Uma formalização assistida por computador da interpretação modal do sistema intuicionista

Elian Babireski

2024

UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
BACHARELADO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

ELIAN GUSTAVO CHORNY BABIRESKI

UMA FORMALIZAÇÃO ASSISTIDA POR COMPUTADOR DA INTERPRETAÇÃO MODAL DO SISTEMA INTUICIONISTA

JOINVILLE
2025

Resumo

Uma das primeiras traduções de um sistema de dedução a outro apresentadas na literatura consiste na tradução do sistema intuicionista ao sistema modal **S4** com o intuito de interpretar a modalidade da *necessidade* como uma modalidade de *provabilidade*. Dezenas de anos depois, foi apresentada uma metalinguagem que se dedicava a representar semanticamente noções de computação como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuações. A codificação dessas noções apresenta grandes similaridades com os axiomas modais do sistema **S4** e, deste modo, a dita tradução torna-se relevante numa visão baseada na interpretação prova-programa. Assim, com inspiração nos diversos casos de formalizações assistidas por computador, este trabalho busca verificar formalmente esta tradução.

Palavras-chave — traduções, formalização, sistema intuicionista, sistemas modal, **S4**.

Abstract

One of the first translations of a deduction system into another presented in the literature involves the translation of the intuitionistic system into the modal system **S4** to interpret the modality of *necessity* as a modality of *provability*. Decades later, a metalanguage was introduced to semantically represent notions of computation such as partiality, non-determinism, exceptions, and continuations. The encoding of these notions shows great similarities with the modal axioms of the **S4** system, making the mentioned translation relevant within a proof-program interpretation perspective. Thus, inspired by the various cases of computer-assisted formalizations, this work aims to formally verify this translation.

Keywords — translations, formalization, intuitionistic system, modal system, **S4**.

Sumário

"'Oh, you can't help that,' said the Cat: 'we're all mad here. I'm mad. You're mad.' 'How do you know I'm mad?' said Alice. 'You must be,' said the Cat, 'or you wouldn't have come here."'

— Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

1. Introdução

As lógicas modais consistem em um conjunto de extensões da lógica clássica que contam com a adição de um ou mais operadores, chamados modalidades, que qualificam sentenças. No caso do sistema **S4**, são adicionadas as modalidades de necessidade ($\Box$) e possibilidade ($\Diamond$) em conjunto à regra da necessitação[1] e os axiomas **K**: $\Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B$, **T**: $\Box A \to A$ e **4**: $\Box A \to \Box\Box A$ (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Ademais, pode-se derivar nesse sistema, por meio da dualidade entre as modalidades[2], sentenças duais aos axiomas **T** e **4**, sendo elas $\mathbf{T}_\Diamond$: $A \to \Diamond A$ e $\mathbf{4}_\Diamond$: $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$, respectivamente Zach et al. (2024).

As mônadas ganharam destaque na área de linguagens de programação desde que Moggi (1991) formalizou uma metalinguagem que faz uso dessas estruturas para modelar noções de computação — como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuações — de uma maneira puramente funcional. Pode-se notar uma grande semelhança entre as sentenças $\mathbf{T}_\Diamond$ e $\mathbf{4}_\Diamond$ e as transformações naturais monádicas $\eta : 1_C \to T$ e $\mu : T^2 \to T$, respectivamente. Nesse sentido, Pfenning e Davies (2001) demonstraram que se pode traduzir essa metalinguagem para o sistema **S4** da lógica modal, pelo qual se torna interessante analisar esse sistema como uma linguagem de programação sob a ótica do isomorfismo de Curry-Howard.

Troelstra e Schwichtenberg (2000) apresentam duas traduções equivalentes da lógica intuicionista para o sistema **S4** da lógica modal, sendo um deles correspondente a uma abordagem *call-by-name* e outra a um abordagem *call-by-value*. Tais traduções possuem grande similaridade com as traduções da lógica intuicionista para a lógica linear definidas por Girard (1987). Essas traduções equivalem à tradução por negação dupla que, por sua vez, equivalem a traduções *continuation-passing style* (CPS) em compiladores por meio do isomorfismo de Curry-Howard (Reynolds, 1993), o que torna esse tema interessante no ponto de vista de compilação.

