end{cases}$

причем $\det \frac{\partial \bar{P}}{\partial Q} \neq 0$.

В переменных (q, Q) тождество (8) сохранится и примет вид

$$\bar{P}^T dq - \bar{\mathbb{P}}^T dQ \equiv \delta \bar{S}(q, Q, t) \tag{12}$$

где $\bar{S} = \Pi|_*$ т.к. $(\delta \Pi)|_* = \delta(\Pi|_*)$. Действительно, пусть $x = \begin{pmatrix} q \\ Q \end{pmatrix}$, тогда $\Pi|_* = \Pi(z(x,t), t)$,

$$\frac{\partial \Pi_*}{\partial x} = \frac{\partial z^T}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial z}\Big|_* \Rightarrow \delta(\Pi|_*) = dx^T \frac{\partial z^T}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial z}\Big|_*,$$

$$\delta \Pi = dz^T \frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad (\delta \Pi)|_* = dx^T \frac{\partial z^T}{\partial x} \frac{\partial \Pi}{\partial z}\Big|_*.$$

Но это означает, что

$$\bar{P} \equiv \frac{\partial \bar{S}}{\partial q}, \quad \bar{\mathbb{P}} = -\frac{\partial \bar{S}}{\partial Q},$$

т.е. преобразование (4) на самом деле задается одной функцией:

$$(4) \Leftrightarrow (*): \begin{cases} P = \frac{\partial \bar{S}(q, Q, t)}{\partial q} \\ \mathbb{P} = -\frac{\partial \bar{S}(q, Q, t)}{\partial Q} \end{cases}, \det \frac{\partial^2 \bar{S}}{\partial Q \partial q} \neq 0. \tag{13}$$

$\bar{S}(q, Q, t)$ – производящая функция свободного канонического преобразования.

Стандартное каноническое преобразование.

Пусть в формулах (4) $\det \frac{\partial \mathbb{P}_0}{\partial P} \neq 0$.

(**) Тогда в неявном виде получим $\longrightarrow \begin{cases} Q = \hat{Q}(q, \mathbb{P}, t) \\ P = \hat{P}(q, \mathbb{P}, t) \end{cases}$

причем $\det \frac{\partial \hat{P}}{\partial \mathbb{P}} \neq 0$.

В переменных $(q, \mathbb{P})$ тождество (8) примет вид

$$\hat{P}^T dq - \mathbb{P}^T \delta \hat{Q} \equiv (\delta \Pi)|_{**} \Leftrightarrow \text{аналогично } (12)$$

$$\hat{P}^T dq + \hat{Q}^T d\mathbb{P} \equiv \delta(\Pi_{**}) + \delta(\mathbb{P}^T \hat{Q}) = \delta \hat{S}(q, \mathbb{P}, t) \tag{14}$$

где

$$\hat{S}(q, \mathbb{P}, t) \equiv \Pi(q, \mathbb{P}, t) + \mathbb{P}^T \hat{Q}.$$

Но это означает, что

$$\hat{P} = \frac{\partial \hat{S}(q, \mathbb{P}, t)}{\partial q}, \quad \hat{Q} = \frac{\partial \hat{S}(q, \mathbb{P}, t)}{\partial \mathbb{P}},$$

т.е. в этом случае преобразование (4) задается функцией $\hat{S}(q, \mathbb{P}, t)$:

$$(4) \Leftrightarrow (**): \begin{cases} P = \frac{\partial \hat{S}(q, \mathbb{P}, t)}{\partial q} \\ Q = \frac{\partial \hat{S}(q, \mathbb{P}, t)}{\partial \mathbb{P}} \end{cases}, \det \frac{\partial^2 \hat{S}}{\partial \mathbb{P} \partial q} \neq 0. \tag{15}$$

$\hat{S}(q, \mathbb{P}, t)$ – производящая функция стандартного канонического преобразования.

Выражение новой функции Гамильтона через производящую функцию.

(Рассматриваются только те же два случая).

Используем опять функцию Лагранжа (9). В случае свободного канонического преобразования в уравнениях Лагранжа с этой функцией сначала перейдем к координатам (q, Q). Получим $\mathcal{L} \equiv \bar{p}^T(q,Q,t)\dot{q} - H(q,\bar{p}(q,Q,t),t) = \bar{p}^T\dot{q} - H_*$.

Из тождества (12) находим, что в переменных (q, Q) (аналогично (10)')

$$\bar{p}^T\dot{q} \equiv \bar{P}^T\dot{Q} + \dot{\bar{S}} - \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} \tag{16}$$

поэтому $\mathcal{L} = \bar{P}^T\dot{Q} + \dot{\bar{S}} - \left(H_* + \frac{\partial \bar{S}}{\partial t}\right)$

или после калибровки

$$\mathcal{L} = \bar{P}^T\dot{Q} - \left(H_* + \frac{\partial \bar{S}}{\partial t}\right).$$

Но тогда в координатах (Q, P)

$$\mathcal{L} = P^T\dot{Q} - \mathcal{H}(Q,P,t), \tag{17}$$

где
$$\mathcal{H}(Q,P,t) \equiv \left(\frac{\partial \bar{S}(q,Q,t)}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial \bar{S}(q,Q,t)}{\partial q}, t\right)\right)\Bigg|_{\hat{q}}. \tag{18}$$

Аналогично в случае стандартного канонического преобразования тождество (14) дает (аналогично (16))

$$\tilde{p}^T\dot{q} + \tilde{Q}^T\dot{P} \equiv \dot{\tilde{S}} - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t},$$

откуда $\tilde{p}^T\dot{q} \equiv -\tilde{Q}^T\dot{P} + \dot{\tilde{S}} - \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}.$

В переменных (q, P) получаем

$$\mathcal{L} \equiv -\tilde{Q}^T\dot{P} + \dot{\tilde{S}} - \left(H_* + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}\right)$$

или после калибровки

$$\mathcal{L} \equiv -\tilde{Q}^T\dot{P} - \left(H_* + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}\right),$$

а в новых координатах (Q, P)

$$\mathcal{L} \equiv -Q^T\dot{P} - \mathcal{H}(Q,P,t), \tag{19}$$

где
$$\mathcal{H}(Q,P,t) = \left(H\left(q, \frac{\partial \tilde{S}(q,P,t)}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial \tilde{S}(q,P,t)}{\partial t}\right)\Bigg|_{\hat{q}} \tag{20}$$

В обоих случаях получаем формулу для новой функции Гамильтона (сравните (9) и (10) с (17) и 19)

$$\mathcal{H}(Q,P,t) = \left(H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}\right)\Bigg|_{\hat{q}}, \tag{21}$$

где либо $S = \bar{S}$, либо $S = \tilde{S}$.

Замечания о канонических преобразованиях с производящей функцией.

1. Любое каноническое преобразование имеет производящую функцию (см. Я.В. Татаринов. Лекции по классической динамике. §§ 19, 20).

Примеры. В преобразованиях (16.04, стр. 5): (1) $\tilde S(q,P) = P^T q$.

(2) Для обратного преобразования производящей функцией является, например, та же самая функция. Ведь с ее помощью преобразование записывается в неявном виде, поэтому какие координаты в этих формулах новые, а какие старые, все равно.

(3) $\tilde S(q,P) = \dfrac{1}{\cos\varphi_0}\left(Pq + \frac{1}{2}(P^2+q^2)\sin\varphi_0\right)$ при $\cos\varphi_0 \neq 0$.

(4) $\bar S(q,Q) = \dfrac{q^2}{2}\operatorname{ctg} Q$, (5) $\bar S(q,Q) = Qq$, (6) $\tilde S = \lambda P q$,

(7) $\tilde S = P^T A q$.

Упражнение. Проверить эти формулы.

