Uma formalização assistida por computador da interpretação modal do sistema intuicionista

Elian Babireski

2024

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
ELIAN GUSTAVO CHORNY BABIRESKI
UMA FORMALIZAÇÃO ASSISTIDA POR COMPUTADOR DA INTERPRETAÇÃO MODAL DO SISTEMA INTUICIONISTA
JOINVILLE
2025

Aos meus pais, e a todos os amigos feitos durante esta jornada.

Elian Gustavo Chorny Babireski

Uma formalização assistida por computador da imersão modal do sistema intuicionista / Elian Gustavo Chorny Babireski. – Joinville, 2025-

?? p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientadora: Karina Girardi Roggia

Trabalho de conclusão de curso – Universidade do Estado de Santa Catarina, 2025.

1. Tradução. 2. Imersão. 3. Formalização. 4. Intuicionismo. 5. Modalidades. 6. Efeitos. 7. Compilação. I. Karina Girardi Roggia. II. Universidade do Estado de Santa Catarina. III. Departamento de Computação. IV. Uma formalização assistida por computador da imersão modal do sistema intuicionista.

CDU 02:141:005.7

Resumo

Uma das primeiras traduções de um sistema de dedução a outro apresentadas na literatura consiste na tradução do sistema intuicionista ao sistema modal **S4** com o intuito de interpretar a modalidade da *necessidade* como uma modalidade de *provabilidade*. Dezenas de anos depois, foi apresentada uma metalinguagem que se dedicava a representar semanticamente noções de computação como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuações. A codificação dessas noções apresenta grandes similaridades com os axiomas modais do sistema **S4** e, deste modo, a dita tradução torna-se relevante numa visão baseada na interpretação prova-programa. Assim, com inspiração nos diversos casos de formalizações assistidas por computador, este trabalho busca verificar formalmente esta tradução.
Palavras-chave — tradução, imersão, formalização, intuitionismo, modalidades, efeitos, compilação.

Abstract

One of the first translations of a deduction system into another presented in the literature involves the translation of the intuitionistic system into the modal system **S4** to interpret the modality of *necessity* as a modality of *provability*. Decades later, a metalanguage was introduced to semantically represent notions of computation such as partiality, non-determinism, exceptions, and continuations. The encoding of these notions shows great similarities with the modal axioms of the **S4** system, making the mentioned translation relevant within a proof-program interpretation perspective. Thus, inspired by the various cases of computer-assisted formalizations, this work aims to formally verify this translation.
Keywords — translation, embedding, formalization, intuitionism, modalities, effects, compilation.

Sumário

"'Oh, you can't help that,' said the Cat: 'we're all mad here. I'm mad. You're mad.' 'How do you know I'm mad?' said Alice. 'You must be,' said the Cat, 'or you wouldn't have come here.'"

— Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

1. Introdução

As lógicas modais consistem em um conjunto de extensões da lógica clássica que contam com a adição de um ou mais operadores, chamados modalidades, que qualificam sentenças. No caso do sistema **S4**, são adicionadas as modalidades de necessidade ($\Box$) e possibilidade ($\Diamond$) em conjunto à regra da necessitação[1] e os axiomas **K**: $\Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B$, **T**: $\Box A \to A$ e **4**: $\Box A \to \Box\Box A$ (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Ademais, pode-se derivar nesse sistema, por meio da dualidade entre as modalidades[2], sentenças duais aos axiomas **T** e **4**, sendo elas $\mathbf{T}_\Diamond$: $A \to \Diamond A$ e $\mathbf{4}_\Diamond$: $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$, respectivamente Zach et al. (2024).

As mônadas ganharam destaque na área de linguagens de programação desde que **?** formalizou uma metalinguagem que faz uso dessas estruturas para modelar noções de computação — como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuações — de uma maneira puramente funcional. Pode-se notar uma grande semelhança entre as sentenças $\mathbf{T}_\Diamond$ e $\mathbf{4}_\Diamond$ e as transformações naturais monádicas $\eta : 1_C \to T$ e $\mu : T^2 \to T$, respectivamente. Nesse sentido, Pfenning e Davies (2001) demonstraram que se pode traduzir essa metalinguagem para o sistema **S4** da lógica modal, pelo qual se torna interessante analisar esse sistema como uma linguagem de programação sob a ótica do isomorfismo de Curry-Howard.

Troelstra e Schwichtenberg (2000) apresentam duas traduções equivalentes da lógica intuicionista para o sistema **S4** da lógica modal, sendo um deles correspondente a uma abordagem *call-by-name* e outra a um abordagem *call-by-value*. Tais traduções possuem grande similaridade com as traduções da lógica intuicionista para a lógica linear definidas por Girard (1987). Essas traduções equivalem à tradução por negação dupla que, por sua vez, equivalem a traduções *continuation-passing style* (CPS) em compiladores por meio do isomorfismo de Curry-Howard (**?**), o que torna esse tema interessante no ponto de vista de compilação.

Durante grande parte da história, provas lógicas e matemáticas eram validadas manualmente pela comunidade acadêmica, o que muitas vezes — a depender do tamanho e complexidade da prova — se mostrava ser um trabalho complexo e sujeito a erros. Hoje em dia, exitem *softwares* chamados assistentes de provas que permitem verificar — graças ao isomorfismo de Curry-Howard — a corretude de provas (Chlipala, 2022). O assistente de provas que será usado neste trabalho é o COQ, que utiliza o cálculo de construções indutivas e um conjunto axiomático pe-

[1] Se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$

[2] $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$

queno para permitir a escrita de provas simples e intuitivas (The Coq Development Team, 2024).

1.1 Objetivos

Este trabalho consiste numa continuação do desenvolvimento da biblioteca de formalização de sistemas modais normais iniciado por Silveira et al. (2022) e posteriormente expandida de forma a permitir a fusão de sistemas modais por Nunes et al. (2024). Nele, formalizaremos as traduções do sistema intuicionista ao sistema modal **S4** no asssitente de provas COQ e provaremos suas propriedades. Uma formalização de traduções entre sistemas de dedução similar a nossa foi feita por Sehnem (2023), neste caso tendo como alvo o sistema linear de Girard (1987). Todas as formalizações citadas acima deram-se no assistente de provas COQ, o mesmo assistente usado neste trabalho. Como objetivos específicos, listamos:

- Fornecer uma introdução ao conceito de sistemas de dedução;
- Fornecer uma introdução ao conceito de traduções entre sistemas;
- Fornecer uma introdução ao sistema intuicionista;
- Fornecer uma introdução aos sistemas modais, em especial o **S4**;
- Apresentar as traduções do sistema intuicionista ao sistema **S4**;
- Provar manualmente a correção e completude das traduções providas bem como outras propriedades pertinentes;
- Formalizar as provas no provador de teoremas interativo COQ.

1.2 Estruturação

Estruturaremos este trabalho em cinco partes, iniciando-se por esta introdução. O Capítulo 2 consiste numa fundamentação de conceitos basilares ao desenvolvimento deste trabalho, notadamente os conceitos de *sistemas de dedução*, *traduções* e *provadores de teoremas*. O Capítulo 3 apresenta as definições dos sistemas e traduções relevantes a este trabalho. No Capítulo 4 são provadas todas as propriedades abarcadas no escopo deste trabalho. Por fim, o Capítulo 5 compreende considerações parciais acerca do desenvolvido até o momento.

2. Fundamentação

Nesta parte do trabalho, serão apresentadas definições gerais que fundamentarão as definições mais estritas que serão apresentadas futuramente. Notadamente, fundamentaremos as noções de sistemas e traduções. Ademais, discorreremos acerca da noção de provadores, que serão usados para certificar as provas apresentadas posteriormente. Antes disso, entretanto, introduziremos duas notações que serão usadas copiosamente, uma para o conjunto das partes e outra para sucessões.

Notação. *Seja A um conjunto, $\mathfrak{P}(A)$ denota o conjunto $\{X \mid X \subseteq A\}$.*

Notação. *Seja $i \in \mathbb{N}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, $\langle a_i \mid i \leq n \rangle$ denota uma sucessão de n elementos de modo que o elemento a_i encontra-se na posição i.*

2.1 Sistemas

Sistemas de dedução buscam formalizar e sistematizar o processo de razoamento. Estudos acerca disso datam da antiguidade, dentre os quais destaca-se Aristotéls (1938). Considera-se que os estudos modernos neste campo foram, dentre outras pessoas, fundados por Frege (1879) e continuados por Whitehead e Russell (1910, 1911, 1912). Estas investigações — bem como outras — levaram ao desenvolvimento do sistema hoje tido como padrão. Posteriormente a isso, viu-se o surgimento de diversos sistemas não-padrões, fato que — conforme Béziau (2007) — justifica uma conceituação de sistema de dedução, que apresentaremos nesta seção.

Ainda segundo Béziau (2007), os primeiros desenvolvimentos neste sentido foram feitos por Tarski (1928), que define o conceito de dedução com base num operador de fecho $C : \mathfrak{P}(\mathscr{L}) \to \mathfrak{P}(\mathscr{L})$, sendo $\mathscr{L}$ um conjunto qualquer. Neste trabalho entretanto usaremos a definição proposta por Béziau (1994) baseada numa relação de dedução $\vdash \subseteq \mathfrak{P}(\mathscr{L}) \times \mathscr{L}$, uma vez que, por sua simplicidade, não traz elementos irrelevantes aos intuitos deste. Cabe destacar, conforme apontam Font et al. (2003), que ambas as definições são equivalentes[1], uma vez que $\Gamma \vdash \alpha$ se e somente se $\alpha \in C(\Gamma)$.

[1] Destaca-se, entretanto, que a definição de Tarski (1928) requer a satisfação de postulados não requeridos por Béziau (1994), sendo portanto menos geralista.

Definição 1 (Sistema). *Um sistema de dedução consiste num par* $\mathfrak{S} = \langle \mathscr{L}, \vdash \rangle$*, onde* $\mathscr{L}$ *consiste em um conjunto e* $\vdash \subseteq \mathfrak{P}(\mathscr{L}) \times \mathscr{L}$ *em uma relação sobre o produto cartesiano do conjunto das partes de* $\mathscr{L}$ *e o conjunto* $\mathscr{L}$*, sem demais condições.* □

Conforme Béziau (1994) aponta, a qualidade e quantidade dos elementos de um sistema $\mathfrak{S} = \langle \mathscr{L}, \vdash \rangle$ não são especificados, portanto sendo esta uma definição de grande generalidade. Neste sentido, com base no escopo deste trabalho, restringiremos a definição do conjunto $\mathscr{L}$ — dito *linguagem* — a linguagens proposicionais. Os elementos destas, aos quais daremos o nome de *sentenças*, notabilizam-se por serem formadas por *letras* — que consistem em proposições indivisas — e *operadores* — que podem gerar proposições maiores a partir de proposições menores. Ao par formado por letras e operadores daremos o nome *assinatura*, conforme abaixo.

Definição 2 (Assinatura). *Uma assinatura proposicional consiste num par* $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C} \rangle$*, onde* $\mathscr{P}$ *consiste num conjunto letras e* $\mathscr{C} = \bigcup \{\mathscr{C}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *num conjunto de operadores de modo que* $\circ \in \mathscr{C}_n$ *se e somente se* $\circ$ *possuir aridade* n*.* □

Notação. *Seja* $\mathscr{C}$ *um conjunto de operadores,* $\circ^n$ *denota um operador* $\circ \in \mathscr{C}_n$*.*

Podemos interpretar os conjuntos $\mathscr{P}$ e $\mathscr{C}$ de uma assinatura $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C} \rangle$ como construtores de sentenças. Neste sentido, o conjunto $\mathscr{C}_0$ assemelha-se mais ao conjunto $\mathscr{P}$, uma vez que seus elementos — ditos *constantes* — não geram sentenças maiores partindo de sentenças menores. Nota-se que uma assinatura constitui um elemento suficiente para definirmos indutivamente a linguagem de um sistema, conforme definido abaixo de maneira similar a Franks (2024). Por fim, destacamos que, para todos os sistemas apresentados neste trabalho, usaremos o conjunto de letras $\mathscr{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e letras romanas em caixa-baixa para representar seus elementos.

Definição 3 (Linguagem). *Seja* $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C} \rangle$ *uma assinatura proposicional. Uma linguagem proposicional* $\mathscr{L}$ *induzida a partir de* Σ *consiste no menor conjunto de sentenças bem-formadas induzido a partir das seguintes regras:*

(a) $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{L}$

(b) *Se* $\circ \in \mathscr{C}_n$ *e* $\{\varphi_i \mid i \leq n\} \subseteq \mathscr{L}$*, então* $\circ \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle \in \mathscr{L}$*.* □

Neste trabalho, representaremos sentenças por letras gregas em caixa-baixa e conjuntos de sentenças por letras gregas em caixa-alta.[2] Ademais, impõe-se definir a noção de profundidade de uma sentença. Esta noção, em termos simples, consiste no comprimento do maior ramo da construção da dada sentença. A definição provida abaixo consiste numa generalização para quaisquer aridades da definição dada por Troelstra e Schwichtenberg (2000). Usaremos essa definição futuramente para fazer demonstrações por meio provas indutivas sobre esta propriedade.

Definição 4 (Profundidade). *Seja $\mathfrak{S} = \langle \mathscr{L}, \vdash \rangle$ um sistema com linguagem induzida a partir de uma assinatura $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C} \rangle$. Considerando-se uma proposição $a \in \mathscr{P}$, um operador $\circ \in \mathscr{C}$ e uma aridade $n > 0$, definimos a profundidade $|\alpha|$ de uma sentença $\alpha \in \mathscr{L}$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$|a| \coloneqq 0$$
$$|\circ^0| \coloneqq 0$$
$$|\circ^n \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle| \coloneqq \max \{ |\varphi_i| \mid i \leq n \} + 1. \qquad \square$$

Com isso, encerram-se as definições relacionadas a linguagens de sistemas de dedução. Agora, apresentaremos definições relacionadas a relações de dedução, que gozam da mesma generalidade dada a liguagens. Deste modo, a relação $\vdash$ pode ser tanto uma relação de *derivação* — definida sintaticamente — quanto uma relação de *satisfação*[3] — definida semanticamente. Neste trabalho, serão abordados apenas sistemas definidos sobre relações de derivação. Cabe destacar, entretanto, que nada na definição de tradução impede que esta seja feita sobre relações de satisfação, conforme veremos com mais detalhes futuramente. Neste trabalho, definiremos a relações de dedução baseada em axiomatizações, ou seja, em conjuntos de *axiomas* — sentenças postuladas como verdadeiras — e conjuntos de *regras de dedução* — que permitem derivar mais sentenças verdadeiras caso certas condições sejam satisfeitas. Axiomatizações consistem numa abordagem hilbertiana de dedução que, segundo Troelstra e Schwichtenberg (2000), distinguem-se por conter um conjunto reduzido de regras de dedução que nunca descartam premissas. Ainda baseando-se em Troelstra e Schwichtenberg (2000) e em contraste a Frege (1879) e Hilbert (1926, 1928), preferiremos esquemas de axiomas a axiomas individuais de modo a eliminarmos a necessidade de instanciações.

