向量和矩阵

向量（vector）

- 确定一个数域（number field）：实数域、复数域等等
- 标量（scalar）：c，实数
- 向量（矢量，vector）：
  - 列向量（column vector）：$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$
  - 行向量（row vector）：$\boldsymbol{v} = (v_1 \quad \cdots \quad v_n)$
  - 每个分量都是实数，分量的个数=向量的维数
- 记号
  - 粗体$\boldsymbol{v}$，或者$\vec{v}$代表向量
  - Strang书里有方括号圆括号的区别，我们这里不做区分

例子：

- 零向量（zero vector）：$\mathbf{0}$或者$\vec{0}$
  $$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
  - 与数字0不同！
- 反向量（reverse vector）：$-\boldsymbol{v}$
  - $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$，那么 $-\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$

例子：

- 平面直角坐标系中的点可以用向量表示：

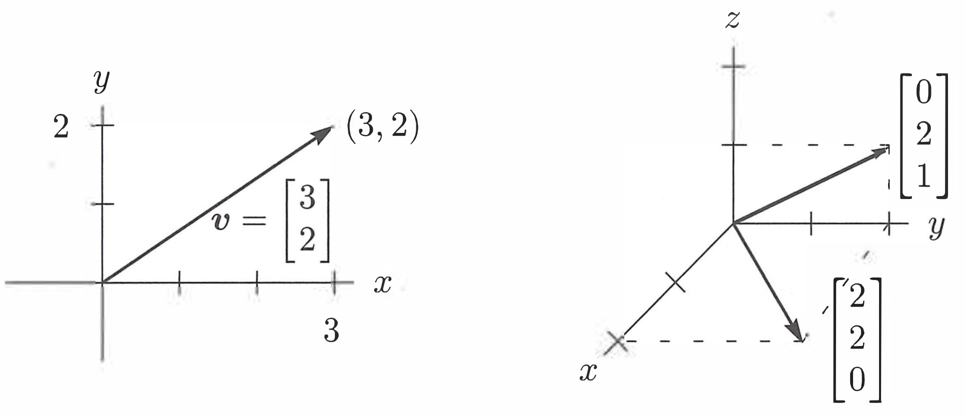
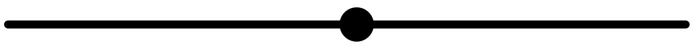


Figure 1.2: Vectors $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ and $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ correspond to points (x, y) and (x, y, z).

例子：

- 直线上一个匀速运动的点，它的状态由它的位置 X 和它的速度 V 共同决定，换句话说，它的状态由二维向量 (X, V) 决定。



(x, v)

- 三维空间中一个运动的点，它的状态由位置x和速度v共同决定，或者说由六维向量(x, v)决定
- 相空间
- 其它向量的例子？

向量的运算：加法

- 向量的加法：

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{pmatrix}$$

- 各个分量相加
  - 只有分量相同的向量才能相加
- 规律：
  - 交换律：$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v}$
  - 结合律：$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

例：

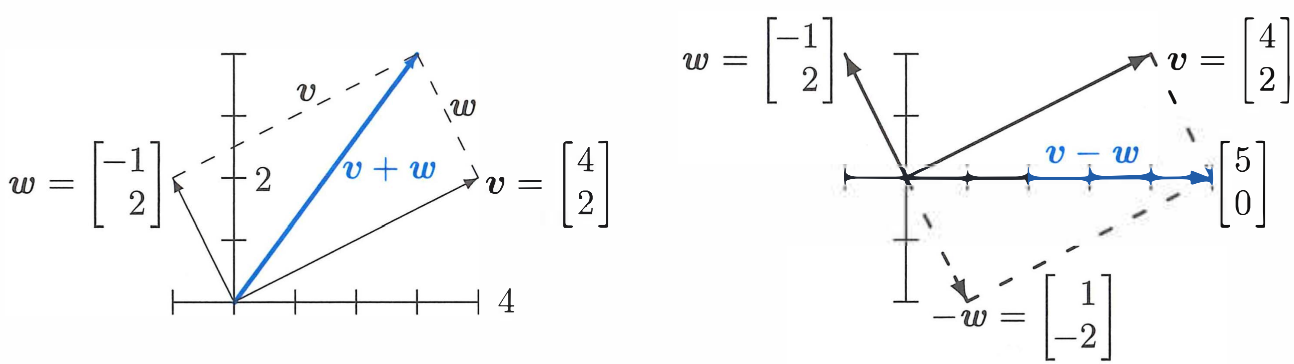
- 零向量（zero vector）：$\mathbf{0}$或者$\vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 反向量：$-\boldsymbol{v}$
  - $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$，那么 $-\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{pmatrix}$
- 由定义可知
  - $\boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$
  - $\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \mathbf{0}$

例：

- 二维平面直角坐标系：平行四边形法则



$$v + w = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad v - w = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Figure 1.1: Vector addition $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (3,\ 4)$ produces the diagonal of a parallelogram. The reverse of $\boldsymbol{w}$ is $-\boldsymbol{w}$. The linear combination on the right is $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (5,\ 0)$.