2. Если $\bar S(q,Q,t)$ – функция от $q \in \mathbb{R}^n,\ Q \in \mathbb{R}^n,\ t$; $\det \dfrac{\partial^2 \bar S}{\partial Q \partial q} \neq 0$,

то формулы $\begin{cases} p = \dfrac{\partial \bar S}{\partial q} \\ P = -\dfrac{\partial \bar S}{\partial Q} \end{cases}$ задают каноническое преобразование $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$.

(1) Действительно, эти формулы можно заменить на эквивалентные $\begin{cases} Q = Q_0(q,p,t) \\ P = P_0(q,p,t) \end{cases}$,

т.к. верно $\det \dfrac{\partial^2 \bar S}{\partial Q \partial q} \neq 0$.

Тогда тождество $\dfrac{\partial \bar S}{\partial q}^T dq + \dfrac{\partial \bar S}{\partial Q}^T dQ \equiv \delta \bar S(q,Q,t)$

(2) в координатах (q,p) примет вид $p^T dq - P^T \delta Q_0 \equiv \delta \Pi(q,p,t)$,

где $\Pi = \bar S(q, Q_0(q,p,t), t)$ и $dQ\big|_{Q=Q_0} \equiv \delta Q_0(q,p,t)$,

т.к. во всех дифференциальных формах, использовавшихся в критериях каноничности преобразований, время участвовало как фиксированный параметр. А (2) и есть один из критериев.

Аналогично, если функция $\tilde S(q,P,t)$ такова, что $\det \dfrac{\partial^2 \tilde S}{\partial P \partial q} \neq 0$,

то формулы $\begin{cases} p = \dfrac{\partial \tilde S}{\partial q} \\ Q = \dfrac{\partial \tilde S}{\partial P} \end{cases}$ задают каноническое преобразование $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$,

которое можно записать в виде (1) и вместо (2) получить

$$p^T dq + Q_0^T \delta P_0 \equiv \delta \tilde S(q, P_0, t)$$

или

$$p^T dq - P_0^T \delta Q_0 \equiv \delta \Pi(q,p,t),$$

где $\Pi \equiv \tilde S(q, P_0(q,p,t), t) - P_0^T Q_0$.

3. *Преобразование формул для функций.*

Пусть требуется найти такое каноническое преобразование $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$,
что функция, имеющая в координатах (q, p) формулу $f(q, p, t)$
приобретает в координатах (Q, P) формулу $g(Q, P, t)$.
Будем искать производящую функцию вида $\tilde{S}(q, P, t)$, $\det \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial q \partial P} \neq 0$
как решение дифференциального уравнения в частных производных

$$f\left(q, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}, t\right) = g\left(\frac{\partial \tilde{S}}{\partial P}, P, t\right).$$

Если $\tilde{S}_0(q, P, t)$ одна из таких функций, то формулы $\begin{cases} p = \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial q} \\ Q = \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial P} \end{cases}$

задают каноническое преобразование $\begin{cases} Q = Q_0(q, p, t) \\ P = P_0(q, p, t) \end{cases}$

причем тождество $f\left(q, \frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial q}, t\right) \equiv g\left(\frac{\partial \tilde{S}_0}{\partial P}, P, t\right)$
в координатах (q, p) примет вид

$$f(q, p, t) \equiv g(Q_0(q, p, t), P_0(q, p, t), t),$$

что и требовалось получить.
Для получения того же результата с помощью функции $\tilde{S}(q, Q, t)$, $\det \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial Q \partial q} \neq 0$
достаточно найти такое решение уравнения

$$f\left(q, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}, t\right) = g\left(Q, -\frac{\partial \tilde{S}}{\partial Q}, t\right).$$

4. *Преобразование функций Гамильтона.*

Если каноническое преобразование $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$ не зависит от времени, то
Новая функция Гамильтона $\mathcal{H}(Q, P, t)$ получается из старой $H(q, p, t)$
подстановкой формул замены. Следовательно, в этом случае для достижения нужной цели
$H(q, p, t) \to \mathcal{H}(Q, P, t)$ достаточно найти не зависящее от времени
решение уравнения

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = \mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial P}, P, t\right), \tag{3}$$

удовлетворяющее условию невырожденности $\det \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial q} \neq 0$
и использовать формулы $p = \frac{\partial S}{\partial q}$, $Q = \frac{\partial S}{\partial P}$.
При использовании преобразований, зависящих от времени и имеющих производящую
функцию $S(q, P, t)$, новая функция Гамильтона $\mathcal{H}(Q, P, t)$
получается из старой $H(q, p, t)$ по формуле (см. 23.04)

30.04

(4) $$\mathcal{H}(Q,P,t)=\left(H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}\right)\Bigg|_{(Q,P)}$$

Поэтому для достижения нужной цели $H(q,p,t)\to\mathcal{H}(Q,P,t)$

достаточно найти решение $S(q,P,t)$ уравнения

$$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=\mathcal{H}\left(\frac{\partial S}{\partial P},P,t\right)$$

со свойством $\det\frac{\partial^2 S}{\partial P\,\partial q}\neq 0.$

Метод Якоби интегрирования уравнений Гамильтона.

Рассмотрим уравнения

(5) $$\begin{cases}\dot q=\dfrac{\partial H}{\partial p}\\ \dot p=-\dfrac{\partial H}{\partial q}\end{cases},\quad H=H(q,p,t),\ q,p\in R^n.$$

Соответствующим уравнением Гамильтона – Якоби называется уравнение в частных производных

(6) $$H\left(q,\frac{\partial S}{\partial q},t\right)+\frac{\partial S}{\partial t}=0.$$

Семейство решений $S(q,P,t)$, зависящее от n параметров $P\in R^n$,

(7) удовлетворяющее условию невырожденности $\det\frac{\partial^2 S}{\partial P\,\partial q}\neq 0$,

называется его полным интегралом.

Теорема Якоби. Если $S(q,P,t)$ – полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби системы (5), то общее решение системы (5) получается из уравнений

(8) $$\begin{cases}p=\dfrac{\partial S(q,P_0,t)}{\partial q}\\ Q_0=\dfrac{\partial S(q,P_0,t)}{\partial P_0}\end{cases},$$

где $Q_0\in R^n$, $P_0\in R^n$ – произвольные постоянные.

Доказательство. Пусть $S(q,P,t)$ – полный интеграл (6), тогда

(9) $$\begin{cases}p=\dfrac{\partial S}{\partial q}\\ Q=\dfrac{\partial S}{\partial P}\end{cases}$$ – неявные формулы канонического преобразования

$(q,p)\to(Q,P)$, из которых в силу (7) можно выразить

(10) $$\begin{cases}q=q_0(Q,P,t)\\ p=p_0(Q,P,t).\end{cases}$$

В координатах (Q,P) функция Гамильтона (см. 4.) будет

$$\mathcal{H}(Q,P,t)\equiv 0,$$

т.к. в смешанных переменных (q,P) правая часть (4) тождественно равна нулю в силу (6). Уравнения (5) в координатах (Q,P), следовательно, примут вид $\dot{Q}=0, \quad \dot{P}=0.$

Их общее решение – $Q\equiv Q_0, \ P\equiv P_0, \ Q_0, P_0 - const.$

Поэтому общее решение (5) в координатах (q, p) будет (см. (10))

(11)
$$\begin{cases} q = q_0(Q_0, P_0, t) \\ p = p_0(Q_0, P_0, t), \end{cases}$$

т.к. (10) – это явные формулы канонического преобразования, полученные из формул (9) совпадающих с (8) при $Q=Q_0, P=P_0$. Теорема доказана.

Замечание. Эта теорема – частный случай более общей теоремы из теории уравнений в частных производных первого порядка. В терминах этой общей теории система (5) – это уравнения характеристик для уравнения (6).

