گزارش تمرین کامپیوتری 7 درس سیگنال‌ها و سیستم‌ها

بابک حسینی محتشم 810101408

محمدسینا پرویزی مطلق 810101394

1403/10

تمرین اول:

الف) ابتدا رابطه KVL را مینویسیم.

$$v_R(t) + v_L(t) + v_C(t) = v_{in}(t)$$

حال رابطه هر یک از جملات موجود در رابطه بالا را به صورت جداگانه مینویسیم.

$$v_R(t) = Ri(t), \qquad v_L(t) = L\frac{di(t)}{dt}, \qquad v_C(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$$

حال هر یک از جملا را در معادله اول جایگزین کرده و از طرفین نسبت به زمان مشتق میگیریم.

$$Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau = v_{in}(t)$$
$$\rightarrow L\frac{d^2i(t)}{dt^2} + R\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C}i(t) = \frac{dv_{in}(t)}{dt}$$

ب) ابتدا تبدیل لاپلاس هر جمه را به دست آورده و با توجه به خاصیت خطی بودن، تبدیل لاپلاس کل عبارت را به دست می‌آوریم.

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{C}i(t)\right)=\frac{1}{C}I(s),\mathcal{L}\left(R\frac{di(t)}{dt}\right)=RsI(s),\mathcal{L}\left(L\frac{d^2i(t)}{dt^2}\right)$$
$$=Ls^2I(s),\mathcal{L}\left(\frac{dv_{in}(t)}{dt}\right)=sV_{in}(s)$$

درنتیجه:

$$Ls^2I(s)+RsI(s)+\frac{1}{C}I(s)=sV_{in}(s)$$

حال میتوانیم تبدیل لاپلاس جریان یا ولتاژ منبع تغذیه را برحسب دیگری بیان کنیم:

$$I(s)=\frac{V_{in}(s)}{Ls+R+\frac{1}{Cs}},\qquad V_{in}(s)=I(s)(Ls+R+\frac{1}{Cs})$$

ج) تبدیل لاپلاس انتگرال گیر $\frac{1}{s}$ است پس با توجه به رابطه بین ولتاژ و جریان خازن، تبدیل لاپلاس ولتاژ خازن را نسبت به تبدیل لاپلاس جریان آن به دست می‌آوریم.

$$v_C(t)=\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t}i(\tau)d\tau\rightarrow V_C(s)=\frac{1}{Cs}I(s)$$

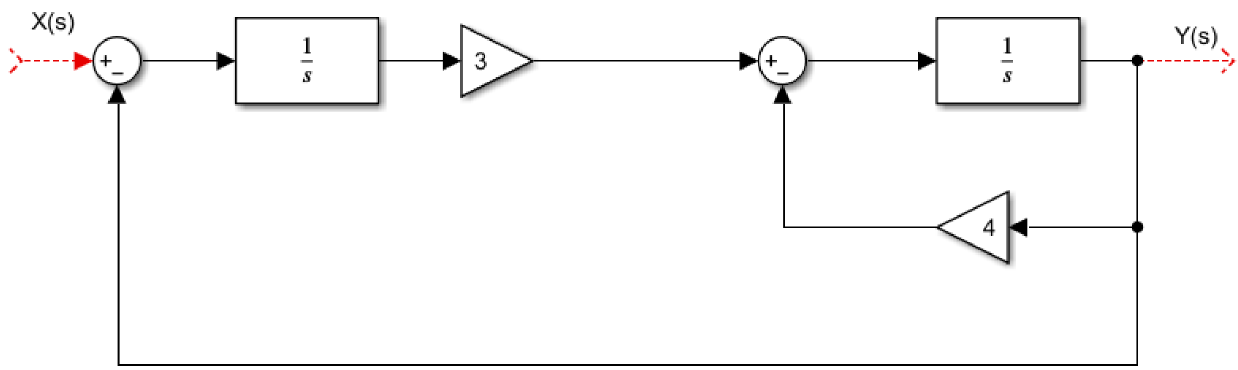
حال رابطه جریان به دست آمده در قسمت ب را جایگزین میکنیم:

$$V_C(s)=\frac{1}{Cs}I(s)=\frac{V_{in}(s)}{LCs^2+RCs+1}\rightarrow Y(s)=\frac{X(s)}{LCs^2+RCs+1}$$

د) حال با فرض مقادیر عددی داده شده، در متلب، مدار خواسته شده را با بلاک‌های داده شده رسم می‌کنیم.

$$Y(s)=\frac{X(s)}{\frac{1}{3}\times s^2+\frac{4}{3}\times s+1}\rightarrow \frac{1}{3}s^2Y(s)+\frac{4}{3}sY(s)+Y(s)=X(s)$$

$$\rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2}3\big(X(s)-Y(s)\big)-\frac{4}{s}Y(s)$$