[2]Desconsiderando-se o Σ, usado para representar assinaturas.
[3]Sendo esta denotada por $\vDash$.

Definição 5 (Dedução). *Seja um sistema* $\mathfrak{S} = \langle \mathscr{L}, \vdash \rangle$ *com uma relação de dedução definida sobre um conjunto de regras* $\mathscr{R}$ *e seja um conjunto de sentenças* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathscr{L}$. *A dedução* $\Gamma \vdash \alpha$ *vale se e somente se houver sucessão de sentenças* $\langle \varphi_i \in \mathscr{L} \mid i \leq n \rangle$ *de modo que* $\varphi_n = \alpha$ *e de modo que cada sentença* φ_i *tenha sido gerada por alguma regra* $\mathbf{R} \in \mathscr{R}$ *aplicada, caso preciso, a sentenças anteriores.* □

2.2 Traduções

Traduções entre sistemas consistem em funções que mapeiam sentenças de um sistema a sentenças de outro, garantindo certas propriedades. As propriedades a serem garantidas variam e ainda são discutidas na literatura, deixando que a definição exata de tradução — assim como houve com a definição de sistema — varie de acordo com a predileção e as necessidades de cada autor. Nesta seção, serão abordadas historicamente noções de tradução entre sistemas, bem como serão definidos e nomeados os conceitos de tradução que serão usados no restante deste trabalho.

Historicamente, autores usaram diferentes combinações das condições apresentadas acima e, em certos casos, outras. Neste trabalho, adotaremos uma noção forte de tradução que requer tanto a correção forte quanto a completude forte, conforme Coniglio (2005). Definiremos, ainda, uma notação que nos permite aplicar sucintamente a tradução a todos os elementos de um conjunto.

Definição 6 (Tradução). *Uma sentença* α *de um sistema* $\mathfrak{A} = \langle \mathscr{A}, \vdash_{\mathfrak{A}} \rangle$ *pode ser traduzida a uma sentença* α^* *em um sistema* $\mathfrak{B} = \langle \mathscr{B}, \vdash_{\mathfrak{B}} \rangle$ *caso exista uma função* $\bullet^* : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ *que garanta que* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{A}} \alpha$ *se e somente se* $\Gamma^* \vdash_{\mathfrak{B}} \alpha^*$. □

Notação. *Seja* $\Gamma \in \mathfrak{P}(\mathscr{A})$ *um conjunto de sentenças bem-formadas e* $\bullet^* : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ *uma tradução.* Γ^* *denota o conjunto* $\{\alpha^* \mid \alpha \in \Gamma\} \in \mathfrak{P}(\mathscr{B})$, *ou seja, a aplicação da tradução a todos os elementos do conjunto* Γ. □

Uma *imersão* consiste numa função injetora que mapeia uma estrutura em outra de uma maneira que a estrutura de origem seja de alguma forma preservada. Percebe-se que uma tradução, conforme apresentada, pode ser vista como uma imersão caso seja injetora, com a estrutura preservada sendo a relação de dedução. Dizemos então que um sistema foi *imerso* em outro. A primeira tradução entre dois sistemas conhecida na literatura foi definida por Kolmogorov (1925) como uma maneira de demonstrar que o uso da *lei do terceiro excluso*[4] não leva a contradições. Essa definição consiste basicamente em prefixar uma dupla negação a cada elemento da construção de uma dada sentença (Coniglio, 2005), motivo pelo qual chamaremos essa tradução de *tradução de negação dupla.* Essa mesma tradução foi também descoberta independentemente por Gödel e por Getzen. Curiosamente, essa tradução mostra-se relevante para o escopo deste trabalho, uma vez que consiste na contraparte da passagem por continuações segundo a interpretação prova-programa.

Exemplo 1. *Define-se a tradução* $\bullet^{\neg} : \mathscr{L}_{\mathbf{C}} \to \mathscr{L}_{\mathbf{I}}$ *do sistema clássico ao sistema intuicionista indutivamente da seguinte maneira:*

$$
\begin{aligned}
p^{\neg} &\coloneqq \neg\neg p \\
\bot^{\neg} &\coloneqq \bot \\
(\varphi \wedge \psi)^{\neg} &\coloneqq \neg\neg(\varphi^{\neg} \wedge \psi^{\neg}) \\
(\varphi \vee \psi)^{\neg} &\coloneqq \neg\neg(\varphi^{\neg} \vee \psi^{\neg}) \\
(\varphi \to \psi)^{\neg} &\coloneqq \neg\neg(\varphi^{\neg} \to \psi^{\neg})
\end{aligned}
$$

□

2.3 Provadores

A primeira prova de destaque a ser realizada com grande uso de computadores foi a do teorema das quatro cores[5], feita por Appel e Haken (1976), motivado pela grande quantidade de casos a serem analisados. Conforme Wilson (2021) afirma, esta prova foi, por uns, recebida com entusiasmo e por outros, devido ao uso de computadores, com cetistismo e desapontamento. Dentre aqueles que compartilharam destas visões opositoras, destaca-se Tymoczko (1979). Ainda segundo Wilson (2021), o teorema tornou-se mais aceito com o passar do tempo e foi, posteriormente, formalizado em um provador de teoremas por Gonthier (2008).

Provadores de teoremas consistem em programas de computador que verificam a validade de teoremas. Dentre estes, podemos destacar as classes dos provadores *automáticos* e dos provadores *interativos.* Os primeiros buscam provar teoremas de maneira que requeira a menor quantidade de intervenção humana, enquanto os segundos — que ganharam destaque depois das limitações dos primeiros ficarem evidentes — delegam-se a verificar rigorosamente provas desenvolvidas por huma-

[4]Definido como $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

[5]Que afirma que *qualquer mapa planar tem uma quatro-coloração.*

nos em sua linguagem. Formalizaremos as provas apresentadas neste trabalho no provador de teoremas interativo COQ, o mesmo *software* usado por Gonthier (2008).

O COQ trata-se de um provador de teoremas interativo baseado no *cálculo de construções*. Este sistema formal fornece uma estrutura unificada para definir funções, tipos e proposições, permitindo a construção e verificação de provas dentro do mesmo formalismo. No COQ, entretanto, este formalismo foi estendido de modo a permitir tipos indutivos, criando o dito *cálculo de construções indutivas*. Neste, pode-se definir tipos de dados estruturados e funções e provas recursivas. Essa fundação alinha-se com isomorfismo de Curry-Howard, onde programas correspondem a provas e tipos correspondem a proposições, tornando o COQ uma ferramenta poderosa de formalização e verificação. Para um maior aprofundamento acerca do provador de teoremas COQ, recomenda-se a leitura de Chlipala (2022), Pierce et al. (2024) e The COQ Development Team (2024).

3. Sistemas

Nesta parte do trabalho, uma vez apresentada a fundamentação, introduziremos as definições dos sistemas de origem e de destino das traduções apreciadas neste trabalho, nomeadamente o sistema intuicionista e um dos sistemas modais. Ainda, relacionaremos as modalidades dos sistemas modais com efeitos computacionais de modo a justificar investigações acerca destes a partir um ponto de vista da computação, especialmente aquele da compilação. Por fim, apresentaremos duas traduções que levam sentenças intuicionistas a sentenças modais.

3.1 Sistema intuicionista

Nesta seção, definiremos os sistema intuicionista $\mathfrak{I} = \langle \mathscr{L}, \vdash_{\mathfrak{I}} \rangle$, cuja linguagem consiste no conjunto de origem das traduções apresentadas deste trabalho. Este sistema surge da rejeição da lei do *tertium non datur*, ou seja $\alpha \vee \neg\alpha$ não vale para todos os casos. O intuicionismo foi primeiramente considerado e defendido por Brouwer (1907, 1908). Este defendia que uma asserção poderia ser dita verdade apenas quando esta poderia ser *construída*. Assim, uma demonstração por contradição não valeria, uma vez que durante uma demonstração deste tipo, estar-se-ia contruindo a dupla negação da proposição em apreciação, mas não a proposição em si.

Brouwer repudiou a tentativa formalização de seu pensamento como um sistema, todavia isso não impediu que esta fosse feita. A primeira formalização encontrada na literatura foi feita por Kolmogorov (1925), entretanto outros também a fizeram posteriormente. A linguagem abaixo foi definida conforme Troelstra e Schwichtenberg (2000). Adotamos as ordens usuais de avaliação dos operadores.

Definição 7 ($\mathscr{L}$). *A linguagem do sistema intuicionista, denotada $\mathscr{L}$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C} \rangle$, onde $\mathscr{C} = \left\{\perp^0, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2\right\}$.*

Notação. *Seja uma sentença $\alpha \in \mathscr{L}$, $\neg\alpha$ denota a sua negação $\alpha \rightarrow \perp$.*

Consideremos agora a relação de dedução para o sistema $\mathfrak{I}$, definida por suas regras de dedução. Estas destacam-se pela omissão de uma regra que gera sentenças do tipo $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$. Isso acontece porque não somente esta regra permite provas não-contrutivas como permite a derivação de sentenças do tipo $\alpha \vee \neg\alpha$. Os axiomas abaixo estão organizadas de acordo com os seus operadores principais: na primeira linha os axiomas da implicação, na segunda linha as axiomas da conjunção, na terceira linha os axiomas da disjunção e na quarta linha o axioma da contradição. Abaixo dos axiomas, temos as demais regras, nomeadamente a *regra da assunção* e a *regra da separação*.

Definição 8 ($\vdash_{\mathfrak{I}}$). *Abaixo estão definidas as regras do sistema* $\mathfrak{I}$.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha}\ \mathbf{A_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\ \mathbf{A_2}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \land \beta}\ \mathbf{A_3} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \land \beta \to \alpha}\ \mathbf{A_4} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \land \beta \to \beta}\ \mathbf{A_5}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \alpha \lor \beta}\ \mathbf{A_6} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \beta \to \alpha \lor \beta}\ \mathbf{A_7} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \lor \beta \to \gamma}\ \mathbf{A_8}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \bot \to \alpha}\ \mathbf{A_\bot}$$

$$\frac{\alpha \in \Gamma}{\Gamma \vdash \alpha}\ \mathbf{R_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta}\ \mathbf{R_2}$$

A noção de *construção* representada pelo sistema intuicionista assemelha-se muito com a noção de *computação*. Mais que isso: elas são noções *isomorfas*. Com isso queremos dizer que, dado um termo-λ, a asserção de que este termo pertence ao tipo α implica que este termo demonstra a proposição α. Conversamente, a demonstração de uma proposição instuicionista α implica que deve haver algum termo-λ com tipo α. Como aponta Wadler (2015), podemos dizer que *proposições são tipos*, *derivações são programas* e *normalizações de derivações são avaliações de programas*.

Regras de dedução	Regras de tipagem
$\dfrac{}{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha}$	$\dfrac{}{\Gamma \cup \{x : \alpha\} \vdash x : \alpha}$
$\dfrac{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}$	$\dfrac{\Gamma \cup \{x : \alpha\} \vdash e : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \alpha \to \beta}$
$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash e_1 : \alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash e_2 : \alpha}{\Gamma \vdash e_1\ e_2 : \beta}$

Tabela 2: Comparação entre regras de dedução intuicionistas and regras de tipagem de termos-λ. Elaborado pelo autor.

Os primeiros vislumbres dessa relação foram feitos por Curry e Feys (1958), no entando ela começou a ser de fato desvendada a partir do trabalho de Howard

(1980). Como ilustração, regras de dedução do sistema intuicionista e regras de tipagem de termos-λ são postas lado a lado na Tabela 2.

3.2 Sistemas modais

Os sistemas modais surgem a partir da investigação acerca dos *modos* em que uma proposição pode ser verdadeira, ou seja, das *modalidades*. As modalidades costumeiramente definidas são as noções duais de *necessidade* e *possibilidade*. Assim, estão presentes nas linguagens destes sistemas sentenças da forma $\Box\alpha$ e da forma $\Diamond\alpha$, lidas *necessariamente* α e *possivelmente* α. Intuitivamente, uma necessidade deve ser verdade em todos os casos, enquanto uma possibilidade deve ser verdade em algum caso. Em despeito dos seus nomes e de suas interpretações informais, estas modalidades podem ser usadas para modelar diferentes noções, como *conhecimento* ou *obrigação*. Como veremos adiante, podemos relacionar a possibilidade como efeitos computationais, o que a torna interessante do ponto de vistada computação.

As primeiras investigações acerca das modalidades foram feitos na antiguidade. Entretanto, os estudos modais modernos foram fundados por Lewis (1912). Lewis motivou-se a criar um sistema onde os condicionais tivessem uma interpretação mais perto daquela das linguagens naturais. Neste sistema, não valeriam para todos os casos sentenças da forma $\alpha \to \beta \to \alpha$, por exemplo. Estes estudos culminaram no trabalho conjunto de Lewis e Langford (1932). Este trabalho definiu cinco sistemas — nomeados de **S1** a **S5** — que contavam com a dita *implicação estrita* $\alpha \prec\!\!3\, \beta$ definida em termos da possibilidade e que não permitia a demonstração de sentenças consideradas indesejadas.

Gödel (1933) apresentou uma definição equivalente do sistema **S4**, tendo a necessidade como operador primitivo e a dedução estrita podendo ser definida em termos desta e da implicação, como $\Box(\alpha \to \beta)$. Este sistema apresentou a vantagem de separar as regras proposicionais das regras modais, propriedade que não estava presente nas definições anteriores, e tornou-se o padrão a partir de então. Nesta sessão, apresentaremos este sistema, doravante chamado $\mathfrak{M} = \langle \mathscr{L}_\Box, \vdash_\mathfrak{M} \rangle$. A linguagem abaixo foi definida conforme Troelstra e Schwichtenberg (2000). Foram definidas notações costumeiras, das quais destacamos a dedução estrita. Ainda, definiu-se uma notação para conjuntos com sentenças necessariamente verdadeiras.