Метод Якоби – это описанный алгоритм получения решений (11) в неявном виде (8).

Главная его проблема – нахождение полного интеграла уравнения (6). Приведем список простейших случаев, когда решение этой проблем можно облегчить.

1) Если $\frac{\partial H}{\partial t}\equiv 0$, т.е. $H\equiv H(q, p)$, то $S(q, P, t)$ можно искать в виде $S=-P_1 t + S_1(q, P)$,

где P_1 один из параметров, от которых должна зависеть функция S. Для S_1 из (6) получаем в нашем случае уравнение

(12)
$$H\left(q, \frac{\partial S_1}{\partial q}\right) = P_1$$

с условием $\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial P \partial q} \neq 0.$

При $n=1$ это полностью решает проблему, т.к. в этом случае (12) обыкновенное дифференциальное уравнение, решение которого находится квадратурой.

2) Если $\frac{\partial H}{\partial \bar{q}}\equiv 0$ т.е. $H(\tilde{q}, \bar{p}, \tilde{p}, t)$, $\bar{q}\in R^k$ – циклические координаты то $\tilde{S}(q, P, t)$ можно искать в виде

(13) $S=\bar{P}^T\bar{q}+\tilde{S}(\tilde{q}, P, t)$, $\bar{P}\in R^k$ – часть параметров P. Для $\tilde{S}$ получаем уравнение

$$H\left(\tilde{q}, \frac{\partial S}{\partial \bar{q}}, \frac{\partial S}{\partial \tilde{q}}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

или с учетом (13) $H\left(\tilde{q}, \bar{P}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{q}}, t\right) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0.$

Условие (7) здесь превращается в $\det \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \tilde{P} \partial \tilde{q}} \neq 0.$

Пример. Если $n=2$ и одновременно $\frac{\partial H}{\partial t}\equiv 0$ т.е. $H=H(q_2, p_1, p_2)$,

(14) то ищем S в виде $S=-P_2 t + P_1 q_1 + S_2(q_2, P)$

и для S_2 имеем уравнение $H\left(q_2, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \frac{\partial S}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

или $H\left(q_2, P_1, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right) = P_2.$

Отсюда квадратурой находим $S_2(q_2, P)$, а затем и S по формуле (14).

3) Отделение переменных. Пусть $H = E(f(\tilde{q}, \tilde{p}), \bar{q}, \bar{p}, t)$,

тогда S можно искать в виде $S = \bar{S}(\tilde{q}, \bar{p}) + \tilde{S}(\bar{q}, \bar{p}, t)$,

(15) причем $\bar{S}$ находим из уравнения $f\left(\tilde{q}, \frac{\partial \bar{S}}{\partial \tilde{q}}\right) = p_1$,

(16) а $\tilde{S}$ — из уравнения (6), которое принимает вид $E\left(p_1, \bar{q}, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \bar{q}}, t\right) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} = 0$.

Условие (7) здесь, вообще говоря, не упрощается.

Пример. Пространственная задача Кеплера (сравните с 9.04, стр. 5).

В сферических координатах $H = \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2\theta}\right) - \frac{\mu m}{r} =$

(17) $$= \frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}\left(p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}\right)\right) - \frac{\mu m}{r}.$$

Здесь $\frac{\partial H}{\partial t} \equiv 0$, $\frac{\partial H}{\partial \varphi} \equiv 0$, $f(\varphi, \theta, p_\varphi, p_\theta) = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta}$.

Поэтому, используя все три правила, получаем

$$S = \bar{S}(\varphi, \theta, \bar{p}) + \tilde{S}(r, \bar{p}, t) = p_1\varphi + S_1(\theta, \bar{p}) - p_2 t + S_2(r, \bar{p}).$$

(18) Для S_1 из (15), (17) – уравнение $\left(\frac{\partial S_1}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{p_1^2}{\sin^2\theta} = p_3$.

Для S_2 из (16), (17) –

(19) $$\frac{1}{2m}\left(\left(\frac{\partial S_2}{\partial r}\right)^2 + \frac{p_3}{r^2}\right) - \frac{\mu m}{r} = p_2.$$

Уравнения (18), (19) – обыкновенные дифференциальные уравнения для функций одной переменной, следовательно, S находится в квадратурах.

4) Случай сложного разделения переменных (16.04, стр. 3) рассмотрим только для $n = 2$

Именно этим методом К. Якоби впервые решил задачу о движении точки по поверхности неподвижного эллипсоида по инерции (см. К. Якоби. Лекции по динамике. УРСС. 2004).

Итак, если

$$H = \frac{f_1(q_1, p_1) + f_2(q_2, p_2)}{g_1(q_1, p_1) + g_2(q_2, p_2)},$$

то ищем S в виде $S = S_1(q_1, \bar{p}) + S_2(q_2, \bar{p}) - p_1 t$.

Уравнение (6) принимает вид

$$\frac{f_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) + f_2\left(q_2, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right)}{g_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) + g_2\left(q_2, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right)} = p_1$$

или

$$\frac{f_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) - p_1 g_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) + f_2\left(q_2, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right) - p_1 g_2\left(q_2, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right)}{g_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) + g_2\left(q_2, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right)} = 0.$$

30.04

Достаточно взять S_1 из

$$f_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) - P_1 g_1\left(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}\right) = P_2,$$

а S_2 из $f_2\left(q_2, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right) - P_1 g_2\left(q_2, \frac{\partial S_2}{\partial q_2}\right) = -P_2$

и S будет найдено в квадратурах.

Замечание. Ясно, что эффективность метода Якоби сильно зависит от выбора координат. Ту самую задачу о движении точки по эллипсоиду К. Якоби решил в эллипсоидальных координатах, интерпретировать движение в которых непросто. Даже в простом случае разобранной выше задачи Кеплера, а это характерно для всех задач механики, искомый полный интеграл находится только локально. Из уравнений (18), (19) можно найти только квадраты производных искомых функций. Поэтому и решения будут локальными. Чтобы их «склеить», нужна специальная работа. Тем не менее, представление решений в таком виде – это существенное продвижение к возможности описать все движения системы. И здесь метод Гамильтона – Якоби оказался наиболее эффективным.

Заметим, что случаи, в которых удается уменьшить число переменных искомых функций в уравнении Гамильтона – Якоби, совпадают со случаями, в которых известны первые интегралы уравнений Гамильтона (см. 16.04). Приведенные примеры, в которых удалось получить полный интеграл (см. 30.04), – это частные случаи более общей теоремы.

Теорема Лиувилля (XIX, Франц.) об интегрировании в квадратурах.

Если система уравнений Гамильтона

(1) $$\begin{cases} \dot q = \dfrac{\partial H}{\partial p}, & q \in R^n,\ p \in R^n \\ \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases}$$

имеет n независимых первых интегралов, попарные скобки Пуассона которых – тождественные нули, то она интегрируема в квадратурах.

Замечание. Число первых интегралов равно половине размерности фазового пространства. Это еще одно достоинство уравнений Гамильтона.

Под интегрированием в квадратурах понимается представление общего решения системы в неявном виде через функции, возможно, заданные неявно, и через частные производные и первообразные таких функций. Изучение свойств решений при таком представлении – нетривиальная задача, но никаких дифференциальных уравнений решать уже не нужно.

Доказательство. Пусть $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ – столбец первых интегралов: $f = c = \mathrm{const}$,

(2) $$f = f(q, p, t) = c,\quad f_i(q, p, t) = c_i,\ i = 1, \dots, n,\quad \mathrm{rank}\, \frac{\partial f}{\partial (q, p)} = n,$$

для которых верно $\{f_i, f_j\} \equiv 0,\ i, j = 1, \dots, n.$

Пусть координаты выбраны так, что условие независимости интегралов имеет вид

$\det \dfrac{\partial f}{\partial p} \neq 0.$ Без доказательства заметим, что это не ограничивает общности (см. Я.В. Татаринов. Лекции по классической динамике. § 19).

