Метод Монте-Карло

Зенкова Дарья, M3336

Вариант 2

1 Оценка объема

1.1 Задача

Методом Монте-Карло оценить объем части тела $\{F(\overline{x}) \leq c\}$, заключенной в k-мерном кубе с ребром $[0, 1]$. Функция имеет вид $F(\overline{x}) = f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_k)$. Для выбранной надежности $\gamma \geq 0.95$ указать асимптотическую точность оценивания и построить асимптотический доверительный интервал для истинного значения объема.
$f(x) = x^3$, размерность $k = 6$, $c = 1.4$, объем выборки $n = 10^4$ и $n = 10^6$.

1.2 Решение

Порядок действий:

1) Для начала сгенерируем n случайных точек в заданном k-мерном кубе.

2) Вычислим функцию $F(\overline{x})$ в каждой из точек.

3) Заведем множество $In = \{p_i | 0 \ if \ F(\overline{x_i}) > c, 1 \ otherwise\}$.

4) Вычислим среднее: $mean(In) = m$. Это и будет математическим ожиданием объема тела.

5) Далее найдем границы доверительного интервала. Для этого нам понадобится σ - среднеквадратичное отклонение, $t : \Phi(t) = \frac{\gamma}{2}$. Для данного γ $t = 0.64$. Доверительный интервал выглядит так:

$$m - t\frac{\sigma}{n} \leq V \leq m + t\frac{\sigma}{n}$$

.

1.3 Результат

$n = 10^4: \ 0.470005 \leq V \leq 0.476395$

$n = 10^6: \ 0.473600 \leq V \leq 0.474240$

2 Оценка интеграла

2.1 Задача

Построить оценку интегралов:

$$\text{a)} \int\limits_{2}^{5} ln(1+x^2)dx$$

$$\text{b)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} cos(x)e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}dx$$

2.2 Решение

Приближение интеграла можно рассматривать так:

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)dx = (b-a)\mathbf{E}(f(x)),$$

где математическое ожидание функции рассматривается как среднее по полученным значениям на выборке.
Второй интеграл имеет бесконечные границы, соответственно необходимо сделать такую замену, что границы будут конечными.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} cos(x)e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}dx = \int\limits_{-\infty}^{-3} cos(x)e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}dx + \int\limits_{-3}^{\infty} cos(x)e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}dx$$

Сделаем в первом интеграле замену $u = \frac{x+3}{2}$:

$$\int\limits_{-\infty}^{-3} cos(x)e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}dx = 2\int\limits_{-\infty}^{0} cos(2u-3)e^{-u^2}du$$

Далее сделаем замену $t = -u$:

$$\int\limits_{-\infty}^{0} cos(2u-3)e^{-u^2} = \int\limits_{0}^{\infty} cos(-2t-3)e^{-t^2}dt$$

Замена $r = \frac{1}{t+1}$.

$$\int\limits_{0}^{\infty} cos(-2t-3)e^{-t^2}dt = \int\limits_{0}^{1} cos(-\frac{2}{r}-1)e^{-\frac{(1-r)^2}{r^2}}\frac{1}{r^2}dr$$

Аналогично:

$$\int\limits_{-3}^{\infty} cos(x)e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}dx = 2\int\limits_{0}^{1} cos(\frac{2}{r} - 5)e^{-\frac{(1-r)^2}{r^2}}\frac{1}{r^2}dr$$

В итоге:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} cos(x)e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}dx = 2\int\limits_{0}^{1} (cos(\frac{2}{r} - 5) + cos(-\frac{2}{r} - 1))e^{-\frac{(1-r)^2}{r^2}}\frac{1}{r^2}dr$$

2.3 Результат

a) $I = \int\limits_{2}^{5} ln(1 + x^2)dx \approx 7.6041$

$$n = 10^4: \ 7.586897 \leq I \leq 7.605158$$

$$n = 10^6: \ 7.601046 \leq I \leq 7.602853$$

b) $I = \int\limits_{-\infty}^{\infty} cos(x)e^{-\frac{(x+3)^2}{4}}dx \approx -1.29105$

$$n = 10^4: \ -1.319270 \leq I \leq -1.284359$$

$$n = 10^6: \ -1.293289 \leq I \leq -1.289793$$