TEG

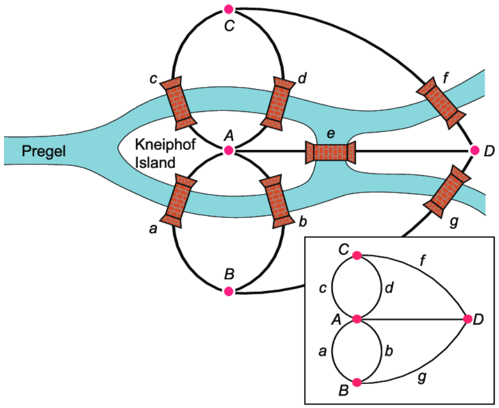
Gilmário B. Santos

gilmario.santos@udesc.br

http://www.joinville.udesc.br/portal/pagina/gilmario

Um dos primeiros registros históricos da utilização de grafos surgiu do problema das Pontes de Königsberg. A cidade de Königsberg é a antiga capital da Prússia Oriental, conhecida atualmente pelo nome de Kaliningrado.

A cidade é dividida em 4 zonas criadas pelo percurso do rio Pregel, no séc. XVII essas zonas estavam ligadas por sete pontes conforme a figura.



Por muito tempo os habitantes da cidade questionavam se era possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas!

Em 1736, o matemático Euler demonstrou que não existe tal trajeto, ao utilizar um modelo em grafos para uma generalização deste problema. Através desse modelo ele verificou que existe o desejado trajeto quando e somente quando em cada região concorrer um número par de pontes.

Na verdade o problema consiste na determinação de um caminho Euleriano, ou seja, um trajeto que usa cada ponte exatamente uma vez...

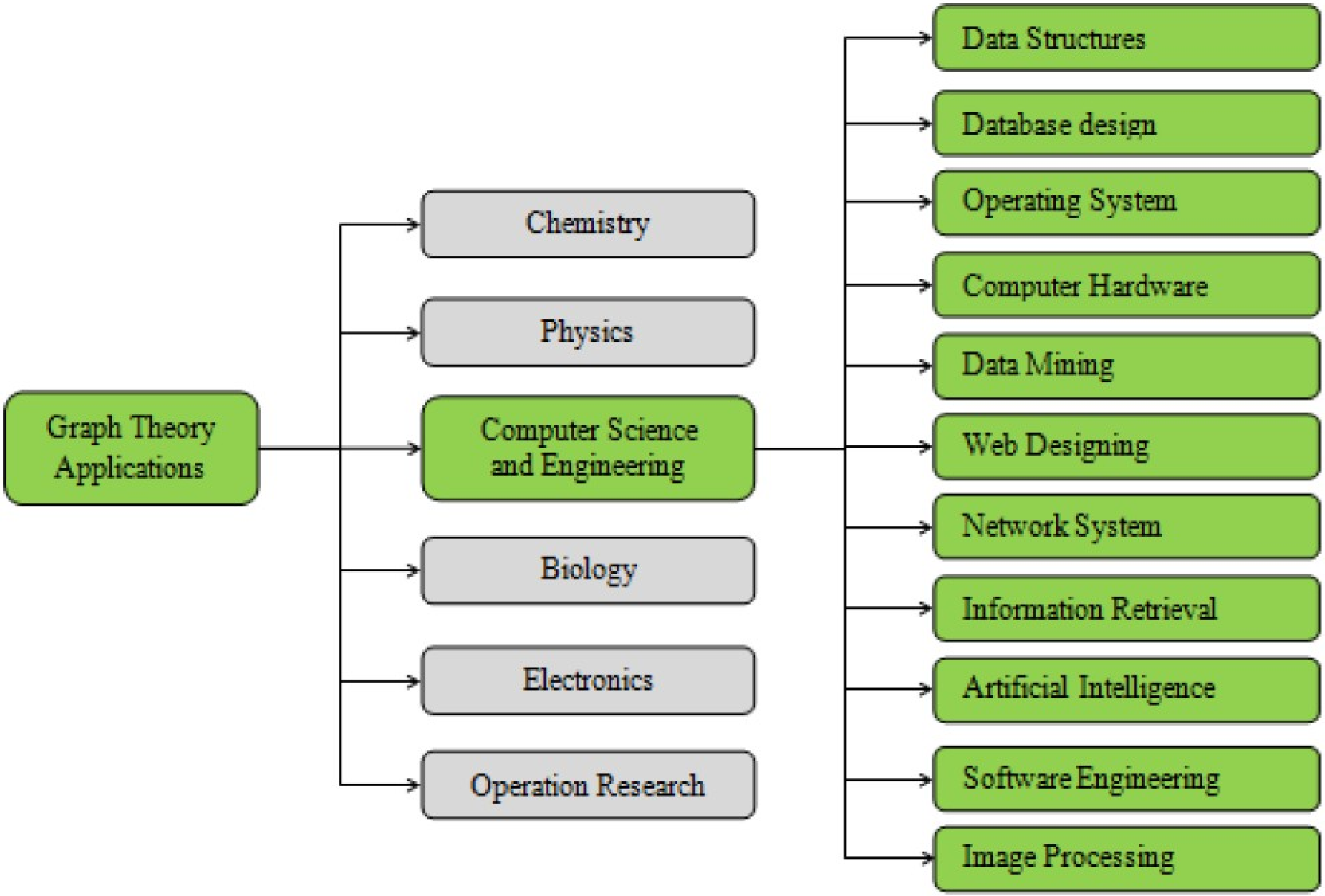


Figure 4. Graph theory applications in various fields

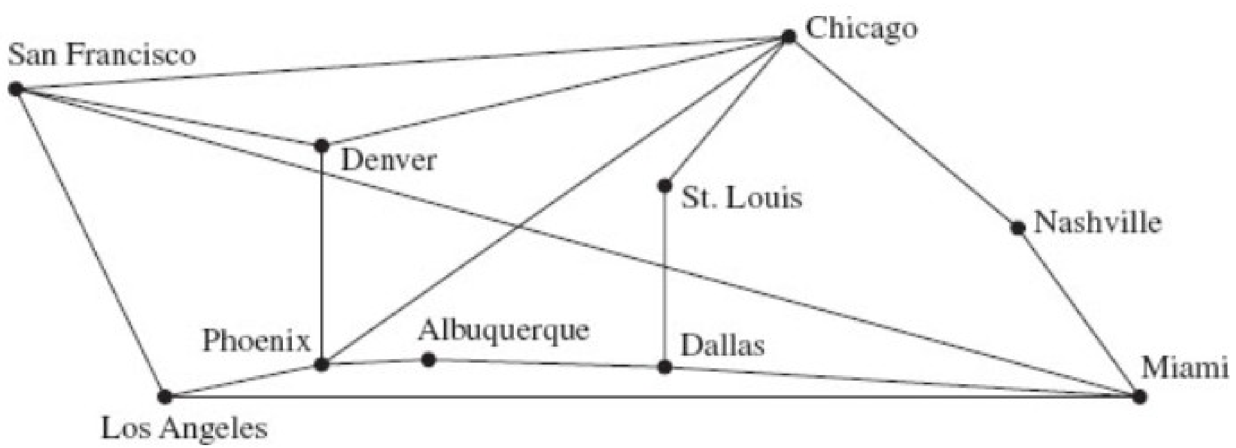
Onde você já viu um grafo?

Onde você já viu um grafo?

Um grafo (= *graph*) é um animal formado por dois conjuntos: um conjunto de coisas chamadas vértices e um conjunto de coisas chamadas arcos ou arestas;

Cada arco/aresta está associado a dois vértices: o primeiro é a ponta inicial do arco e o segundo é a ponta final.

Você pode imaginar que um grafo é um mapa rodoviário idealizado: os vértices são cidades e os arcos são estradas de mão única.

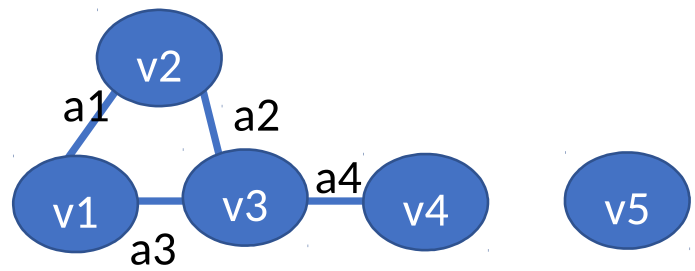


Formalmente:

Os grafos representam um tipo particular de gráfico, e corresponde a um conjunto finito e não vazio ‘N’ de nós/vértices e uma família finita ‘A’ de arcos/arestas constituída de pares não ordenados de elementos de ‘N’, ou seja, cada arco/aresta conecta dois nós/vértices.