Это позволяет записать (2) в эквивалентном виде (решить относительно p)

(3) $p = \tilde p(q, c, t)$ и получить тождество $f(q, \tilde p(q, c, t), t) \equiv c.$

Докажем, что существует такая функция $\tilde S(q, c, t)$, что при фиксированных c верно тождество $\tilde p^T(q, c, t)\, dq \equiv \delta \tilde S$, т.е. что $\tilde p(q, c, t) \equiv \dfrac{\partial \tilde S(q, c, t)}{\partial q}.$

Для этого докажем, что матрица $D = \dfrac{\partial \tilde p}{\partial q}$ симметричная.

Из (3) имеем тождество $B + A \cdot D \equiv 0$, где для краткости обозначено

$B = \dfrac{\partial f}{\partial q},\ A = \dfrac{\partial f}{\partial p}.$ Домножим: $BA^T + ADA^T \equiv 0$ транспонируем $AB^T + AD^TA^T \equiv 0$ и вычтем $BA^T - AB^T + A(D - D^T)A^T \equiv 0.$

Заметим, что $BA^T - AB^T \equiv \dfrac{\partial f}{\partial q} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial p}^T - \dfrac{\partial f}{\partial p} \cdot \dfrac{\partial f}{\partial q}^T \equiv$

$$\equiv \left(\sum_k \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_k} \frac{\partial f_j}{\partial p_k} - \frac{\partial f_i}{\partial p_k} \frac{\partial f_j}{\partial q_k} \right) \right) \equiv \left(\{f_i, f_j\} \right) \equiv 0$$

по условию. Отсюда $A(D - D^T)A^T \equiv 0.$

Используя невырожденность матрицы A, получаем $D - D^T \equiv 0,\ D \equiv D^T.$

Отсюда следует, что форма $\tilde{P}^T(q, C, t)\,dq$ замкнута при фиксированных C и t.
Поэтому функция $\tilde{S}(q, C, t)$ существует, причем из (3) имеем

$$\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{\partial P}{\partial C} \equiv E \Rightarrow A\frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial C\,\partial q} \equiv E \Rightarrow \det\frac{\partial^2 \tilde{S}(q, C, t)}{\partial C\,\partial q} \neq 0.$$

Это значит, что функцию $\tilde{S}(q, P, t)$ можно использовать в качестве производящей функции канонического преобразования $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$,

$$(4)\quad \begin{cases} p = \dfrac{\partial \tilde{S}(q, P, t)}{\partial q} \\ Q = \dfrac{\partial \tilde{S}(q, P, t)}{\partial P} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Q = \left.\dfrac{\partial \tilde{S}(q, P, t)}{\partial P}\right|_{P = f(q, p, t)} \\ P = f(q, p, t) \end{cases},$$

в котором за половину фазовых переменных приняты первые интегралы (2).
Т.к. в новых координатах $P = \mathrm{const}$, то все координаты Q оказываются циклическими, т.е. новая функция Гамильтона имеет вид

$$(5)\quad \mathcal{H}(Q, P, t) \equiv \left(H\left(q, \frac{\partial \tilde{S}}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t}\right)_{(Q, P)} \equiv E(P, t),$$

а система, эквивалентная (1) легко интегрируется

$$\begin{cases} \dot{Q} = \dfrac{\partial E}{\partial P} \\ \dot{P} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} Q = Q_0 + \displaystyle\int_0^t \left.\frac{\partial E}{\partial P}\right|_{P = C} dt \\ P = P_0 = C \end{cases}$$

Из формул преобразования (4) найдем общее решение (1) в координатах $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$.
Для завершения доказательства теоремы осталось получить функцию $\tilde{S}(q, C, t)$ в квадратурах. Ответ такой: $\tilde{S}(q, C, t) = \displaystyle\int_{q_{10}}^{q_1} \tilde{P}_1(q, C, t)\,dq_1 +$

$$+ \int_{q_{20}}^{q_2} \tilde{P}_2(q_{10}, q_2, q_3, \ldots, C, t)\,dq_2 + \ldots + \int_{q_{n0}}^{q_n} \tilde{P}_n(q_{10}, q_{20}, \ldots, q_{n-1,0}, q_n, C, t)\,dq_n.$$

Проверим это. Имеем: $\dfrac{\partial \tilde{S}}{\partial q_1} = \tilde{P}_1(q, C, t)$;

$$\frac{\partial \tilde{S}}{\partial q_2} = \int_{q_{10}}^{q_1} \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial q_2}\,dq_1 + \tilde{P}_2(q_{10}, q_2, \ldots, C, t) = \int_{q_{10}}^{q_1} \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial q_1}\,dq_1 + \tilde{P}_2(q_{10}, q_2, \ldots, C, t) \equiv \tilde{P}_2(q, C, t)$$

и т.д. Теорема доказана.

Замечание. Функция $\tilde{S}(q, P, t)$ удовлетворяет уравнению (5), поэтому функция $S = \tilde{S} - \displaystyle\int_0^t E(P, t)\,dt$ удовлетворяет уравнению Гамильтона – Якоби

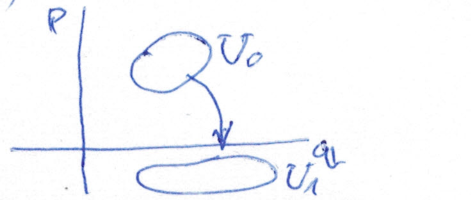
$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0,$$ причем $\det\dfrac{\partial^2 S}{\partial P\,\partial q} \neq 0$,

т.е. S полный интеграл этого уравнения.

Коснемся некоторых свойств решений уравнений Гамильтона, которые отражаются в поведении систем, описываемых такими уравнениями.

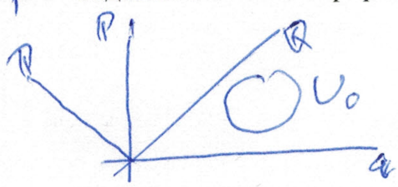
Канонические отображения фазового пространства.

Пусть в фазовом пространстве в координатах $z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ отображение $z_0 \xrightarrow{\Phi_0} z_1$ задано в виде формул



(6) $$z_1 = \Phi_0(z_0,t), \quad \begin{cases} q_1 = Q_0(z_0,t) \\ p_1 = P_0(z_0,t) \end{cases}$$

Рассмотрим преобразование координат $z \to \Phi$, заданное теми же формулами:



(7) $$\Phi = \Phi_0(z,t), \quad \begin{cases} Q = Q_0(z,t) \\ P = P_0(z,t) \end{cases}$$

Определение. Отображение (6) фазового пространства называется каноническим, если преобразование координат (7) каноническое.

Рассмотрим отображение фазового пространства вдоль решений уравнений Гамильтона

(8) $$\dot z = I\frac{\partial H}{\partial z}; \quad z_0 \xrightarrow{H} z = \Phi_0(z_0,t), \quad \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0(z_0,t) \\ P_0(z_0,t) \end{pmatrix},$$
$$\Phi_0(z_0,t_0) = z_0;$$

(9) $$\frac{\partial \Phi_0(z_0,t)}{\partial t} \equiv I\frac{\partial H}{\partial z}\Big|_{z=\Phi_0(z_0,t)}.$$

Утверждение. Отображение (8) каноническое.

Доказательство. Найдем уравнение, которому удовлетворяет матрица Якоби $Y_0 = \frac{\partial \Phi_0}{\partial z_0}$ отображения (8) как функция от t. Продифференцируем тождество (9) по z_0.