Durante grande parte da história, provas lógicas e matemáticas eram validadas manualmente pela comunidade acadêmica, o que muitas vezes — a depender do tamanho e complexidade da prova — se mostrava ser um trabalho complexo e sujeito a erros. Hoje em dia, exitem *softwares* chamados assistentes de provas que permitem verificar — graças ao isomorfismo de Curry-Howard — a corretude de provas (Chlipala, 2022). O assistente de provas que será usado neste trabalho é o COQ, que utiliza o cálculo de construções indutivas e um conjunto axiomático pe-

[1] Se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$

[2] $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$

queno para permitir a escrita de provas simples e intuitivas (The Coq Development Team, 2024).

1.1 Objetivos

Este trabalho consiste numa continuação do desenvolvimento da biblioteca de formalização de sistemas modais normais iniciado por Silveira et al. (2022) e posteriormente expandida de forma a permitir a fusão de sistemas modais por Nunes et al. (2024). Nele, formalizaremos as traduções do sistema intuicionista ao sistema modal **S4** no asssitente de provas COQ e provaremos suas propriedades. Uma formalização de traduções entre sistemas de dedução similar a nossa foi feita por Sehnem (2023), neste caso tendo como alvo o sistema linear de Girard (1987). Todas as formalizações citadas acima deram-se no assistente de provas COQ, o mesmo assistente usado neste trabalho. Como objetivos específicos, listamos:

- Fornecer uma introdução ao conceito de sistemas de dedução;
- Fornecer uma introdução ao conceito de traduções entre sistemas;
- Fornecer uma introdução ao sistema intuicionista;
- Fornecer uma introdução aos sistemas modais, em especial o **S4**;
- Apresentar as traduções do sistema intuicionista ao sistema **S4**;
- Provar manualmente a correção e completude das traduções providas bem como outras propriedades pertinentes;
- Formalizar as provas no provador de teoremas interativo COQ.

1.2 Estruturação

Estruturaremos este trabalho em cinco partes, iniciando-se por esta introdução. O Capítulo 2 consiste numa fundamentação de conceitos basilares ao desenvolvimento deste trabalho, notadamente os conceitos de *sistemas de dedução*, *traduções* e *provadores de teoremas*. O Capítulo 3 apresenta as definições dos sistemas e traduções relevantes a este trabalho. No Capítulo 4 são provadas todas as propriedades abarcadas no escopo deste trabalho. Por fim, o Capítulo 5 compreende considerações parciais acerca do desenvolvido até o momento.

2. Fundamentação

Nesta parte do trabalho, serão apresentadas definições gerais que fundamentarão as definições mais estritas que serão apresentadas futuramente. Notadamente, fundamentaremos as noções de sistemas e traduções. Ademais, discorreremos acerca da noção de provadores, que serão usados para certificar as provas apresentadas posteriormente. Antes disso, entretanto, introduziremos duas notações que serão usadas copiosamente, uma para o conjunto das partes e outra para sucessões.

Notação. *Seja A um conjunto, $\mathfrak{P}(A)$ denota o conjunto $\{X \mid X \subseteq A\}$.*

Notação. *Seja $i \in \mathbb{N}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, $\langle a_i \mid i \leq n \rangle$ denota uma sucessão de n elementos de modo que o elemento a_i encontra-se na posição i.*

2.1 Sistemas

Sistemas de dedução buscam formalizar e sistematizar o processo de razoamento. Estudos acerca disso datam da antiguidade, dentre os quais destaca-se Aristotélēs (1938). Considera-se que os estudos modernos neste campo foram, dentre outras pessoas, fundados por Frege (1879) e continuados por Whitehead e Russell (1910, 1911, 1912). Estas investigações — bem como outras — levaram ao desenvolvimento do sistema hoje tido como padrão. Posteriormente a isso, viu-se o surgimento de diversos sistemas não-padrões, fato que — conforme Béziau (2007) — justifica uma conceituação de sistema de dedução, que apresentaremos nesta seção.

Ainda segundo Béziau (2007), os primeiros desenvolvimentos neste sentido foram feitos por Tarski (1928), que define o conceito de dedução com base num operador de fecho $C : \mathfrak{P}(\mathcal{L}) \to \mathfrak{P}(\mathcal{L})$, sendo $\mathcal{L}$ um conjunto qualquer. Neste trabalho entretanto usaremos a definição proposta por Béziau (1994) baseada numa relação de dedução $\vdash \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$, uma vez que, por sua simplicidade, não traz elementos irrelevantes aos intuitos deste. Cabe destacar, conforme apontam Font et al. (2003), que ambas as definições são equivalentes[1], uma vez que $\Gamma \vdash \alpha$ se e somente se $\alpha \in C(\Gamma)$.