Um grafo ‘G’ é representado por uma tripla ordenada (N, A, g) [Gersting, 2004], onde:

N = um conjunto não vazio de nós (vértices)
A = um conjunto de arcos (arestas), que correspondem a pares não ordenados.
g = uma função que associa a cada arco um par não ordenado x-y de nós, chamados de extremidades de a.
|N| = numero de vértices
|A| = número de arestas



N={v1,v2,v3,v4,v5}
A={a1,a2,a3,a4}
Onde: a1=(v1,v2), a2=(v2,v3), a3=(v1,v3) , a4=(v3,v4)
Ou seja, g(a1) estabelece a aresta entre v1 e v2 e assim sucessivamente...

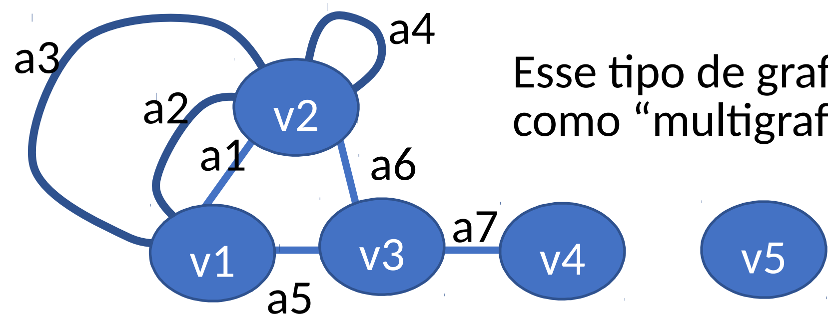
Se *v1* e *v2* são vértices nas extremidades de uma mesma aresta, dizemos então que eles são vizinhos ou adjacentes. O mesmo ocorre para *v2* e *v3; v1* e *v3; v3* e *v4*

v5 é um vértice isolado;

A ordem de um grafo G é o número de vértices de G.

Utilizando n = |V (G)| e m = |E(G)|. O tamanho de um grafo G é soma n + m.

Um grafo trivial é aquele com um único vértice (n = 1).



Esse tipo de grafo é conhecido como “multigrafo”

N={v1,v2,v3,v4,v5}
A={a1,a2,a3,a4,a5,a6}
Onde: a1=(v1,v2), a2=(v1,v2), a3=(v2,v1), a4=(v2,v2) , a5=(1,3), a6=(2,3), a7=(3,4)
Ou seja, g(a1) estabelece a aresta entre v1 e v2 e assim sucessivamente…

Note que:
a4 é um laço;

a1, a2 e a3 são uma repetição da mesma aresta entre vértice 1 e vértice 2. Nesse caso se diz que são arestas múltiplas. Isso é permitido porque família de arestas pode repetir elementos e os pares de vértices ligados não são ordenados

v5 é um vértice isolado,

Digrafo:

Podemos querer que os arcos de um grafo comecem em um nó e terminem em outro, caso em que teríamos um *grafo direcionado* ou Digrafo [Gersting, 2004]. O dígrafo também é uma tripla ordenada (N, A, g), onde:

N = um conjunto não vazio de nós (vértices)

A = um conjunto de arcos (arestas), que correspondem a pares não ordenados.

|N| = numero de vértices e |A| = número de arestas

Porém:

g = uma função que associa a cada arco um par não ordenado x-y de nós, em que *x* é o **ponto inicial (extremidade inicial)** e *y* é o **ponto final (extremidade final)** de *a*.

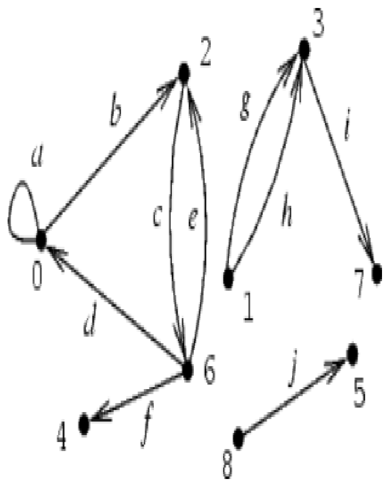
Nesse caso, a família de arestas é ordenada: a aresta (Vi,Vj) é diferente da aresta (Vj,Vi), por exemplo

Boa parte da nomenclatura e dos conceitos é análoga nos grafos e digrafos.

Digrafo:

Exemplo 1: Digamos que os vértices de nosso grafo são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e os arcos são *a, b, c, d, e, f, g, h, i, j*. Então a seguinte tabela define um grafo:

ponta inicial	0	0	2	6	6	6	1	1	3	8
arco	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*j*
ponta final	0	2	6	0	2	4	3	3	7	5



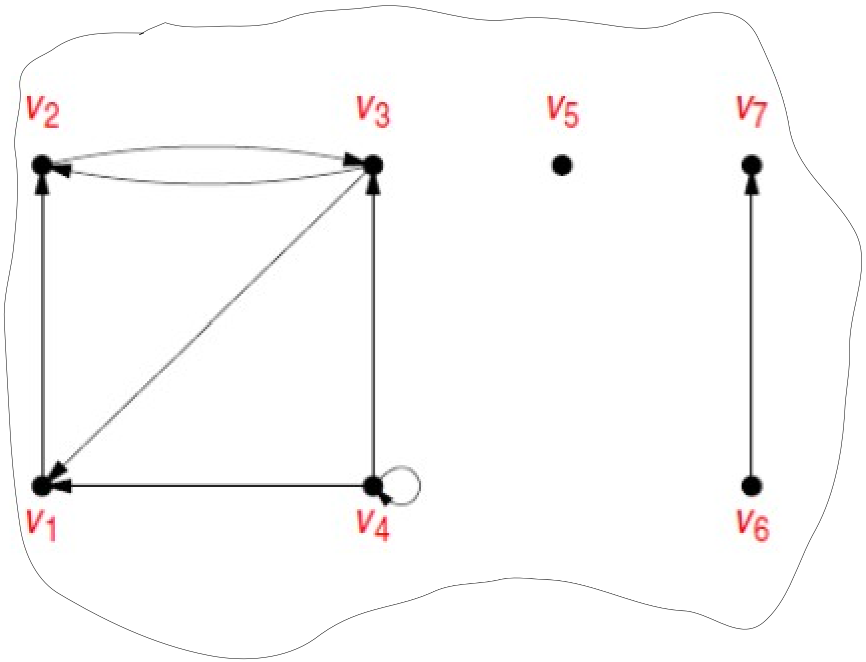
Se um arco a tem ponta inicial v e ponta final w, dizemos que a vai de v a w. Dizemos também que a sai de v e entra em w. Às vezes, um arco com ponta inicial v e ponta final w será denotado por (v,w) ou por v—w ou ainda por vw.

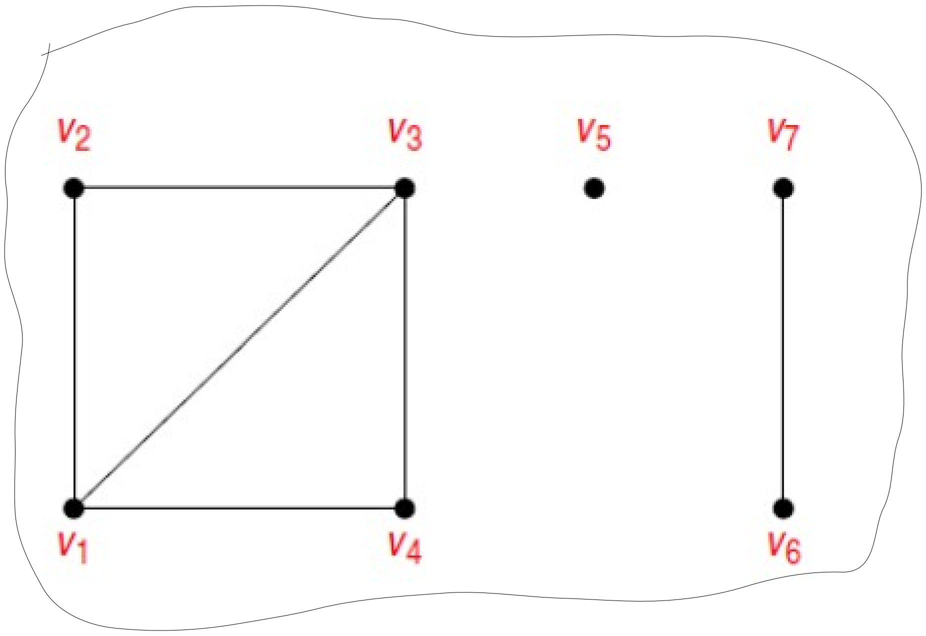
https://www.ime.usp.br/~pf/algoritmos_em_grafos/aulas/grafos.html

Digrafo versus grafo:

Iremos manter a nomenclatura “grafos” para fazer referência a grafos não direcionados/ dirigidos (digrafos).