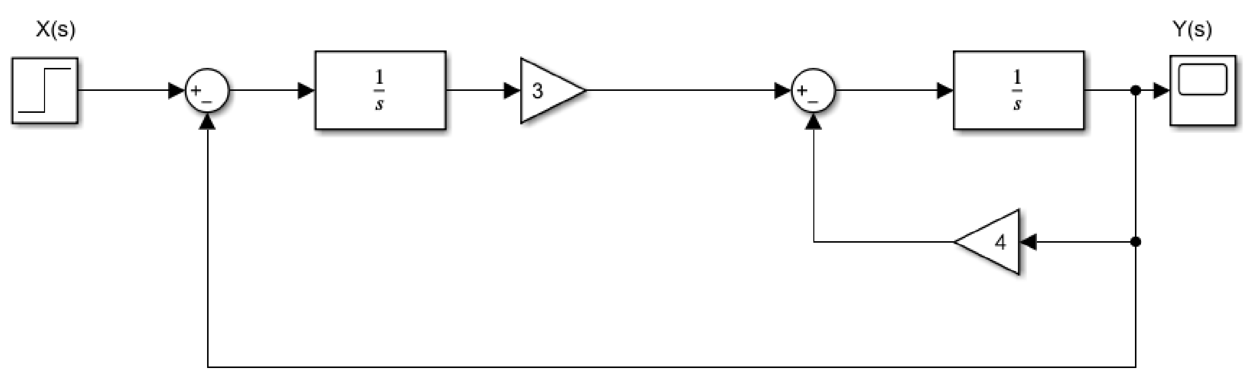


و) تبدیل لاپلاس پاسخ پله برابر است با $\frac{1}{s}$ پس از رابطه قسمت د پاسخ پله را به دست می‌آوریم:

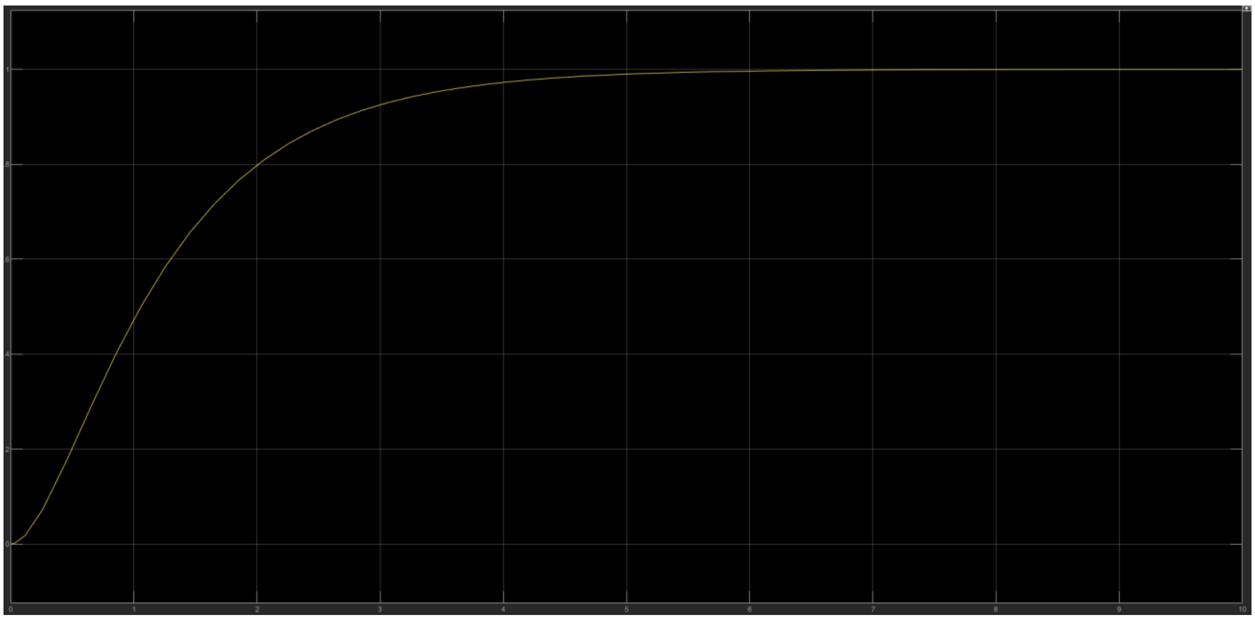
$$Y(s)=\frac{3}{(s^2+4\times s+3)s}=\frac{1}{s}-\frac{3}{2(s+1)}+\frac{1}{2(s+3)}$$

$$\rightarrow y(t)=1-\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}$$

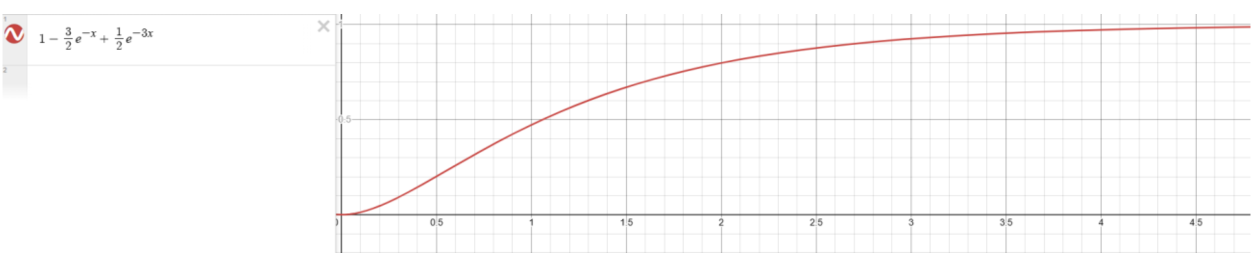
ه) حال مدار را کامل میکنیم.