Definição 1 (Sistema)**.** *Um sistema de dedução consiste num par $\mathfrak{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, onde $\mathcal{L}$ consiste em um conjunto e $\vdash \subseteq \mathfrak{P}(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ em uma relação sobre o produto cartesiano do conjunto das partes de $\mathcal{L}$ e o conjunto $\mathcal{L}$, sem demais condições.* □

[1] Destaca-se, entretanto, que a definição de Tarski (1928) requer a satisfação de postulados não requeridos por Béziau (1994), sendo portanto menos geralista.

Conforme Béziau (1994) aponta, a qualidade e quantidade dos elementos de um sistema $\mathfrak{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ não são especificados, portanto sendo esta uma definição de grande generalidade. Neste sentido, com base no escopo deste trabalho, restringiremos a definição do conjunto $\mathcal{L}$ — dito *linguagem* — a linguagens proposicionais. Os elementos destas, aos quais daremos o nome de *sentenças*, notabilizam-se por serem formadas por *letras* — que consistem em proposições indivisas — e *operadores* — que podem gerar proposições maiores a partir de proposições menores. Ao par formado por letras e operadores daremos o nome *assinatura*, conforme abaixo.

Definição 2 (Assinatura). *Uma assinatura proposicional consiste num par $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$, onde $\mathcal{P}$ consiste num conjunto letras e $\mathcal{C} = \bigcup \{\mathcal{C}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ num conjunto de operadores de modo que $\circ \in \mathcal{C}_n$ se e somente se $\circ$ possuir aridade n.* $\square$

Notação. *Seja $\mathcal{C}$ um conjunto de operadores, $\circ^n$ denota um operador $\circ \in \mathcal{C}_n$.*

Podemos interpretar os conjuntos $\mathcal{P}$ e $\mathcal{C}$ de uma assinatura $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$ como construtores de sentenças. Neste sentido, o conjunto $\mathcal{C}_0$ assemelha-se mais ao conjunto $\mathcal{P}$, uma vez que seus elementos — ditos *constantes* — não geram sentenças maiores partindo de sentenças menores. Nota-se que uma assinatura constitui um elemento suficiente para definirmos indutivamente a linguagem de um sistema, conforme definido abaixo de maneira similar a Franks (2024). Por fim, destacamos que, para todos os sistemas apresentados neste trabalho, usaremos o conjunto de letras $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e letras romanas em caixa-baixa para representar seus elementos.

Definição 3 (Linguagem). *Seja $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$ uma assinatura proposicional. Uma linguagem proposicional $\mathcal{L}$ induzida a partir de Σ consiste no menor conjunto de sentenças bem-formadas induzido a partir das seguintes regras:*

(a) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$

(b) *Se $\circ \in \mathcal{C}_n$ e $\{\varphi_i \mid i \leq n\} \subseteq \mathcal{L}$, então $\circ \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle \in \mathcal{L}$.* $\square$

Neste trabalho, representaremos sentenças por letras gregas em caixa-baixa e conjuntos de sentenças por letras gregas em caixa-alta.[2] Ademais, impõe-se definir a noção de profundidade de uma sentença. Esta noção, em termos simples, consiste no comprimento do maior ramo da construção da dada sentença. A definição provida abaixo consiste numa generalização para quaisquer aridades da definição dada por Troelstra e Schwichtenberg (2000). Usaremos essa definição futuramente para fazer demonstrações por meio provas indutivas sobre esta propriedade.

[2]Desconsiderando-se o Σ, usado para representar assinaturas.

Definição 4 (Profundidade)**.** *Seja* $\mathfrak{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *um sistema com linguagem induzida a partir de uma assinatura* $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$*. Considerando-se uma proposição* $a \in \mathcal{P}$*, um operador* $\circ \in \mathcal{C}$ *e uma aridade* $n > 0$*, definimos a profundidade* $|\alpha|$ *de uma sentença* $\alpha \in \mathcal{L}$ *indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} |a| &\coloneqq 0 \\ |\circ^0| &\coloneqq 0 \\ |\circ^n \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle| &\coloneqq \max \{ |\varphi_i| \mid i \leq n \} + 1. \end{aligned}$$ □

Com isso, encerram-se as definições relacionadas a linguagens de sistemas de dedução. Agora, apresentaremos definições relacionadas a relações de dedução, que gozam da mesma generalidade dada a liguagens. Deste modo, a relação $\vdash$ pode ser tanto uma relação de *derivação* — definida sintaticamente — quanto uma relação de *satisfação*[3] — definida semanticamente. Neste trabalho, serão abordados apenas sistemas definidos sobre relações de derivação. Cabe destacar, entretanto, que nada na definição de tradução impede que esta seja feita sobre relações de satisfação, conforme veremos com mais detalhes futuramente.