Para cada grafo dirigido, existe um grafo simples (não dirigido) que é obtido removendo as direções das arestas, e os laços. Abaixo: no lado esquerdo um digrafo e no lado direito seu grafo simples:





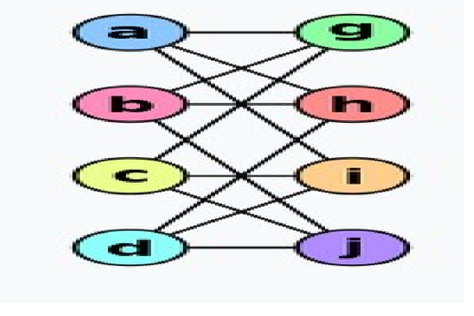
- Em geral trataremos grafos sem arestas múltiplas ou laços;
- Há autores que enfatizam esse aspecto da definição dizendo que o grafo é “simples”.

Grau

Em um grafo G(N,A), define-se grau de um vértice v ∈ N , denotado por grau(v), como sendo o número de vértices adjacentes a v.

Se for o caso, o laço conta duas vezes no cômputo do grau de um vértice.

Um grafo é regular de grau *k*, quando todos os seus vértices possuírem o mesmo grau *k*. Por exemplo, o grafo da figura abaixo é 3-regular [Szwarcfiter, Jaime]



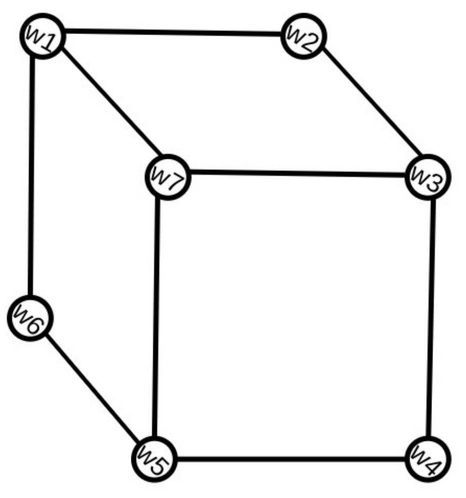
Grau

O grau máximo de G: $\Delta(G) = \max\{d(v) \mid v \in V(G)\}$;

O grau mínimo de G: $\delta(G) = \min\{d(v) \mid v \in V(G)\}$;

Dado um grafo G tal que $V(G) = \{v1, v2, \ldots, vn\}$ e os graus dos vértices satisfazem $d(v1) \leq d(v2) \leq \cdots \leq d(vn)$, a sequência de graus de G é precisamente a sequência: $(d(v1), d(v2), \ldots, d(vn))$.

Abaixo, a sequência de graus do grafo G é (2, 2, 2, 3, 3, 3, 3). Temos que $\delta(G) = 2$ e $\Delta(G) = 3$.



Primeiros teoremas

- Observe que cada vértice v é incidente a um total de grau(v) arestas e cada aresta é incidente a 2 vértices. Logo:

  Somatório dos graus dos vértices em G é igual a 2|E|.

$$\sum_{v \in V} grau(v) = 2|E|$$

- Observe que cada aresta u-w é contada duas vezes na soma de graus, uma vez na parcela *grau(u)* e outra na parcela *grau(w)*.

Primeiros teoremas

O número total de vértices com grau ímpar é sempre par

seja G(V,A), onde:

- V = V1 U V2
- V1 conjunto de vértices de grau par;
- V2 conjunto de vértices de grau ímpar;

Primeiros teoremas

O número total de vértices com grau ímpar é sempre par

$$\underbrace{\underbrace{\sum_{v \in V} grau(v)}_{\sum_{v \in V} grau(v) = 2|E|}}_{par} = \underbrace{\sum_{v \in V1} grau(v)}_{par} + \underbrace{\sum_{v \in V2} grau(v)}_{C}$$

$$\Rightarrow 'C' \text{ é um valor par pois resulta}$$
$$\text{da subtração de dois valores pares}$$

Primeiros teoremas

Seja n um número ímpar, então n=2*k+1, onde k pertence a N U {0}

Seja M uma valor par, então M=2k

A soma de M números ímpares Ni é igual a:

N1+N2+N3+...+N_M = 2*(k1+k2+...+kM) + M = 2*(k1+k2+...+kM) + 2k = soma de dois números pares = valor par

Portanto, a soma de uma quantidade par de números ímpares resulta em valor par.

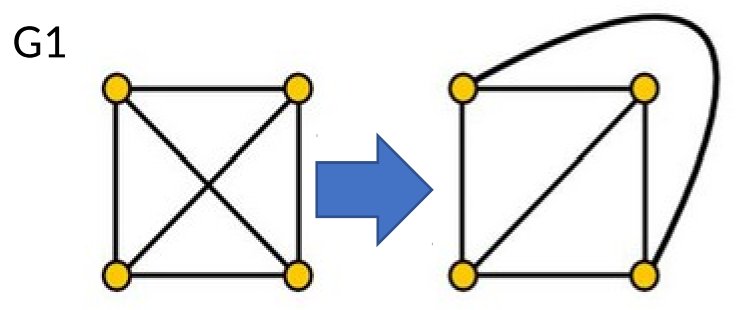
$$\sum_{v \in V2} grau(v) \rightarrow valor\ par$$

$$|V2| \rightarrow valor\ par$$

Exercícios:

- Faça um desenho de um grafo da predação entre algumas espécies, no qual: cada vértice é uma *espécie animal* (cavalo, urso, koala, coelho, mosquito, etc.) ou *vegetal* (cenoura, palmeira, eucalipto, alga, etc.). Há um arco de *x* para *y* se a espécie *x* se alimenta da espécie *y*.

- G1 possui sua versão redesenhada planar, sem cruzar linhas:

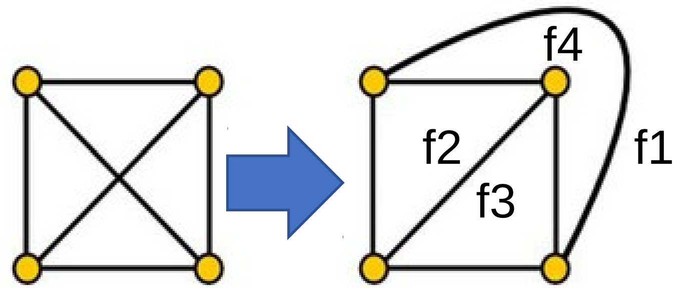


https://pt.wikipedia.org/wiki/Isomorfismo_de_grafos

Exercícios:

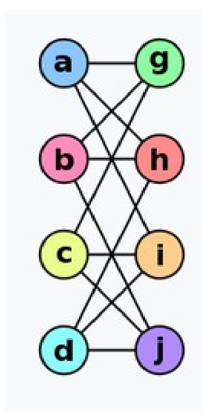
Para qualquer representação planar de um certo grafo dividirá o plano no mesmo número *R* de regiões (Euler): R = |E| − |V| + 2. No caso abaixo R=6-4+2=4

G1

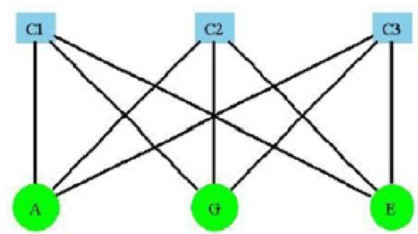


Tente redesenhar os grafos G2 e G3, sem cruzar linhas.
Calcule o número de regiões para cada grafo planar obtido.

G2



G3



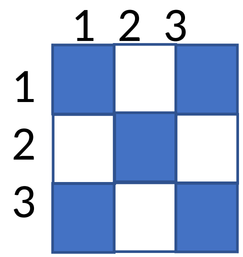
https://pt.wikipedia.org/wiki/Isomorfismo_de_grafos

Exercícios:

- Considerando que os vértices são as casas de um *tabuleiro de xadrez,* há um arco de x para y se um cavalo do jogo pode ir de x a y em um só movimento.

