Regra dos trapézios para cálculo de integrais duplas

- seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função integrável definida num retângulo $R \subset \mathbb{R}^2$, ou seja,

$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) / x \in [a,b] \text{ e } y \in [c,d]\}$$

- como fazer para determinar

$$\int_R f(x,y)\,dx\,dy$$

- Teorema de Fubini: seja f uma função integrável sobre uma região retangular $R = [a,b] \times [c,d]$. Então:

$$\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right] dx$$

- considere a seguinte partição do retângulo $R = [a,b] \times [c,d]$; no intervalo $[a,b]$ temos a partição (de $m+1$ pontos e m subintervalos):

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < \dots < x_m = b$$

- e no intervalo $[c,d]$ temos a partição (de $n+1$ pontos e n subintervalos):

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < y_3 < y_4 < \dots < y_n = b$$

- suponha que $x_i - x_{i-1} = h_1$ e $y_j - y_{j-1} = h_2$, para todo i e j tal que $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$. Isso corresponde a uma partição contendo $m \cdot n$ retângulos em R.

Regra dos trapézios para cálculo de integrais duplas

- concluímos daí que

$$\int_R f(x,y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{R_{ij}} f(x,y)\,dx\,dy$$

- agora só precisamos calcular

$$\int_{R_{ij}} f(x,y)\,dx\,dy$$

- para cada $i \in [1,m]$ e $j \in [1,n]$. Do teorema de Fubini, temos que

$$\int_{R_{ij}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{y_{j-1}}^{y_j}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)\,dx\right]dy$$

- pela regra dos trapézios temos que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)\,dx \cong \frac{h_1}{2}\left[f(x_{i-1},y) + f(x_i,y)\right]$$

- substituindo de volta na integral acima obtemos

$$\int_{R_{ij}} f(x,y)\,dx\,dy \cong \int_{y_{j-1}}^{y_j}\left[\frac{h_1}{2}\left[f(x_{i-1},y) + f(x_i,y)\right]\right]dy$$

$$= \frac{h_1}{2}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_{i-1},y)\,dy + \frac{h_1}{2}\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i,y)\,dx$$

- novamente pela regra dos trapézios

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_{i-1},y)\,dy \cong \frac{h_2}{2}\left[f(x_{i-1},y_{j-1}) + f(x_{i-1},y_j)\right]$$

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i,y)\,dy \cong \frac{h_2}{2}\left[f(x_i,y_{j-1}) + f(x_i,y_j)\right]$$

Regra dos trapézios para cálculo de integrais duplas

- substituindo na integral anterior obtemos

$$\int_{R_{ij}} f(x,y)\,dx\,dy \cong \frac{h_1}{2}\cdot\frac{h_2}{2}\cdot\left[f(x_{i-1},y_{j-1})+f(x_{i-1},y_j)\right]+\frac{h_1}{2}\frac{h_2}{2}\left[f(x_i,y_{j-1})+f(x_i,y_j)\right]$$

$$= \frac{h_1 h_2}{4}\left[f(x_{i-1},y_{j-1})+f(x_{i-1},y_j)+f(x_i,y_{j-1})+f(x_i,y_j)\right]$$

- a fórmula acima diz que para aproximar a integral de $f(x,y)$ no retângulo R_{ij}, basta calcular f nos 4 vértices de R_{ij} e multiplicar o resultado pela área do retângulo dividido por 4. Agora, para aproximar a integral original (sobre a região R), basta somar todos as áreas de retângulos para obter

$$\int_R f(x,y)\,dx\,dy \cong \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{h_1 \cdot h_2}{4}\right)\cdot\left[f(x_{i-1},y_{j-1})+f(x_{i-1},y_j)+f(x_i,y_{j-1})+f(x_i,y_j)\right]$$

$$= \frac{h_1 \cdot h_2}{4}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[f(x_{i-1},y_{j-1})+f(x_{i-1},y_j)+f(x_i,y_{j-1})+f(x_i,y_j)\right]$$

- seja

$$V = \int_R f(x,y)\,dx\,dy \cong \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\int_{R_{ij}} f(x,y)\,dx\,dy$$

- note que de acordo com a fórmula mais acima, considerando o retângulo R e seus sub-retângulos R_{ij}

(i) o valor da função nas arestas que aparecem em apenas um retângulo irão aparecer 1 vez cada no somatório (4 cantos de R)

(ii) o valor da função nos pontos que aperecem em 2 retangulos irão aparecer 2 vezes cada no somatório (arestas de R com excessão dos cantos)

(iii) o valor da função nos pontos que aparecem em 4 retângulos irão aparecer 4 vezes cada no somatório (interior de R)

Regra dos trapézios para cálculo de integrais duplas

- considerando (i), (ii) e (iii) note que

$$\int_R f(x,y)\,dx\,dy \cong \frac{h_1 . h_2}{?}\Bigg[\sum_{y\in\{c,d\}}\sum_{x\in\{a,b\}} f(x,y)$$

$$+ 2\left(\sum_{y\in\{c,d\}}\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i,y) + \sum_{x\in\{a,b\}}\sum_{j=1}^{n-1} f(x,y_j)\right)$$

$$+ 4.\left(\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{m-1} f(x_i,y_j)\right)\Bigg]$$