Neste trabalho, definiremos a relações de dedução baseada em axiomatizações, ou seja, em conjuntos de *axiomas* — sentenças postuladas como verdadeiras — e conjuntos de *regras de dedução* — que permitem derivar mais sentenças verdadeiras caso certas condições sejam satisfeitas. Axiomatizações consistem numa abordagem hilbertiana de dedução que, segundo Troelstra e Schwichtenberg (2000), distinguem-se por conter um conjunto reduzido de regras de dedução que nunca descartam premissas. Ainda baseando-se em Troelstra e Schwichtenberg (2000) e em contraste a Frege (1879) e Hilbert (1926, 1928), preferiremos esquemas de axiomas a axiomas individuais de modo a eliminarmos a necessidade de instanciações.

Definição 5 (Axiomatização)**.** *Seja* $\mathfrak{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *um sistema. Uma axiomatização para o sistema* $\mathfrak{S}$ *consiste num par* $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$*, sendo* $\mathcal{A}$ *um conjunto de esquemas de axiomas e* $\mathcal{R}$ *um conjunto de regras de dedução.*

Definição 6 (Dedução)**.** *Seja um sistema* $\mathfrak{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *com uma relação de dedução definida sobre uma axiomatização* $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ *e seja um conjunto de sentenças* $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathcal{L}$*. A dedução* $\Gamma \vdash \alpha$ *vale se e somente se houver sucessão de sentenças* $\langle \varphi_i \in \mathcal{L} \mid i \leq n \rangle$ *de modo que* $\varphi_n = \alpha$ *e que cada sentença* φ_i *tenha sido gerada ou por algum esquema* $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ *ou pela aplicação de alguma regra* $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ *a sentenças anteriores.* □

[3] Sendo esta denotada por $\vDash$.

2.2 Traduções

Traduções entre sistemas consistem em funções que mapeiam sentenças de um sistema a sentenças de outro, garantindo certas propriedades. As propriedades a serem garantidas variam e ainda são discutidas na literatura, deixando que a definição exata de tradução — assim como houve com a definição de sistema — varie de acordo com a predileção e as necessidades de cada autor. Nesta seção, serão abordadas historicamente noções de tradução entre sistemas, bem como serão definidos e nomeados os conceitos de tradução que serão usados no restante deste trabalho.

Definição 7 (Condições)**.** *Chamaremos a condição $\varnothing \vdash_{\mathbf{A}} \alpha$ implica em $\varnothing \vdash_{\mathbf{B}} \alpha^*$ de correção fraca e a condição $\varnothing \vdash_{\mathbf{B}} \alpha^*$ implica em $\varnothing \vdash_{\mathbf{A}} \alpha$ de completude fraca. Analogamente, considerando-se dedução com premissas, chamaremos a condição $\Gamma \vdash_{\mathbf{A}} \alpha$ implica em $\Gamma^* \vdash_{\mathbf{B}} \alpha^*$ de correção forte e a condição $\Gamma^* \vdash_{\mathbf{B}} \alpha^*$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbf{A}} \alpha$ de completude forte.*

Historicamente, autores usaram diferentes combinações das condições apresentadas acima e, em certos casos, outras. Neste trabalho, adotaremos uma noção forte de tradução que requer tanto a correção forte quanto a completude forte, conforme Coniglio (2005). Definiremos, ainda, uma notação que nos permite aplicar sucintamente a tradução a todos os elementos de um conjunto.