向量的运算：数乘

- 数乘（scalar product）：

$$c\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 \\ \vdots \\ cv_n \end{pmatrix}$$

- 数域中的一个元素c 和一个向量$\boldsymbol{v}$之间的运算
- 规律：
  - $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$, $(-1)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$
  - $c(d\boldsymbol{v}) = (cd)\boldsymbol{v} = cd\boldsymbol{v}$
  - $(c+d)\boldsymbol{v} = c\boldsymbol{v} + d\boldsymbol{v}$
  - $c(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = c\boldsymbol{v} + c\boldsymbol{w}$
  - $0\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

向量的运算：线性组合

- 线性组合（linear combination）：

$$cv + dw = c\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cv_1 + dw_1 \\ \vdots \\ cv_n + dw_n \end{pmatrix}$$

- 特殊线性组合：
  - $1\boldsymbol{v} + 1\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$，向量加法
  - $1\boldsymbol{v} - 1\boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$，向量减法
  - $0\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$
  - $c\boldsymbol{v} + 0\boldsymbol{w} = c\boldsymbol{v}$

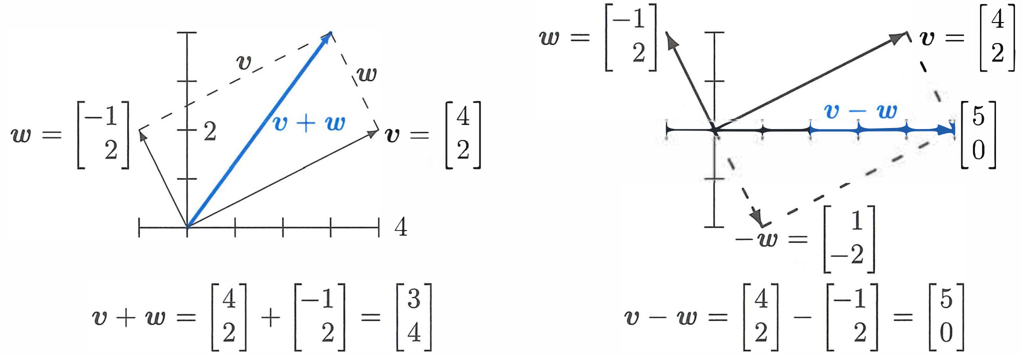


Figure 1.1: Vector addition $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (3,\ 4)$ produces the diagonal of a parallelogram. The reverse of $\boldsymbol{w}$ is $-\boldsymbol{w}$. The linear combination on the right is $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (5,\ 0)$.

线性组合的几何意义

- 考虑三维空间中向量（三个分量）的线性组合

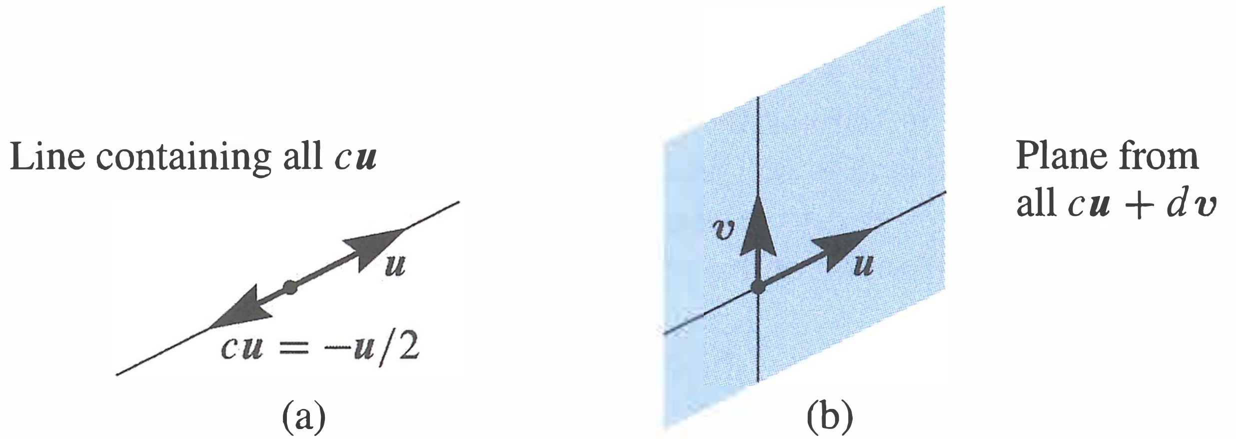


Figure 1.3: (a) Line through $\boldsymbol{u}$. (b) The plane containing the lines through $\boldsymbol{u}$ and $\boldsymbol{v}$.

