Добро пожаловать в удивительный мир математики - ваше сегодняшнее путешествие спонсировано нашими потребностями в том, чтобы вы хотя бы немного вспомнили школьный курс математики. Готовы? Нет? Ну, мы всё равно начнем.

Условия: для того, чтобы эта домашка была зачтена, достаточно сделать *40%*. Не хочется, чтобы кто-то загонялся насчет того, что не может сделать дз, поэтому такие условия :) **Сдавать домашку только** в формате .pdf (фото из тетради при хорошем освещении, либо написанное на графе. Разрешено пользоваться любыми чат-ботами, но опять-таки: сдавать будут не они, а вы, так что понимать происходящее тут обязательно.

Итак, сегодня у нас на препарировании пять заданий, которые покрывают 95% математики, что вам встретится.

1. Считаем скалярное произведение!

УРА!

Самое простое за сегодня - хотя важность этой операции переоценить тяжело. Скалярное произведение - в целом, поскольку лекция была достаточно подробной, то особо разглагольствовать не будем, перейдем как поистине русские люди сразу к сути дела.

1. 1 Итак, у вас есть два вектора:

$$\vec{x} = [2, 8, 1]$$

$$\vec{y} = [3, 12, -1]$$

Найдите скалярное произведение этих двух векторов, а также оцените, какой угол между ними.

Вы должны уловить четко одну мысль из скалярного произведения, для этого сделаем такую вещь.

1.2 Снова даны два вектора, но другие, предположим:

$$\vec{t} = [2, 3]$$

$$\vec{z} = [3, 2]$$

Нарисуйте их на плоскости декартовой системы координат (поставьте точки соответственно координатам, то есть, точка для вектора t будет находиться по x=2 и y=3), после чего проведите стрелочки от начала координат до построенных вами точек.

Построили. Теперь попробуйте их сравнить. В плане, ну как числа. Всё ж просто. (Нет, вообще не просто, это и есть проблема). Весь нюанс в том, что наши векторы имеют по две координаты - окей, мы как бы можем на пальцах предположить, что там координата x важнее и давайте по ней всё считать, вектор z победил, ура!

Ну вроде и можно, в конце-концов не звучит уж очень противоестественно, но хочется две координаты всё-таки учитывать, а не одну, и сравнить всё равно хочется...

Смотрите, тут неожиданно вылезают два вот таких вектора

$$\vec{i} = [1, 1]$$

$$\vec{j} = [1, 1]$$

Примите это как факт, что есть два вектора с такими названиями.

А теперь найдите скалярные произведения векторов i,t и j,z. Получилось? Несложно, да? Сравните их. Тоже ведь стало куда проще?

Теперь время умных слов: скалярное произведение позволяет перевести ваш вектор из многомерного вида (когда у него куча чисел) в такой вот, когда его характеризует всего одно число. Если записывать это сложно, то будет примерно:

$$\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$$

Здесь записано то же самое, что я проговорил выше, но формальным языком. Мой долг как преподавателя выполнен!

2. Считаем производную!

Этот раздел посвящен другой задаче, с которой всегда сталкиваются в рамках глубокого (машинного в том числе) обучения. Считать эти ваши производные. Кто-то может схватиться за голову и закричать "АААА, НЕТ, ТОЛЬКО НЕ СНОВА, ПРОКЛЯТАЯ МАТЕМАТИКА!!!".

Не переживайте, мы сегодня на вайбе объяснений, поэтому что-то из этого пункта вы для себя точно также вынесете.

2.1 Начинаем.

$$f(x) = x^2 + 2x$$

Давайте попробуем найти минимум заданной выше функции. "Да-да, опять эта школьная тема, квадратные уравнени..."

$$x(x+2) = 0$$

$$x = 0 \lor x + 2 = 0$$

Да нет-нет, не квадратные уравнения.

Нужно вспомнить теорему из первого курса матана. У кого-то сейчас могут начаться вьетнамские флэшбеки про кошмарную зимнюю сессию, как надеялись, что это побыстрее закончится и никогда больше не вернется... Вернулось, но мы с вами обсудим это немного иначе.