Definição 8 (Tradução)**.** *Uma sentença φ de um sistema $\mathfrak{A} = \langle \mathcal{A}, \vdash_{\mathfrak{A}} \rangle$ pode ser traduzida a uma sentença φ^* em um sistema $\mathfrak{B} = \langle \mathcal{B}, \vdash_{\mathfrak{B}} \rangle$ caso exista uma função $\bullet^* \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ que garanta que $\Gamma \vdash_{\mathfrak{A}} \varphi$ se e somente se $\Gamma^* \vdash_{\mathfrak{B}} \varphi^*$.* □

Notação. *Seja $\Gamma \in \mathfrak{P}(\mathcal{A})$ um conjunto de sentenças bem-formadas e $\bullet^* \colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ uma tradução. Γ^* denota o conjunto $\{\alpha^* \mid \alpha \in \Gamma\} \in \mathfrak{P}(\mathcal{B})$, ou seja, a aplicação da tradução a todos os elementos do conjunto Γ.* □

A primeira tradução entre dois sistemas conhecida na literatura foi definida por Kolmogorov (1925) como uma maneira de demonstrar que o uso da *lei do terceiro excluso*[4] não leva a contradições. Essa definição consiste basicamente em prefixar uma dupla negação a cada elemento da construção de uma dada sentença (Coniglio, 2005), motivo pelo qual chamaremos essa tradução de *tradução de negação dupla*. Essa mesma tradução foi também descoberta independentemente por Gödel e por Getzen. Curiosamente, essa tradução mostra-se relevante para o escopo deste trabalho, uma vez que consiste na contraparte da passagem por continuações segundo a interpretação prova-programa.

[4]Definido como $\vdash \alpha \lor \neg\alpha$.

Exemplo 1. *Define-se a tradução* $\bullet^{\neg}\colon \mathcal{L}_{\mathbf{C}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{I}}$ *do sistema clássico ao sistema intuicionista indutivamente da seguinte maneira:*

$$
\begin{aligned}
p^{\neg} &\coloneqq \neg\neg p \\
\bot^{\neg} &\coloneqq \bot \\
(\varphi \land \psi)^{\neg} &\coloneqq \neg\neg(\varphi^{\neg} \land \psi^{\neg}) \\
(\varphi \lor \psi)^{\neg} &\coloneqq \neg\neg(\varphi^{\neg} \lor \psi^{\neg}) \\
(\varphi \to \psi)^{\neg} &\coloneqq \neg\neg(\varphi^{\neg} \to \psi^{\neg})
\end{aligned}
\qquad \square
$$

2.3 Provadores

A primeira prova de destaque a ser realizada com grande uso de computadores foi a do teorema das quatro cores[5], feita por Appel e Haken (1976), motivado pela grande quantidade de casos a serem analisados. Conforme Wilson (2021) afirma, esta prova foi, por uns, recebida com entusiasmo e por outros, devido ao uso de computadores, com cetistismo e desapontamento. Dentre aqueles que compartilharam destas visões opositoras, destaca-se Tymoczko (1979). Ainda segundo Wilson (2021), o teorema tornou-se mais aceito com o passar do tempo e foi, posteriormente, formalizado em um provador de teoremas por Gonthier (2008).

Provadores de teoremas consistem em programas de computador que verificam a validade de teoremas. Dentre estes, podemos destacar as classes dos provadores *automáticos* e dos provadores *interativos*. Os primeiros buscam provar teoremas de maneira que requeira a menor quantidade de intervenção humana, enquanto os segundos — que ganharam destaque depois das limitações dos primeiros ficarem evidentes — delegam-se a verificar rigorosamente provas desenvolvidas por humanos em sua linguagem. Formalizaremos as provas apresentadas neste trabalho no provador de teoremas interativo COQ, o mesmo *software* usado por Gonthier (2008).

O COQ trata-se de um provador de teoremas interativo baseado no *cálculo de construções*. Este sistema formal fornece uma estrutura unificada para definir funções, tipos e proposições, permitindo a construção e verificação de provas dentro do mesmo formalismo. No COQ, entretanto, este formalismo foi estendido de modo a permitir tipos indutivos, criando o dito *cálculo de construções indutivas*. Neste, pode-se definir tipos de dados estruturados e funções e provas recursivas. Essa fundação alinha-se com isomorfismo de Curry-Howard, onde programas correspondem a provas e tipos correspondem a proposições, tornando o COQ uma ferramenta

[5] Que afirma que *qualquer mapa planar tem uma quatro-coloração.*

poderosa de formalização e verificação. Para um maior aprofundamento acerca do provador de teoremas COQ, recomenda-se a leitura de Chlipala (2022), Pierce et al. (2024) e The Coq Development Team (2024).