شبیه سازی را اجرا میکنیم و خروجی زیر را مشاهده میکنیم:



برای اطمینان از پاسخ درست، شکل رابطه به دست آمده در قسمت و را نیز رسم میکنیم:



میتوان تطابق دو نمودار را مشاهده کرد. هر دو از صفر شروع شده و در بی نهایت به یک میل میکنند.

تمرین دوم:

الف) رابطه ی داده شده را ساده میکنیم تا به یک معادله ی دیفرانسیلی برسیم:

$$\left(x(t)-y(t)\right)+B\left(\frac{dx(t)}{dt}-\frac{dy(t)}{dt}\right)=\frac{d^2y(t)}{dt^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2y(t)}{dt^2}+B\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=B\frac{dx(t)}{dt}+x(t)$$

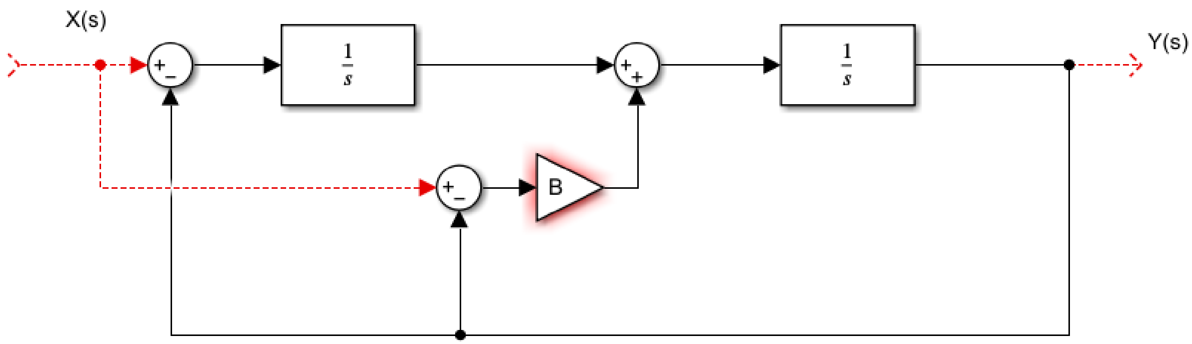
ب) مانند تمرین قبل عمل میکنیم:

$$s^2Y(s)+BsY(s)+Y(s)=BsX(s)+X(s)$$

$$\rightarrow Y(s)=\frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}X(s)$$

مانند قبل با ساده کردن رابطه، میتوانیم بلاک دیاگرام را ترسیم کنیم.

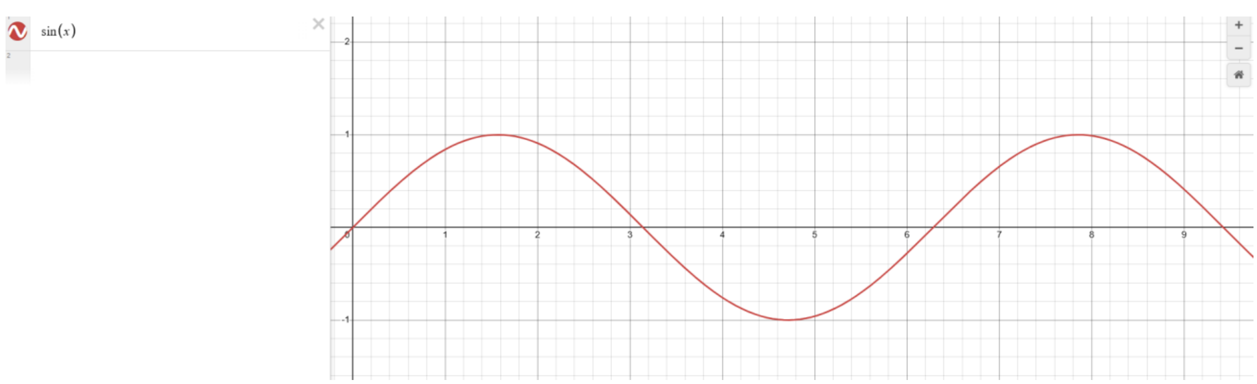
$$Y(s)=\frac{1}{s^2}(X(s)-Y(s))+\frac{B}{s}\left(X(s)-Y(s)\right)$$