  - Faça uma figura do grafo que representa os movimentos de um cavalo sobre um tabuleiro de xadrez 3-por-3.

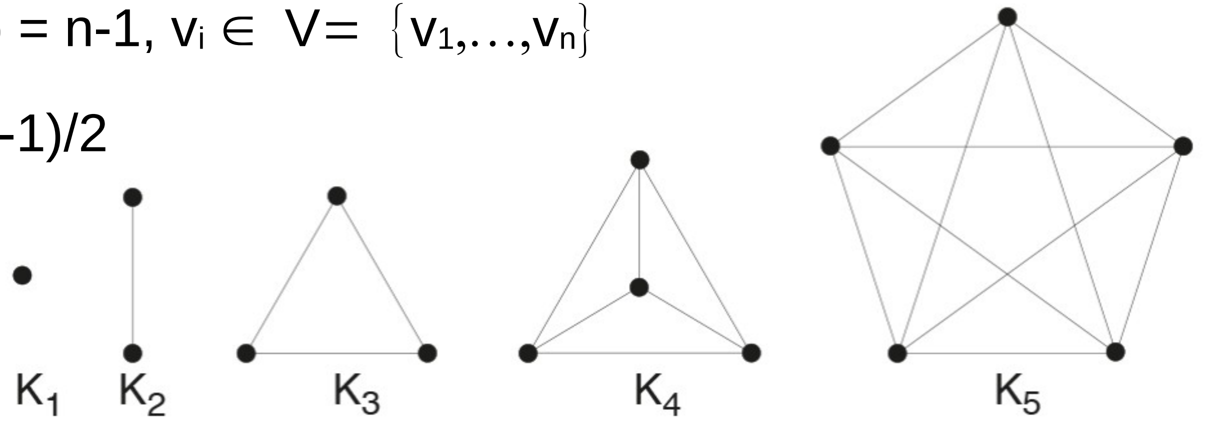
    É possível visitar todas as posições do tabuleiro?



  - Faça uma figura do grafo que representa os movimentos de um cavalo sobre um tabuleiro de xadrez 4-por-4.
    - É possível visitar todas as posições do tabuleiro?

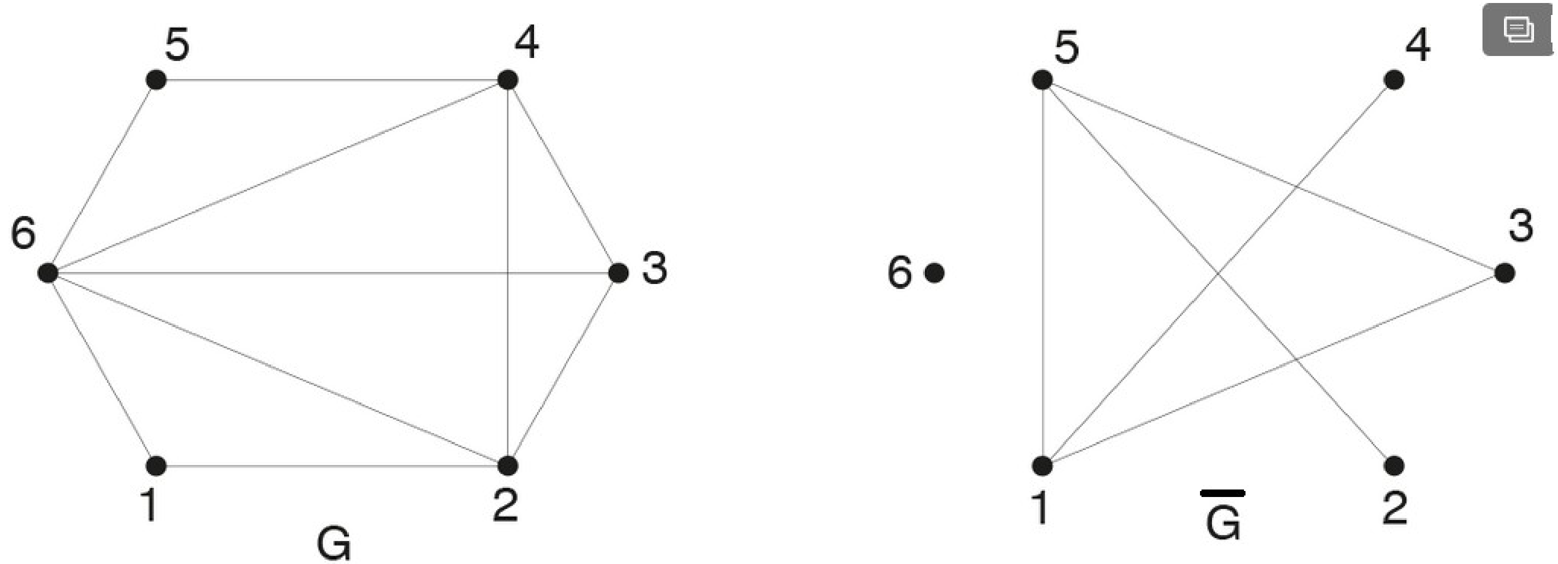
Grafo completo

- Um grafo é completo quando existe uma aresta entre cada par de seus vértices;
- O grafo completo não é orientado, nem possui arestas múltiplas ou laços;
- Utiliza-se a notação K_n para designar um grafo completo com *n* vértices;
  - $grau(v_i) = n-1,\ v_i \in V = \{v_1, \ldots, v_n\}$
  - $|A| = n(n-1)/2$



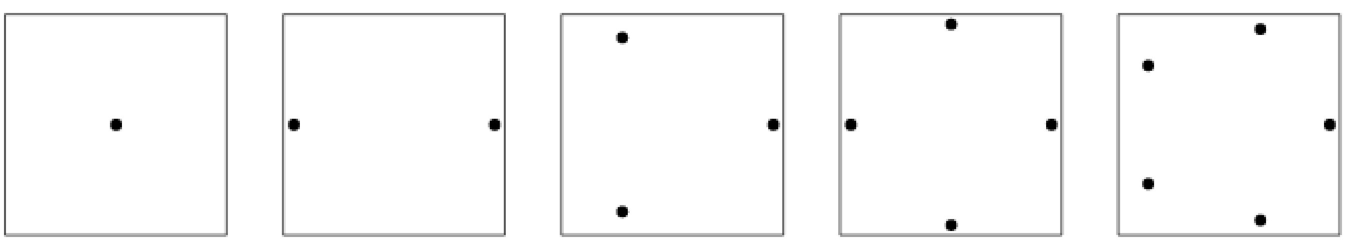
Grafo complemento

- O grafo $\overline{G}$ é o complemento de um grafo G(V,E) se:
  - Possuir o mesmo conjunto V de vértices de G e
  - Para todo par de vértices distintos v,w ∈ V, a aresta (v,w) pertencerá a $\overline{G}$ se e somente se não pertencer a G.
- $\overline{G}$ complementa o grafo G em relação ao grafo completo com o mesmo número de vértices de G.



Grafo complemento

- O grafo vazio (*empty graph*) apresenta *n* vértices isolados, ou seja, não apresenta arestas;
- O grafo vazio com um nó é chamado de *singleton-graph;*
- Certos autores podem designar o grafo vazio como um grafo-nulo (*null-graph*), o que pode gerar confusão pois tal designação também é utilizada para um grafo sem vértices;
- O grafo vazio com com *n* vértices corresponde ao complementar do grafo completo Kn;



https://mathworld.wolfram.com/EmptyGraph.html

Exercícios:

1. O grafo das palavras é definido assim: cada vértice é uma palavra da língua portuguesa e duas palavras são adjacentes se diferem em exatamente uma posição. Por exemplo, rato e ralo são adjacentes, enquanto ralo e rota não são. Faça uma figura da parte do grafo definida pelas palavras abaixo:

caiado cavado cavalo girafa girava ralo ramo rata rato remo reta reto rota vaiado varado virada virado virava

2. Um grafo cubo de dimensão k , ou k-cubo, é o grafo definido da seguinte maneira:

- $|V|=2^k$ vértices e cada vértice do grafo é um número binário de k bits;

- Dois vértices u e v são adjacentes se os respectivos números binários diferem em exatamente uma posição.

Desenhe os grafos 1-cubo, 2-cubo, 3-cubo e 4-cubo.