3. Sistemas e traduções

Nesta parte do trabalho, uma vez apresentada a fundamentação, introduziremos as definições dos sistemas e traduções que serão de fato abordados. Serão elas: os sistemas intuicionista e modais — mais especificamente o **S4** —, bem como duas traduções equivalentes do primeiro sistema ao segundo.

3.1 Sistema intuicionista

Nesta seção, definiremos os sistema intuicionista $\mathfrak{B} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathfrak{B}} \rangle$, cuja linguagem consiste no conjunto de origem das traduções foco deste trabalho. Este sistema surge da rejeição da lei do *tertium non datur*, ou seja $\Gamma \vdash \alpha \vee \neg\alpha$ não vale para todos os casos.

O sistema intuicionista consiste no sistema resultante da rejeição de algumas sentenças classicamente tidas como verdadeiras, como a sentença $\alpha \vee \neg\alpha$ e a sentença $\neg\neg\alpha \to \alpha$. Esse sistema foi inicialmente formalizado por Kolmogorov (1925), Heyting e Glivenko (1928, 1929) com inspiração nos trabalhos de Brouwer (1907, 1908) acerca do intuicionismo. Nesta seção, definiremos este sistema conforme Troelstra e Schwichtenberg (2000) e traremos um breve contexto de seu uso na computação.

Definição 9 ($\mathcal{L}$)**.** *A linguagem do sistema intuicionista, denotada $\mathcal{L}$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$, onde $\mathcal{C} = \{\bot^0, \wedge^2, \vee^2, \to^2\}$.* $\square$

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\top \coloneqq \bot \to \bot$$
$$\neg\alpha \coloneqq \alpha \to \bot$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta \coloneqq (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$$

Definição 10 ($\vdash_{\mathfrak{B}}$)**.** *A axiomatização do sistema intuicionista consiste no conjunto de esquemas de axiomas $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i \mid i \in [1,8] \cup \{\bot\}\}$ e no conjunto de regras $\mathcal{R} = \{\mathbf{R_1}, \mathbf{R_2}\}$, definidos abaixo:*

$\mathbf{A_1}$ $\quad \alpha \to \beta \to \alpha$

$\mathbf{A_2}$ $\quad (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

$\mathbf{A_3}$ $\quad \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta$

$\mathbf{A_4}$ $\quad \alpha \wedge \beta \to \alpha$

$\mathbf{A_5}$ $\alpha \land \beta \to \beta$

$\mathbf{A_6}$ $\alpha \to \alpha \lor \beta$

$\mathbf{A_7}$ $\beta \to \alpha \lor \beta$

$\mathbf{A_8}$ $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \lor \beta \to \gamma)$

$\mathbf{A_\perp}$ $\perp \to \alpha$

$\mathbf{R_1}$ *Se* $\alpha \in \Gamma$, *então* $\Gamma \vdash \alpha$

$\mathbf{R_2}$ *Se* $\Gamma \vdash \alpha$ *e* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *então* $\Gamma \vdash \beta$. $\square$

De modo a facilitar a comunicação no decorrer deste trabalho, chamaremos **$\mathbf{R_1}$** de regra da separação ou *modus ponens*.

O sistema intuicionista calca-se numa visão construtivista que fundamenta aplicações importantes na computação. O isomorfismo de Curry-Howard estabelece uma associação entre provas e programas e entre proposições e tipos. Enquanto isso, a interpretação de Brouwer-Heyting-Kolmogorov — definida abaixo segundo Troelstra e Schwichtenberg (2000) — exige que provas sejam construtivas, garantindo a realidade efetiva dos elementos provados. Tais propriedades são largamente usadas, por exemplo, na prova de teoremas computacionalmente e na construção de compiladores robustos.

(a) Não existe prova de $\perp$.

(b) Uma prova de $\alpha \land \beta$ consiste num par $\langle A, B \rangle$, sendo A uma prova de α e B uma prova de β.

(c) Uma prova de $\alpha \lor \beta$ consiste ou num par $\langle 0, A \rangle$, sendo A uma prova de α, ou num par $\langle 1, B \rangle$, sendo B uma prova de β.

(d) Uma prova de $\alpha \to \beta$ consiste numa construção C que transforma uma prova A de α numa prova B de β.