ج) به دلیل عدم وجود تعدیل کننده B را صفر گذاشته و پاسخ ضربه سیستم را به دست می‌آوریم:

$$Y(s) = \frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}X(s) \rightarrow Y(s) = \frac{1}{s^2+1} \rightarrow y(t) = \sin(t)$$

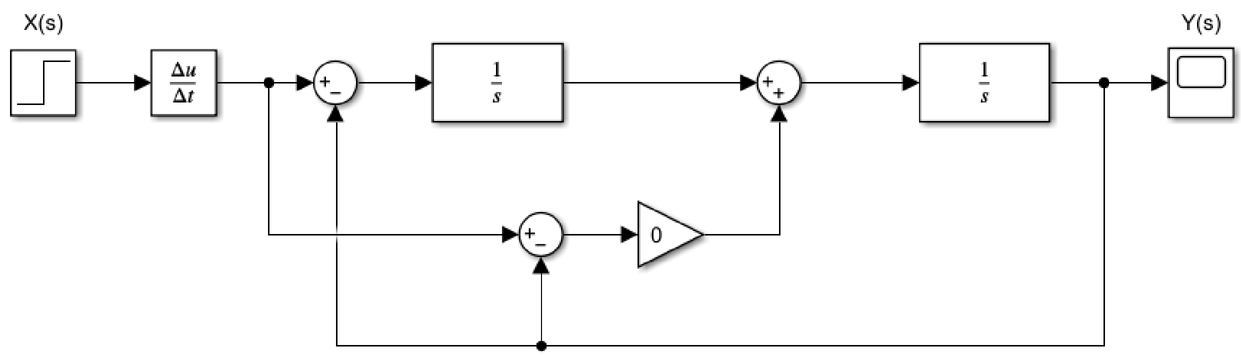
شکل نمودار:



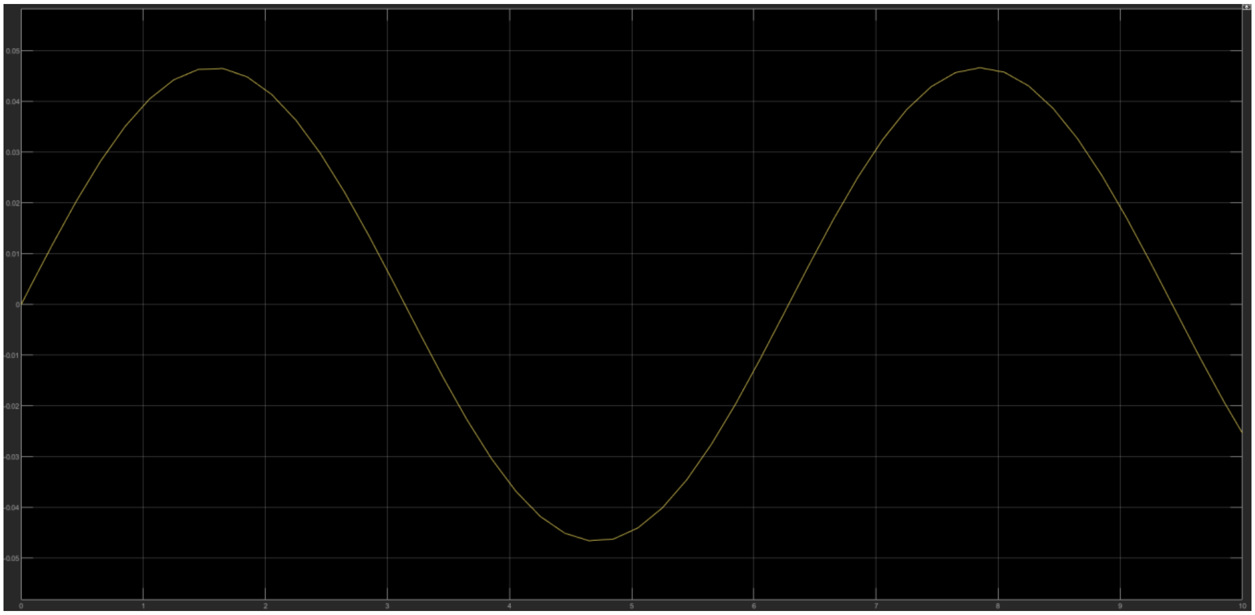
میتوان دید در صورت نبود تعدیل کننده، ماشین به صورت سینوسی به بالا و پایین حرکت میکند.

البته همان طور که در ویدیو نیز مشخص است به دلیل اصطکاک محیط، این از این حرکت عمودی کاسته میشود تا بالاخره خودرو روی زمین ثابت میشود ولی با این حال مقدار اصطکاک بدون تعدیل کننده آن قدری نیست که مسافر و راننده این حرکت را متوجه نشوند.