Получим
$$\frac{\partial}{\partial z_0}\frac{\partial \Phi_0}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial t}Y_0 \equiv I\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\Big|_{z=\Phi_0(z_0,t)} \cdot Y_0$$

Транспонируем
$$\frac{\partial}{\partial t}Y_0^T \equiv -Y_0^T\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\Big|_{z=\Phi_0(z_0,t)} \cdot I.$$

И, вычислив
$$\frac{\partial}{\partial t}\left(Y_0^T I Y_0\right) = -Y_0^T\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\Big|_{\dots} I \cdot I Y_0 + Y_0^T I I \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\Big|_{\dots} Y_0 \equiv 0,$$

обнаружим, что при отображении (8) матрица $Y_0^T I Y_0$ не зависит от

(10) времени. Но при $t = t_0$ имеем $Y_0 = E$, поэтому $Y_0^T I Y_0 \equiv I$.

4 7.05

Для соответствующего преобразования координат $z \to \zeta$, $\begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0(z,t) \\ P_0(z,t) \end{pmatrix} = \zeta_0(z,t)$

это означает

справедливость критерия каноничности $Y^T I Y \equiv I$, $\left\{ Y = \frac{\partial \zeta_0}{\partial z} \right\}$. Утверждение доказано.

Некоторые свойства отображения (8) .

1. *Сохранение фазового объема.*

Из (10) следует, что $\det Y_0 = \pm 1$, но при $t = t_0$, $Y_0 = E$ и $\det Y_0 = 1$, значит, $\det Y_0 \equiv 1$. Следовательно, отображение фазового пространства вдоль решений системы уравнений Гамильтона сохраняет ориентированный объем любой области. Точнее, если U_t образ области U_{t_0} при отображении (8) то

$$\int\limits_{U_t} dz_1 \ldots dz_{2n} = \int\limits_{U_{t_0}} Y_0 \, dz_1 \ldots dz_{2n} = \int\limits_{U_{t_0}} dz_1 \ldots dz_{2n}.$$

Отсюда, например, следует что равновесие механической системы, движение которой описывается системой уравнений Гамильтона, не может быть асимптотически устойчивым, т.к. при асимптотической устойчивости все движения с достаточно близкими к равновесию начальными данными стремятся к этому равновесию при $t \to \infty$. Тогда любая достаточно малая область, содержащая точку равновесия, при отображении будет сжиматься в точку при $t \to \infty$, её объем не будет сохраняться.

2. *Интегральный инвариант Пуанкаре*.

Пусть $\gamma_0 : \begin{cases} z = z_0(\alpha) \\ 0 \le \alpha \le 1 \end{cases}$, $z_0(0) = z_0(1)$ – гладкий замкнутый контур в фазовом пространстве,

а $\gamma_t : z = \zeta_0(z_0(\alpha), t)$, $\begin{cases} q = Q_0(z_0(\alpha), t) \\ p = P_0(z_0(\alpha), t) \end{cases}$ – его образ при отображении (8).

Утверждение. $\oint\limits_{\gamma_t} p^T dq = \oint\limits_{\gamma_0} p^T dq.$

Доказательство. Т.к. $\oint\limits_{\gamma_t} p^T dq = \int\limits_0^1 P_0^T(z_0(\alpha), t) \frac{\partial Q_0}{\partial z_0} z_0'(\alpha) \, d\alpha$,

а в соответствии с критерием каноничности преобразования

$$p^T dq - P_0^T(z,t) \, \delta Q_0(z,t) \equiv \delta \Pi(z,t),$$

то для любой кривой $\gamma_0 : z = z_0(\alpha) = \begin{pmatrix} q_0(\alpha) \\ p_0(\alpha) \end{pmatrix}$ имеем

$$p_0^T(\alpha) \, q_0'(\alpha) \, d\alpha - P_0^T(z_0(\alpha), t) \left. \frac{\partial Q_0}{\partial z} \right|_{z = z_0(\alpha)} z_0'(\alpha) \, d\alpha \equiv \left. \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right|_{z = z_0(\alpha)} z_0'(\alpha) \, d\alpha.$$

Отсюда $$P_0^T(z_0(\alpha),t)\frac{\partial Q_0}{\partial z}\Big|_{z_0(\alpha)} \cdot z_0'(\alpha) \equiv P_0^T(\alpha)\, q_0'(\alpha) - \frac{d}{d\alpha}\big(\Pi(z_0(\alpha),t)\big).$$

Поэтому $$\oint_{\gamma_t} P^T dq = \int_0^1 P_0^T(\alpha)\, q_0'(\alpha)\, d\alpha - \int_0^1 \frac{d}{d\alpha}\big(\Pi(z_0(\alpha),t)\big) d\alpha = \oint_{\gamma_0} P^T dq,$$

т.к. $$\int_0^1 \frac{d}{d\alpha}\big(\Pi(z_0(\alpha),t)\big) d\alpha = \Pi(z_0(1),t) - \Pi(z_0(0),t) = 0$$

для замкнутого контура.

 14.05

Пусть для любой кривой $\gamma: z = z(t)$

в R^n определена функция $F(\dot z, z, t)$,

(1) тогда на любом семействе кривых $\gamma_\alpha: z = z_\alpha(t)$, $|\alpha| \le \alpha_0 > 0$

интеграл

(2)
$$A(\gamma_\alpha) = \int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} F(\dot z_\alpha, z_\alpha, t)\,dt, \quad t_1(\alpha) < t_2(\alpha) < \infty$$

будет функцией параметра α. Как обычно, будем предполагать, что все используемые функции достаточно гладкие, в частности интеграл $A(\gamma_\alpha)$ - непрерывно дифференцируемая нужное число раз функция α. Представим в нужном виде формулу для ее производной по параметру α, обозначая эту ~~формулу~~ (производную) штрихом там, где это удобно. Имеем

$$\frac{d}{d\alpha} A(\gamma_\alpha) = F t' \Big|_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} + \int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot z}^T \dot z' + \frac{\partial F}{\partial z}^T z' \right)\Big|_{z_\alpha} dt$$

т.к. $(\dot z_\alpha)' = \frac{d}{dt}(z'_\alpha)$, то

$$\frac{\partial F}{\partial \dot z_\alpha}^T \dot z'_\alpha = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot z}^T z'\right)\Big|_{z_\alpha} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot z}\right) \cdot z' \Big|_{z_\alpha}$$

поэтому

(3)
$$\frac{d}{d\alpha} A(\gamma_\alpha) = F t' \Big|_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} + \frac{\partial F}{\partial \dot z_\alpha}^T z'_\alpha \Big|_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} - \int_{t_1(\alpha)}^{t_2(\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot z} - \frac{\partial F}{\partial z} \right)^T\Big|_{z_\alpha} z'_\alpha\, dt.$$

Интегральный инвариант Пуанкаре – Картана (Картан, XIX – XX, Франц.)

Рассмотрим расширенное фазовое пространство (z, t) системы уравнений Гамильтона

(4)
$$\begin{cases} \dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q} \end{cases}, \quad \dot z = I \frac{\partial H}{\partial z}, \quad H = H(z, t) = H(q, p, t).$$

Пусть β_0 замкнутый контур $\begin{cases} z = z_0(\alpha) \\ t = t_0(\alpha) \end{cases}$, $0 \le \alpha \le 1$,

$z_0(0) = z_0(1)$, $t_0(0) = t_0(1)$.

Через каждую его точку проходит единственное решение (4) – график $(z(\alpha, t), t)$.

Так образуется «трубка тока» - двумерное многообразие с локальными координатами (α, t) на нем. Возьмем другой замкнутый контур β_1, охватывающий ту же трубку тока: $\begin{cases} z = z_1(\alpha) \\ t = t_1(\alpha) \end{cases}$, $t_1(\alpha) > t_0(\alpha)$, $0 \le \alpha \le 1$.