3.2 Sistemas modais

Nesta seção, definiremos o sistema modal $\mathfrak{L} = \langle \mathcal{L}_\square, \vdash_\mathfrak{L} \rangle$.

Os sistemas modais consistem em extensões do sistema proposicional com a adição de modalidades que representam *necessidade* — denotada como $\square$ — e *possibilidade* — denotada como $\diamond$ — bem como esquemas e regras que dizem respeito a elas. Deste modo, estão contidas na linguagem do sistema sentenças da forma $\square\alpha$ e $\diamond\alpha$ — lidas *necessariamente* α e *possivelmente* α, respectivamente. Intuitivamente, uma necessidade deve ser verdade em todos os casos, enquanto uma possibilidade deve ser verdade em algum caso. Nesta seção, contextualizaremos esses sistemas e, em seguida, definiremo-lo formalmente na sua versão **S4**.

Os primeiros desenvolvimentos acerca das modalidades acima foram feitos pelos gregos antigos, que anteciparam muitos dos preceitos aceitos modernamente e dentre os quais destacamos novamente Aristotélēs (1938). O fundador dos estudos em sistemas modais modernos foi Lewis (1912), motivado pela sua insatisfação com o conceito vigente de implicação, uma vez que a definição clássica desse operador[1] permite que sentenças intuitivamente falsas em linguagem natural seja valoradas como verdadeiras. Este sistema foi posteriormente melhor desenvolvido por Lewis e Langford (1932), onde foram apresentados os sistemas **S1** a **S5** — sendo **S4** o abordado neste trabalho.

Definição 11 ($\mathcal{L}_\Box$)**.** *A linguagem dos sistemas modais, denotada $\mathcal{L}_\Box$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_\Box = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_\Box \rangle$, onde $\mathcal{C}_\Box = \{\bot^0, \Box^1, \wedge^2, \vee^2, \to^2\}$.*

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\begin{aligned}
\top &\coloneqq \bot \to \bot \\
\neg\alpha &\coloneqq \alpha \to \bot \\
\Diamond\alpha &\coloneqq \neg\Box\neg\alpha \\
\alpha \multimap \beta &\coloneqq \Box(\alpha \to \beta) \\
\alpha \leftrightarrow \beta &\coloneqq (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)
\end{aligned}$$

Notação. *Seja $\Gamma \in \wp(\mathcal{L}_\Box)$ um conjunto de sentenças bem-formadas. $\Box\Gamma$ denota o conjunto $\{\Box\alpha \mid \alpha \in \Gamma\} \in \wp(\mathcal{L}_\Box)$, ou seja, a prefixação da necessitação a todos os elementos do conjunto Γ.*

Definição 12 ($\vdash_{\mathbf{S4}}$)**.** *A axiomatização do sistema modal* **S4** *consiste no conjunto de esquemas de axiomas $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i \mid i \in [1, 8] \vee i = \neg\} \cup \{\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, \mathbf{B_3}\}$ e no conjunto de regras $\mathcal{R} = \{\mathbf{R_1}, \mathbf{R_2}\}$, definidos abaixo:*

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{A_1} & \alpha \to \beta \to \alpha \\
\mathbf{A_2} & (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \\
\mathbf{A_3} & \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta \\
\mathbf{A_4} & \alpha \wedge \beta \to \alpha \\
\mathbf{A_5} & \alpha \wedge \beta \to \beta
\end{array}$$

[1] Definida como $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$.

$\mathbf{A_6}$ $\alpha \to \alpha \vee \beta$

$\mathbf{A_7}$ $\beta \to \alpha \vee \beta$

$\mathbf{A_8}$ $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

$\mathbf{A_\neg}$ $\neg\neg\alpha \to \alpha$

$\mathbf{B_1}$ $\Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$

$\mathbf{B_2}$ $\Box\alpha \to \alpha$

$\mathbf{B_3}$ $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$

$\mathbf{R_1}$ *Se* $\alpha \in \Gamma$, *então* $\Gamma \vdash \alpha$

$\mathbf{R_2}$ *Se* $\Gamma \vdash \alpha$ *e* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$, *então* $\Gamma \vdash \beta$

$\mathbf{R_3}$ *Se* $\vdash \alpha$, *então* $\Gamma \vdash \Box\alpha$. □

Assim como feito para o sistema intuicionista, nomearemos as regras acima de modo a facilitar a comunicação. Deste modo, chamaremos $\mathbf{R_2}$ de regra da separação ou *modus ponens* e $\mathbf{R_3}$ de regra da necessitação. A definição das regras de dedução em relação a conjuntos de sentenças baseia-se tanto em Troelstra e Schwichtenberg (2000) como em Hakli e Negri (2012). A definição da regra da necessitação deve ser cuidadosa de modo a permitir a prova do metateorema da dedução[2], feita futuramente neste trabalho. Neste sentido, restringimos a aplicação desta regra apenas a teoremas.