- 两个向量的线性组合总是构成平面吗？
- 三个向量的线性组合构成什么？ 四个呢？

小结：向量和向量运算

- 向量$\boldsymbol{v}$的分量$v_1, v_2, \cdots, v_n$都是实数（数域中的元素）
- 向量的加法
  - 两个向量参与的运算，结果是一个向量。分量分别相加
  - 交换律、结合律
- 向量的数乘：
  - 一个实数和一个向量参与的运算，结果是一个向量。
  - 结合律、分配律
- 线性组合
  - 几何意义

向量的运算：内积（inner product）

- 两个向量间的运算，结果是一个数
  - $\boldsymbol{v} = (v_1, \cdots, v_n),\ w = (w_1, \cdots, w_n)$
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = v_1 w_1 + v_1 w_1 + \cdots + v_n w_n = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$
- 这么定义的内积是向量集合上的额外结构，是内积的一种，能够给出通常平面直角坐标系中的长度
- 性质：
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$
  - $(c\boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = c(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})$
  - $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$, 等号成立当且仅当 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

例子

- 二维平面直角坐标系：

$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w} = -4+4=0$$

- $\boldsymbol{v}$ 和 $\boldsymbol{w}$ 正交

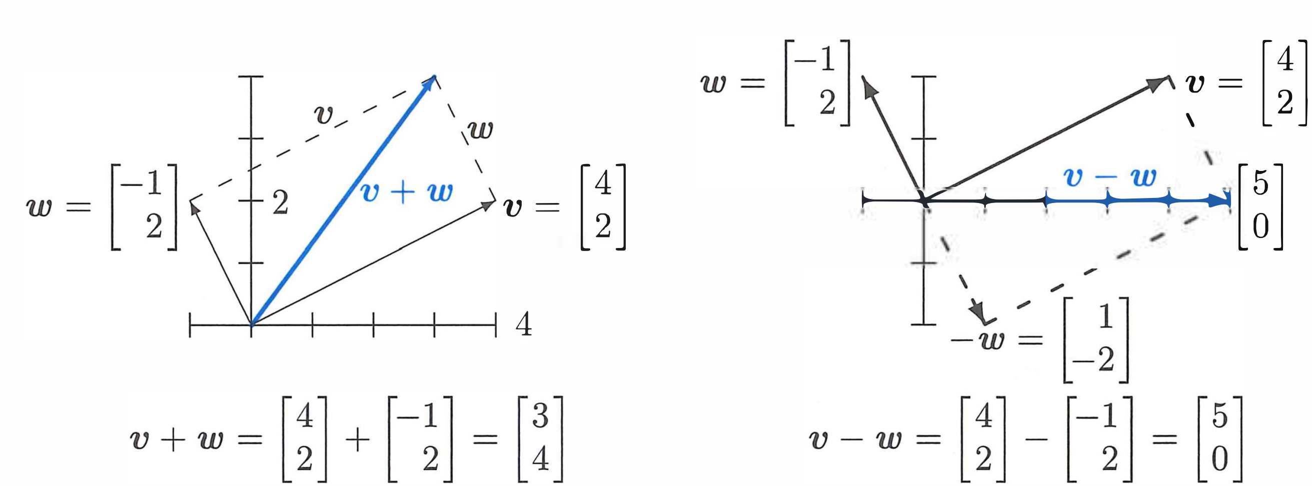
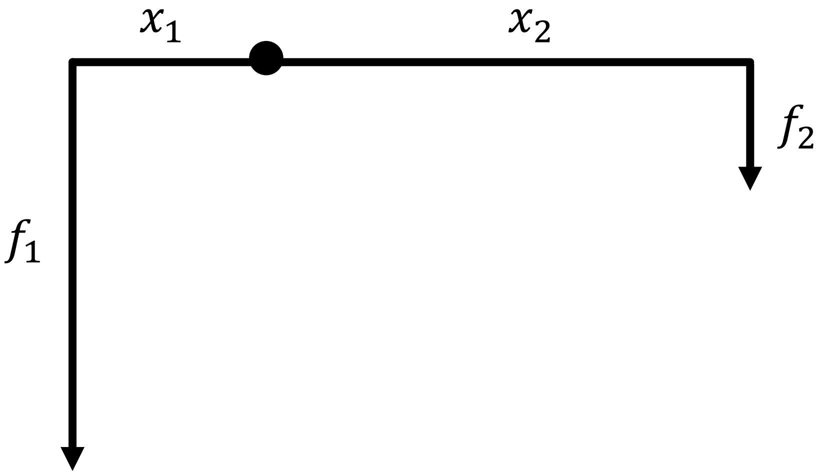