مدار را کامل میکنیم:



شکل زیر را در خروجی مشاهده میکنیم که دقیقا همان موج سینوسی است که انتظارش را داشتیم:



د) با حل معادله، کوچکترین B که به ازای آن همچنان قطب‌های تابع حقیقی باشند را به دست می‌آوریم.

$$Y(s) = \frac{Bs+1}{s^2+Bs+1}X(s) \rightarrow \text{قطب}: s^2+Bs+1=0$$

برای حقیقی شدن قطب‌ها باید دلتا مثبت باشد:

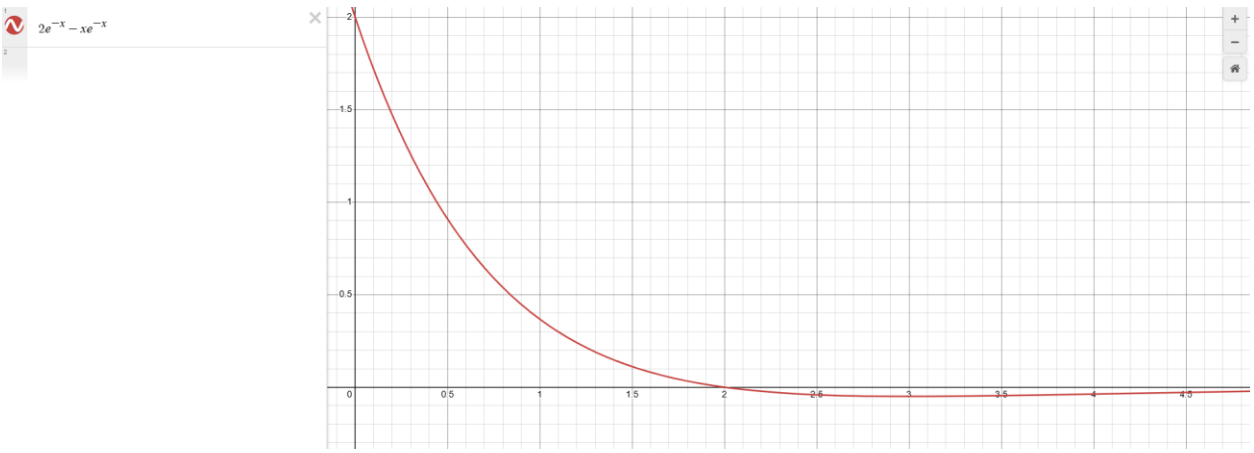
$$B^2-4>0 \rightarrow B>2$$

پس B باید حداقل برابر 2 باشد تا قطب‌های تابع تبدیل حقیقی شوند.

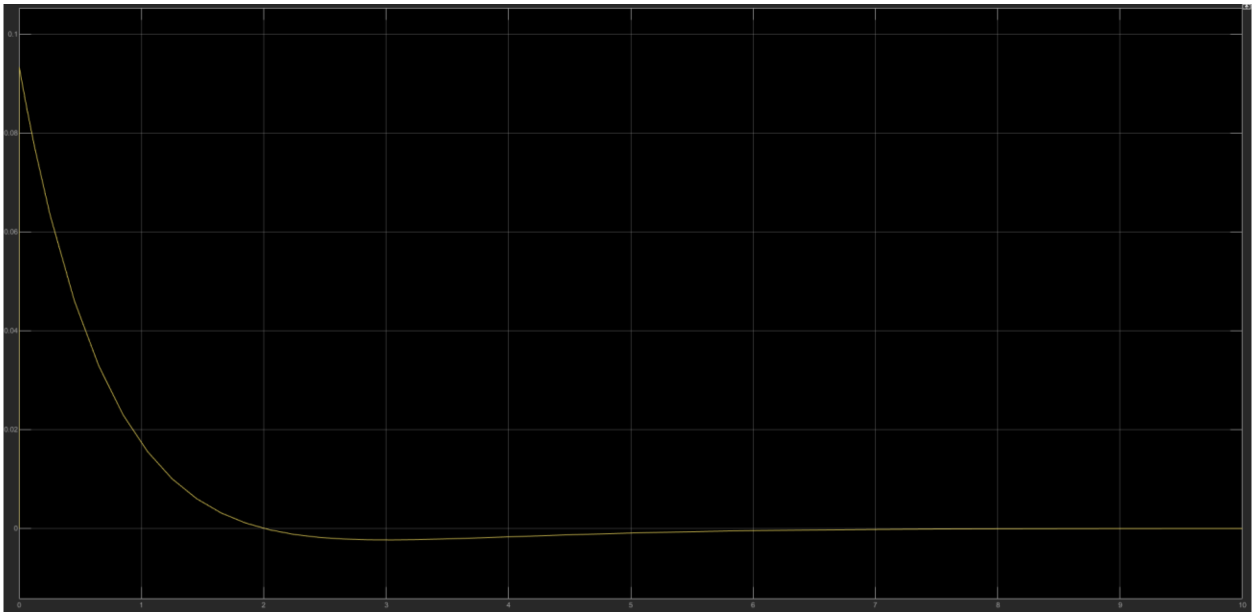
حال پاسخ ضربه‌ی سیستم را به دست می‌آوریم:

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1} = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \rightarrow y(t) = 2e^{-t} - te^{-t}$$

شکل معادله به دست آمده:



خروجی شبیه‌سازی:



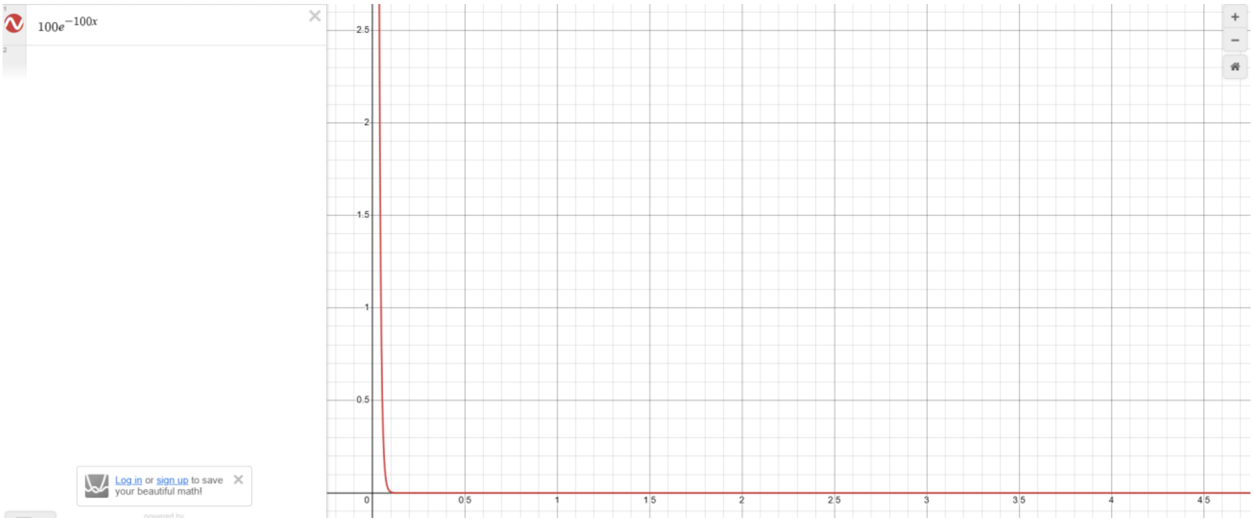
تطابق دو شکل مشخص است. در این حالت، خودرو کمی بالا میرود ولی با گذر زمان به ارتفاع صفر بازمیگردد و ثابت میشود.

و) پاسخ ضربه‌ی سیستم را به ازای *B=100* به دست می‌آوریم:

$$Y(s) = \frac{100s + 1}{s^2 + 100s + 1} \approx \frac{100s + 1}{(s + 100)(s + 0.01)} = \frac{100}{s + 100}$$

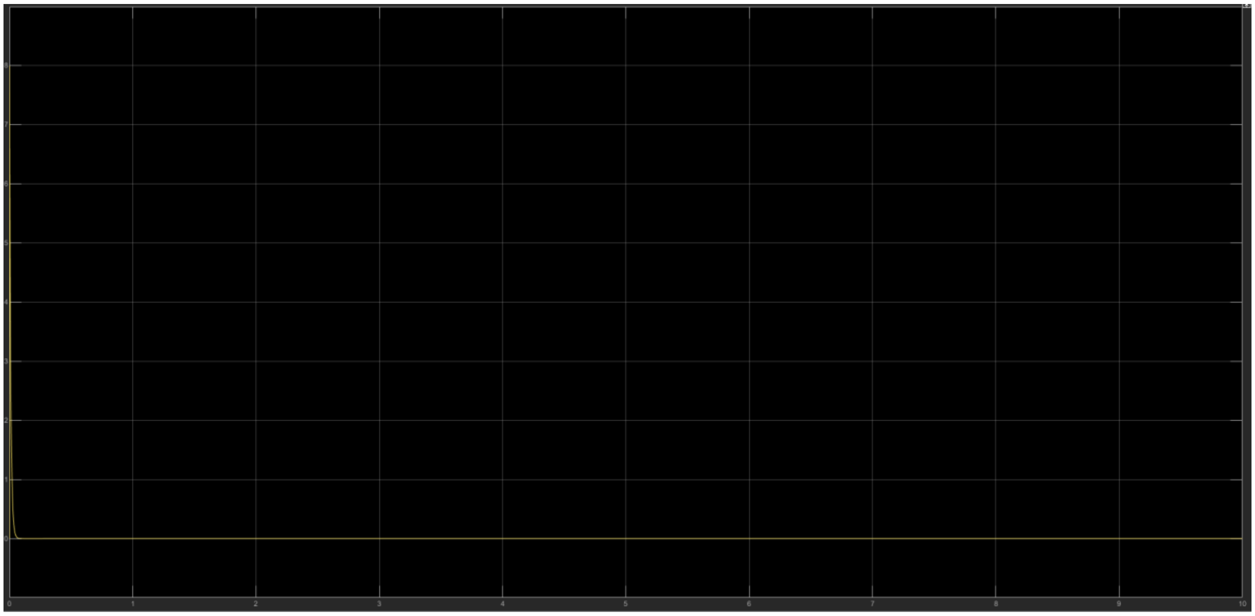
$$\rightarrow y(t) \approx 100e^{-100t}$$