3. Seja V o conjunto de todos os subconjuntos de {1, 2, 3, 4, 5} que têm exatamente 2 elementos. Digamos que dois elementos v e w de V são adjacentes se $v \cap w = \varnothing$. Essa relação de adjacência sobre V define um grafo clássico, desenhe esse grafo.

4. Dado um grafo G(V,A) e seu complementar $\overline{G}$(W,E). Sabendo que |A|=15 e |E|=13, qual é a cardinalidade do conjunto de vértices (|V|) de G ?

5. Demonstre que o maior número de arestas (m) de um grafo em um conjunto de n=|N| vértices é igual a:

$$\binom{n}{2} = \frac{(n(n-1))}{2}$$

26

6. Desenhe todos os grafos (simples) com: 1, 2, 3 e 4 vértices

7. Desenhe e descreva o número de arestas, o grau máximo, o grau mínimo, cintura (Girth) e a planaridade dos seguintes grafos:
a) Grafo roda (wheel-graph): Wn
b) Grafo estrela (star-graph): Sn
c) Grafo de Petersen
d) Grafo cliclo: Cn

8. É possível obter os grafos simples G(V,E) com os respectivos conjuntos de vértices V={v_1, v_2, v_3,… , v_n} a partir das respectivas sequências de graus {g(v_1), g(v_2), g(v_3,),… , g(v_n)}, abaixo listadas?

a) 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6

b) 1, 1, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 8, 9

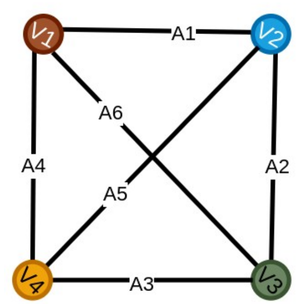
27

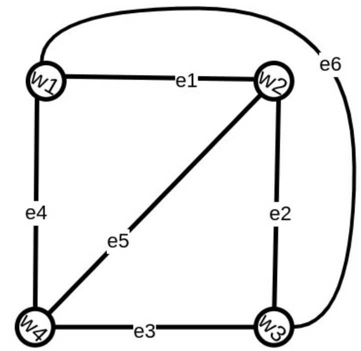
Isomorfismo

Um isomorfismo entre dois grafos G e H é uma bijeção *f* de V(G) em V(H) tal que dois vértices *v* e *w* são adjacentes em G se e somente se *f*(v) e *f*(w) são adjacentes em H.

Para decidir se dois grafos G e H são isomorfos, basta examinar as possíveis bijeções de V(G) em V(H).

- Dados *G* e *H* com V(G) = {v1,v2,v3,v4} H(G)={w1,w2,w3,w4}, a bijeção *f* tal que: f(v1)=w3; f(v3)=w1; f(v2)=w2; f(v4)=w4; determina um isomorfismo entre *G* e *H*
- (v1,v3) → (w3,w1); (v1,v2) → (w3,w2); (v1,v4) → (w3,w4)
- (v2,v3) → (w2,w1); (v2,v1) → (w2,w3); (v2,v4) → (w2,w4)
- ...





Isomorfismo

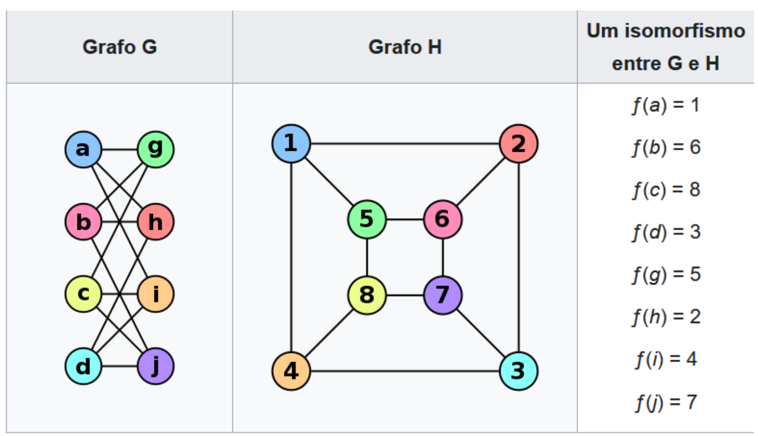
Para decidir se dois grafos G e H são isomorfos, basta examinar as possíveis bijeções de V(G) em V(H), mas se cada um dos grafos tem *n* vértices, esse algoritmo pode chegar a consumir tempo proporcional a *n!*.

Esse algoritmo é computacionalmente insatisfatório na prática.

É desconhecido se existe ou não algum algoritmo eficiente para o problema geral da determinação de isomorfismo entre grafos.

G e H abaixo podem se tornar coincidentes pela função *f* indicada na figura, eles são isomorfos entre si [Schwarzfitter,Jaime].

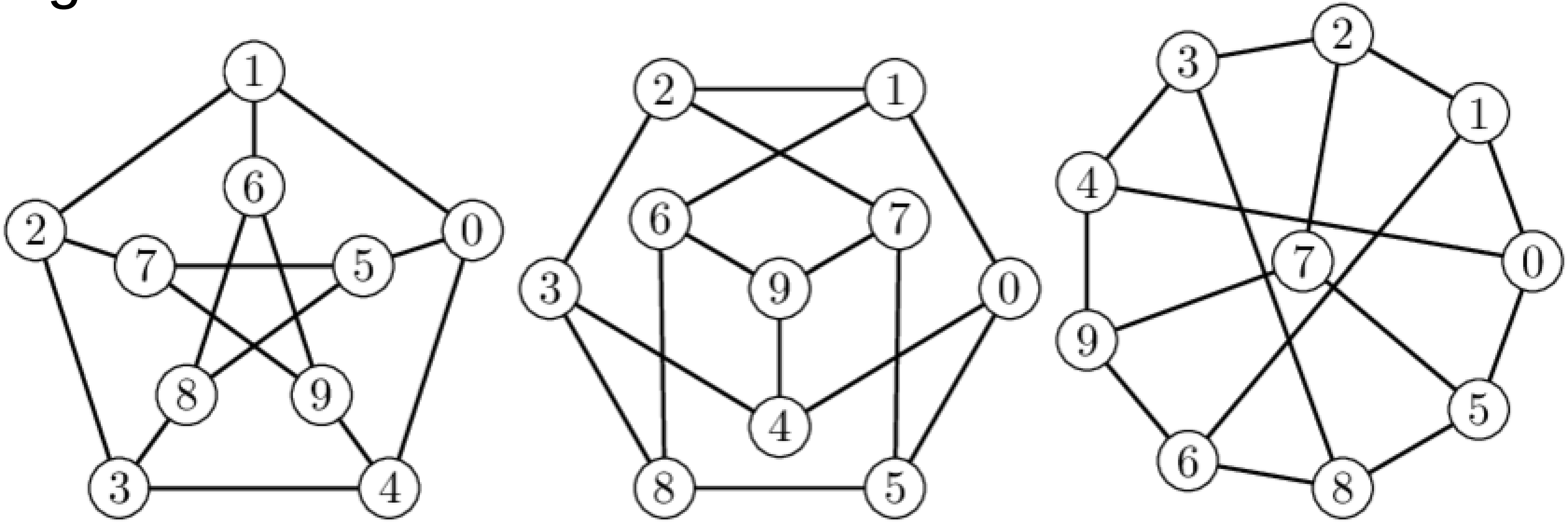
Em suma: dois grafos são isomorfos se é possível alterar os nomes dos vértices de um deles de tal modo que os dois grafos fiquem iguais.



Isomorfismo

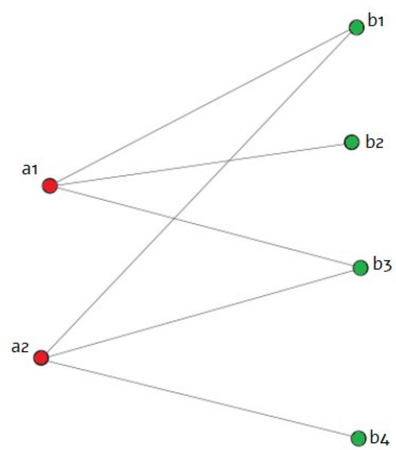
Uma classe isomórfica de grafos é uma classe de equivalência (propriedades: reflexiva, simétrica e transitiva) de grafos regida por uma relação de isomorfismo.

Um exemplo de classe isomórfica é a classe chamada grafo de Petersen.