Теорема.

(5)
$$\oint_{\beta_0} p^T dq - H dt = \oint_{\beta_1} p^T dq - H dt.$$

(*) *Доказательство.* Обозначим γ_α кривую $(z(\alpha,t),t)$, проходящую через точки $(z_0(\alpha), t_0(\alpha))$ на β_0 и $(z_1(\alpha), t_1(\alpha))$ на β_1 при одном и том же α; $z(\alpha,t)$ – соответствующее решение (4).

На этой кривой

(6)
$$A(\gamma_\alpha) = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} (p^T \dot q - H)\Big|_{z(\alpha,t)} dt = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \mathcal{L}\Big|_{z(\alpha,t)} dt$$

(см. лекцию 23.04, стр. 3) - интеграл вида (2).

Используем формулу (3) и получим

(7)
$$\frac{d}{d\alpha} A(\gamma_\alpha) = \mathcal{L} t'\Big|_{z(\alpha,t)}\Big|_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} + p^T q'\Big|_{z(\alpha,t)}\Big|_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} - \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot z} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}\right)\Big|_{z(\alpha,t)}^T z(\alpha,t)\,dt$$

Последнее слагаемое – тождественный нуль, т.к.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot z} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0 -$$

это (4). Преобразуем первые два слагаемых.

$$\left(p^T(\alpha,t)\frac{\partial}{\partial t}q(\alpha,t) - H(z(\alpha,t),t)\right)\Big|_{t_1(\alpha)} t_1'(\alpha) + p^T(\alpha,t)\frac{\partial}{\partial \alpha}q(\alpha,t)\Big|_{t_1(\alpha)} -$$

$$-\left(p^T(\alpha,t)\frac{\partial}{\partial t}q(\alpha,t) - H(z(\alpha,t),t)\right)\Big|_{t_0(\alpha)} t_0'(\alpha) - p^T(\alpha,t)\frac{\partial}{\partial \alpha}q(\alpha,t)\Big|_{t_0(\alpha)} =$$

$$= p^T(\alpha,t_1(\alpha))\frac{d}{d\alpha}q(\alpha,t_1(\alpha)) - H(z(\alpha,t_1(\alpha)),t_1(\alpha))t_1'(\alpha) -$$

$$-\left(p^T(\alpha,t_0(\alpha))\frac{d}{d\alpha}q(\alpha,t_0(\alpha)) - H(z(\alpha,t_0(\alpha)),t_0(\alpha))t_0'(\alpha)\right).$$

Теперь из (7) получаем $\displaystyle\int_0^1 \frac{d}{d\alpha}A(\gamma_\alpha)\,d\alpha =$

$$= \int_0^1\left(p^T(\alpha,t_1(\alpha))\frac{d}{d\alpha}q(\alpha,t_1(\alpha)) - H(z(\alpha,t_1(\alpha)),t_1(\alpha))\,t_1'(\alpha)\right)d\alpha -$$

$$- \int_0^1\left(p^T(\alpha,t_0(\alpha))\frac{d}{d\alpha}q(\alpha,t_0(\alpha)) - H(z(\alpha,t_0(\alpha)),t_0(\alpha))\,t_0'(\alpha)\right)d\alpha$$

(8) или $A(\gamma_1) - A(\gamma_0) = \oint_{\beta_1} p^T dq - H dt - \oint_{\beta_0} p^T dq - H dt = 0,$

т.к. $\gamma_1 = \gamma_0$, $z(\alpha, t_i(\alpha)) = z_i(\alpha)$, $i = 0, 1$, (см. (*)).

Теорема доказана.

Замечание. Замкнутые контуры γ_0 и γ_t, участвующие в последнем утверждении лекции (7.05), также охватывают одну и ту же «трубку тока», причем на каждом из этих контуров $t = const$. Поэтому интегральный инвариант Пуанкаре можно получить как следствие интегрального инварианта Пуанкаре – Картана.

Вариационный принцип Гамильтона в форме Пуанкаре.

Рассмотрим в фазовом пространстве с координатами $z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}$ многообразия V_0 и V_1, $V_i = \{z : q = q_i = const\}$, $i = 0, 1$.

Это n – мерные гиперплоскости, параллельные координатной гиперплоскости $q = 0$.

Обозначим Ω множество гладких кривых

$$\gamma : z = z(t), \quad z(t_0) \in V_0, \quad z(t_1) \in V_1$$

с концами на этих многообразиях.

Определение. Семейство кривых $\gamma_\alpha : z = z_\alpha(t)$, $|\alpha| \le \alpha_0$ назовем вариацией кривой $\gamma \in \Omega$, если $\gamma_\alpha \in \Omega$, $\gamma_0 = \gamma$.

На множестве Ω определен функционал действия

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L}(\dot z, z, t)\,dt, \quad \mathcal{L} = p^T \dot q - H(z,t). \tag{9}$$

Определение.

Кривую γ назовем экстремалью функционала действия $A(\gamma)$ на Ω множестве, если

$$\frac{d}{d\alpha} A(\gamma_\alpha)\Big|_{\alpha=0} = 0$$

для любой ее вариации γ_α.

Теорема. Кривая $\gamma \in \Omega$, $\gamma : z = z(t)$ – экстремаль функционала действия на множестве Ω тогда и только тогда, когда $z(t)$ – решение уравнений Гамильтона с функцией Гамильтона $H(z,t)$.

Доказательство. По формуле (3) для $\frac{d}{d\alpha} A(\gamma_\alpha)$, имея в виду, что на Ω – (t_0, t_1, q_0, q_1) одинаковые константы для всех кривых, получаем

$$t_i{}' \equiv 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \dot z_\alpha} z'_\alpha \Big|_{t_0}^{t_1} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot q_\alpha} q'_\alpha \Big|_{t_0}^{t_1} \equiv 0 \tag{10}$$

и

$$\frac{d}{d\alpha} A(\gamma_\alpha) \equiv -\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot z} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} \right)\Big|_{z_\alpha(t)} z'_\alpha(t)\,dt =$$

$$= -\int_{t_0}^{t_1} \left(\dot z - I \frac{\partial H}{\partial z} \right)\Big|^{T}_{z_\alpha(t)} z'_\alpha(t)\,dt \tag{11}$$

Следовательно, если $z(t)$ – решение уравнений Гамильтона

$$\dot{z} = I\frac{\partial H}{\partial z}, \qquad \text{то} \qquad \frac{d}{d\alpha}A(\gamma_\alpha)\Big|_{\alpha=0} = 0,$$

т.к. $z_0(t) \equiv z(t)$ по определению вариации.

Если же, наоборот, для любой вариации γ_α

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\dot{z} - I\frac{\partial H}{\partial z}\right)\Big|_{z(t)}^{T} z'_\alpha(t)\Big|_{\alpha=0} dt = 0,$$

то возьмем

$$(12) \qquad \gamma_\alpha : z_\alpha(t) = z(t) + \alpha\cdot\left(\dot{z} - I\frac{\partial H}{\partial z}\right)\Big|_{z(t)}(t-t_0)(t_1-t).$$

Легко убедиться, что это $\gamma_\alpha \in \Omega$. Тогда из

$$\int_{t_0}^{t_1}\left(\dot{z} - I\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2\Big|_{z(t)}(t-t_0)(t_1-t)\,dt = 0$$

следует, что $\left(\dot{z} - I\frac{\partial H}{\partial z}\right)\Big|_{z(t)} = 0$ для любого $t \in (t_0, t_1)$,
а по непрерывности то же верно и для любого $t \in [t_0, t_1]$, т.е. $z(t)$ – решение уравнений Гамильтона. Теорема доказана.

Принцип Гамильтона на конфигурационном многообразии.

