# 行列式

颜文斌

清华大学

# 内容提要

- **行列式的定义**
- 行列式的性质
- Cramer法则，矩阵的逆和体积

# 2x2矩阵的行列式（determinant）

- 2x2矩阵$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
- 2x2矩阵的行列式
$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$
  - 也记做$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$
- $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$
  - 2x2矩阵可逆，当且仅当$\det A \neq 0$

# 3x3矩阵的行列式

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$
$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

- $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

# 行列式（递归定义）

- nxn方阵$A$，记$A_{ij}$为去掉第i行和第j列的n-1xn-1矩阵
- **余子式**$C_{ij}$：定义为$(-1)^{i+j}\det A_{ij}$
- $A$的行列式：
  - n=1： $\det A = A_{11}$
  - n>1：

$$\text{行展开：}\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$
$$\text{列展开：}\det A = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \cdots + a_{ni}C_{ni}$$

- 余因子前面的正/负系数：

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \\ + & - & + & \\ \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

# 例

- 单位矩阵的行列式为1

$$\det\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \ddots & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=1$$

- 对角矩阵的行列式为对角元的乘积

$$\det\begin{pmatrix}a_{11} & 0 & 0\\0 & \ddots & 0\\0 & 0 & a_{nn}\end{pmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- 如果矩阵$A$某一行（列）全是零，则$\det A=0$

# 例（Lay书中的例子）

$$A=\begin{bmatrix}3 & -7 & 8 & 9 & -6\\ 0 & 2 & -5 & 7 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0\end{bmatrix} \qquad \det A = 3\cdot\begin{vmatrix}2 & -5 & 7 & 3\\ 0 & 1 & 5 & 0\\ 0 & 2 & 4 & -1\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{vmatrix} - 0\cdot C_{21} + 0\cdot C_{31} - 0\cdot C_{41} + 0\cdot C_{51}$$

$$\det A = 3\cdot 2\cdot\begin{vmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 0\end{vmatrix}$$

# 行列式定义的推论

- 定理：三角矩阵的行列式等于对角元的乘积
- 证明：先考虑$A$是上三角阵
  - $A$是1x1矩阵，定理成立
  - 假设定理对n-1xn-1矩阵成立，那么对于nxn矩阵$A$
    - $\det A = a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} + \cdots + a_{n1}C_{n1} = a_{11}C_{11} = a_{11}\det A_{11}$
    - $A_{11}$是n-1xn-1矩阵，由假设可知$\det A_{11} = \prod_{i=2}^{n} a_{ii}$
    - 因此nxn矩阵$A$的行列式$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$，也就说，定理对nxn矩阵成立
  - 由数学归纳法，定理成立
- 下三角矩阵证明类似

# 小结

- nxn方阵$A$，记$A_{ij}$为去掉第i行和第j列的n-1xn-1矩阵
- **余子式**$C_{ij}$：定义为$(-1)^{i+j}\det A_{ij}$
- $A$的行列式：

  行展开：$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$

  列展开：$\det A = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \cdots + a_{ni}C_{ni}$
- 推论：如果矩阵$A$某一行（列）全是零$\det A = 0$
- 定理：三角矩阵的行列式等于对角元的乘积

# 内容提要

- 行列式的定义
- **行列式的性质**
- Cramer法则，矩阵的逆和体积

# 行列式

- $A$的行列式：
  行展开：$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$
  列展开：$\det A = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \cdots + a_{ni}C_{ni}$
- $\det A$：
  - nxn实方阵到实数的映射
  - 换句话说，n个n维实向量到实数的映射
  - 如果矩阵$A$某一行（列）全是零$\det A = 0$

# 行列式性质1

- 行列式：n个n维实向量到实数的映射， $\det A = T(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$
- **定理（线性）**： $T(\boldsymbol{a}_1, \cdots, k\boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = kT\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$
  $T(\cdots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i, \cdots) = T\,(\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots) + T\,(\cdots, \boldsymbol{b}_i, \cdots)$
- 证明：
  - 用定义，对第i列做展开det$A = a_{1i}C_{1i} + a_{2i}C_{2i} + \cdots + a_{ni}C_{ni}$
  - 第i列乘k，

  $T(\boldsymbol{a}_1, \cdots, k\boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = ka_{1i}C_{1i} + ka_{2i}C_{2i} + \cdots + ka_{ni}C_{ni} = k\det A$
  - 另一个性质的证明类似