شکل نمودار:



در این حالت همان طور که از نمودار مشخص است، ابتدا خودرو بسیار بالا میرود ولی مدت زمان بسیار کوتاهی به ارتفاع صفر برمیگردد و ثابت میشود.

خروجی شبیه‌سازی:



می‌توان شباهت پاسخ تئوری و شبیه‌سازی را حتی با تقریب زدن در پاسه تئوری مشاهده کرد.

ه) در حالت ج خودرو مدام به بالا و پایین حرکت میکند و در حالت تئوری هیچ گاه ثابت نمیشود با اینکه در واقعیت پس از گذر زمانی ثابت میشود ولی همین مدت زمان نیز در عمل غیرقابل قبول است. در حالت و، خودرو ابتدا به ارتفاع بسیار زیادی بالا میرود و پس از مدت کوتاهی دوباره به ارتفاع صفر برمیگردد و ثابت میشود ولی به دلیل پرش زیاد اولیه، در عمل این مورد نیز غیرقابل قبول است. مورد دوم میتواند مورد قبول باشد چون حالتی بین دو حالت قبل است، ابتدا مقداری

کمتر از حالت و به بالا میرود و پس از گذر زمان کوتاه تری نسبت به حالت ج، به ارتفاع صفر برمیگردد.

تمرین سوم:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$
$$y(0^-) = 1, \qquad y'(0^-) = 1$$
$$x(t) = 5u(t)$$

الف) تبدیل لاپلاس یک طرفه معادله بالا را به دست می‌آوریم.

$$u\mathcal{L}\left(\frac{dy(t)}{dt}\right) = sY(s) - y(0^-)$$

$$u\mathcal{L}\left(\frac{d^2y(t)}{dt^2}\right) = s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)$$

$$\rightarrow X(s) = s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-) + 3sY(s) - 3y(0^-) + 2Y(s)$$

حال مقادیر اولیه را جایگذاری می‌کنیم:

$$\rightarrow \frac{5}{s} = s^2Y(s) - s + 3sY(s) - 4 + 2Y(s)$$

$$\rightarrow Y(s) = \frac{\frac{5}{s} + s + 4}{s^2 + 3s + 2}$$

پاسخ از دو قسمت مربوط به ورودی و شرایط اولیه تشکیل شده که می‌توانیم پاسخ را به این دو تجزیه کنیم:

$$\rightarrow Y_{initial}(s) = \frac{s+4}{(s+2)(s+1)} = \frac{3}{s+1} - \frac{2}{s+2}$$

$$\rightarrow y_{initial}(t) = 3e^{-t} - 2e^{-2t}$$

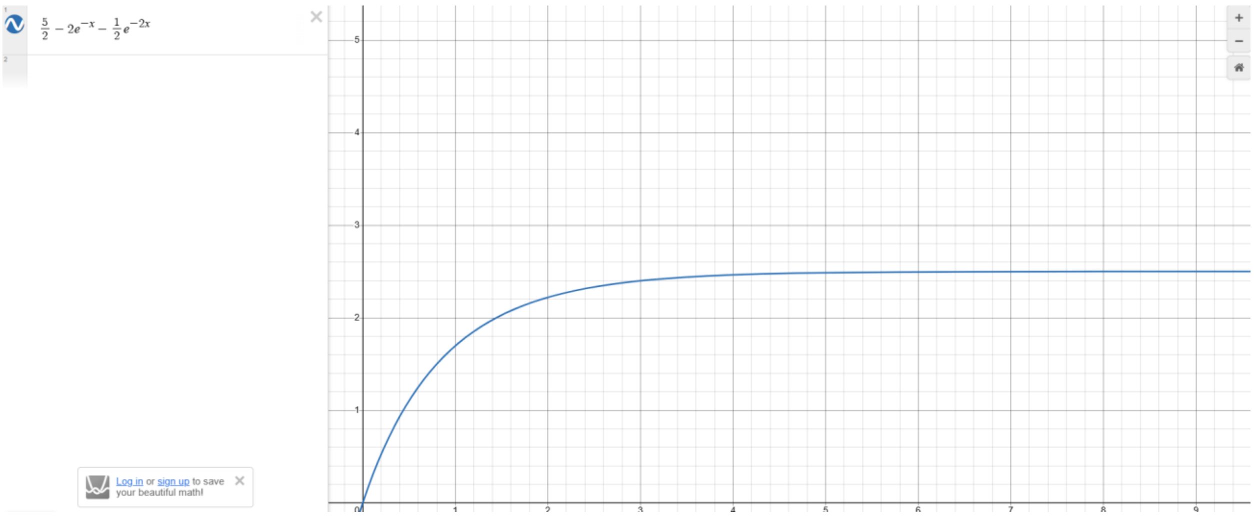
$$\rightarrow Y_{input}(s) = \frac{5}{s(s+2)(s+1)} = \frac{5}{2s} - \frac{5}{s+1} + \frac{5}{2(s+2)}$$