В следующей теореме мы возвращаемся к уравнениям Лагранжа и убеждаемся, что их решения также являются экстремалями некоторого функционала – по сути того же, но на другом множестве.

В отличие от предыдущей теоремы, теперь $z = q$ – это локальные координаты на конфигурационном многообразии M системы уравнений Лагранжа с функцией L Лагранжа; множества $U_0 = \{q_0\}, U_1 = \{q_1\}$ фиксированные точки на M; множество кривых $\Omega = \{\gamma : q = q(t),\ q(t_0) = q_0,\ q(t_1) = q_1\}$ состоит из кривых с фиксированными концами в фиксированные моменты времени; определение вариаций (γ_α) записывается точно так же, но, естественно, задает другие кривые; функционал действия определяется формулой

$$A(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\dot{q}, q, t)\,dt;$$

14.05

его экстремаль – это кривая, для которой $\frac{d}{d\alpha} A(\gamma_\alpha)\Big|_{\alpha=0} = 0$

для любой вариации в новых обозначениях.

Теорема. Кривая $\gamma \in \Omega,\ \gamma: q = q(t)$ – экстремаль функционала действия на множестве Ω тогда и только тогда, когда $q(t)$ – решение уравнений Лагранжа с функцией Лагранжа L: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0.$ (13)

Доказательство. Аналогично (10), (11) на множестве Ω имеем

$$\frac{d}{d\alpha} A(\gamma_\alpha) = -\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\Bigg|_{q_\alpha(t)}^T q'_\alpha(t)\, dt.$$

Если $q(t)$ – решение (13), то

$$\frac{d}{d\alpha} A(\gamma_\alpha)\Big|_{\alpha=0} = -\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\Bigg|_{q_0(t) \equiv q(t)}^T q'_0(t)\, dt = 0.$$

Если $\gamma: q = q(t)$ экстремаль функционала на множестве Ω, то возьмем вариацию

$$\gamma_\alpha:\ q = q_\alpha(t) = q(t) + \alpha\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\Bigg|_{q(t)} (t-t_0)(t_1-t)$$

и получим $$\int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q}\right)\Bigg|_{q(t)}^2 (t-t_0)(t_1-t)\, dt = 0,$$

откуда $q(t)$ – решение (13).

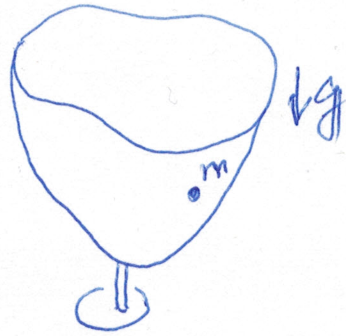
Замечание. Если функция Гамильтона и функция Лагранжа в двух последних теоремах относятся к одной и той же механической системе, то проекции экстремалей функционала в принципе Гамильтона в форме Пуанкаре на конфигурационное многообразие совпадают с экстремалями в принципе Гамильтона на конфигурационном многообразии при соответствующих краевых условиях. Это при том, что первые определяются на более широком множестве и что подынтегральная функция в первом функционале совпадает с функцией Лагранжа во втором только при

$$p(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot q}\Big|_{q(t)}.$$

Даже те немногие свойства решений систем Гамильтона, о которых шла речь в этом курсе лекций, позволяют сделать важные выводы о движении соответствующих механических систем.

Например, из сохранения фазового объема при отображении вдоль решений системы Гамильтона следует возвращаемость почти всех точек любой инвариантной относительно этого отображения области фазового пространства с конечным объемом (Теорема Пуанкаре о возвращении. Теоретическая механика. С.В. Болотин, А.В. Карапетян, Е.И. Кугушев, Д.В. Трещев. Гл. 12). Отсюда, например, можно вывести (Математические методы классической механики. В.И. Арнольд. § 16),

что при любом движении материальной точки по стенкам гладкого бокала без трения и отрывов, при котором точка всегда остается внутри, она бесконечно много раз возвращается в любую окрестность любой точки на своей траектории.



Другой пример: из экстремальности решений уравнений Лагранжа и Гамильтона следует, что при движении материальной точки по любой неподвижной гладкой поверхности по инерции ее траекторией оказывается геодезическ~~ой~~ая (См. там же. В.И. Арнольд. § 45).

Доказательства этих утверждений в программу экзамена не входят.

В приложениях важное значение имеет метод усреднения. Один из его вариантов состоит в замене периодически зависящей от времени системы в стандартной форме

(1) $$\dot{x} = \varepsilon f(x,t,\varepsilon), \quad f(x,t+T,\varepsilon) = f(x,t,\varepsilon),$$
$$0 \le \varepsilon << 1.$$

на осредненную систему первого приближения

(2) $$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}_0(y), \quad \bar{f}_0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(y,t,0)\,dt.$$

Важным элементом обоснования этого метода является доказательство существования периодической по t близкой к тождественной замены неизвестных

$$x = y + \varepsilon y_1(y,t,\varepsilon),$$

приводящей (1) к виду $\dot{y} = \varepsilon \bar{f}_0(y) + O(\varepsilon^2)$.

В системе Гамильтона такое преобразование всегда можно построить с помощью производящей функции. Действительно, пусть в качестве (1) имеем систему

(3) $$\dot{q} = \varepsilon \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\varepsilon \frac{\partial H}{\partial q},$$

где $$H = H_1(z,t) + O(\varepsilon), \quad z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix},$$

$$H_1 = \sum h_k(z) e^{ikt} = \bar{H}_1(z) + \tilde{H}_1(z,t)$$

$$\tilde{H}_1 = \sum_{k\ne 0} h_k(z) e^{ikt}, \quad \bar{H}_1(z) = h_0(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_1(z,t)\,dt.$$

Для удобства считаем, что $T = 2\pi$.

Производящую функцию близкого к тождественному канонического преобразования будем искать в виде $S(q, P, t, \varepsilon) = q^T P + \varepsilon S_1(q, P, t)$,

$$S_1(q, P, t) = \sum_{k \neq 0} s_k(q, P) e^{ikt}.$$

Формулы преобразования

$$\begin{cases} p = \dfrac{\partial S}{\partial q} = P + \varepsilon \dfrac{\partial S_1(q, P, t)}{\partial q} \\ Q = \dfrac{\partial S}{\partial P} = q + \varepsilon \dfrac{\partial S_1(q, P, t)}{\partial P} \end{cases}$$

можно записать в явном виде (с точностью до ε)

$$(*) \quad \begin{cases} q = Q - \varepsilon \dfrac{\partial S_1(Q, P, t)}{\partial P} + O(\varepsilon^2) \\ p = P + \varepsilon \dfrac{\partial S_1(Q, P, t)}{\partial Q} + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

По общей формуле (30.04, стр. 3) новая функция Гамильтона получается из εH так

$$\mathcal{H} = \left(\varepsilon H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t}\right)\Big|_{(*)}$$

В смешанных переменных имеем

$$\varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial t} + \varepsilon H_1\left(q, P + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial q}, t\right) = \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial t} + \varepsilon \tilde{H}_1(q, P, t) + \varepsilon \overline{H}_1(q, P) + O(\varepsilon^2),$$

(4) S_1 найдем из уравнения $\dfrac{\partial S_1}{\partial t} + \tilde{H}_1(q, P, t) = 0$,

т.е. $\sum ik s_k(q, P) e^{ikt} + \sum h_k(q, P) e^{ikt} \equiv 0$

Значит, $s_k = -\dfrac{h_k}{ki} = i\dfrac{h_k}{k}$.

При таком выборе S_1 получим

$$\varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial t} + \varepsilon H_1\left(q, P + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial q}, t\right) = \varepsilon \overline{H}_1(q, P) + O(\varepsilon^2).$$

А после подстановки $(*)$ $\mathcal{H}(Q, P, t) = \varepsilon \overline{H}_1(Q, P) + O(\varepsilon^2)$.