Figure 1.1: Vector addition $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}=(3,\ 4)$ produces the diagonal of a parallelogram. The reverse of $\boldsymbol{w}$ is $-\boldsymbol{w}$. The linear combination on the right is $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{w}=(5,\ 0)$.

例子：

- 力矩平衡：

$$(f_1, f_2) \cdot (x_1, x_2) = f_1 x_1 + f_2 x_2 = 0$$



例子：

- 超市收入：
  - 商品单价：$\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$
  - 商品数量（卖出为正，买入为负）:$\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$
  - 净收入： $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{q} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{q}_i$
- 向量维数可能很大
- 其它例子？

向量的长度

- 向量的长度
$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}} = (v_1^2 + v_2^2 \cdots + v_n^2)^{1/2}$$
  - 性质：$\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$，等号成立当且仅当$\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$
- 单位向量（unit vector）：
  - 长度为1的向量$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u} = 1$
  - $\frac{\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{v}\|}$是和$\boldsymbol{v}$同方向的单位向量

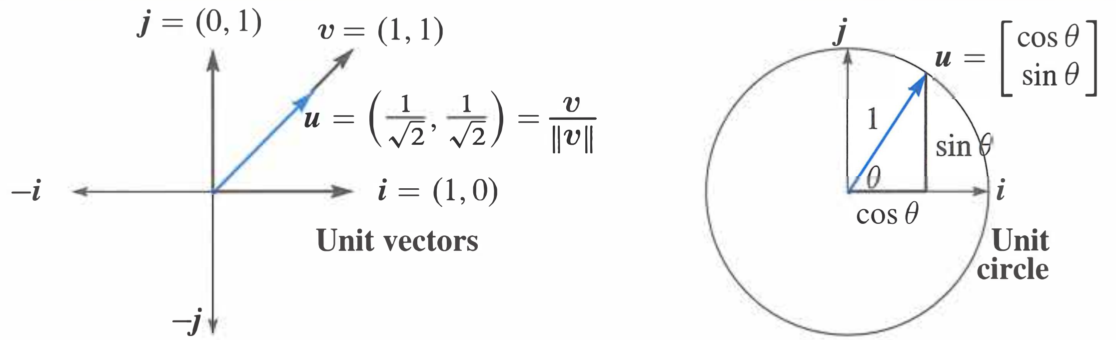


Figure 1.7: The coordinate vectors $\boldsymbol{i}$ and $\boldsymbol{j}$. The unit vector $\boldsymbol{u}$ at angle 45° (left) divides $\boldsymbol{v} = (1,1)$ by its length $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{2}$. The unit vector $\boldsymbol{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ is at angle θ.

向量的夹角

- $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ 当且仅当$\boldsymbol{v}$垂直于$\boldsymbol{w}$
- 两个向量间的夹角

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}$$

  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} > 0$ 夹角小于90度
  - $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} < 0$ 夹角大于90度，小于等于180度
  - $|\cos\theta| \leq 1$ 因此 $|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \leq \|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|$
- 什么时候两个向量同方向？

小结：内积、向量的长度

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. The dot product $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ multiplies each component v_i by w_i and adds all $v_i w_i$.

2. The length $\|\boldsymbol{v}\|$ is the square root of $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v}$. Then $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}/\|\boldsymbol{v}\|$ is a ***unit vector***: length 1.

3. The dot product is $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = 0$ when vectors $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{w}$ are perpendicular.

4. The cosine of θ (the angle between any nonzero $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{w}$) never exceeds 1:

Cosine $\cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}}{\|\boldsymbol{v}\|\|\boldsymbol{w}\|}$ ***Schwarz inequality*** $|\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}| \leq \|\boldsymbol{v}\| \, \|\boldsymbol{w}\|$.

