Типовой расчет по Теории Вероятностей

Зенкова Дарья, M3336

Вариант 2

1 Непосредственный подсчёт вероятностей в рамках классической схемы. Теоремы сложения и умножения.

Задача В коробке лежат карандаши: двенадцать красных и восемь зеленых. Наудачу извлекают три. Какова вероятность того, что среди извлечённых будет хотя бы один красный карандаш?

Решение

$N_{\text{кр}} = 12$

$N_{\text{з}} = 8$

$\Omega = \{\text{Все возможные сочетания трех карандашей}\}$

$$|\Omega| = C_{20}^{3} = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 3 \cdot 19 \cdot 20 = 1140$$

$A = \{\text{Хотя бы один из трех карандашей - красный}\}$

$\overline{A} = \{\text{Среди трех карандашей нет ни одного красного}\}$

$$\left|\overline{A}\right| = C_{8}^{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56$$

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{|\overline{A}|}{|\Omega|} = 1 - \frac{56}{1140} = \frac{271}{285}$$

Ответ

$$\frac{271}{285}$$

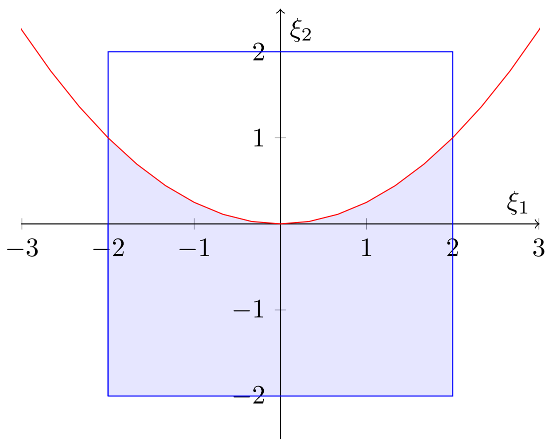
2 Геометрические вероятности.

Задача Из промежутка $[-2, 2]$ наудачу выбраны два числа ξ_1 и ξ_2. Найти вероятность того, что квадратное уравнение $x^2 + \xi_1 x + \xi_2 = 0$ будет иметь вещественные корни.

Решение

$$\Omega = \{-2 \le \xi_1 \le 2, -2 \le \xi_2 \le 2\}$$

Уравнение имеет вещественные корни $\iff D = \xi_1^2 - 4\xi_2 \ge 0$.
Таким образом, $A = \{\xi_2 \le \frac{\xi_1^2}{4}, -2 \le \xi_1 \le 2, -2 \le \xi_2 \le 2\}$.



$$\mu(\Omega) = (2 - (-2)) \cdot (2 - (-2)) = 16$$

$$\mu(A) = (2 - (-2)) \cdot 2 + \int_{-2}^{2} \frac{\xi_1^2}{4}\,\mathrm{d}\xi_1 = 8 + \left.\frac{\xi_1^3}{12}\right|_{-2}^{2} = 8 + \frac{8}{12} - (-\frac{8}{12}) = \frac{28}{3}$$

$$p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{28}{3 \cdot 16} = \frac{7}{12}$$

Ответ

$$\frac{7}{12}$$

3 Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Задача Два стрелка A и B поочередно стреляют в мишень до первого попадания, но не более двух раз каждый. Вероятноть попадания при одном выстреле для A равна 0.8, для B – 0.6. Первый стрелок опеределяется по жребию. Для этого кидается игральный кубик. Если выпадает число, кратное трём, то начинает A, иначе первым стреляет B. В результате стрельбы выиграл стрелок B. Какова вероятность, что он стрелял первым?

Решение

$H = \{3, 6\}$ – первым стреляет A

$\overline{H} = \{1, 2, 4, 5\}$ – первым стреляет B

$$p(H) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$p(\overline{H}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$B = \{\text{Выиграл стрелок } B\}$

$p(B|H)$ – A использзовал обе попытки и не попал

$$p(B|H) = \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{10} \cdot (\frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10}) = \frac{42}{125}$$

$p(B|\overline{H})$ – B попал либо с первой, либо со второй попытки

$$p(B|\overline{H}) = \frac{6}{10} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{10} = \frac{21}{25}$$

$$p(\overline{H}|B) = \frac{p(\overline{H}) \cdot p(B|\overline{H})}{p(H) \cdot p(B|H) + p(\overline{H}) \cdot p(B|\overline{H})} = \frac{5}{6}$$

Ответ

$$\frac{5}{6}$$

4 Схема Бернулли.

Задача Производится четыре выстрела по мишени, вероятность попадания при каждом выстреле равна $^2/_3$. Найти вероятность того, что в мишень попадут не менее двух раз.

Решение

$A = \{\text{Одним выстрелом попали в мишень}\}$

$p = p(A) = \frac{2}{3}$

$q = 1 - p = \frac{1}{3}$

$n = 4$

$$P_4(2,4) = C_4^2 \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + C_4^3 \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^1 + C_4^4 \left(\frac{2}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{3}\right)^0 = \frac{24+32+16}{81} = \frac{8}{9}$$

Ответ

$\frac{8}{9}$