Definição 9 ($\mathscr{L}_\square$). *A linguagem dos sistemas modais, denotada $\mathscr{L}_\square$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_\square = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C}_\square \rangle$, onde $\mathscr{C}_\square = \{\bot^0, \square^1, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2\}$.*

Notação. *Sejam duas sentenças $\alpha, \beta \in \mathscr{L}$. Denotamos por $\neg\alpha$ a negação $\alpha \rightarrow \bot$. Denotamos por $\diamond\alpha$ a possibilidade $\neg\square\neg\alpha$. Denotamos por $\alpha \prec\!\!\!\!\dashv \beta$ a implicação estrita $\square(\alpha \rightarrow \beta)$. E denotamos por $\alpha \leftrightarrow \beta$ a bi-implicação $(\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$.*

Notação. *Seja $\Gamma \in \wp(\mathscr{L}_\square)$ um conjunto de sentenças bem-formadas. $\square\Gamma$ denota o conjunto $\{\square\alpha \mid \alpha \in \Gamma\} \in \wp(\mathscr{L}_\square)$, ou seja, a prefixação da necessitação a todos os elementos do conjunto Γ.*

Consideremos agora a relação de dedução para o sistema $\mathfrak{M}$, definida por suas regras de dedução. Nomeamos as regras de maneira com que as regras comuns ao sistema $\mathfrak{I}$ e ao sistema $\mathfrak{M}$ tenham nomes comuns, enquanto as regras diferentes tenham nomes diferentes, bem como as arranjamos de forma semelhante A presença da regra $\mathbf{A}_\neg$ permite a derivação do *tertium non datur*, em oposição ao sistema intuicionista. Assim sendo, esta relação consiste no aumento das regras proposicionais com regras para a necessidade. A definição que segue baseia-se tanto em Troelstra e Schwichtenberg (2000) como em Hakli e Negri (2012).

Definição 10 ($\vdash_\mathfrak{M}$). *Abaixo estão definidas as regras do sistema $\mathfrak{M}$.*

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha}\,\mathbf{A_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma}\,\mathbf{A_2}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta}\,\mathbf{A_3} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha}\,\mathbf{A_4} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta}\,\mathbf{A_5}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta}\,\mathbf{A_6} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha \vee \beta}\,\mathbf{A_7} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma}\,\mathbf{A_8}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha}\,\mathbf{A_\neg}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \square(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \square\alpha \rightarrow \square\beta}\,\mathbf{B_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \square\alpha \rightarrow \alpha}\,\mathbf{B_2} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \square\alpha \rightarrow \square\square\alpha}\,\mathbf{B_3}$$

$$\frac{\alpha \in \Gamma}{\Gamma \vdash \alpha}\,\mathbf{R_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma \vdash \beta}\,\mathbf{R_2} \qquad \frac{\vdash \alpha}{\Gamma \vdash \square\alpha}\,\mathbf{R_3}$$

A definição da regra $\mathbf{R_3}$, dita *regra da necessitação*, foi feita de maneira cuidadosa de modo a permitir a correta derivação do teorema da dedução. Este teorema mostra-se importante para tornar as demonstações feitas neste trabalho mais breves e claras. Para tanto, foi preciso restringir a condição antecedente da regra a conjuntos vazios.

Em outras palavras, esta regra permite tornar apenas teoremas necessidades. Para uma discussão mais aprofudada acerca da validade do teorema da dedução em sistemas modais, remetemos o leitor a Hakli e Negri (2012).

3.3 Efeitos

Os *efeitos computationais*, ou simplesmente *efeitos*, são todas as ações e interações performadas pelos computadores que vão além da simples computação. Assim, uma função que computa a soma entre dois valores não apresenta nenhum efeito, enquanto uma função que computa a soma entre dois valores e imprime o resultado na tela performa um efeito ao fazer a impressão. Alguns exemplos de efeitos são *continuações*, *excessões* e *não-determinismo*. Programas com efeitos podem mudar seus estados internos, bem como receber entradas externas. Tais capacidades, enquanto promovem expressividade, também tornam a avaliação do comportamento do programa menos claras.

Motivado pela busca de uma metalinguagem para modelar efeitos em linguagens de programação, Moggi (1991) introduziu a linguagem λ_c. Nesta linguagem, os termos-λ são distinguidos entre valores de tipo α e computações $\mu\ \alpha$ de tipo α de modo que estas se comportam *monadicamente*. O construtor de tipos μ representa alguma *noção de computação*, ou melhor dizendo, algum efeito. Inspirado por este trabalho, Wadler (1993) sugere e defende o uso de *mônadas* como estruturas dentro de linguagens funcionais como uma maneira de simular efeitos.

Para os fins deste trabalho, consideraremos mônadas como um construtor de tipos `μ` munido das operações `lift`, `unit` e `bind`.[1] Alternativamente, podemos usar a operação `join` em lugar da operação `bind`. A operação `lift` eleva funções a funções *efeituosas*.[2] Do mesmo modo, a operação `unit` eleva um valor a um valor com efeitos, a operação `bind` encadeia efeitos e a operação `join` une efeitos.

```
lift : ∀α.∀β.∀μ.(α → β) → μα → μβ
unit : ∀α.∀μ.α → μα
bind : ∀α.∀β.∀μ.(α → μβ) → μα → μβ
join : ∀α.∀μ.μμα → μα
```

Conforme notado por Benton et al. (1998), a linguagem λ_c corresponde ao sistema

[1] Estas operações devem respeitar certas condições, que não serão abordadas.

[2] *Effectful.*

laxo — doravante chamado de $\mathfrak{L}$ — por meio da interpretação prova-programa. Este sistema, que aumenta o sistema intuicionista $\mathfrak{I}$ com uma modalidade de *laxidade*, foi inicialmente considerado por Curry (1952) e posteriormente redescoberto por Fairtlough e Mendler (1995). Esta modalidade — denotada $\circ$ — foi interpretada por estes como *verdade com restrições*, motivo que justifica seu nome. As regras que govenam a modalidade laxa, conforme apresentadas abaixo, geram sentenças correspondentes aos tipos das funções **`lift`**, **`unit`** e **`join`**. Do mesmo modo, podemos derivar a sentença que corresponde ao tipo da função **`bind`**.

Definição 11 ($\mathscr{L}_\circ$). *A linguagem do sistema laxo, denotada $\mathscr{L}_\circ$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C}_\circ \rangle$, onde $\mathscr{C}_\circ = \{\bot^0, \circ^1, \wedge^2, \vee^2, \to^2\}$.*

Definição 12 ($\vdash_{\mathfrak{L}}$). *Abaixo estão definidas as regras do sistema $\mathfrak{L}$.*

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha}\,\mathbf{A_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,\mathbf{A_2}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta}\,\mathbf{A_3} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha}\,\mathbf{A_4} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \beta}\,\mathbf{A_5}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \alpha \vee \beta}\,\mathbf{A_6} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \beta \to \alpha \vee \beta}\,\mathbf{A_7} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \vee \beta \to \gamma}\,\mathbf{A_8}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha}\,\mathbf{A_\bot}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \beta) \to \circ\alpha \to \circ\beta}\,\mathbf{C_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \circ\alpha}\,\mathbf{C_2} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \circ\circ\alpha \to \circ\alpha}\,\mathbf{C_3}$$

$$\frac{\alpha \in \Gamma}{\Gamma \vdash \alpha}\,\mathbf{R_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta}\,\mathbf{R_2}$$

Pode-se imergir sentenças do sistema $\mathfrak{L}$ em sentenças do sistema $\mathfrak{M}$ de modo que $\circ\alpha := \diamond\Box\alpha$, conforme definem Pfenning e Davies (2001). Como estes apontam, isso permite com que usemos o sistema $\mathfrak{M}$ para razoar sobre o sistema $\mathfrak{L}$, uma vez que as regras deste podem ser derivadas naquele. Outra imersão de interesse trata-se da tradução de Fairtlough e Mendler (1995), com sistema de origem o sistema $\mathfrak{L}$ e com sistema de destino um sistema bimodal $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M} \rangle$, que serve para reforçar ainda mais o caso da relação entre ambos os sistemas.

A imersão apresentada acima sugere que possamos interpretar algumas das sentenças do sistema $\mathfrak{M}$ como representando computações com efeitos. De fato, Pfenning e Davies (2001) alegam que $\Box\alpha$ intuitivamente representa valores de tipo α que sobrevivem a efeitos, enquanto $\diamond\alpha$ representa computações que retornam valores de tipo α. Corrobora com esta visão o trabalho de Kobayashi (1997). Notamos que, segundo Zach et al. (2024), podem ser derivadas no sistema $\mathfrak{M}$ sentenças da forma $\alpha \to \diamond\alpha$ e da forma $\diamond\diamond\alpha \to \diamond\alpha$. Do mesmo modo, podem ser derivadas sentenças da forma $\square(\alpha \to \beta) \to \diamond\alpha \to \diamond\beta$. Estas assemelham-se ao **`lift`**, **`unit`** e **`join`**, o que reforça o ponto apresentado aqui.

Em computação, *continuações* são um conceito descoberto e redescoberto diversas vezes (Reynolds, 1993) que representa o restante de uma computação a partir de um determinado ponto. O *estilo de passagem por continuações* consiste num estilo de programação onde cada função, em vez de retornar um valor, recebe como argumento uma função com a sua continuação e a invoca ao fim de sua execução (Thielecke, 1999). Linguagens em estilo de passagem por continuações são muito usadas como representação dentro de compiladores, uma vez que essa inversão de controle — ou seja, a passagem de continuações como argumento — revela o fluxo do programa. Uma vez que mônadas podem ser imergidas em continuações e continuações podem ser imergidas em mônadas (Filinski, 1994), o sistema $\mathfrak{M}$ torna-se interessante do ponto de vista de compilação, motivo que justifica investigações acerca do uso de uma linguagem baseada em $\mathfrak{M}$ como representação durante a compilação.

3.4 Traduções

A primeira tradução do sistema intuicionista ao sistema modal foi proposta por Gödel (1933) motivado pela possibilidade de leitura da necessidade como uma modalidade de construtividade. Ou seja, por meio dessa tradução, a sentença $\square\varphi$ poderia ser lida como *φ pode ser provada construtivamente* (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Gödel alegou — sem apresentar provas — a correção fraca dessa tradução e conjeiturou sua completude fraca, posteriormente provadas por McKinsey e Tarski (1948). As as traduções apresentadas abaixo foram retiradas de Troelstra e Schwichtenberg (2000).

Definição 13 (Tradução quadrado). *Define-se a tradução $^\square : \mathscr{L} \to \mathscr{L}_\square$ do sistema $\mathfrak{I}$ ao sistema $\mathfrak{M}$ indutivamente da maneira que segue. Considere $a \in \mathscr{P}$.*

$$a^\square \coloneqq \square a \qquad \bot^\square \coloneqq \bot$$

$$(\alpha \land \beta)^\square \coloneqq \alpha^\square \land \beta^\square \qquad (\alpha \to \beta)^\square \coloneqq \square(\alpha^\square \to \beta^\square) \qquad (\alpha \lor \beta)^\square \coloneqq \alpha^\square \lor \beta^\square$$

Definição 14 (Tradução redondo). *Define-se a tradução* $\circ : \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{L}_\Box$ *do sistema* $\mathfrak{I}$ *ao sistema* $\mathfrak{M}$ *indutivamente da maneira que segue. Considere* $a \in \mathscr{P}$.

$$a^\circ \coloneqq a \qquad\qquad \bot^\circ \coloneqq \bot$$

$$(\alpha \wedge \beta)^\circ \coloneqq \alpha^\circ \wedge \beta^\circ \qquad (\alpha \longrightarrow \beta)^\circ \coloneqq \Box\alpha^\circ \longrightarrow \beta^\circ \qquad (\alpha \vee \beta)^\circ \coloneqq \Box\alpha^\circ \vee \Box\beta^\circ$$

Ambas as traduções providas são equivalentes, conforme demonstraremos futuramente. Ademais, faz-se interessante pontuar que as traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^\Box$ correspondem, respectivamente, às traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^*$ do sistema intuicionista ao sistema linear providas por Girard (1987). A primeira tradução de Girard corresponde a uma ordem de avaliação por nome (*call-by-name*) e a segunda a uma ordem de avaliação por valor (*call-by-value*), conforme notam Maraist et al. (1999).

4. Propriedades

Uma vez definidos os conceitos precisos para o desenvolvimento deste trabalho, aqui apresentaremos diversas provas que lhes dizem respeito. Notadamente, serão provados metateoremas acerca do sistema $\mathfrak{L}$, bem como serão demonstradas que as traduções são corretas e equivalem. Os metateoremas provados visam simplificar provas futuras. Nas provas abaixo, adotaremos a convenção de que deduções denotadas $\Gamma \vdash \alpha$ valem para ambos os sistemas em apreciação neste trabalho. Ou seja, são provas que não dependem do operador de necessidade e tampouco das regras associadas a ele ou ao operador de contradição. Como definido, $\Gamma \vdash_{\mathfrak{B}} \alpha$ representa uma dedução no sistema $\mathfrak{B}$, enquanto $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha$ uma dedução no sistema $\mathfrak{L}$.

4.1 Metapropriedades

Metapropriedades são asserções acerca de um sistema provadas em uma metalinguagem. Nesta seção apresentaremos algumas metapropriedades para o sistema $\mathfrak{L}$ provadas na metalinguagem da teoria dos conjuntos que nos permitirão simplificar as demais demonstrações deste trabalho. Entretanto antes disso demonstraremos que dada uma sentença qualquer, esta sempre implica a si mesma. Nomearemos este lema *identidade* em analogia ao combinador **I**, cujo tipo correspondente ao lema. Em seguida, o usaremos para a demonstração do teorema da dedução.

Lema 1 (Identidade). $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \alpha \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$	
2	$\Gamma \vdash \alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$	
3	$\Gamma \vdash (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_2}$	
4	$\vdash (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$
5	$\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 4\}$

Estando assim demonstrada a proposição. $\square$

Tendo-se provado o lema da identidade, agora provaremos o teorema da *dedução* com base na prova apresentada por Hakli e Negri (2012). Como dito anteriormente, houve o cuidado em definir a regra da necessitação de modo a permitir a derivação correta deste teorema. Pequenas alterações foram feitas de modo a garantir a adequação da prova de Hakli e Negri (2012) com as definições usadas neste trabalho. O teorema da dedução permite que com que provemos muitas asserções futuras de maneira mais breve e intuitiva.

Teorema 1 (Dedução). *Se* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathfrak{L}} \beta$, *então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha \to \beta$.

Demonstração. Demonstração por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Seja $n \in \mathbb{N}^+$ o tamanho da sucessão de dedução que deriva $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$. Suponhamos que o teorema da dedução valha para qualquer sucessão de dedução de tamanho menor que n e nomeemos esta suposição **H**. Devemos considerar quatro casos: o dos axiomas e os das demais regras de dedução.

Caso 1. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que deriva $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gerada pela invocação de alguma premissa. Assim, devem ser analisados dois casos. Caso $\beta \in \{\alpha\}$, sabe-se que $\alpha = \beta$ e portanto que $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$ e $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ são iguais. Desta maneira, a asserção $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ foi demonstrada pelo lema $\mathbf{L_1}$. Caso $\beta \in \Gamma$, podemos demonstrar $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\Gamma \vdash \beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$	
3	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$

Caso 2. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que deriva $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gerada pela a invocação de algum axioma. Sabe-se que existe algum axioma $\mathbf{A}_\beta \in \mathscr{R}$ gerou β. Pode-se demonstrar $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{A}_\beta$	
2	$\Gamma \vdash \beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$	
3	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$

CASO 3. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que deriva $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gerada pela aplicação da regra da necessitação. Sabe-se que $\beta = \Box\gamma$, para algum γ. A partir disso, sabemos que $\vdash \gamma$, dito $\mathbf{H_1}$. Deste modo, podemos demonstrar $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela dedução que segue.