矩阵（matrix）

- 标量（scalar, 1×1）：c，实数
- 向量（矢量，vector）：
  - 列向量（column vector, $m\times1$）：$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix}$
  - 行向量（row vector, $1\times n$）：$\boldsymbol{v}=\begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$
- 矩阵（matrix, $m\times n$）：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

  - A_{ij}: 矩阵A第i行第j列的元素
- 方阵（square matrix）：$m=n$

例子：计算机图像

- 10x10像素的黑白图片：0代表全白，1代表全黑，10x10矩阵

$$
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0
\end{pmatrix}
\qquad
\begin{pmatrix}
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&1&1&1&0&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&1&1&1&1&1&0&0
\end{pmatrix}
$$

- 对图像的操作转化为对矩阵的操作
- 灰色？彩色？

例子：黑洞

- Schwarzchild黑洞的度量（度规，metric）
- $ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

- 对角矩阵
- 其它矩阵的例子？

矩阵和向量

- $m \times n$矩阵A作用在n维向量$\boldsymbol{x}$上，结果是一个m维向量$b = A\boldsymbol{x}$

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j$$

- $A\boldsymbol{x}$是A所有列的线性组合

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} x_1 + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} x_2$$

矩阵和向量

- $m\times n$矩阵A作用在n维向量$\boldsymbol{x}$上，结果是一个m维向量$b = A\boldsymbol{x}$

$$b_i = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}x_j$$

- $A\boldsymbol{x}$是A所有行分别和$\boldsymbol{x}$的内积

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1,\ 0,\ 0) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (-1, 1, 0) \cdot (x_1, x_2, x_3) \\ (0, -1, 1) \cdot (x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}$$

线性方程组

- $m \times n$矩阵A作用在n维向量$\boldsymbol{x}$上，结果是一个m维向量$\boldsymbol{b} = A\boldsymbol{x}$，也可以看成是一个n元线性方程组

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = b_i$$

- 线性方程组也可以写成矩阵的形式$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

- 矩阵A的逆矩阵A^{-1}
- 问题：下面这个方程组的解？

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

所有线性方程组都有解吗？

- 循环差分矩阵C 作用在x构成的线性方程组

$$C\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

- 对于一般的$\boldsymbol{b}$：没有解
- $\boldsymbol{b} = \mathbf{0}$：无穷多的解

$$A\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{b}$$

- 两组方程的区别？

线性相关、线性无关

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

不在同一平面

只有线性组合 $0u + 0v + 0w = \mathbf{0}$

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad w^* = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

在同一个平面

无穷多的线性组合得到**0**向量

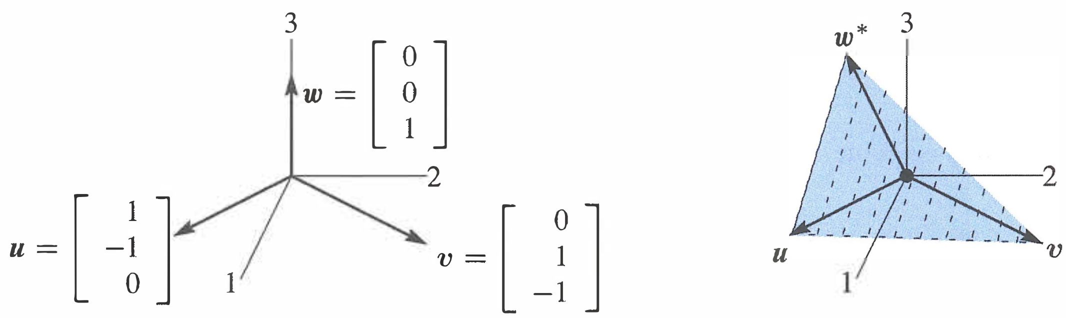


Figure 1.10: Independent vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$. Dependent vectors $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}^*$ in a plane.

以后会更严格的定义线性相关、线性无关

小结：矩阵和向量

■ REVIEW OF THE KEY IDEAS ■

1. **Matrix times vector**: $Ax =$ **combination of the columns of** A.

2. The solution to $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ is $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$, when A is an invertible matrix.

3. The cyclic matrix C has no inverse. Its three columns lie in the same plane. Those dependent columns add to the zero vector. $C\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ has many solutions.

4. This section is looking ahead to key ideas, not fully explained yet.

作业

- Problem set 1.3

矩阵的运算：转置（transpose）

- $m \times n$的矩阵A，其转置是一个$n \times m$的矩阵，且
$$(A^{\mathrm{T}})_{ij} = A_{ji}$$
- 例：
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$
- 性质：
  - $(A^T)^T = A$
  - 行向量可以看成相同分量的列向量的转置
$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \qquad v^T = \begin{pmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$

矩阵运算：加法、数乘

- 矩阵加法：$m \times n$的矩阵A和B

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

  - 各个分量分别相加，只有同样大小的矩阵可以相加
- 矩阵数乘：$(cA)_{ij} = cA_{ij}$
  - 每个分量分别乘c

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 4 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$