$$\rightarrow y_{input}(t) = \frac{5}{2} - 5e^{-t} + \frac{5}{2}e^{-2t}$$

$$\rightarrow y(t) = y_{initial}(t) + y_{input}(t) = \frac{5}{2} - 2e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t}$$

در معادله بالا در اصل باید $\frac{5}{2}u(t)$ می‌نوشتیم ولی چون تبدیل لاپلاس یک طرفه از ۰ تا $+\infty$ است پس نیازی به گذاشتن $u(t)$ در پاسخ همگن نیست و پاسخ بالا درست است.

تصویر نمودار معادله بالا:



ب) پس از مطالعه لینک داده شده، اسکریپت زیر را می‌نویسیم تا بتوانیم معادله داده شده را حل کنیم. همان طور که در قسمت قبل هم نوشتیم، نیازی به گذاشتن $u(t)$ نیست و اگر $x(t) = 5$ در نظر بگیریم، به دلیل اینکه تبدیل لاپلاس یک طرفه از ۰ تا $+\infty$ است به پاسخ درست می‌رسیم.

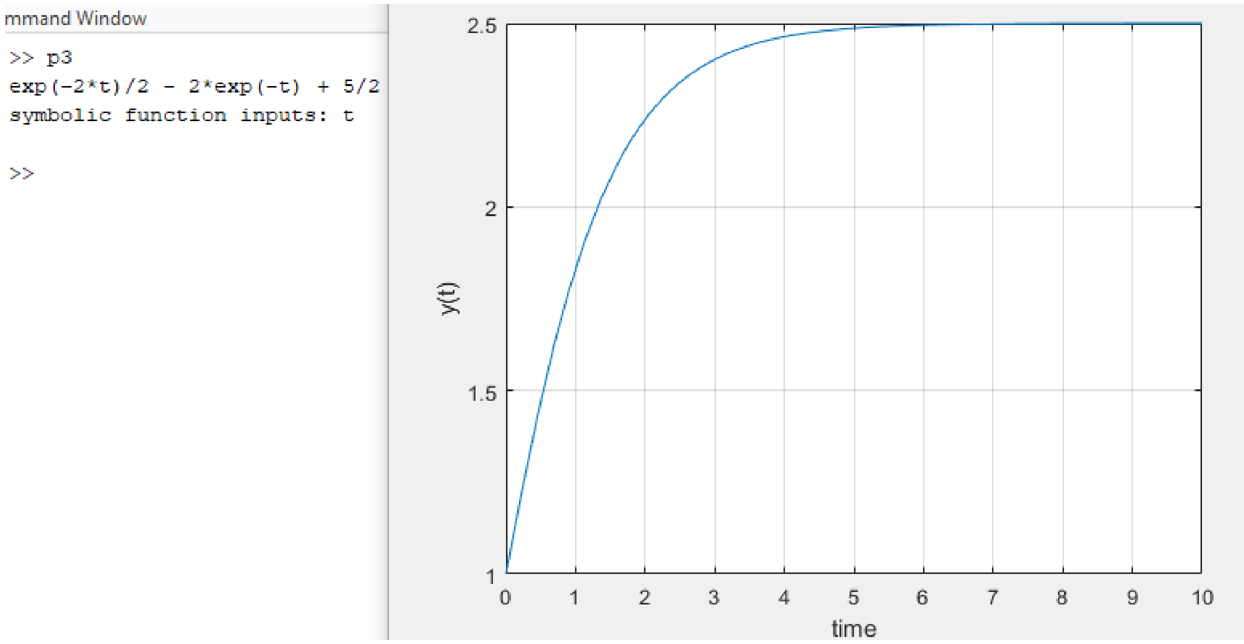
```
syms y(t) x(t)
Dy = diff(y);
D2y = diff(y, t, 2);

ode = D2y + 3*Dy + 2*y == 5;
cond1 = y(0) == 1;
cond2 = Dy(0) == 1;
conds = [cond1, cond2];

ySol(t) = dsolve(ode, conds);

disp(ySol);
fplot(ySol, [0, 10]);
xlabel('time');
ylabel('y(t)');
grid on;
```

اسکریپت را اجرا می‌کنیم:



هم تطابق نمودارهای تئوری و شبیه‌سازی شده و هم تطابق معادله تئوری و معادله به دست آمده توسط متلب، نشان‌دهنده درست بودن هر دو عملیات است.