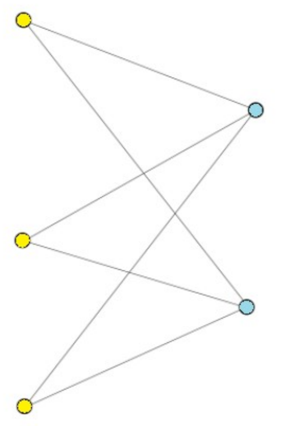


Grafo bipartido

- Um grafo G(V,E) é bipartido quando o seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos disjuntos V1 e V2, tais que toda aresta de G conecta um vértice de V1 a outro de V2.
- Um grafo bipartido completo possui uma aresta para cada par de vértices v1,v2, onde v1 ∈ V1 e v2 ∈ V2.
- Sendo n1 = |V1| e n2 = |V2|, um grafo bipartido completo é denotado por $K_{n1,n2}$ e obviamente possui n1*n2 arestas



Grafo bipartido


Grafo bipartido completo $K_{2,3}$

Exercício:

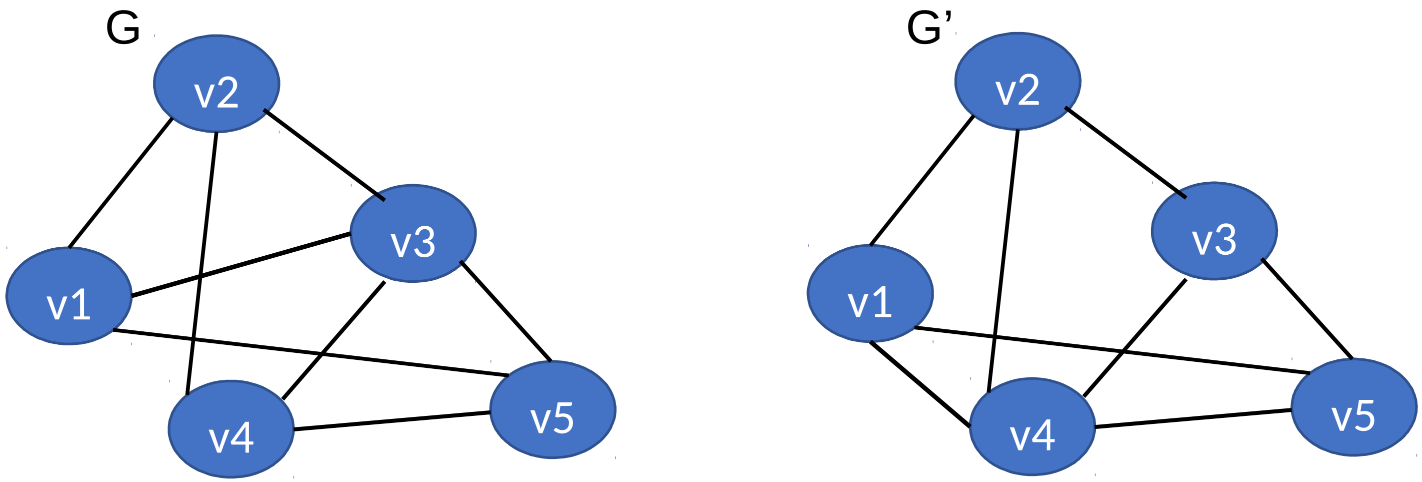
Dois grafos G e G’ são isomorfos se e somente se existir uma função bijetiva entre V e V’ (seus conjuntos de vértices), que preserve suas relações de adjacência (Boaventura e Jurkiewicz, 2017).

|V(G)| = |V(G’)| e |E(G)| = |E(G’)|.

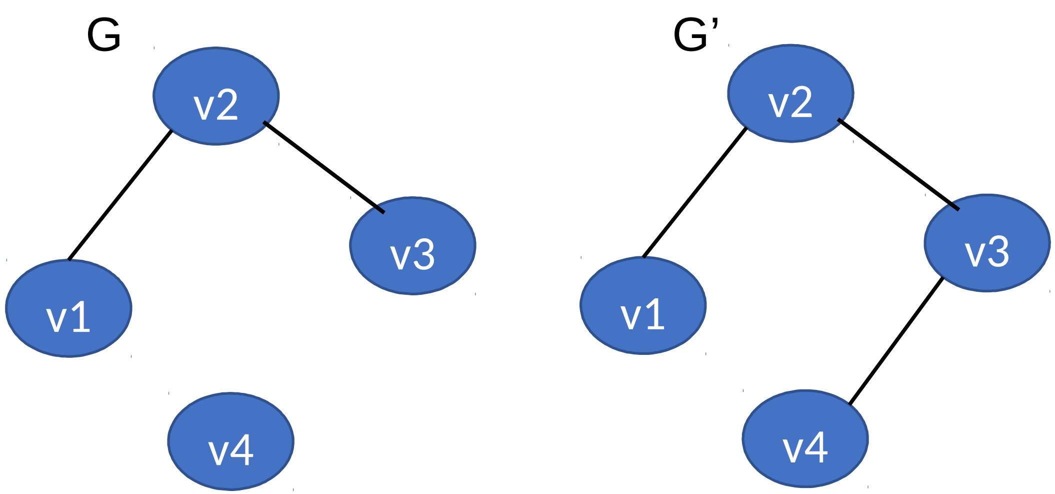
Na verdade, outras propriedades também são preservadas pelo isomorfismo, tais como a sequência de graus…

Determine se os pares de grafos abaixo (próximo slide) são isomorfos:

1)

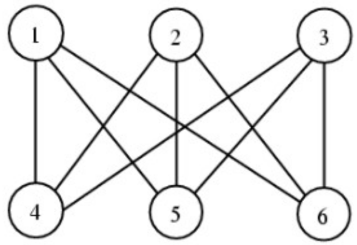


2)

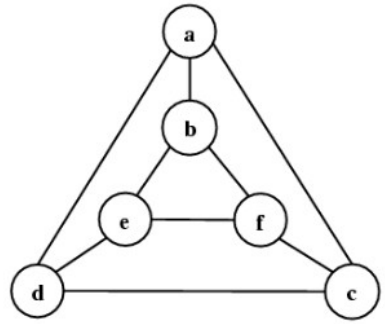


(Prudente, Edson UFRGS):

3)

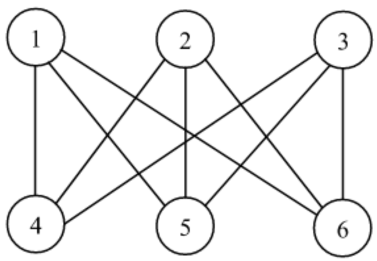


G

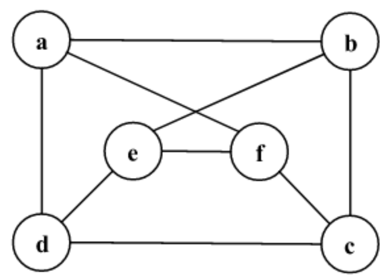


G’

4)



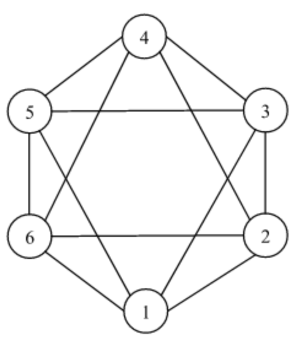
G



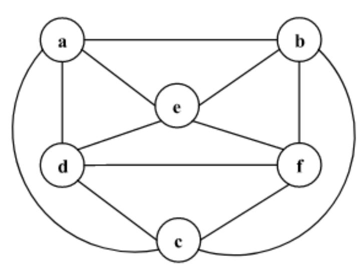
G'

V(G)	V(G')
1	a
2	e
3	c
4	b
5	d
6	f

5)



G



G'

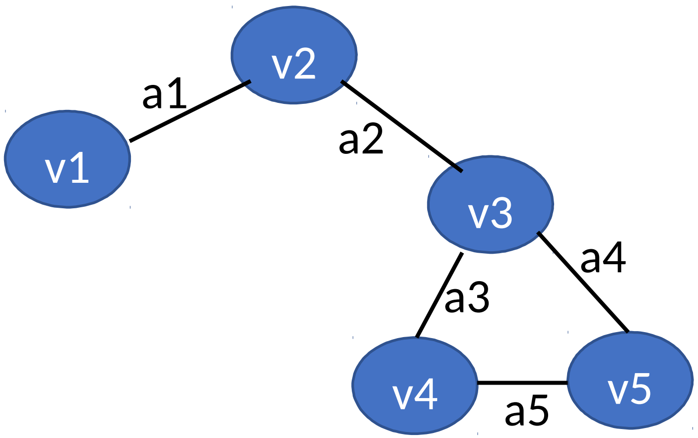
V(G)	V(G')
1	d
2	a
3	e
4	b
5	f
6	c

(Prudente, Edson UFRGS):

Representação de um grafo por meio da estrutura de dados Matriz de Adjacências:

1. como o nome indica, a matriz modela as relações de adjacências (arestas) entre vértices

2. Não é a única forma de estrutura de dados para a representação de um grafo, ainda voltaremos a tratar detalhes sobre isso...



	v1	v2	v3	v4	v5
v1	0	1	0	0	0
v2	1	0	1	0	0
v3	0	1	0	1	1
v4	0	0	1	0	1
v5	0	0	1	1	0

Dois grafos isomorfos apresentam a mesma Matriz de Adjacências?

