Regra de Simpson para cálculo de integrais definidas

- neste método, para um intervalo $[a, b]$, se precisa de uma lista com um número ímpar de pontos

$$[(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{2n}, y_{2n})]$$

- vamos então utilizar trios de pontos para calcular a área abaixo da parábola que passa por tais pontos, assim para 3 pontos quaisquer

$$[(x_{2k-2}, y_{2k-2}), (x_{2k-1}, y_{2k-1}), (x_{2k}, y_{2k})]$$

- considerando que $|x_{2k-1} - x_{2k-2}| = |x_{2k} - x_{2k-1}| = h$, a área da parábola que intersecta o trio de pontos é igual a área da parábola que intersecta o seguinte trio de pontos

$$[(-h, y_{2k-2}), (0, y_{2k-1}), (h, y_{2k})]$$

- sendo assim tem-se um polinômio $P_k(x)$ com as seguintes restrições

$$P_k(x) = ax^2 + bx + c$$

$$P_k(-h) = f(x_{2k-2})$$

$$P_k(0) = f(x_{2k-1})$$

$$P_k(h) = f(x_{2k})$$

- montando o sistema de equações temos

$$f(x_{2k-2}) = a.(-h)^2 + b(-h) + c$$

$$f(x_{2k-1}) = a.(0)^2 + b.0 + c$$

$$f(x_{2k}) = a.h^2 + b.h + c$$

obtemos

$$f(x_{2k-2}) = ah^2 - bh + c \quad (i)$$

$$f(x_{2k-1}) = c \quad (ii)$$

$$f(x_{2k}) = ah^2 + bh + c \quad (iii)$$

Regras de Simpson para cálculo de integrais definidas

- somando as equações (i) e (iii) obtemos

$$f(x_{2k-2}) + f(x_{2k-1}) = 2.a.h^2 + 2c$$

- substituindo o valor de c e isolando a, obtemos

$$a = \frac{1}{2h^2}\left(f(x_{2k-2}) - 2f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right)$$

- agora que conhecemos (quase todos) os coeficientes do polinômio $P_k(x)$, vamos integrar para descobrir a área:

$$\int_{-h}^{h} P_k(x)\,dx = \int_{-h}^{h} ax^2 + bx + c\,dx = \left(a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx\right)\Bigg|_{-h}^{h}$$

$$= \left(a\frac{h^3}{3} + b.\frac{h^2}{2} + c.h\right) - \left(a\frac{(-h)^3}{3} + b.\frac{(-h)^2}{2} + c.(-h)\right)$$

$$= 2a\frac{h^3}{3} + 2ch = \frac{2h^3}{3}\left[\frac{1}{2h^2}\left(f(x_{2k-2}) - 2f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right)\right] + 2.h.f(x_{2k-1})$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(x_{2k-2}) - 2f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right) + 2h.f(x_{2k-1})$$

$$= \frac{h}{3}\left(f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right)$$

- portanto, dados $2n+1$ pontos,

$$[(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{2n-2}, y_{2n-2}), (x_{2n-1}, y_{2n-1}), (x_{2n}, y_{2n})]$$

- temos

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{h}{3}\left[f(x_{2k-2}) + 4f(x_{2k-1}) + f(x_{2k})\right]$$

- expandindo a soma

$$\sum_{k=1}^{n} P_k = \frac{h}{3}\Big[(f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)) + ((f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(x_{2n})\Big]$$

$$= \left\{f(x_0) + 2\left[\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})\right] + 4\left[\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\right] + f(x_n)\right\}\cdot\frac{h}{3}$$

Regra de Simpson para cálculo de integrais definidas

- concluímos então que

$$\int_a^b f(x)\,dx \cong \frac{h}{3}\left(f(a) + \left(2\sum_{k=1}^{n-1} f(x_{2k})\right) + \left(4\sum_{k=1}^{n} f(x_{2k-1})\right) + f(b)\right)$$

- essa é a fórmula da regra de simpson para aproximar integrais definidas