1	$\vdash \gamma$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \vdash \Box\gamma$	$\mathbf{R_3}$	$\{1\}$
3	$\Gamma \vdash \Box\gamma \to \alpha \to \Box\gamma$	$\mathbf{A_1}$	
4	$\Gamma \vdash \alpha \to \Box\gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$

CASO 4. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que deriva $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gerada pela aplicação da regra da separação $\mathbf{R_2}$. Sabe-se que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$ e que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma \to \beta$, para algum γ. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$ e que $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma \to \beta$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_1}$. Deste modo, podemos demonstrar $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela dedução que segue.

1	$\vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \vdash \alpha \to \gamma \to \beta$	$\mathbf{H_2}$	
3	$\Gamma \vdash (\alpha \to \gamma \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta)$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$
4	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 4\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Uma vez demonstrado o teorema da dedução, provaremos o teorema do *enfraquecimento*. Este teorema afirma que, dada uma dedução $\Gamma \vdash \alpha$, sempre podemos deduzir esta mesma sentença α a partir de um sobreconjunto Δ de Γ. Em outras palavras, se pudermos averar α dado um conjunto de assunções, sempre podemos fazer mais assunções sem alterar a verdade de α. Usaremos este teorema para, adiante, demonstrar o teorema da generalização da necessitação. Do mesmo modo, usaremos este teorema novamente em outras demonstrações no decorrer deste trabalho.

Teorema 2 (Enfraquecimento). *Se* $\Delta \subseteq \Gamma$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha$, *então* $\Delta \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução.

Seja $n \in \mathbb{N}^+$ o tamanho da sucessão de dedução que prova $\Delta \vdash \alpha$. Suponhamos que o enfraquecimento valha para qualquer sucessão de dedução de tamanho menor que n e nomeemos esta suposição **H**. Devemos considerar quatro casos: o dos axiomas e os das demais regras de dedução

CASO 1. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela invocação de alguma premissa $\alpha \in \Gamma$. Como $\Delta \subseteq \Gamma$, sabe-se que $\alpha \in \Delta$. Deste modo, pode-se provar $\Delta \vdash \alpha$ pela invocação desta premissa α.

CASO 2. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela invocação de algum axioma. Sabe-se que existe algum axioma $\mathbf{A}_\alpha \in \mathcal{R}$ que gera α. Deste modo, podemos demonstrar $\Delta \vdash \alpha$ pela invocação deste mesmo axioma $\mathbf{A}_\alpha$.

CASO 3. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela aplicação da regra da necessitação $\mathbf{R}_3$. Sabe-se que $\alpha = \Box\beta$ e que $\vdash \beta$. Como se pode provar β sem o uso de premissas, podemos aplicar a regra da necessitação a $\vdash \beta$ de modo a provar $\Delta \vdash \Box\beta$.

CASO 4. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela aplicação da regra da separação $\mathbf{R}_2$. Sabe-se que $\Gamma \vdash \beta$ e que $\Gamma \vdash \beta \to \alpha$, para algum β. A partir de **H**, temos que $\Delta \vdash \beta$ e que $\Delta \vdash \beta \to \alpha$. Deste modo, podemos demonstrar $\Delta \vdash \alpha$ pela aplicação da regra da separação a $\Delta \vdash \beta$ e a $\Delta \vdash \beta \to \alpha$.

Estando assim demonstrada a proposição. $\square$

Agora, faz-se preciso demonstrar um novo lema. Usaremos este para demonstrar o teorema da generalização da necessitação. O lema afirma que, dadas a implicação de α em β e a implicação de β em γ, podemos derivar a implicação de α em γ. A ele demos o nome *composição*, referindo-se ao combinador de composição **B**, cujo tipo correspondente ao lema. Outros usos deste lema serão feitos ao longo deste trabalho, especialmente nas provas de interderivabilidade e correção.

Lema 2 (Composição). *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha \to \beta$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \beta \to \gamma$, *então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha \to \gamma$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \vdash \beta \rightarrow \gamma$	$\mathbf{H_2}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$	
4	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{T_2}$	$\{1\}$
5	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \rightarrow \gamma$	$\mathbf{T_2}$	$\{2\}$
7	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{5, 6\}$
8	$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \gamma$	$\mathbf{T_1}$	$\{7\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Tendo-se demonstrado o lema da composição, provaremos o teorema da *generalização da regra da necessitação*, conforme Troelstra e Schwichtenberg (2000). Como apresentado abaixo, este teorema afirma que, caso possamos deduzir alguma sentença α a partir de um conjunto necessariamente verdadeiro de premissas, podemos deduzir a necessidade desta sentença α. Trata-se este de uns dos resultados de maior valor para o desenvolvimento deste trabalho, sendo usado diversas vezes no decorrer deste, como durante as provas de interderivabilidade e correção.

Teorema 3 (Generalização da necessitação). *Se* $\Box\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha$, *então* $\Box\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \Box\alpha$.

Demonstração. Demonstração por indução fraca sobre o tamanho do conjunto de assunções (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Seja $n \in \mathbb{N}$ o tamanho do conjunto Γ e $\mathbf{H_1}$ a suposição $\Box\Gamma \vdash \alpha$. Deve-se analisar dois casos: um para a base de indução $n = 0$ e o outro para o passo de indução $n > 0$.

Caso 1. Seja $n = 0$ o tamanho do conjunto Γ. Sabe-se que $\Gamma = \{\}$ e, a partir de $\mathbf{H_1}$, que $\vdash \alpha$. Como se pode provar α sem o uso de premissas, podemos aplicar a regra da necessitação $\mathbf{R_3}$ a $\vdash \alpha$ de modo a provar $\vdash \Box\alpha$.

Caso 2. Seja $n > 0$ o tamanho do conjunto Γ. Suponhamos que a generalização da necessitação valha para qualquer conjunto de tamanho $n-1$ e nomeemos esta suposição $\mathbf{H_2}$. Podemos demonstrar que a generalização da regra da necessitação vale para conjuntos de tamanho n pela dedução que segue.

1	$\Box\Gamma \vdash \Box\beta \to \Box\Box\beta$	**B$_3$**	
2	$\Box\Gamma \vdash \alpha$	**H$_1$**	
3	$\Box\Gamma \vdash \alpha \to \Box\beta \to \alpha$	**A$_1$**	
4	$\Box\Gamma \vdash \Box\beta \to \alpha$	**R$_2$**	$\{2, 3\}$
5	$\Box\Gamma \vdash \Box(\Box\beta \to \alpha)$	**H$_2$**	$\{4\}$
6	$\Box\Gamma \vdash \Box(\Box\beta \to \alpha) \to \Box\Box\beta \to \Box\alpha$	**B$_1$**	
7	$\Box\Gamma \vdash \Box\Box\beta \to \Box\alpha$	**R$_2$**	$\{5, 6\}$
8	$\Box\Gamma \vdash \Box\beta \to \Box\alpha$	**L$_2$**	$\{1, 7\}$
9	$\Box\Gamma \cup \{\Box\beta\} \vdash \Box\beta$	**R$_1$**	
10	$\Box\Gamma \cup \{\Box\beta\} \vdash \Box\beta \to \Box\alpha$	**T$_2$**	$\{8\}$
11	$\Box\Gamma \cup \{\Box\beta\} \vdash \alpha$	**R$_2$**	$\{9, 10\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Uma vez demonstrada a generalização da regra da necessitação, a demonstração da regra da *dedução estrita* — conforme descrito por Marcus (1946, 1953) — pode ser feita rapiadmente, como abaixo. Esta regra afirma que, dada uma dedução de β partindo de um conjunto de premissas necessariamente verdadeiras e uma premissa α, podemos deduzir $\Box(\alpha \to \beta)$ a partir desse conjunto de premissas necessariamente verdadeiras. Isso nos permite simplificar as demonstrações de correção das traduções, uma vez que uma das traduções apresentadas mapeia implicações materiais do sistema do origem em implicações estritas no sistema de destino.

Lema 3 (Dedução estrita). *Se* $\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathfrak{L}} \beta$*, então* $\Box\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \Box(\alpha \to \beta)$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$	**H$_1$**	
2	$\Box\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	**T$_1$**	$\{1\}$
3	$\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	**T$_3$**	$\{2\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Agora, demonstraremos o lema derradeiro desta seção, que também diz respeito à *implicação estrita*. Trata-se de uma versão estrita da regra da separação. Este lema afirma que, dada uma prova de α e uma prova de $\Box(\alpha \to \beta)$ a partir de um conjunto de premissas, sabe-se que deve haver alguma prova de β a partir desse mesmo conjunto de premissas. Assim como o lema anterior, este nos permite simplificar as demonstrações que envolvam a implicação estrita.

Lema 4 (Separação estrita). *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \Box(\alpha \to \beta)$*, então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \beta$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \alpha$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{H_2}$	
2	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{B_2}$	
2	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$
3	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 4\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

4.2 Interderivabilidade

Conforme afirmado anteriormente, ambas as traduções apresentadas gozam de propriedade da interderivação. Ou seja, a derivação de uma sentença traduzida por uma das traduções implica que se pode derivar esta mesma sentença traduzida pela outra tradução, e vice-versa. Esta seção busca demonstrar essa interderivabilidade de duas maneiras: tanto como uma bi-implicação dentro do sistema $\mathfrak{L}$ quanto como uma bi-implicação na metalinguagem. Para tanto, precisaremos demonstrar uma quantidade de lemas. Nomearemos o primeiro deles *explosão*, conforme abaixo.

Lema 5 (Explosão). $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \bot \to \alpha$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma\{\bot\} \vdash \bot$	$\mathbf{R_1}$	

2	$\Gamma\,\{\bot\} \vdash \bot \to (\alpha \to \bot) \to \bot$	$\mathbf{A_1}$	
3	$\Gamma\,\{\bot\} \vdash (\alpha \to \bot) \to \bot$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\Gamma\,\{\bot\} \vdash ((\alpha \to \bot) \to \bot) \to \alpha$	$\mathbf{A_\neg}$	
5	$\Gamma\,\{\bot\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\Gamma \vdash \bot \to \alpha$	$\mathbf{T_1}$	$\{5\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Em seguida, demonstraremos um lema que combina duas implicações com uma conjunção dos antecedentes de modo a inferir uma conjunção dos consequentes. Para tanto, foram usados os axiomas de introdução e eliminação da negação em conjunto com a regra da separação. A demontração deste lema busca simplificar a prova de interderivabilidade, uma vez que a faremos por indução sobre a profundidade da sentença, sendo um dos seus casos a conjunção.

Lema 6. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha \to \gamma$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \beta \to \delta$*, então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha \wedge \beta \to \gamma \wedge \delta$*.*

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$	$\mathbf{A_4}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$	$\mathbf{A_4}$	
5	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 4\}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{H_1}$	
7	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \beta \to \delta$	$\mathbf{H_2}$	
8	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 6\}$
9	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{5, 7\}$
10	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \gamma \to \delta \to \gamma \wedge \delta$	$\mathbf{A_4}$	
11	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \delta \to \gamma \wedge \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{8, 10\}$
12	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \gamma \wedge \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{9, 11\}$
13	$\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \gamma \wedge \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{12\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Agora, demonstraremos a *distribuição da necessidade sobre a conjunção.* Este lema afirma que, caso tenhamos necessidade de uma conjunção, então temos a conjunção da necessidade dos conjuntos. Assim como no lema anterior, foram usados os axiomas de introdução e eliminação da negação em conjunto com a regra da separação. Neste lema, entretanto, o teorema da generalização da necessitação e o teorema do enfraqueciemnto desempenham um funções importantes. Usaremos esta asseção para a demonstração da interderivabilidade. Mais adiante, demonstraremos a proposição conversa deste lema

Lema 7. $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{B_2}$	
3	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$	$\mathbf{A_4}$	
5	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{T_3}$	$\{5\}$
7	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$	$\mathbf{A_5}$	
8	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 7\}$
9	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{T_3}$	$\{8\}$
10	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\beta \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{A_3}$	
11	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box\beta \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{6, 10\}$
12	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{9, 11\}$
13	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{T_1}$	$\{12\}$
14	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{T_2}$	$\{13\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Consideremos agora um novo lema. Este lema afirma que, dada uma implicação dupla, podemos juntar as sentenças antecedentes destas duas implicações em uma conjunção antecedente de uma implicação apenas. Na computação, este corresponte ao tipo da função de *descurrificação.* Aqui entretanto referiremos a ele como *importação.* Usaremos esta asseção para a demonstração da do lema que o segue.

Lema 8 (Importação). *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha \to \beta \to \gamma$ *então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha \wedge \beta \to \gamma$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \gamma$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_1}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$	$\mathbf{A_4}$	
4	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$
5	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$	$\mathbf{A_5}$	
6	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 5\}$
7	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \gamma$	$\mathbf{T_2}$	$\{1\}$
8	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \beta \to \gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{4, 7\}$
9	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{6, 8\}$
10	$\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \gamma$	$\mathbf{T_1}$	$\{9\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

A demonstração do lema da importação nos permite demonstrar o lema da *agregação da necessidade sobre a conjunção*, que se trata da implicação conversa ao lema da distribuição da necessidade sobre a conjunção. Este lema afirma que, caso tenhamos a conjunção de duas necessidades, temos a necessidade dos conjuntos. O uso da importação se mostra importante porque este nos permite assumir um conjunto de sentenças necessariamente verdadeiras, anuindo o uso do teorema da generalização da necessitação. Esse conjunto pode então ser transformado em uma implicação por meio do teorema da dedução e em uma conjunção por meio do lema da importação.

Lema 9. $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \to \alpha$	$\mathbf{B_2}$	
3	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$	
5	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\beta \to \beta$	$\mathbf{B_2}$	
6	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{4, 5\}$
7	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{A_3}$	
8	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \beta \to \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 7\}$
9	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{6, 8\}$
10	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_3}$	$\{9\}$
11	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_1}$	$\{10\}$
12	$\vdash \Box\alpha \to \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_1}$	$\{11\}$
13	$\vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{L_8}$	$\{12\}$
14	$\Gamma \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_2}$	$\{13\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Demonstraremos agora a versão disjuntiva do lema $\mathbf{L_6}$. Este lema combina duas implicações com uma disjunção dos antecedentes de modo a inferir uma disjunção dos consequentes. Para tanto, foram usados os axiomas de introdução e eliminação da disjunução em conjunto com a regra da separação. Assim como para a conjunção, a demontração deste lema busca simplificar a prova de interderivabilidade, sendo a disjunção um de seus casos da indução.