Что и требовалось получить.

Системы вида (3) появляются, например, в механических системах, параметры которых совершают высокочастотные колебания. Если, например,

$$H = H(q, p, \tau), \quad H(q, p, \tau + 2\pi) = H(q, p, \tau),$$

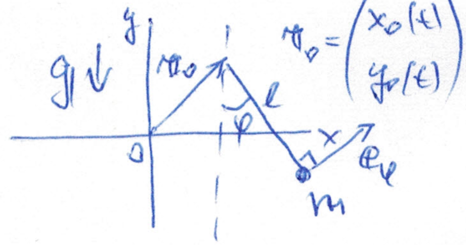
где $\tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \ll 1$, то после замены независимой переменной $t \to \tau = \dfrac{t}{\varepsilon}$

уравнения $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}$, $\dot{(\,)} = \dfrac{d}{dt}(\,)$.

переходят в $\quad q' = \varepsilon \dfrac{\partial H}{\partial p}, \quad p' = -\varepsilon \dfrac{\partial H}{\partial q}, \quad (\;)' = \dfrac{d}{d\tau}(\;).$

Рассмотрим пример: математический маятник с подвижной точкой подвеса.

Функцию Лагранжа



$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}_0 + l\dot{\varphi}e_\varphi)^2 - mg(y_0 - l\cos\varphi) =$$
$$= \frac{1}{2}m(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}(\dot{r}_0, e_\varphi) + \dot{r}_0^2) - mg(y_0 - l\cos\varphi)$$

заменяем на эквивалентную

$$L = \frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}(\dot{r}_0, e_\varphi)\right) + mgl\cos\varphi.$$

Переходим к каноническим координатам

(5) $$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + ml(\dot{r}_0, e_\varphi) \Rightarrow ml^2\dot{\varphi} = p - ml(\dot{r}_0, e_\varphi).$$

И записываем функцию Гамильтона

$$H = (T_2 - T_0 + V)\Big|_{(5)} = \left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - mgl\cos\varphi\right)\Big|_{(5)}$$

Единицы измерения выберем так, чтобы $\quad m = 1, \; l = 1, \; g = 1.$

Тогда
$$H = \frac{1}{2}(p - (\dot{r}_0, e_\varphi))^2 - \cos\varphi$$

Будем считать, что точка подвеса маятника движется по эллипсу $\quad r_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon a \cos\frac{t}{\varepsilon} \\ \varepsilon b \sin\frac{t}{\varepsilon} \end{pmatrix}.$

Т.к. $\quad e_\varphi = \cos\varphi\, e_x + \sin\varphi\, e_y,$

то $\quad (\dot{r}_0, e_\varphi) = b\sin\varphi\cos\tau - a\cos\varphi\sin\tau, \quad \tau = \frac{t}{\varepsilon},$

и мы получаем
$$H = \frac{1}{2}(p + a\cos\varphi\sin\tau - b\sin\varphi\cos\tau)^2 - \cos\varphi.$$

Примем $\quad \tau = \dfrac{t}{\varepsilon} \quad$ за новую независимую переменную.

Тогда новая функция Гамильтона будет $\quad \varepsilon H_1 = \varepsilon \bar{H}_1 + \varepsilon \tilde{H}_1,$

где
$$\bar{H}_1 = \bar{H}_1(\varphi, p) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{4}(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi) - \cos\varphi,$$
$$\tilde{H}_1 = \tilde{H}_1(\varphi, p, \tau) = ap\cos\varphi\sin\tau - bp\sin\varphi\cos\tau +$$
$$+ \frac{1}{4}(b^2\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi)\cos 2\tau - \frac{1}{4}ab\sin 2\varphi\sin 2\tau.$$

Осреднение по $\quad \tau \quad$ это каноническое преобразование с производящей функцией

$$S(\varphi, P, \tau) = P\varphi + \varepsilon S_1(\varphi, P, \tau),$$

как и в общем случае, только с заменой t на τ. Уже доказано, что она существует, однако здесь ряд (полином) Фурье функции $H_1(\varphi, P, \tau)$ задан в вещественном виде, поэтому и функцию $S_1(\varphi, P, \tau)$ следует искать в виде

$$S_1 = \sum (b_k \sin k\tau + c_k \cos k\tau);$$

из уравнения (4) получим

$$S_1 = Pb\sin\varphi\sin\tau + Pa\cos\varphi\cos\tau - \frac{1}{8}(b^2\sin^2\varphi - a^2\cos^2\varphi)\sin 2\tau - \frac{1}{8}ab\sin 2\varphi\cos 2\tau.$$

Осредненная система первого приближения имеет функцию Гамильтона

$$\bar{\mathcal{H}}(Q,P) = \varepsilon\left(\frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{8}(a^2-b^2)\cos 2Q - \cos Q\right) = \bar T + \bar V.$$

В математике существует много теорем, связывающих поведение решений осредненных и точных систем. Например, при определенных условиях решения этих систем с одинаковыми начальными данными $\varepsilon -$ близки на асимптотически больших интервалах времени порядка $1/\varepsilon$. Невырожденные равновесия осредненных систем порождают в точных системах периодические решения. В случае одной степени свободы (как в нашей задаче) устойчивое равновесие дает устойчивое периодическое решение.

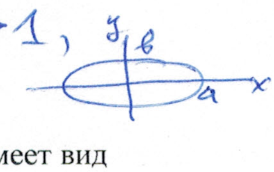
В нашем случае осредненную функцию Гамильтона можно интерпретировать как сумму кинетической и потенциальной энергии, поэтому устойчивость и неустойчивость равновесий удобно определять по тому, является точка экстремума потенциальной энергии минимумом или нет. Равновесия определяются из уравнения

$$\bar V' = 0 \iff \sin Q\left(1 - \frac{a^2-b^2}{2}\cos Q\right) = 0.$$

Поэтому их два, если $\left|\frac{a^2-b^2}{2}\right| \le 1$ и четыре, если $\left|\frac{a^2-b^2}{2}\right| > 1.$

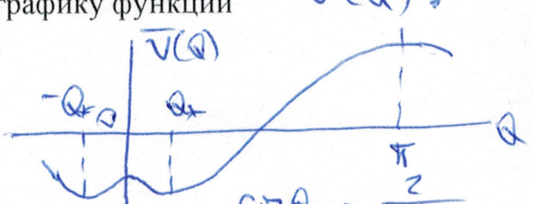
Устойчивость и неустойчивость определим по графику функции $\bar V(Q)$.

Если $\frac{a^2-b^2}{2} > 1$,



то $a > b$

и график $\bar V(Q)$ имеет вид

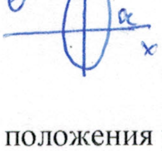


$\cos Q_* = \frac{2}{a^2-b^2}$

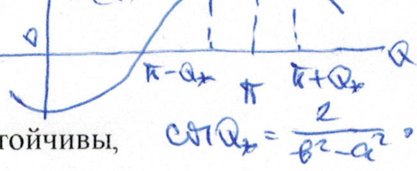
Это значит, что оба вертикальных положения неустойчивы,

а два симметричных равновесия вблизи нижнего устойчивы.

Если $\frac{a^2-b^2}{2} < -1, \Rightarrow a < b$



~~то~~ и график $\bar V(Q)$ имеет вид



$\cos Q_* = \frac{2}{b^2-a^2}.$

В этом случае наоборот оба вертикальных положения устойчивы,

и нижнее, и верхнее.

При $\left|\frac{a^2-b^2}{2}\right| \le 1$ равновесия только вертикальные, нижнее устойчиво, верхнее нет. В частности, это верно при $a = b$, когда точка подвеса движется по окружности.