# 行列式性质2

- **定理**：交换$A$任意两行或者两列得到矩阵$B$，则$\det A = -\det B$
- 证明：数学归纳法
  - 用定义证明定理对2x2矩阵成立
  - 假设定理对n-1xn-1矩阵成立
  - 对于nxn矩阵$A$和$B$，且$A$交换第i和第j行（列）得到$B$，对$\det A$和$\det B$对第k行（列）做行（列）展开（k不等于i和j）
  - 两者展开式中余因子的部分是n-1xn-1的矩阵的行列式，且交换了两行（列），由假设，余因子差一个负号。另外，k行元素不变，所以$\det A = -\det B$对nxn矩阵也成立
  - 定理成立

# 行列式性质2

- **定理**：交换$A$任意两行或者两列得到矩阵$B$，则$\det A = -\det B$
- 推论：如果$A$任意两行或者两列相同，则$\det A = 0$
- 证明：交换$A$相同的两行，由定理$\det A = -\det A$，所以$\det A = 0$

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = 20 + 6 + 4 - 4 - 20 - 6 = 0$$

# 行列式性质3

- **定理**：将$A$的第i行（列）乘一个常数加到第j行（列）得到$B$，则$\det A = \det B$
- 证明：
- $T\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j+k\boldsymbol{a}_i,\cdots\right) = T\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j\cdots\right) + T\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,k\boldsymbol{a}_i\cdots\right) = T\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j\cdots\right) + kT\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_i\cdots\right) = T\left(\cdots,\boldsymbol{a}_i,\cdots,\boldsymbol{a}_j\cdots\right)$
- 推论： $A$的行（列）之间线性相关，则$\det A = 0$。换句话说，秩小于矩阵$A$的阶，则$\det A = 0$

# 行列式和行缩减阶梯形式

- 综合性质1、2、3，说明矩阵$A$的行列式在行变换下不变
- 假设矩阵$A$变成上三角矩阵$B$的过程中有r次换行，那么

$$\det A = (-1)^r \det B = \begin{cases} (-1)^r\text{所有主元的乘积，如果}A\text{可逆} \\ 0\text{，如果}A\text{不可逆} \end{cases}$$

# 行列式和逆矩阵

- 定理：方阵$A$可逆当且仅当$\det A \neq 0$
- 证明：利用前面的结论，把$\det A$和主元乘积结合起来

- 推论：方阵 $A$的行（列）之间线性相关，则$\det A = 0$，则$A$不可逆

# 行列式和矩阵运算

- 行列式和转置：行列式在转置下不变
$$\det A^T = \det A$$
- 行列式和矩阵乘法：矩阵乘积的行列式=行列式的乘积
$$\det AB = \det A \det B$$
- 证明：参考Lay书中的174页

- 推论：$\det A^{-1} = 1/\det A$

# Levi-Civita symbol

- 注意到2阶和3阶的行列式中，项数=阶数！=对应全排列的个数
- 定义Levi-Civita symbol（全反对称张量）：$\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n}$
  - $i_1, i_2, \cdots, i_n$取值范围$1, 2, \cdots, n$
  - $\epsilon_{12 \cdots n} = 1$
  - $\epsilon_{\cdots i_p \cdots i_q \cdots} = -\epsilon_{\cdots i_q \cdots i_p \cdots}$
- 性质：
  - 任意两个指标相同则$\epsilon_{\cdots i_p \cdots i_p \cdots} = 0$
  - $\epsilon_{i_1 i_2 \cdots i_n} = (-1)^p \, \epsilon_{12 \cdots n}$，如果$i_1 i_2 \cdots i_n$是$12 \cdots n$的一个全排列，$p$是从$i_1 i_2 \cdots i_n$到$12 \cdots n$需要两两交换的次数

# 行列式的第二种定义

- 利用Levi-Civita symbol，行列式也可以定义为

$$\det A = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_n=1}^{n} \epsilon_{i_1\cdots i_n} a_{1,i_1} a_{2,i_2} \cdots a_{n,i_n}$$

- 例：2阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \epsilon_{12} a_{11} a_{22} + \epsilon_{21} a_{12} a_{21} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