Lema 10. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha \to \gamma$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \beta \to \delta$*, então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha \vee \beta \to \gamma \vee \delta$*.*

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{R_1}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{A_6}$	

5	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \rightarrow \delta, \beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_1}$	
7	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \rightarrow \delta, \beta\} \vdash \beta \rightarrow \delta$	$\mathbf{R_1}$	
8	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \rightarrow \delta, \beta\} \vdash \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{6, 7\}$
9	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \rightarrow \delta, \beta\} \vdash \delta \rightarrow \gamma \vee \delta$	$\mathbf{A_7}$	
10	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \rightarrow \delta, \beta\} \vdash \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{8, 9\}$
11	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma \vee \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{4\}$
12	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \rightarrow \delta\} \vdash \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{10\}$
13	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$	$\mathbf{H_1}$	
14	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma \vee \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{11\}$
15	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{13, 14\}$
16	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \beta \rightarrow \delta$	$\mathbf{H_2}$	
17	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{12\}$
18	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{16, 17\}$
19	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \vee \beta$	$\mathbf{R_1}$	
20	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\alpha \rightarrow \gamma \vee \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma \vee \delta) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$	$\mathbf{A_8}$	
21	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\beta \rightarrow \gamma \vee \delta) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{15, 20\}$
22	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{18, 21\}$
23	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{19, 22\}$
24	$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{23\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Por fim, consideremos o lema derradeiro desta seção. Demonstraremos o lema da *agregação da necessidade sobre a disjunção*, a versão disjuntiva do lema da agregação da necessidade sobre a conjunção apresentada acima. Este lema afirma que, caso tenhamos a disjunção de duas necessidades, temos a necessidade dos disjuntos. De maneira semelhante à sua contraparte conjuntiva, este lema faz uso do teorema da dedução e da generalização da necessitação.

Lema 11. $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \Box\alpha \vee \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \rightarrow \alpha$	$\mathbf{B_2}$	
3	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$	$\mathbf{A_6}$	
5	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha \vee \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_3}$	$\{5\}$
7	$\{\Box\beta\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$	
8	$\{\Box\beta\} \vdash \Box\beta \rightarrow \beta$	$\mathbf{B_2}$	
9	$\{\Box\beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{7, 8\}$
10	$\{\Box\beta\} \vdash \beta \rightarrow \alpha \vee \beta$	$\mathbf{A_7}$	
11	$\{\Box\beta\} \vdash \alpha \vee \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{9, 10\}$
12	$\{\Box\beta\} \vdash \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_3}$	$\{11\}$
13	$\vdash \Box\alpha \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_1}$	$\{6\}$
14	$\vdash \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_1}$	$\{12\}$
15	$\vdash (\Box\alpha \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)) \rightarrow (\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)) \rightarrow \Box\alpha \vee \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{A_8}$	
16	$\vdash (\Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)) \rightarrow \Box\alpha \vee \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{R_2}$	$\{13, 15\}$
17	$\vdash \Box\alpha \vee \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{R_2}$	$\{14, 16\}$
18	$\Gamma \vdash \Box\alpha \vee \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_2}$	$\{17\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Demonstrados os lemas anteriores, pode-se demonstrar o teorema da interderivabilidade como uma bi-implicação dentro do sistema de destino. Para tanto, induziremos sobre a profundidade da sentença intuicionista traduzida, conforme Troelstra e Schwichtenberg (2000). A bi-implicação neste teorema o torna a demonstração com as maiores sucessões de dedução neste trabalho, em virtude da necessidade do uso abundante dos axiomas da introdução e eliminação da conjunção.

Teorema 4. $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \Box\alpha^{\circ} \leftrightarrow \alpha^{\Box}$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre a profundidade da sentença (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Seja $n \in \mathbb{N}^{+}$ a profundidade da sentença $\alpha \in \mathscr{L}$. Suponhamos que a asserção valha para qualquer sentença de profundidade menor que n e nomeemos esta suposição **H**. Devemos considerar cinco casos: a letra, a contradição, a conjunção, a disjunção e a implicação.

Caso 1. Se a sentença α for uma proposição $a \in \mathscr{P}$, sabe-se que $\Box a^{\circ} = \Box a$ e que $a^{\Box} = \Box a$ pelas definições das traduções. Deste modo, tanto a ida quanto a volta da bi-implicação possuem a forma $\Box a \rightarrow \Box a$ e podem ser provadas pelo lema $\mathbf{L_1}$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio das regras $\mathbf{A_3}$ e $\mathbf{R_2}$.

Caso 2. Se a sentença α for a constante $\bot$, sabe-se que $\Box\bot^{\circ} = \Box\bot$ e que $\bot^{\Box} = \bot$ pelas definições das traduções. Deste modo, a ida $\Box\bot \rightarrow \bot$ da bi-implicação constitui um axioma gerado pela regra $\mathbf{B_2}$. A volta $\bot \rightarrow \Box\bot$ da bi-implicação pode ser provada pelo lema $\mathbf{L_3}$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio das regras $\mathbf{A_3}$ e $\mathbf{R_2}$.

Caso 3. Seja a sentença α a conjunção de duas sentenças α_1 e α_2. Sabe-se que $\Box(\alpha_1 \wedge \alpha_2)^{\circ} = \Box({\alpha_1}^{\circ} \wedge {\alpha_2}^{\circ})$ e que $(\alpha_1 \wedge \alpha_2)^{\Box} = {\alpha_1}^{\Box} \wedge {\alpha_2}^{\Box}$ pelas definições das traduções. A partir de **H**, temos que $\Gamma \vdash \Box{\alpha_1}^{\circ} \leftrightarrow {\alpha_1}^{\Box}$ e que $\Gamma \vdash \Box{\alpha_2}^{\circ} \leftrightarrow {\alpha_2}^{\Box}$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_2}$. Pode-se demonstrar $\Gamma \vdash \Box\alpha^{\circ} \leftrightarrow \alpha^{\Box}$ por meio da dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \Box{\alpha_1}^{\circ} \leftrightarrow {\alpha_1}^{\Box}$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \vdash \Box{\alpha_2}^{\circ} \leftrightarrow {\alpha_2}^{\Box}$	$\mathbf{H_2}$	
3	$\Gamma \vdash (\Box{\alpha_1}^{\circ} \leftrightarrow {\alpha_1}^{\Box}) \rightarrow \Box{\alpha_1}^{\circ} \rightarrow {\alpha_1}^{\Box}$	$\mathbf{A_4}$	
4	$\Gamma \vdash (\Box{\alpha_2}^{\circ} \leftrightarrow {\alpha_2}^{\Box}) \rightarrow \Box{\alpha_2}^{\circ} \rightarrow {\alpha_2}^{\Box}$	$\mathbf{A_4}$	
5	$\Gamma \vdash (\Box{\alpha_1}^{\circ} \leftrightarrow {\alpha_1}^{\Box}) \rightarrow {\alpha_1}^{\Box} \rightarrow \Box{\alpha_1}^{\circ}$	$\mathbf{A_5}$	
6	$\Gamma \vdash (\Box{\alpha_2}^{\circ} \leftrightarrow {\alpha_2}^{\Box}) \rightarrow {\alpha_2}^{\Box} \rightarrow \Box{\alpha_2}^{\circ}$	$\mathbf{A_5}$	
7	$\Gamma \vdash \Box{\alpha_1}^{\circ} \rightarrow {\alpha_1}^{\Box}$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 3\}$
8	$\Gamma \vdash \Box{\alpha_2}^{\circ} \rightarrow {\alpha_2}^{\Box}$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 4\}$
9	$\Gamma \vdash {\alpha_1}^{\Box} \rightarrow \Box{\alpha_1}^{\circ}$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 5\}$
10	$\Gamma \vdash {\alpha_2}^{\Box} \rightarrow \Box{\alpha_2}^{\circ}$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 6\}$

11	$\Gamma \cup \{\Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ})\} \vdash \Box\alpha_1^{\circ} \to \alpha_1^{\Box}$	$\mathbf{T_2}$	$\{7\}$
12	$\Gamma \cup \{\Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ})\} \vdash \Box\alpha_2^{\circ} \to \alpha_2^{\Box}$	$\mathbf{T_2}$	$\{8\}$
13	$\Gamma \cup \{\Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ})\} \vdash \Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ})$	$\mathbf{R_1}$	
14	$\Gamma \cup \{\Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ})\} \vdash \Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ}) \to \Box\alpha_1^{\circ} \wedge \Box\alpha_2^{\circ}$	$\mathbf{L_7}$	
15	$\Gamma \cup \{\Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ})\} \vdash \Box\alpha_1^{\circ} \wedge \Box\alpha_2^{\circ}$	$\mathbf{R_2}$	$\{13, 14\}$
16	$\Gamma \cup \{\Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ})\} \vdash \Box\alpha_1^{\circ} \wedge \Box\alpha_2^{\circ} \to \alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}$	$\mathbf{L_6}$	$\{11, 12\}$
17	$\Gamma \cup \{\Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ})\} \vdash \alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}$	$\mathbf{R_2}$	$\{15, 16\}$
18	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}\right\} \vdash \alpha_1^{\Box} \to \Box\alpha_1^{\circ}$	$\mathbf{T_2}$	$\{9\}$
19	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}\right\} \vdash \alpha_2^{\Box} \to \Box\alpha_2^{\circ}$	$\mathbf{T_2}$	$\{10\}$
20	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}\right\} \vdash \alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}$	$\mathbf{R_1}$	
21	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}\right\} \vdash \alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box} \to \Box\alpha_1^{\circ} \wedge \Box\alpha_2^{\circ}$	$\mathbf{L_6}$	$\{18, 19\}$
22	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}\right\} \vdash \Box\alpha_1^{\circ} \wedge \Box\alpha_2^{\circ}$	$\mathbf{R_2}$	$\{20, 21\}$
23	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}\right\} \vdash \Box\alpha_1^{\circ} \wedge \Box\alpha_2^{\circ} \to \Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ})$	$\mathbf{L_9}$	
24	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}\right\} \vdash \Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ})$	$\mathbf{R_2}$	$\{22, 23\}$
25	$\Gamma \vdash \Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ}) \to \alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}$	$\mathbf{T_1}$	$\{17\}$
26	$\Gamma \vdash \alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box} \to \Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ})$	$\mathbf{T_1}$	$\{24\}$
27	$\Gamma \vdash (\Box\alpha^{\circ} \to \alpha^{\Box}) \to (\alpha^{\Box} \to \Box\alpha^{\circ}) \to (\Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ}) \leftrightarrow \alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box})$	$\mathbf{A_4}$	
28	$\Gamma \vdash (\alpha^{\Box} \to \Box\alpha^{\circ}) \to (\Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ}) \leftrightarrow \alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box})$	$\mathbf{R_2}$	$\{25, 27\}$
29	$\Gamma \vdash \Box(\alpha_1^{\circ} \wedge \alpha_2^{\circ}) \leftrightarrow \alpha_1^{\Box} \wedge \alpha_2^{\Box}$	$\mathbf{R_2}$	$\{26, 28\}$

Caso 4. Seja a sentença α a disjunção de duas sentenças α_1 e α_2. Sabe-se que $\Box(\alpha_1 \vee \psi)^\circ = \Box(\Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box\psi^\circ)$ e que $(\alpha_1 \vee \psi)^\Box = {\alpha_1}^\Box \vee \psi^\Box$ pelas definições das traduções. A partir de **H**, temos que $\Gamma \vdash \Box{\alpha_1}^\circ \leftrightarrow {\alpha_1}^\Box$ e que $\Gamma \vdash \Box{\alpha_2}^\circ \leftrightarrow {\alpha_2}^\Box$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_2}$. Pode-se demonstrar $\Gamma \vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$ por meio da dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \Box{\alpha_1}^\circ \leftrightarrow {\alpha_1}^\Box$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \vdash \Box{\alpha_2}^\circ \leftrightarrow {\alpha_2}^\Box$	$\mathbf{H_2}$	
3	$\Gamma \vdash (\Box{\alpha_1}^\circ \leftrightarrow {\alpha_1}^\Box) \to \Box{\alpha_1}^\circ \to {\alpha_1}^\Box$	$\mathbf{A_4}$	
4	$\Gamma \vdash (\Box{\alpha_2}^\circ \leftrightarrow {\alpha_2}^\Box) \to \Box{\alpha_2}^\circ \to {\alpha_2}^\Box$	$\mathbf{A_4}$	
5	$\Gamma \vdash (\Box{\alpha_1}^\circ \leftrightarrow {\alpha_1}^\Box) \to {\alpha_1}^\Box \to \Box{\alpha_1}^\circ$	$\mathbf{A_5}$	
6	$\Gamma \vdash (\Box{\alpha_2}^\circ \leftrightarrow {\alpha_2}^\Box) \to {\alpha_2}^\Box \to \Box{\alpha_2}^\circ$	$\mathbf{A_5}$	
7	$\Gamma \vdash \Box{\alpha_1}^\circ \to {\alpha_1}^\Box$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 3\}$
8	$\Gamma \vdash \Box{\alpha_2}^\circ \to {\alpha_2}^\Box$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 4\}$
9	$\Gamma \vdash {\alpha_1}^\Box \to \Box{\alpha_1}^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 5\}$
10	$\Gamma \vdash {\alpha_2}^\Box \to \Box{\alpha_2}^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 6\}$
11	$\Gamma \cup \{\Box(\Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ)\} \vdash \Box{\alpha_1}^\circ \to {\alpha_1}^\Box$	$\mathbf{T_2}$	$\{7\}$
12	$\Gamma \cup \{\Box(\Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ)\} \vdash \Box{\alpha_2}^\circ \to {\alpha_2}^\Box$	$\mathbf{T_2}$	$\{8\}$
13	$\Gamma \cup \{\Box(\Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ)\} \vdash \Box(\Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ)$	$\mathbf{R_1}$	
14	$\Gamma \cup \{\Box(\Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ)\} \vdash \Box(\Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ) \to \Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ$	$\mathbf{B_2}$	
15	$\Gamma \cup \{\Box(\Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ)\} \vdash \Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{13, 14\}$
16	$\Gamma \cup \{\Box(\Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ)\} \vdash \Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ \to {\alpha_1}^\Box \vee {\alpha_2}^\Box$	$\mathbf{L_{10}}$	$\{11, 12\}$
17	$\Gamma \cup \{\Box(\Box{\alpha_1}^\circ \vee \Box{\alpha_2}^\circ)\} \vdash {\alpha_1}^\Box \vee {\alpha_2}^\Box$	$\mathbf{R_2}$	$\{15, 16\}$
19	$\Gamma \cup \left\{{\alpha_1}^\Box \vee {\alpha_2}^\Box\right\} \vdash {\alpha_1}^\Box \to \Box{\alpha_1}^\circ$	$\mathbf{T_2}$	$\{9\}$
20	$\Gamma \cup \left\{{\alpha_1}^\Box \vee {\alpha_2}^\Box\right\} \vdash {\alpha_2}^\Box \to \Box{\alpha_2}^\circ$	$\mathbf{T_2}$	$\{10\}$
21	$\Gamma \cup \left\{{\alpha_1}^\Box \vee {\alpha_2}^\Box\right\} \vdash \Box{\alpha_1}^\circ \to \Box\Box{\alpha_1}^\circ$	$\mathbf{B_3}$	
22	$\Gamma \cup \left\{{\alpha_1}^\Box \vee {\alpha_2}^\Box\right\} \vdash \Box{\alpha_2}^\circ \to \Box\Box{\alpha_2}^\circ$	$\mathbf{B_3}$	
23	$\Gamma \cup \left\{{\alpha_1}^\Box \vee {\alpha_2}^\Box\right\} \vdash {\alpha_1}^\Box \to \Box\Box{\alpha_1}^\circ$	$\mathbf{L_2}$	$\{18, 20\}$
24	$\Gamma \cup \left\{{\alpha_1}^\Box \vee {\alpha_2}^\Box\right\} \vdash {\alpha_2}^\Box \to \Box\Box{\alpha_2}^\circ$	$\mathbf{L_2}$	$\{19, 21\}$
25	$\Gamma \cup \left\{{\alpha_1}^\Box \vee {\alpha_2}^\Box\right\} \vdash {\alpha_1}^\Box \vee {\alpha_2}^\Box$	$\mathbf{R_1}$	

