Integração Numérica - Quadratura Gaussiana

Márcio Antônio de Andrade Bortoloti

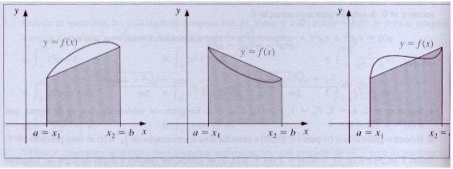
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas - DCET
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB

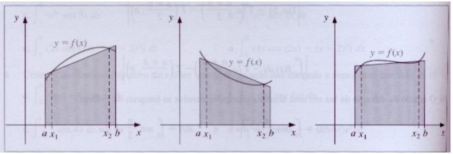
Cálculo Numérico
Curso de Matemática

Integração Numérica - Quadratura de Gauss

Considere uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Vamos calcular

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$





- A Quadratura de Gauss escolhe os pontos para cálculo de uma forma ótima, em vez de igualmente espaçada.
- Os pontos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ no intervalo $[a, b]$ e os coeficientes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ são escolhidos para minimizar o erro esperado na aproximação

$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} c_i f(x_i).$$

- Os coeficientes $c_1, c_2, \cdots, c_n$ são arbitrários e os pontos $x_1, x_2, \cdots, x_n$ estão no intervalos $[a, b]$, fornecendo $2n$ parâmetros a determinar.
- Note que a classe de polinômios de grau menor que ou igual a $2n - 1$ contém $2n$ parâmetros.
- Essa é a maior classe de polinômios para o qual é razoável esperar que a fórmula será exata.

Iniciando ...:
Suponha que desejamos determinar c_1, c_2, x_1 e x_2 de modo que a fórmula de integração

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2)$$

forneça o resultado exato sempre que $f(x)$ for um polinômio de grau menor que ou igual a $3 = 2(2) - 1$, ou seja, quando

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3.$$

$$\int_{-1}^{1} (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3) dx = a_0 \int_{-1}^{1} dx + a_1 \int_{-1}^{1} x dx + a_2 \int_{-1}^{1} x^2 dx + a_3 \int_{-1}^{1} x^3 dx$$

Vamos então determinar c_1, c_2, x_1 e x_2 ...

Para determinar c_1, c_2, x_1 e x_2, façamos

$$\begin{aligned}
(f(x) = 1) \quad c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 1 &= \int_{-1}^{1} dx = 2 \\
(f(x) = x) \quad c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 &= \int_{-1}^{1} x\, dx = 0 \\
(f(x) = x^2) \quad c_1 \cdot x_1^2 + c_2 \cdot x_2^2 &= \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3} \\
(f(x) = x^3) \quad c_1 \cdot x_1^3 + c_2 \cdot x_2^3 &= \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0
\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema acima temos

$$c_1 = 1. \quad c_2 = 1, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Assim,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx f\Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big) + f\Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)$$

Note que

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

$$\int_{-1}^{1} x^2\,dx = \Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)^2 + \Big(\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)^2 = \frac{2}{3}$$

Polinômios de Legendre

O conjunto dos Polinômios de Legendre é formado por $\{P_0(x), P_1(x), \cdots, P_n(x), \cdots\}$ com as propriedades:

- Para cada n, $P_n(x)$ é um polinômio mônico de grau n.
- $\displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)P_n(x)\,dx = 0$ sempre que $P(x)$ for um polinômio de grau menor que n.

Os primeiros Polinômios de Legendre são

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

$$P_4(x) = x^4 - \frac{6}{7}x^2 + \frac{3}{35}$$

Teorema

Suponha que $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sejam raízes do n-ésimo polinômio de Legendre $P_n(x)$ e que para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, os números c_i sejam definidos por

$$c_i = \int_{-1}^{1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\, dx.$$

Se $P(x)$ é qualquer polinômio de grau menor que ou igual a $2n$ então

$$\int_{-1}^{1} P(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} c_i P(x_i).$$

n	Raízes $r_{n,i}$	Coeficientes $c_{n,i}$
2	0.5773502692	1.0000000000
	-0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	-0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	-0.3399810436	0.6521451549
	-0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	0.0000000000	0.5688888889
	-0.5384693101	0.4786286705
	-0.9061798459	0.2369268850

Exemplo

Obtenha uma aproximação de $\int_{-1}^{1} e^x \cos x \, dx$, com $n = 3$.

A tabela anterior fornece

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} e^x \cos x \, dx &\approx 0.\overline{5}e^{0.7745966692} \cos 0.7745966692 \\
&+ 0.\overline{8} \cos 0 e^0 + 0.\overline{5}e^{-0.7745966692} \cos(-0.7745966692) \\
&= 1.9333904
\end{aligned}$$

O valor encontrado usando integração por partes é 1.9334214.

Observação

Uma integral $\int_a^b f(x)\,dx$ pode ser transformada para uma integral sobre $[-1,1]$ utilizando a mudança de variáveis:

$$t = \frac{2x-a-b}{b-a} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\Big[(b-a)t+a+b\Big]$$

Isso nos permite escrever

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{(b-a)t+(b+a)}{2}\right)\frac{(b-a)}{2}dt$$

Integração Numérica - Quadratura de Gauss

Exemplo: Calcule

$$\int_{1}^{1.5} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} e^{(-(t+5)^2/16)}\,dt.$$

Se $n = 2$

$$\int_{1}^{1.5} e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{4}\left[e^{-(5+0.5773502692)^2/16} + e^{-(5-0.5773502692)^2/16}\right] = 0.1094003.$$

Se $n = 3$

$$\begin{aligned}
\int_{1}^{1.5} e^{-x^2}\,dx &\approx \frac{1}{4}\Big[(0.5555555556)e^{-(5+0.7745966692)^2/16} \\
&+ (0.888888889)e^{-5^2/16} \\
&+ 0.5555555556e^{-(5-0.7745966692)^2/16}\Big] \\
&= 0.1093642
\end{aligned}$$

O valor exato com sete casas decimais é 0.1093643