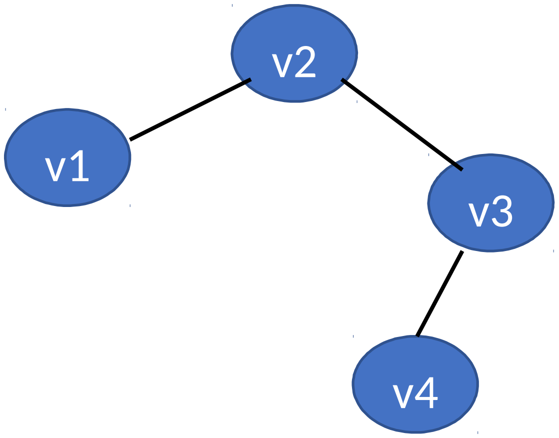
Um automorfismo de um grafo G é um isomorfismo de G para si próprio.

As matrizes de adjacências entre G e G' são iguais se houver automorfismo.

Verifique via, matriz de adjacências, se os mapeamentos são automorfismos para o grafo abaixo:

a) v1 $\rightarrow$ v4; v4 $\rightarrow$ v1; v2 $\rightarrow$ v2; v3 $\rightarrow$ v3

b) v1 $\rightarrow$ v4; v4 $\rightarrow$ v1; v2 $\rightarrow$ v3; v3 $\rightarrow$ v2

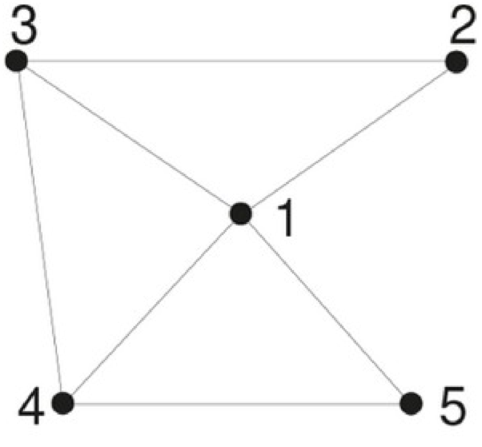


(Prudente, Edson UFRGS):

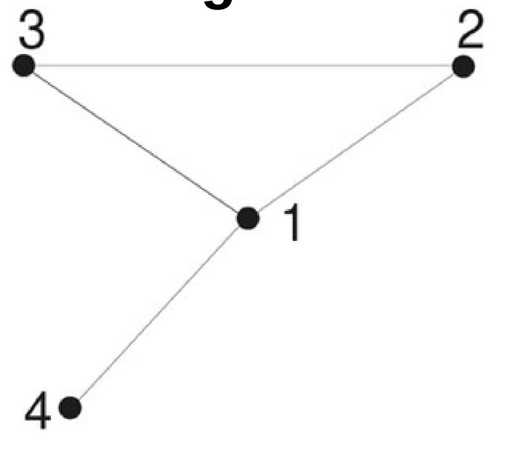
Subgrafo

- Um subgrafo G1(V1,E1) de um grafo G(V,E) é um grafo tal que $V1 \subseteq V$ e $E1 \subseteq E$;

G



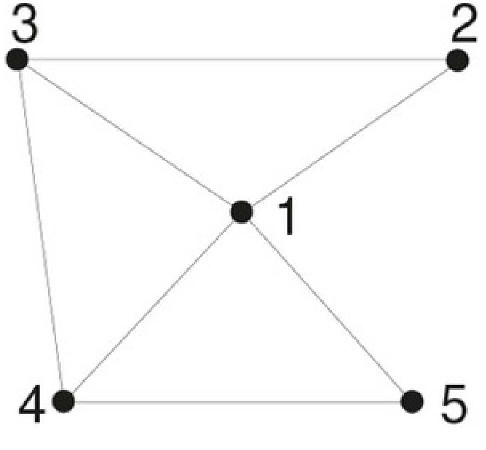
G1 Subgrafo de G



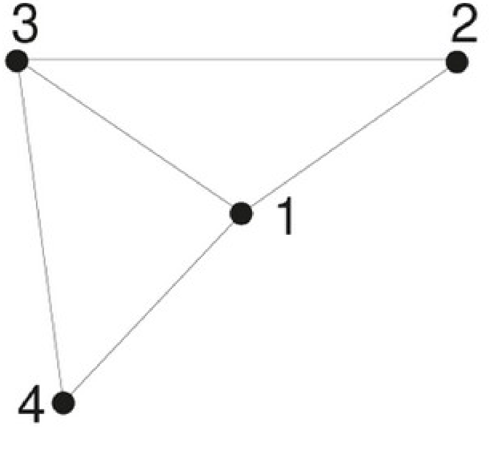
Subgrafo Induzido

- Um subgrafo G1(V1,E1) de um grafo G(V,E) é um grafo tal que V1 ⊆ V e E1 ⊆ E. Além disso, se para cada vértice v ∈ V1 e w ∈ V1, temos que a aresta (v,w) ∈ E e (v,w) ∈ E1, então o subgrafo G1 é induzido por G.
- Informalmente, um subgrafo induzido por um conjunto de vértices W mantém todas as arestas originais de G que possuem seus dois extremos em W.

G

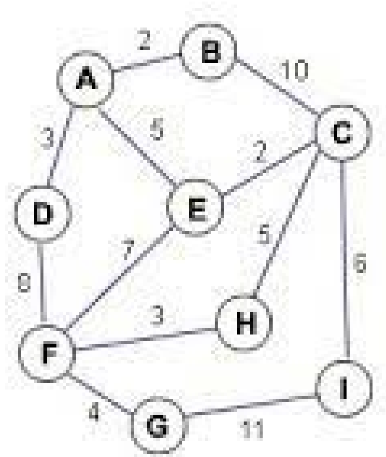


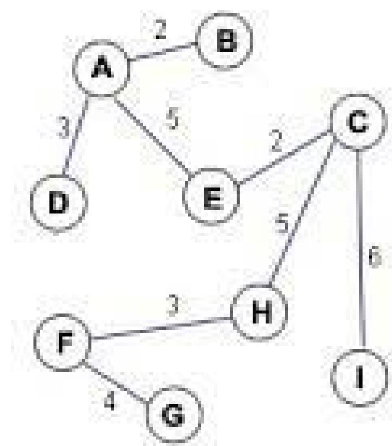
G1 subgrafo induzido de G:
Todo par de vértices de G1 tem aresta em G e aresta em G1



Subgrafo Induzido

- Um subgrafo gerador (“spanning subgraph”) de G é um subgrafo H de G tal que V (H) = V (G). Em outras palavras, H tem os mesmos vértices de G, mas não necessariamente todas as arestas de G.
- Exemplo: árvore geradora de G