26	$\Gamma \cup \{\alpha_1{}^{\square} \vee \alpha_2{}^{\square}\} \vdash \alpha_1{}^{\square} \vee \alpha_2{}^{\square} \to \square\square\alpha_1{}^{\circ} \vee \square\square\alpha_2{}^{\circ}$	**L10**	$\{22, 23\}$
27	$\Gamma \cup \{\alpha_1{}^{\square} \vee \alpha_2{}^{\square}\} \vdash \square\square\alpha_1{}^{\circ} \vee \square\square\alpha_2{}^{\circ}$	**R2**	$\{24, 25\}$
28	$\Gamma \cup \{\alpha_1{}^{\square} \vee \alpha_2{}^{\square}\} \vdash \square\square\alpha_1{}^{\circ} \vee \square\square\alpha_2{}^{\circ} \to \square(\square\alpha_1{}^{\circ} \vee \square\alpha_2{}^{\circ})$	**L11**	
29	$\Gamma \cup \{\alpha_1{}^{\square} \vee \alpha_2{}^{\square}\} \vdash \square(\square\alpha_1{}^{\circ} \vee \square\alpha_2{}^{\circ})$	**R2**	$\{26, 27\}$
30	$\Gamma \vdash \square(\square\alpha_1{}^{\circ} \vee \square\alpha_2{}^{\circ}) \to \alpha_1{}^{\square} \vee \alpha_2{}^{\square}$	**T1**	$\{17\}$
31	$\Gamma \vdash \alpha_1{}^{\square} \vee \alpha_2{}^{\square} \to \square(\square\alpha_1{}^{\circ} \vee \square\alpha_2{}^{\circ})$	**T1**	$\{28\}$
32	$\Gamma \vdash (\square\alpha^{\circ} \to \alpha^{\square}) \to (\alpha^{\square} \to \square\alpha^{\circ}) \to (\square(\square\alpha_1{}^{\circ} \vee \square\alpha_2{}^{\circ}) \leftrightarrow \alpha_1{}^{\square} \vee \alpha_2{}^{\square})$	**A4**	
33	$\Gamma \vdash (\alpha^{\square} \to \square\alpha^{\circ}) \to (\square(\square\alpha_1{}^{\circ} \vee \square\alpha_2{}^{\circ}) \leftrightarrow \alpha_1{}^{\square} \vee \alpha_2{}^{\square})$	**R2**	$\{29, 31\}$
34	$\Gamma \vdash \square(\square\alpha_1{}^{\circ} \vee \square\alpha_2{}^{\circ}) \leftrightarrow \alpha_1{}^{\square} \vee \alpha_2{}^{\square}$	**R2**	$\{30, 32\}$

□

Teorema 5 (Interderivabilidade). $\square\Gamma^{\circ} \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha^{\circ}$ *se e somente se* $\Gamma^{\square} \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha^{\square}$.

4.3 Correção

Neste sessão, apresentaremos uma prova de correção para a $\square$-tradução. Antes disso, entretanto, apresentaremos uma prova de $\vdash \alpha^{\square} \to \square\alpha^{\square}$, que usaremos como lema para a prova da correção conforme sugerido por Troelstra e Schwichtenberg (2000). Provaremos o lema por indução sobre a profundidade da sentença e a correção por indução sobre o tamanho da prova.

Teorema 6 (Estabilidade). $\Gamma \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha^{\square} \to \square\alpha^{\square}$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre a profundidade da sentença (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Seja $n \in \mathbb{N}^{+}$ a profundidade da sentença $\alpha \in \mathcal{L}$. Suponhamos que a asserção valha para qualquer sentença de profundidade menor que n e nomeemos esta suposição **H**. Devemos considerar cinco casos: a letra, a contradição, a conjunção, a disjunção e a implicação.

Caso 1. Seja a sentença α for uma proposição $a \in \mathcal{P}$. Sabe-se que $a^{\square} = \square a$ pela definição da tradução. Deste modo, $\Gamma \vdash \square a \to \square\square a$ pode ser gerado por **B3**.

Caso 2. Seja a sentença α a constante $\perp$. Sabe-se que $\perp^{\square} = \perp$ pela definição da tradução. Deste modo, $\Gamma \vdash \perp \to \square\perp$ foi provado pelo lema **L3**.

Caso 3. Seja a sentença α a conjunção de duas sentenças α_1 e α_2. Sabe-se que

$(\alpha_1 \wedge \alpha_2)^{\square} = \alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square}$ pela definição da tradução. A partir de **H**, temos que $\Gamma \vdash \alpha_1^{\square} \to \square\alpha_1^{\square}$ e que $\Gamma \vdash \alpha_2^{\square} \to \square\alpha_2^{\square}$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_2}$. Pode-se demonstrar $\Gamma \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2)^{\square} \to \square(\alpha_1 \wedge \alpha_2)^{\square}$ pela dedução que segue.

1	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square}\} \vdash \alpha_1^{\square} \to \square\alpha_1^{\square}$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square}\} \vdash \alpha_2^{\square} \to \square\alpha_2^{\square}$	$\mathbf{H_2}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square}\} \vdash \alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square}$	$\mathbf{R_1}$	
4	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square}\} \vdash \alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square} \to \square\alpha_1^{\square} \wedge \square\alpha_2^{\square}$	$\mathbf{L_6}$	
5	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square}\} \vdash \square\alpha_1^{\square} \wedge \square\alpha_2^{\square}$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square}\} \vdash \square\alpha_1^{\square} \wedge \square\alpha_2^{\square} \to \square(\alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square})$	$\mathbf{L_9}$	
7	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square}\} \vdash \square(\alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square})$	$\mathbf{R_2}$	$\{5, 6\}$
8	$\Gamma \vdash \alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square} \to \square(\alpha_1^{\square} \wedge \alpha_2^{\square})$	$\mathbf{T_1}$	$\{7\}$

Caso 4. Seja a sentença α a disjunção de duas sentenças α_1 e α_2. Sabe-se que $(\alpha_1 \vee \alpha_2)^{\square} = \alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square}$ pela definição da tradução. A partir de **H**, temos que $\Gamma \vdash \alpha_1^{\square} \to \square\alpha_1^{\square}$ e que $\Gamma \vdash \alpha_2^{\square} \to \square\alpha_2^{\square}$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_2}$. Pode-se demonstrar $\Gamma \vdash (\alpha_1 \vee \alpha_2)^{\square} \to \square(\alpha_1 \vee \alpha_2)^{\square}$ pela dedução que segue.

1	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square}\} \vdash \alpha_1^{\square} \to \square\alpha_1^{\square}$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square}\} \vdash \alpha_2^{\square} \to \square\alpha_2^{\square}$	$\mathbf{H_2}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square}\} \vdash \alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square}$	$\mathbf{R_1}$	
4	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square}\} \vdash \alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square} \to \square\alpha_1^{\square} \vee \square\alpha_2^{\square}$	$\mathbf{L_{10}}$	$\{1, 2\}$
5	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square}\} \vdash \square\alpha_1^{\square} \vee \square\alpha_2^{\square}$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square}\} \vdash \square\alpha_1^{\square} \vee \square\alpha_2^{\square} \to \square(\alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square})$	$\mathbf{L_9}$	
7	$\Gamma \cup \{\alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square}\} \vdash \square(\alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square})$	$\mathbf{R_2}$	$\{5, 6\}$
8	$\Gamma \vdash \alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square} \to \square(\alpha_1^{\square} \vee \alpha_2^{\square})$	$\mathbf{T_1}$	$\{7\}$

Caso 5. Seja a sentença α a implicação de duas sentenças α_1 e α_2. Sabe-se que $(\alpha_1 \to \alpha_2)^{\square} = \square(\alpha_1^{\square} \to \alpha_2^{\square})$ pela definição da tradução. Deste modo, $\Gamma \vdash \square(\alpha_1^{\square} \to \alpha_2^{\square}) \to \square\square(\alpha_1^{\square} \to \alpha_2^{\square})$ pode ser gerado pela regra $\mathbf{B_3}$.

Estando assim demonstrada a proposição. $\square$

Uma vez provado o lema podemos, por fim, provar a correção da $\square$-tradução.

Teorema 7. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{B}} \alpha$, *então* $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha^{\Box}$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Assim, suponhamos que a tradução seja correta para qualquer sucessão dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos, analisando-se os casos, que a correção da tradução vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k$.
Caso 1. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela invocação de alguma premissa. Sabe-se que $\alpha \in \Gamma$ e, portanto, que $\alpha^{\Box} \in \Gamma^{\Box}$. Desde modo, pode-se demonstrar que $\Gamma^{\Box} \vdash \alpha^{\Box}$ trivialmente pela evocação da premissa $\alpha^{\Box}$.
Caso 2. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela invocação de algum axioma. Sabe-se que existe algum esquema $\mathbf{A} \in \mathscr{A}$ que gera α. Deste modo, analisaremos os casos e demonstraremos que se pode derivar $\Gamma^{\Box} \vdash \alpha^{\Box}$ para cada esquema $\mathbf{A} \in \mathscr{A}$. Nos casos abaixo, usaremos ocasionalmente a implicação estrita de modo a diminuir o espaço ocupado pelas provas.

Caso 2.1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_1}$, sabemos que $\alpha = \varphi \to \psi \to \varphi$ e que $\alpha^{\Box} = \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}))$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}))$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\Box}$	$\mathbf{L_6}$
2	$\vdash \varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}$	$\mathbf{A_1}$
3	$\vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{R_3}$ $\{2\}$
4	$\vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}) \to \Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{B_1}$
5	$\vdash \Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{R_2}$ $\{3,4\}$
6	$\vdash (\varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\Box}) \to (\Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})) \to \varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{L_0}$
7	$\vdash (\Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})) \to \varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{R_2}$ $\{1,6\}$
8	$\vdash \varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{R_2}$ $\{5,7\}$
9	$\Gamma^{\Box} \vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}))$	$\mathbf{R_3}$ $\{8\}$

Caso 2.2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_2}$, sabemos que $\alpha = (\varphi \to \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) \to \varphi \to \chi$ e que $\alpha^{\Box} = (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}) \strictif (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}) \strictif \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}) \strictif (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}) \strictif \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box}$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}$	$\mathbf{R_1}$
3	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \psi^{\Box}$	$\mathbf{T_0}$ $\{1,2\}$
4	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{R_1}$
5	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{T_0}$ $\{1,4\}$
6	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \chi^{\Box}$	$\mathbf{T_0}$ $\{3,5\}$
7	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{T_0}$ $\{6\}$
8	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}\} \vdash (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}) \strictif \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{T_0}$ $\{7\}$
9	$\vdash (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}) \to (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}) \strictif \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{T_1}$ $\{8\}$
10	$\Gamma^{\Box} \vdash (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}) \strictif (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}) \strictif \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{R_3}$ $\{9\}$

Caso 2.3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_3}$, sabemos que $\alpha = \varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$ e que $\alpha^{\Box} = \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}))$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}))$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\Box}$	$\mathbf{L_6}$
2	$\vdash \varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}$	$\mathbf{A_3}$
3	$\vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})$	$\mathbf{R_3}$ $\{2\}$
4	$\vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}) \to \Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})$	$\mathbf{B_1}$
5	$\vdash \Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})$	$\mathbf{R_2}$ $\{3,4\}$
6	$\vdash (\varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\Box}) \to (\Box\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \strictif \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}) \to \varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \strictif \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}$	$\mathbf{L_0}$
7	$\vdash (\Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})) \to \varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})$	$\mathbf{R_2}$ $\{1,6\}$
8	$\vdash \varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})$	$\mathbf{R_2}$ $\{5,7\}$
9	$\Gamma^{\Box} \vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}))$	$\mathbf{R_3}$ $\{8\}$

Caso 2.4. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_4}$, sabemos que $\alpha = \varphi \wedge \psi \to \varphi$ e que $\alpha^{\Box} = \Box(\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}$	$\mathbf{A_4}$
2	$\Gamma^{\Box} \vdash \Box(\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{R_3}$ $\{1\}$

Caso 2.5. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_5}$, sabemos que $\alpha = \varphi \wedge \psi \to \psi$ e que $\alpha^{\Box} = \Box(\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \to \psi^{\Box})$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \to \psi^{\Box})$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \to \psi^{\Box}$	$\mathbf{A_5}$
2	$\Gamma^{\Box} \vdash \Box(\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \to \psi^{\Box})$	$\mathbf{R_3}$ $\{1\}$

Caso 2.6. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_6}$, sabemos que $\alpha = \varphi \to \varphi \vee \psi$ e que $\alpha^{\Box} = \Box(\varphi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box})$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box})$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}$	$\mathbf{A_6}$
2	$\Gamma^{\Box} \vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box})$	$\mathbf{R_3}$ $\{1\}$

Caso 2.7. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_7}$, sabemos que $\alpha = \psi \to \varphi \vee \psi$ e que $\alpha^{\Box} = \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box})$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box})$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}$	$\mathbf{A_7}$
2	$\Gamma^{\Box} \vdash \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box})$	$\mathbf{R_3}$ $\{1\}$