- 思考1:证明这个定义和前面的定义是等价的
- 思考2:用这个定义证明前面行列式的性质

# 行列式的第三种定义

- 行列式是n个n维实向量到实数的映射， $\det A = T(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$ ，且满足下面三个性质：
  1. 任意nxn的单位矩阵的行列式为1
  2. 任意交换两列，行列式反号
  3. 线性性： $T(\boldsymbol{a}_1, \cdots, k\boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n) = kT\,(\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots, \boldsymbol{a}_n)$
     $T(\cdots, \boldsymbol{a}_i + \boldsymbol{b}_i, \cdots) = T\,(\cdots, \boldsymbol{a}_i, \cdots) + T\,(\cdots, \boldsymbol{b}_i, \cdots)$
- 这个抽象定义可以参考：Serge Lang – Linear Algebra, pp 148

# 内容提要

- 行列式的定义
- 行列式的性质
- **行列式应用：Cramer法则，矩阵的逆和体积**

# Cramer法则

- 考虑线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，$A$是一个nxn矩阵
- $\boldsymbol{e}_i=\underbrace{(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0)^T}_{\text{第i位}}$，$A\boldsymbol{e}_i$是$A$的第i列
- nxn单位矩阵：$I=(\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_n)$
- 定义矩阵$B_i$为把$A$中的第i列换成$\boldsymbol{b}$的矩阵，则
$$A(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{i-1},\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n)=B_i$$
- 左右取行列式，则$\det A\det(\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_{i-1},\boldsymbol{x},\boldsymbol{e}_{i+1},\cdots,\boldsymbol{e}_n)=\det B_i$
$$x_i=\frac{\det B_i}{\det A}$$

# Cramer法则

- 考虑线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$，$A$是一个nxn矩阵
- 定义矩阵$B_i$为把$A$中的第i列换成$\boldsymbol{b}$的矩阵
- 如果$\det A \neq 0$，线性方程组的解为：

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}$$

- 如果$\det A = 0$，但是$\boldsymbol{b} \in C(A)$，会发生什么？

# Cramer法则的应用：矩阵求逆

- nxn方阵$A$，$AA^{-1}=I$，$A$的第i行第j列的元素记为$a_{ij}$
- 把$A^{-1}$的元素看成未知数，解线性方程组
- 解：

$$(A^{-1})_{ij}=\frac{C_{ji}}{\det A}$$

- 验证：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(A^{-1})_{jk}=\frac{1}{\det A}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}C_{kj}=\delta_{ik}$$