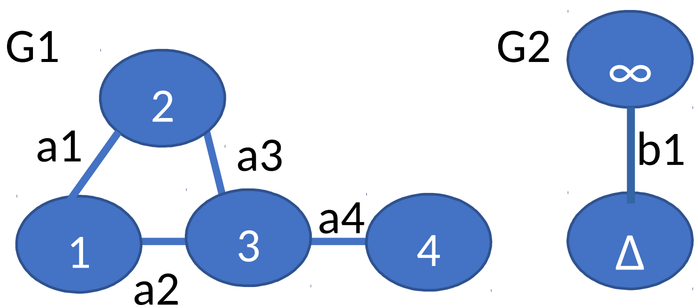
Matriz de adjacências

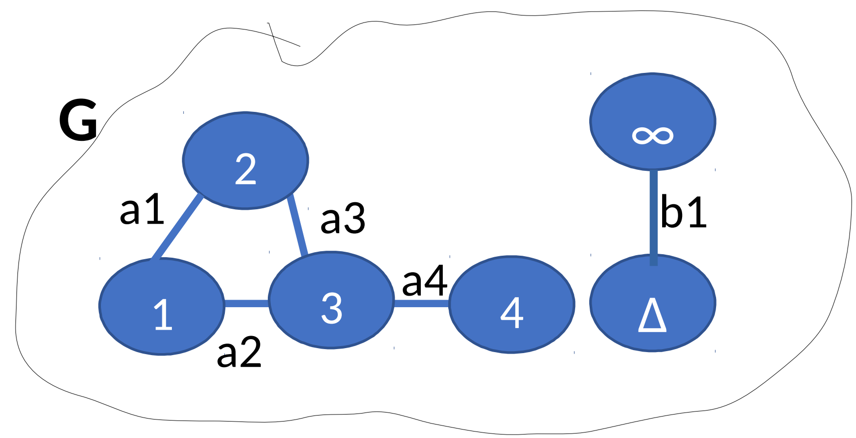
Operações sobre grafos

Dados G1(V1,E1) G2(V2,E2):

$$G_1 \cup G2 = G(V_1 \cup V_2, E1 \cup E_2)$$

Se G1 e G2 são disjuntos (sem vértices comuns), a união pode ser denotada por G1+G2 (Bondy Murt, pg 10)



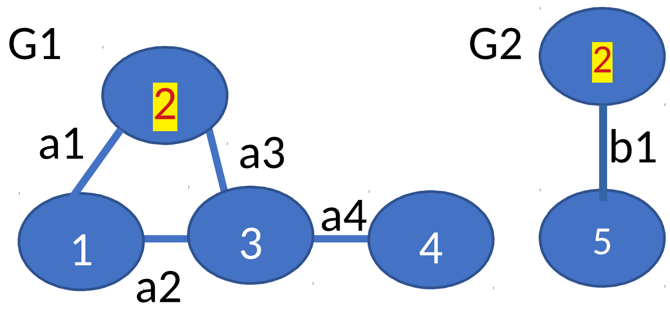


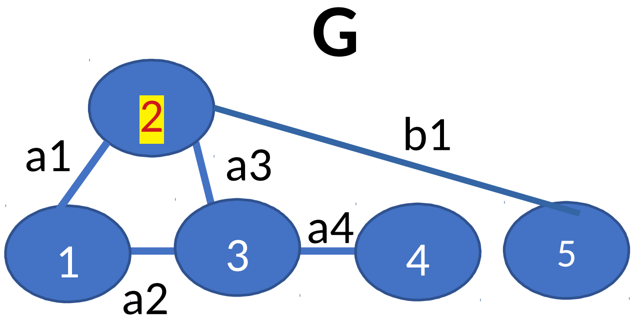
Operações sobre grafos

Dados G1(V1,E1) G2(V2,E2):

$$G_1 \cup G2 = G(V_1 \cup V_2, E1 \cup E_2)$$

Se G1 e G2 tiverem vértices comuns, G será um grafo conexo

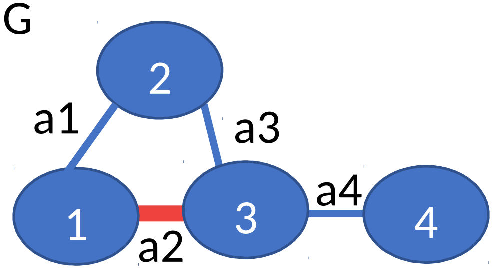




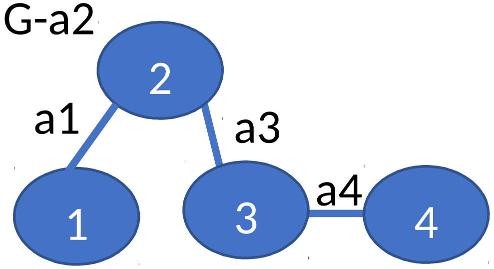
Operações sobre elementos de um grafo

Remoção de aresta(s)

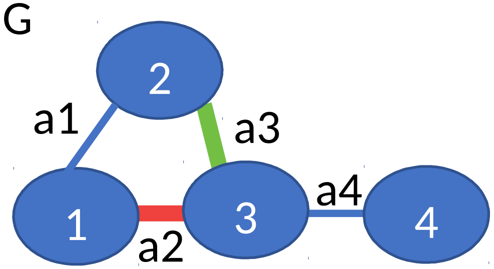
G



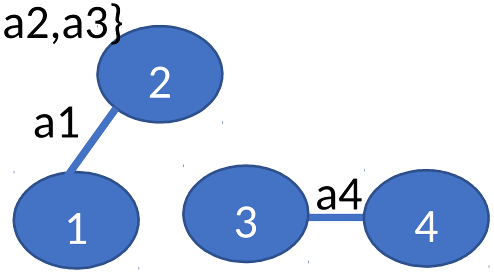
G-a2



G



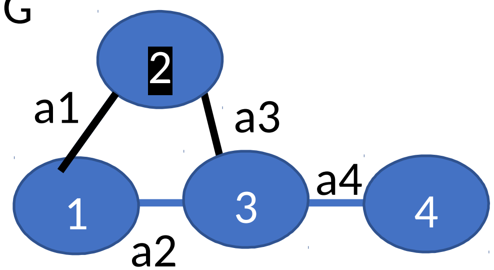
G-{a2,a3}



Operações sobre elementos de um grafo

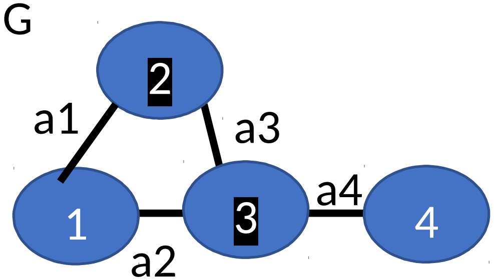
Remoção de vértice(s)

G

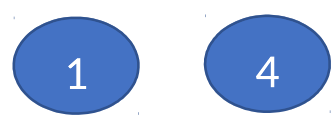


G-2

G

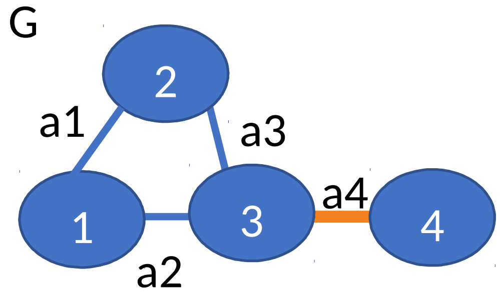


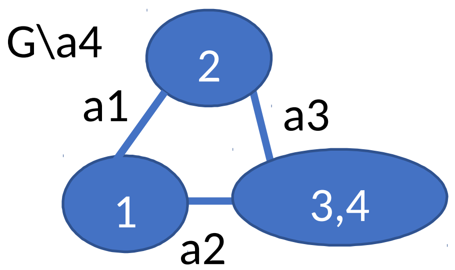
G-{2, 3}

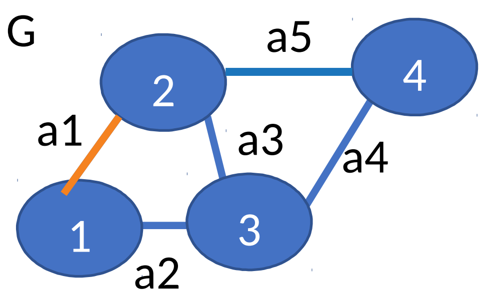


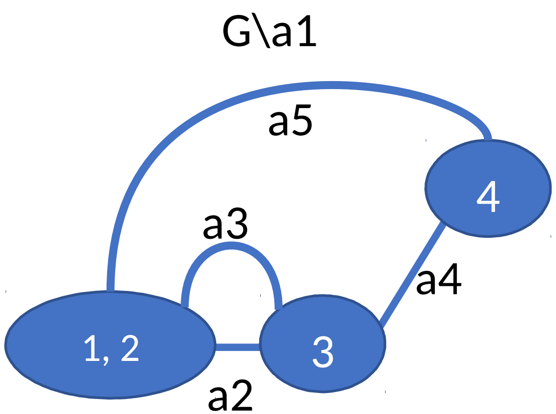
Operações sobre elementos de um grafo

Contração de aresta “G\e” : consiste na remoção da aresta com a união dos seu extremos.









Operações sobre elementos de um grafo

Contração de laço: produz a remoção do laço.