Caso 2.8. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_8}$, sabemos que $\alpha = (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \varphi \vee \psi \rightarrow \chi$ e que $\alpha^{\square} = (\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}) \strictif (\psi^{\square} \strictif \chi^{\square}) \strictif \varphi^{\square} \vee \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\square} \vdash_{\mathbf{S4}} (\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}) \strictif (\psi^{\square} \strictif \chi^{\square}) \strictif \varphi^{\square} \vee \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}\} \vdash (\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}) \rightarrow \varphi^{\square} \rightarrow \chi^{\square}$	$\mathbf{B_2}$
3	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \rightarrow \chi^{\square}$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}\} \vdash \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}$	$\mathbf{R_1}$
5	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}\} \vdash (\psi^{\square} \strictif \chi^{\square}) \rightarrow \psi^{\square} \rightarrow \chi^{\square}$	$\mathbf{B_2}$
6	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}\} \vdash \psi^{\square} \rightarrow \chi^{\square}$	$\mathbf{R_2}$ $\{4, 5\}$
7	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$	$\mathbf{R_1}$
8	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}\} \vdash (\varphi^{\square} \rightarrow \chi^{\square}) \rightarrow (\psi^{\square} \rightarrow \chi^{\square}) \rightarrow \varphi^{\square} \vee \psi^{\square} \rightarrow \chi^{\square}$	$\mathbf{A_8}$
9	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}\} \vdash (\psi^{\square} \rightarrow \chi^{\square}) \rightarrow \varphi^{\square} \vee \psi^{\square} \rightarrow \chi^{\square}$	$\mathbf{R_2}$ $\{3, 8\}$
10	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \vee \psi^{\square} \rightarrow \chi^{\square}$	$\mathbf{R_2}$ $\{6, 9\}$
11	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}\} \vdash \chi^{\square}$	$\mathbf{R_2}$ $\{7, 10\}$
12	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}, \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \vee \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}$	$\mathbf{T_0}$ $\{11\}$
13	$\{\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}\} \vdash (\psi^{\square} \strictif \chi^{\square}) \strictif \varphi^{\square} \vee \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}$	$\mathbf{T_0}$ $\{12\}$
14	$\vdash (\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}) \rightarrow (\psi^{\square} \strictif \chi^{\square}) \strictif \varphi^{\square} \vee \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}$	$\mathbf{T_1}$ $\{13\}$
15	$\Gamma^{\square} \vdash (\varphi^{\square} \strictif \chi^{\square}) \strictif (\psi^{\square} \strictif \chi^{\square}) \strictif \varphi^{\square} \vee \psi^{\square} \strictif \chi^{\square}$	$\mathbf{R_3}$ $\{14\}$

Caso 2.9. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_{\bot}}$, sabemos que $\alpha = \bot \rightarrow \varphi$ e que $\alpha^{\square} = \Box(\bot \rightarrow \varphi^{\square})$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\square} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\bot \rightarrow \varphi^{\square})$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \bot \rightarrow \varphi^{\square}$	$\mathbf{L_5}$
2	$\Gamma^{\square} \vdash \Box(\bot \rightarrow \varphi^{\square})$	$\mathbf{R_3}$ $\{1\}$

Caso 3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido gerada pela aplicação da regra do *modus ponens* a duas sentenças φ_i e φ_j com $i < j < n$ pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $\varphi_j = \varphi_i \to \alpha$. Assim, a partir de **H** temos que $\mathbf{H_1} = \Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \varphi_i^{\Box}$ e que $\mathbf{H_2} = \Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi_i^{\Box} \to \alpha^{\Box})$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \alpha^{\Box}$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\varphi_i^{\Box}$	$\mathbf{H_2}$
2	$\Box(\varphi_i^{\Box} \to \alpha^{\Box})$	$\mathbf{H_1}$
3	$\Box(\varphi_i^{\Box} \to \alpha^{\Box}) \to \varphi_i^{\Box} \to \alpha^{\Box}$	$\mathbf{B_2}$
4	$\varphi_i^{\Box} \to \alpha^{\Box}$	$\mathbf{R_2}$ $\{2, 3\}$
5	$\alpha^{\Box}$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 4\}$

Estando assim demonstrada a proposição. $\Box$

Teorema 8 (Correção). *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{B}} \alpha$, *então* $\Box\Gamma^{\circ} \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha^{\circ}$.

Demonstração. Partindo-se do teorema de correção da outra tradução **T7**, temos que $\Gamma^{\Box} \vdash \alpha^{\Box}$. Então, por meio do teorema da interderivabilidade **T5**, temos que $\Box\Gamma^{\circ} \vdash \alpha^{\circ}$. Estando assim demonstrada a proposição. $\Box$

5. Implementação

A implementação da formalização das provas apresentadas neste trabalho faz uso da biblioteca para sistemas modais normais desenvolvida por Silveira et al. (2022). A linguagem desta foi definida de maneira ligeiramente diferente da definida neste trabalho. Silveira et al. (2022) tratam a negação como operação primitiva enquanto, neste trabalho, tratamos a contradição como primitiva e a negação como definida em termos dessa e da implicação. De modo similar, considerou-se o operador de possibilidade primitivo na biblioteca, enquanto neste trabalho define-se este em termos da necessidade. Remetemos o leitor à definição 9 para comparações.

Esta biblioteca foi posteriormente aumentada de modo a permitir a fusão de sistemas modais normais por Nunes et al. (2024). Para tanto, a linguagem dos sistemas modais precisou ser alterada de modo a permitir a definição de sistemas multimodais, ou seja, sistemas com mais de uma modalidade. Considerando as diferenças apontadas, redefiniremos abaixo a linguagem do sistema $\mathfrak{L}$. As diversas modalidades serão distinguidas por um valor $i \in \mathcal{I}$. Pequenas modificações nas demais definições deste trabalho precisaram, do mesmo modo, serem feitas para dar conta de tais diferenças. Tais modificações serão assomadas quando relevantes.

Definição 15 ($\mathcal{L}_\Box$). *A linguagem dos sistemas multimodais com $n = |\mathcal{I}|$ modalidades indexadas por um valor $i \in \mathcal{I}$ pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_\Box = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_\Box \rangle$, onde $\mathcal{C}_\Box = \left\{ \neg^1, \Box_i^1, \Diamond_i^1, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2 \mid i \in \mathcal{I} \right\}$.*

Silveira et al. (2022) definem o sistema de dedução da biblioteca de modo levemente maior do que feito neste trabalho. Isso acontece da regra $\mathbf{A_9}$ — que pode ser derivada usando as demais regras apresentadas neste trabalho — e da regra $\mathbf{B_4}$ — neste trabalho tratada como uma definição. O trabalho posterior de Nunes et al. (2024) precisou quantificar univesalmente sobre um valor $i \in \mathcal{I}$ as regras $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$ e $\mathbf{B_3}$. Ainda, adiu a regra $\mathbf{B_4}$, neste trabalho tratada como uma definição. Considerando as diferenças apontadas, redefiniremos abaixo a relação de dedução do sistema $\mathfrak{L}$. Remetemos o leitor à definição 10 para comparações.

Definição 16 ($\vdash_\mathfrak{L}$). *Abaixo estão definidas as regras do sistema multimodal $\mathfrak{L}$.*

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha}\ \mathbf{A_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\ \mathbf{A_2}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta}\ \mathbf{A_3} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha}\ \mathbf{A_4} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \beta}\ \mathbf{A_5}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \alpha \vee \beta}\ \mathbf{A_6} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \beta \to \alpha \vee \beta}\ \mathbf{A_7} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \vee \beta \to \gamma}\ \mathbf{A_8}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to \alpha \to \beta}\ \mathbf{A_9} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha}\ \mathbf{A_\neg}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Box_i(\alpha \to \beta) \to \Box_i\alpha \to \Box_i\beta}\ \mathbf{B_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Box_i\alpha \to \alpha}\ \mathbf{B_2} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Box_i\alpha \to \Box_i\Box_i\alpha}\ \mathbf{B_3}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Diamond_i\alpha \leftrightarrow \neg\Box_i\neg\alpha}\ \mathbf{B_4}$$

$$\frac{\alpha \in \Gamma}{\Gamma \vdash \alpha}\ \mathbf{R_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta}\ \mathbf{R_2} \qquad \frac{\vdash \alpha}{\Gamma \vdash \Box_i\alpha}\ \mathbf{R_3}$$

Uma vez ditas as diferenças, partiremos para a implementação propriamente dita. Consideremos a definição da linguagem intuicionista. Para tanto, definiu-se um tipo indutivo com cinco construtores, conforme apresentado abaixo. O construtor **`Contradiction`** representa a contradição $\perp$. O construtor **`Proposition`** leva um valor $n \in \mathbb{N}$ a uma sentença intuicionista que representa uma letra proposicional. Por fim, os construtores **`Conjunction`**, **`Disjunction`** e **`Implication`** criam conjunções, disjunções e implicações — nesta ordem — a partir de sentenças menores. Notações foram definidas de modo a replicar a notação usada neste trabalho, com letras propositionais sendo introduzidas por um operador **`#`**. Deste modo, podemos representar a sentença intuicionista $a \wedge b \to a \vee b$ como **`#1 ∧ #2 → #1 ∨ #2`**, para $a, b \in \mathscr{P}$. Remetemos o leitor à definição 7 para comparações.

```
Inductive Propositional : Set :=
| Contradiction : Propositional
| Proposition   : nat → Propositional
| Conjunction   : Propositional → Propositional → Propositional
| Disjunction   : Propositional → Propositional → Propositional
| Implication   : Propositional → Propositional → Propositional.

Notation " ⊥ " := Contradiction.
```

Similarmente, uma dedução intuicionista foi definida como um tipo indutivo, desta vez com onze construtores. Cada um desses construtores representa uma das regras de dedução apresentadas anteriormente na definição 8. Assim como feito com a linguagem, foi definida uma notação de modo a facilitar a escrita de asserções. Cabe destacar que o conjunto de assunções Γ foi representado pela sua função indicadora $\mathbf{I}_\Gamma : \mathscr{L} \to \{0,1\}$, em que $\mathbf{I}_\Gamma(\alpha) = 1$ se e somente se $\alpha \in \Gamma$. Na implementação oferecida abaixo, isso foi feito por meio de uma função do tipo **`Sentence`** ao tipo **`Prop`**, o tipo das proposições.

```
Definition Theory := Propositional → Prop.

Reserved Notation "Γ ⊢ α" (at level 110).

Inductive Deduction : Theory → Propositional → Prop :=
| A₁ : forall Γ α β,   Γ ⊢ α → β → α
| A₂ : forall Γ α β γ, Γ ⊢ (α → β → γ) → (α → β) → α → γ
| A₃ : forall Γ α β,   Deduction Γ (α → β → α ∧ β)
(* Alguns construtores omitidos *)
| A₉ : forall Γ α,     Deduction Γ (⊥ → α)
| R₁ : forall Γ α,     Γ ∈ α → Γ ⊢ α
| R₂ : forall Γ α β,   Γ ⊢ α → β → Γ ⊢ α → Γ ⊢ β
where "Γ ⊢ α":= (Deduction Γ α).

Notation "Γ ⊢ α":= (Deduction Γ α) (at level 110).
```

Para ilustração do uso do tipo indutivo **`Deduction`**, abaixo fornecemos a prova da identidade $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$. A prova tem uma relação de um para um com a prova apresentada anteriormente no lema $\mathbf{L_1}$, tirando-se o fato desta ser feita de baixo para cima, da conclusão em direção às assunções. Isso acontece porque o comando **`apply`**, que aplica regras a uma asserção, as aplica por padrão à meta de prova. Nada impediria, entretanto, que o oposto fosse feito. Ao usarmos o comando **`apply`** estamos dizendo que esta conclusão foi gerada a partir da aplicação da dita regra. A meta de prova torna-se, então, os antecedentes da regra, caso haja.

```
Lemma identity : forall Γ α, Γ ⊢ α → α.
Proof.
    intros Γ α.
    apply R₂ with (α → α → α).
    + apply R₂ with (α → (α → α) → α).
        * apply A₂.
```

```
        * apply A₁.
    + apply A₁.
Qed.
```

Uma vez definido o sistema intuicionista, podemos definir as funções de tradução do sistema $\mathfrak{B}$ ao sistema $\mathfrak{L}$. A tradução de ordem de avaliação por nome e a tradução ordem de avaliação por valor, agora chamadas **square** e **circle**, foram definidas com apenas duas alterações. Primeiramente, ambas as funções agora recebem um argumento a mais, que identifica a modalidade usada, uma vez que estamos usando uma biblioteca para sistema multimodais. Em segundo lugar, a contradição $\perp$ passou a ser mapeada para $a \wedge \neg a$ para algum $a \in \mathscr{P}$, uma vez que a biblioteca não traz a contradição como um operador primitivo. Remetemos o leitor às definições 13 e 14 para comparações.

```
Fixpoint square (α : Propositional) (i : Index) : Multimodal :=
match α with
| ⊥     ⇒ #1 ∧ ¬#1
| #a    ⇒ [i] #a
| α ∧ β ⇒ (square α i) ∧ (square β i)
| α ∨ β ⇒ (square α i) ∨ (square β i)
| α → β ⇒ [i]((square α i) → (square β i))
end.

Fixpoint circle (α : Propositional) (i : Index) : Multimodal :=
match α with
| ⊥     ⇒ #1 ∧ ¬#1
| #a    ⇒ #a
| α ∧ β ⇒ (circle α i) ∧ (circle β i)
| α ∨ β ⇒ [i](circle α i) ∨ [i](circle β i)
| α → β ⇒ [i](circle α i) → (circle β i)
end.
```

Faz-se preciso definir novos construtores de tipos para representar conjuntos cujas sentenças são resultados da aplicação de alguma função ou operação, que foram chamados de **Imboxed**, **Squared** e **Circled**. Cada um desses possui apenas um construtor, nomeados **Imboxing**, **Squaring** e **Circling**, nesta ordem. **Imboxing** recebe como argumento um conjunto de sentenças multimodais de tipo **`Multimodal → Prop`** e prefixa a necessidade a cada uma destas sentenças, ou seja, representa o conjunto $\Box\Gamma$. **`Squaring`** e **`Circling`** recebem como argumento conjuntos de sentenças intuicionistas de tipo **`Propositional → Prop`** e aplicam os seus elementos às funções de tradução **`square`** e **`circled`**, ou seja, representam os conjuntos $\Gamma^{\Box}$ e Γ°.

```
Inductive Imboxed Γ i : Multimodal → Prop :=
| Imboxing : forall α , Γ α → Imboxed Γ i ([i]α).

Inductive Squared Γ i : Multimodal → Prop :=
| Squaring : forall α , Γ α → Squared Γ i (square α i).

Inductive Circled Γ i : Multimodal → Prop :=
| Circling : forall α , Γ α → Circled Γ i (circle α i).
```

Agora que as definições precisas para o desenvolvimento desta formalização foram feitos, partiremos pra uma enumeração das principais asserções provadas, com considerações pontuais. Não serão apresentadas as provas das asserções por questões de brevidade. As provas, entretanto, são paralelas às provas apresentadas anteriormente, a não ser quando destacado o oposto. As provas que envolvem modalidades foram quantificadas universalmente sobre um valor $i \in \mathcal{I}$, assim como foi feito no sistema dedutivo por Nunes et al. (2024).