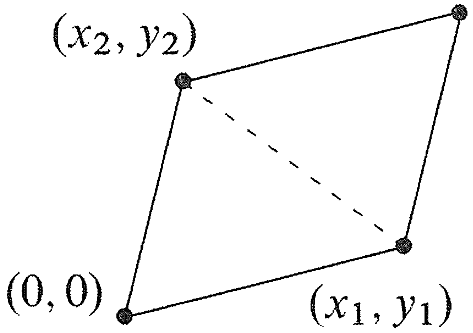
- i=k，行列式的行展开。$i\neq k$，有两行相同的矩阵的行列式

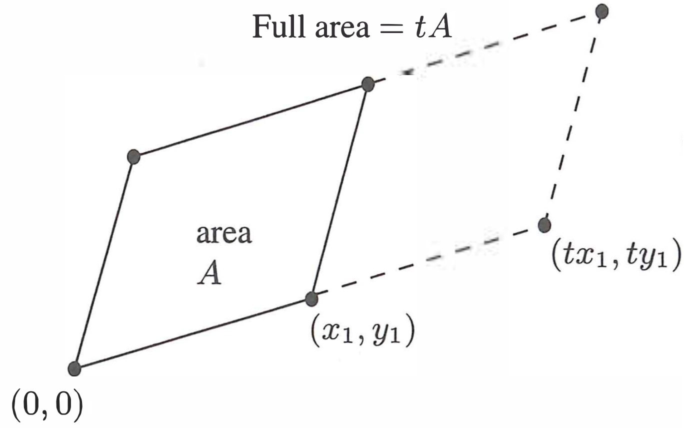
# 平面中平行四边形面积

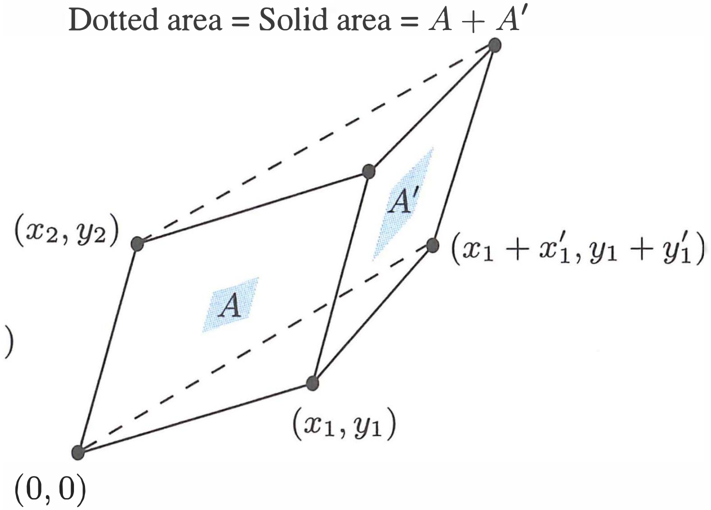
- 平面中向量$(x_1, y_1)$和$(x_2, y_2)$张成的平行四边形面积为公式

$$\text{面积} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

- 证明思路：
  1. (1,0)和(0,1)张成的平行四边形面积为1
  2. 规定交换两边，面积大小不变，但是加一个符号
  3. 证明线性性
  4. 1-3给出了行列式的定义，面积=行列式



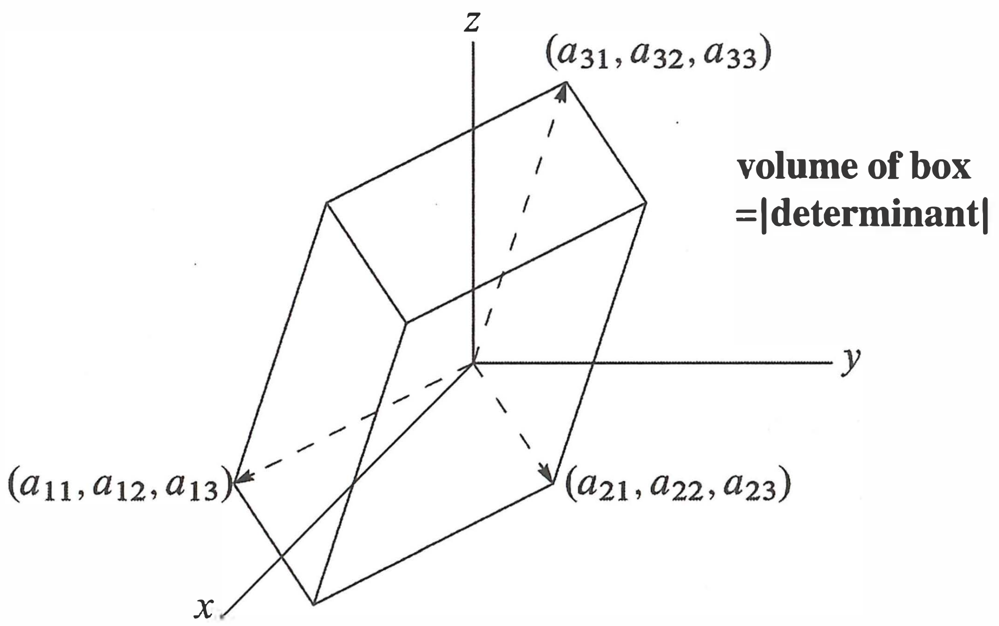



# 三维空间中盒子的体积

- 由$(a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}), (a_{31}, a_{32}, a_{33})$围成的三维盒子的体积

$$体积 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

- 不考虑指向，体积=行列式的绝对值



# 三维向量的叉乘

- 两个三维向量$u$和$v$的叉乘是一个新的三维向量，公式为

$$u \times v = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\boldsymbol{i} - (u_1 v_3 - u_3 v_1)\boldsymbol{j} + (u_1 v_2 - u_2 v_1)\boldsymbol{k}$$

- 性质：
  - 只在三维空间中有定义
  - $u \times v = -v \times u$
  - $u \times v$垂直于$u, v$所在的平面
  - 向量和自己的叉乘为0

# 小结

1. Cramer's Rule solves $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ by ratios like $x_1 = |B_1|/|A| = |\boldsymbol{b}\,\boldsymbol{a}_2 \cdots \boldsymbol{a}_n|/|A|$.
2. When $C$ is the cofactor matrix for $A$, the inverse is $A^{-1} = C^{\mathrm{T}} / \det A$.
3. The volume of a box is $|\det A|$, when the box edges are the rows of $A$.
4. Area and volume are needed to change variables in double and triple integrals.
5. In $\mathbf{R}^3$, the cross product $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ is perpendicular to $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$. Notice $\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k}$.