Теорема Ферма (о нулях производной):
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и пусть x_0 является точкой локального экстремума функции $f(x)$. Тогда:

$$f'(x_0) = 0$$

Кошмар. Просто ужас. Но смысл на поверхности. Попробуем найти минимум следующей функции $f(x) = e^x - 2x$.

Ну, тут знакомые с программированием ребята могут броситься решать - вычислять значение функции в каждой точке, и просто выбрать минимальное, всё-таки в прошлый раз реализовывали `max`, теперь просто `min` сделаем, и в путь, но *есть нюанс:* в действтельных числах НЕСЧЕТНАЯ БЕСКОНЕЧНОСТЬ ЧИСЕЛ. Проще говоря - настолько много, что никто из нас и представить физически не может. И как перебирать? И вообще - что с этим делать?.. И такие случаи бывают **ОЧЕНЬ** часто. Зато можно применить озвученную выше теорему.

Ну что же, считаем производную.

$$f'(x) = e^x - 2$$

Теперь приравниваем полученное выражение к нулю, и...

$$e^x - 2 = 0$$

Дорешать, я думаю, вы в силах :)

Аналогичное проделать для функции из заголовка.

Теперь еще два примера без разбора, я в вас верю.

$$f(x) = 2sin(x) + 1$$

$$f(x) = log_2 x + 3$$

3. Нахождение нормы вектора и произведения матриц

Заключительный этап сегодняшней экзекуции - будем считать произведение матриц и норм векторов.

И снова - первая мысль, пронесшаяся у вас в голове это, наверное, "Опять душниловка..."

Но не тут то было! На самом деле, операция произведения матриц является одной из самых оптимиизированных в мире, поскольку **она вообще везде**. Вы этого не видите и не слышите, но 95% вычислительных задач с большим количеством подсчета пытаются свести именно к матричному умножению. Почему?

Посудите сами, изначально матричное умножение имеет сложность $O(N^3)$. Что это значит? Давайте на примере: для умножения матриц размером 1 млн элементов на 1 млн элементов обе, вам потребуется примерно вот столько операций, а может и больше

$$18.000.000.000.000.000.000$$

Внушает, да? Ладно, с учетом современных мощностей произведение такого количества операций займёт всего часов 10 на обычном домашнем процессоре, но вот незадача - **умножаются матрицы куда больше размера** и обычно надо умножить не две матрицы, а так пару сотен тысяч... Поэтому алгоритм умножения матриц стараются изо всех сил оптимизировать и сейчас дошли до сложности $O(N^{1.725})$, что дает куда более приятные результаты.

Однако мы сегодня займемся с вами не оптимизацией матричного умножения, а его выполнением ручками.

Необходимо умножить две матрицы следующего вида:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(Я честно хотел всё по красоте формулками сделать, но .md не дал :( )

После выполнения этой на самом деле реально непростой операции (запутаться и потеряться 10 раз можно), с вас могло бы хватить на сегодня, но есть и последняя задачка.

Как мы уже с вами обсуждали сегодня - не всегда нам нравится обычная форма вектора, когда он записан в координатах. Особенно непонятно, какая у него длина...

В плане, вот вектор, например

$$\vec{x} = [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]$$

И какая длина у этого семимерного чудовища??? Что такое вообще длина в семимерном пространстве????????

И так математики снова ввели обобщенное понятие - норма. Норма - это длина вектора для любой его размерности - хоть 7 координат, хоть 100, хоть пару миллионов. Нормой вектора называется результат вычисления выражения следущего вида, то есть, нормой вектор n-мерного пространства

$$||x||_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{(x^n)}$$

И частный случай этой формулы это

$$||x||_2 = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)}$$

Узнаете здесь теорему Пифагора? А она есть! Итак, ваша последняя задача, посчитать норму следующего вектора

$$\vec{x} = [6, 8]$$

P.S.: кстати, эта штука называется нормой L_2.