Já estão presentes na biblioteca provas do teorema da dedução e do teorema do enfraquecimento. Deste modo, a primeira grande prova feita foi a prova do teorema da generalização da necessitação, dito **`generalization`**. Não podemos induzir diretamente sobre o conjunto Γ, uma vez que este consiste numa função, um tipo não-indutivo. Para a prova deste teorema, então, usou-se outra asserção demonstrada na biblioteca, que afirma que qualquer dedução a partir de um conjunto Γ pode ser feita a partir de um conjunto finito Δ contido em Γ. Podemos induzir sobre este novo conjunto Δ, uma vez que ele foi definido usando-se uma lista, um tipo indutivo. O restante da prova procedeu conforme o teorema $\mathbf{T_0}$.

```
Theorem generalization : forall Γ α i,
Imboxed Γ i ⊢ α → Imboxed Γ i ⊢ [i]α.
```

Consideremos demonstração da estabilidade da tradução quadrado e a demonstração da bi-implicação entre ambas as traduções, ditas **`stability`** e **`biimplication`**. Ambas foram feitas por indução sobre a profundidade da sentença α, e não houve grandes diferenças entre as demonstrações implementadas e as demonstrações apresentadas nos teoremas $\mathbf{T_6}$ e $\mathbf{T_0}$.

```
Theorem stability : forall Γ α i,
Γ ⊢ square α i → [i](square α i).
```

```
Theorem biimplication : forall Γ α i,
Γ ⊢ [i](circle α i) ↔ square α i.
```

A prova que apresentou maior dificuldade a esta implementação foi a prova do teorema da interderivabilidade, dita **`interderivability`**. Em um primeiro momento, tentou-se provar este por indução sobre a dedução, assim como no teorema $\mathbf{T_5}$. Entretanto, quando da indução, perdeu-se a forma do conjunto **`Imboxed (Circled Γ i) i`** e do conjunto **`Squared Γ i`** que passaram a ser representados por um conjunto qualquer Δ. Isso não permite a dedução da forma de uma sentença $\alpha \in \Delta$, para algum α. Caso as formas dos conjuntos tivessem sido mantidas, seriam igualmente mantidas informações sobre α de maneira implicita, uma vez que a partir de $\alpha \in \Box\Gamma$ sabe-se que $\alpha = \Box\beta$ para algum β, por exemplo. De modo semelhante, perdeu-se informação sobre a forma das sentenças **`circle α i`** e **`square α i`**.

Houveram duas tentativas de solução. A primeira delas foi o uso do comando **`remember`**, que nos permitiu lembrar as informações perdidas na forma de equações, como **`Δ = Imboxed (Circled Γ i) i`**. Isso, entretanto, alterou a premissa indutiva de um modo que não se pode fazer uso dela. Tentou-se, do mesmo modo, fazer a prova usando-se o comando **`dependent induction`**, que se comparta de maneira semelhante ao uso do comandos **`remember`** seguido do comando **`induction`**. Tampouco logrou-se sucesso, pelas mesmas razões da tentativa anterior.

A solução adotada foi buscar outra maneira de se provar o teorema. A prova foi, então, feita por indução sobre o tamanho do conjunto de assunções. Para tanto, novas asserções precisaram ser provadas, dentre os quais destacamos dois: o lema **`forall Γ α i, Imboxed (Squared Γ i) i ⊢ [i] α → Squared Γ i ⊢ [i] α`** e o lema **`forall Γ α i, Γ ⊢ α → Squared Γ i ⊢ α`**. Ambos os lemas foram inspirados em Troelstra e Schwichtenberg (2000).

```
Theorem interderivability : forall Γ α i,
Imboxed (Circled Γ i) i ⊢ circle α i ⟷ Squared Γ i ⊢ square α i.
```

Por fim, consideremos a implementação das principais provas deste trabalho: as provas de correção das traduções, ditas `soundness`. A prova da correção da tradução de ordem de avaliação por nome foi feita por indução sobre o tamanho da sucessão de dedução. Não houve grande diferença entre a prova implementada e a prova apresentada no teorema **T7**.

```
Theorem soundness : forall Γ α i,
Γ ⊢ α ⟶ Squared Γ i ⊢ square α i.
```

Assim como foi o caso da prova apresentada anteriormente neste trabalho, a prova da correção da tradução de ordem de avaliação por valor segue trivialmente das provas de equiderivabilidade e de correção da correção de ordem de avaliação por nome. Assim sendo, não houve grande diferença entre a prova implementada e a prova apresentada no teorema **T8**. Destacamos que os nomes de ambas as traduções não conflitam, uma vez que as asserções foram definidas em arquivos diferentes e podem ser desambiguadas por prefixação.

```
Theorem soundness : forall Γ α i,
Γ ⊢ α ⟶ Imboxed (Squared Γ i) i ⊢ circle α i.
```

6. Conclusão

O sistemas modais atributos interessantes para a representação de efeitos computacionais, sobretudo o sistema $\mathfrak{M}$ definido neste trabalho. Uma linguagem baseada nesse sistema, podendo representar efeitos monadicamente, imerge e pode ser imergida em continuações (Filinski, 1994). O estilo de passagem por continuações trata-se de uma das diversas representações usadas em compiladores. Deste modo, este sistema possui interesse no ponto de vista de compilação.

Consideremos as metas definidas na introdução. Este trabalho apresentou noções gerais sobre sistemas e sobre traduções entre sistemas. Em seguida, foram definidos os sistemas intuicionista e modais, bem como os principais artefatos deste trabalho: as traduções de um sistema a outro. Adiante, foram demonstradas e equiderivabilidade e a correção das traduções, bem como um conjunto de teoremas e lemas auxiliares. Por fim, tudo o que foi definido e demonstrado foi implementado. Não foi demonstrada a completude, ou seja, de que derivações de sentenças traduzidas no sistema de destino implicam em derivações no sistema de origem. Somente esta meta não foi cumprida.

Sugerimos diversos trabalhos futuros. Primeiramente, a demonstração da completude das traduções apresentadas neste trabalho e sua formalização assistida por computador. Em segundo lugar, sugerimos que o mesmo seja feito para a tradução do sistema laxo ao sistema $\mathfrak{M}$, conforme apresentada por Fairtlough e Mendler (1995). Outra tradução de interesse trata-se da tradução de Fairtlough e Mendler (1995) do sistema $\mathfrak{L}$ a um sistema bimodal $\langle\mathfrak{M},\mathfrak{M}\rangle$, uma vez que os desenvolvimentos de Nunes et al. (2024) permitem a fusões entre sistemas modais. Por fim, sugerimos investigações acerca do uso de uma de linguagem de representação baseada no sistema $\mathfrak{M}$ para uso em compiladores.

Para a demonstração de completude, sugerimos que esta deixe de se basear na demonstraçõe de Troelstra e Schwichtenberg (2000) e passem a se basear na demonstração de Flagg e Friedman (1986). Este abandono deve-se ao uso de propriedades de sequentes na demontração que seriam complicadas de acomodar ao sistema de dedução usado neste trabalho, enquanto escolha da demonstração usada deu-se por esta ser feita construtivamente. A construtividade da demonstração releva por esta conter uma computação — ou seja, um procedimento que descreve *como* transformar uma demonstração de uma sentença traduzida no sistema de destino em uma demonstração no sistema de origem. A demonstração de Flagg e Friedman (1986) baseia-se na definição de uma contratradução a uma das traduções foco deste trabalho. Com isso, eles reduzem o problema de provar a completude da tradução ao problema de provar a correção da contratradução, coisa que pode ser feita por indução sobre o tamanho da prova em conjunto com uma coleção de lemas.

Este trabalho foi apresentado como *poster* durante a *XXII Brazilian Logic Conference*, ocorrido entre os dias doze e dezesseis de maio do corrente ano em Serra Negra — São Paulo, e foi parcialmente apoiado pela *Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina* — Fapesc.

Referências Bibliográficas

Kenneth Appel e Wolfgang Haken. Every map is four colourable. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1976. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1976-14122-5.

Aristotéls. *Organon*. Tradução de Harold Percy Cooke, Hugh Tredennick e Edward Seymour Forster. Cambridge, Harvard University Press, 1938.

Peter Nicholas Benton, Gavin Mark Bierman e Valeria Correa Vaz de Paiva. Computational types from a logical perspective. *Journal of Functional Programming*, 1998. DOI: https://doi.org/10.1017/S0956796898002998.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer. *Over de grondslagen der wiskunde*. Maas & van Suchtelen, 1907.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer. De onbetrouwbaarheid der logische principes. *Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, 1908.

Jean-Yves Béziau. Universal logic. *Logica*, 1994.

Jean-Yves Béziau. From consequence operator to universal logic: a survey of general abstract logic. In *Logica Universalis*, Basileia, 2007. Birkhäuser Basel. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8354-1_1.

Adam Chlipala. *Certified programming with dependent types*. The Massachusetts Institute of Technology Press, 2022. ISBN: 9780262545747.

Marcelo Esteban Coniglio. Towards a stronger notion of translation between logics. *Manuscrito*, 2005.

Haskell Brooks Curry. The elimination theorem when modality is present. *Journal of Symbolic Logic*, 1952. DOI: https://doi.org/10.2307/2266613.

Haskell Brooks Curry e Robert Feys. *Combinatory logic*. North-Holland Publishing Company, 1958.

Matt Fairtlough e Michael Mendler. An intuitionistic modal logic with applications to the formal verification of hardware. In *Computer Science Logic*. Springer, 1995. DOI: https://doi.org/10.1007/BFb0022268.

Andrzej Filinski. Representing monads. In *Proceedings of the Symposium on Principles of Programming Languages*. Association for Computing Machinery, 1994. DOI: https://doi.org/10.1145/174675.178047.

Robert Flagg e Harvey Friedman. Epistemic and intuitionistic formal systems. *Annals of Pure and Applied Logic*, 1986. DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(86)90043-6.

Josep Maria Font, Ramon Jansana e Don Leonard Pigozzi. A survey of abstract algebraic logic. *Studia Logica*, 2003. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1024621922509.

Curtis Franks. Propositional Logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University, 2024. URL: https://plato.stanford.edu/entries/logic-propositional/.

Gottlob Frege. *Begriffsschrift: Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Verlag von Louis Nebert, 1879.

Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 1987. ISSN: 0304-3975. DOI: https://doi.org/10.1016/0304-3975(87)90045-4.

Georges Gonthier. Formal proof: the four-color theorem. *Notices of the American Mathematical Society*, 2008.

Kurt Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 1933.

Raul Hakli e Sara Negri. Does the deduction theorem fail for modal logic? *Synthese*, 2012. DOI: https://doi.org/10.1007/s11229-011-9905-9.

David Hilbert. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 1926. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01206605.

David Hilbert. *Die Grundlagen der Mathematik*. Springer, 1928. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-663-16102-8.

William Alvin Howard. *Essays on combinatory logic, lambda calculus, and formalism*, chapter The formulae-as-types notion of construction. Academic Press, 1980.

Satoshi Kobayashi. Monad as modality. *Theoretical Computer Science*, 1997. DOI: https://doi.org/10.1016/S0304-3975(96)00169-7.

Andrej Nikolaevi Kolmogorov. On the principle of the excluded middle. *Matematieskij Sbornik*, 1925.

Clarence Irving Lewis. Implication and the algebra of logic. *Mind*, 1912. ISSN: 0026-4423. DOI: https://doi.org/10.1093/mind/XXI.84.522.

Clarence Irving Lewis e Cooper Harold Langford. *Symbolic logic*. Nova York, Century, 1932.

John Maraist et al. Call-by-name, call-by-value, call-by-need and the linear lambda calculus. *Theoretical Computer Science*, 1999. DOI: https://doi.org/10.1016/S0304-3975(98)00358-2.

Ruth Barcan Marcus. The deduction theorem in a functional calculus of first order based on strict implication. *The Journal of Symbolic Logic*, 1946.

Ruth Barcan Marcus. Strict implication, deducibility and the deduction theorem. *The Journal of Symbolic Logic*, 1953.

John Charles Chenoweth McKinsey e Alfred Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, 1948.

Eugenio Moggi. Notions of computation and monads. *Information and Computation*, 1991. DOI: https://doi.org/10.1016/0890-5401(91)90052-4.

Miguel Alfredo Nunes, Karina Girardi Roggia e Paulo Henrique Torrens. Soundness-preserving fusion of modal logics in Coq. In *Formal methods: foundations and applications*, 2024. ISBN: 978-3-031-78116-2. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-78116-2_8.

Frank Pfenning e Rowan Davies. A judgmental reconstruction of modal logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 2001. DOI: https://doi.org/10.1017/S0960129501003322.

Benjamin Crawford Pierce et al. *Logical foundations*. Software Foundations, 2024.

John Charles Reynolds. The discoveries of continuations. *Higher-Order and Symbolic Computation*, 1993. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01019459.

Alexandre Sehnem. Formalização da tradução das lógicas clássica e intuicionista para a lógica linear em Coq. Trabalho de conclusão de curso, Universidade do Estado de Santa Catarina, 2023.

Ariel Agne da Silveira et al. A sound deep embedding of arbitrary normal modal logics in Coq. In *Proceedings of the XXVI Brazilian Symposium on Programming Languages*. Association for Computing Machinery, 2022. ISBN: 9781450397445. DOI: https://doi.org/10.1145/3561320.3561329.

Alfred Tarski. Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques. *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, 1928.

The Coq Development Team. *The Coq proof assistant reference manual*, 2024.

Hayo Thielecke. Continuations, functions and jumps. *Special Interest Group on Algorithms and Computation Theory News*, 1999. DOI: https://doi.org/10.1145/568547.568561.

Anne Sjerp Troelstra e Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000. ISBN: 9781139168717. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781139168717.

Thomas Tymoczko. The four-color problem and its philosophical significance. *The Journal of Philosophy*, 1979. DOI: https://doi.org/10.2307/2025976.

Philip Wadler. Monads for functional programming. In *Program Design Calculi*. Springer, 1993. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-02880-3_8.

Philip Wadler. Propositions as types. *Communications of the Association for Computing Machinery*, 2015. DOI: https://doi.org/10.1145/2699407.

Alfred North Whitehead e Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Volume 1. Cambrige, Cambridge University Press, 1910.

Alfred North Whitehead e Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Volume 2. Cambrige, Cambridge University Press, 1911.

Alfred North Whitehead e Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Volume 3. Cambrige, Cambridge University Press, 1912.

Robin Wilson. *Four colors suffice: how the map problem was solved*. Princeton University Press, 2021.

Richard Zach et al. *Box and diamonds: an open introduction to modal logic*. Open Logic Project, 2024.