3.3 Traduções

A primeira tradução do sistema intuicionista ao sistema modal foi proposta por Gödel (1933) motivado pela possibilidade de leitura da necessidade como uma modalidade de construtividade. Ou seja, por meio dessa tradução, a sentença $\Box\varphi$ poderia ser lida como φ *pode ser provada construtivamente* (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Gödel alegou — sem apresentar provas — a correção fraca dessa tradução e conjeiturou sua completude fraca, posteriormente provadas por McKinsey e Tarski (1948). As as traduções apresentadas abaixo foram retiradas de Troelstra e Schwichtenberg (2000).

Definição 13 ($\bullet^\circ$)**.** *Define-se a tradução* $\bullet^\circ \colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}_\Box$ *do sistema intuicionista ao*

[2]Para uma discussão mais aprofudada, ver Hakli e Negri (2012).

sistema modal **S4** *indutivamente da seguinte maneira:*

$$a^\circ \mapsto a$$
$$\bot^\circ \mapsto \bot$$
$$(\varphi \wedge \psi)^\circ \mapsto \varphi^\circ \wedge \psi^\circ$$
$$(\varphi \vee \psi)^\circ \mapsto \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ$$
$$(\varphi \to \psi)^\circ \mapsto \Box\varphi^\circ \to \psi^\circ \qquad \Box$$

Definição 14 ($\bullet^\Box$)**.** *Define-se a tradução* $\bullet^\Box\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}_\Box$ *do sistema intuicionista ao sistema modal* **S4** *indutivamente da seguinte maneira:*

$$a^\Box \mapsto \Box a$$
$$\bot^\Box \mapsto \bot$$
$$(\varphi \wedge \psi)^\Box \mapsto \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$$
$$(\varphi \vee \psi)^\Box \mapsto \varphi^\Box \vee \psi^\Box$$
$$(\varphi \to \psi)^\Box \mapsto \Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box) \qquad \Box$$

Ambas as traduções providas são equivalentes, conforme demonstraremos futuramente. Ademais, faz-se interessante pontuar que as traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^\Box$ correspondem, respectivamente, às traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^*$ do sistema intuicionista ao sistema linear providas por Girard (1987). A primeira tradução de Girard corresponde a uma ordem de avaliação por nome (*call-by-name*) e a segunda a uma ordem de avaliação por valor (*call-by-value*), conforme notam Maraist et al. (1999).

4. Propriedades

Uma vez definidos os conceitos precisos para o desenvolvimento deste trabalho, aqui apresentaremos diversas provas que lhes dizem respeito. Notadamente, serão provados metateoremas acerca de **S4**, serão derivadas sentenças que possuem interpretações computacionais e serão demonstradas as correções das traduções. Todas as derivações a seguir serão — a menos quando indicado — no sistema **S4**, motivo pelo qual denotaremos a relação de derivação $\vdash_{\mathbf{S4}}$ apenas como $\vdash$.

4.1 Derivações

Nesta seção apresentaremos alguns lemas e teoremas para os sistemas modais que permitirão simplificar muito as provas apresentadas no decorrer deste trabalho. Primeiramente, provaremos que, dada uma sentença qualquer, esta sempre implica a si mesma. A este lema daremos o nome de identidade[1] e, em seguida, usaremo-no para a prova da regra da dedução.

Lema 1. $\vdash \alpha \to \alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$
2	$\vdash \alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$
3	$\vdash (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_2}$
4	$\vdash (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_2}$ $\{2, 3\}$
5	$\vdash \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 4\}$.

Estando assim demonstrada a proposição. □

Tendo-se provado o lema da identidade, agora provaremos a regra da dedução para os sistemas modais com base na prova apresentada por Hakli e Negri (2012). Pequenas alterações foram feitas de modo a garantir a adequação da prova com a axiomatização provida na Definição 12.

Teorema 1 (Dedução). *Se* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, *então* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

[1] Em analogia ao combinador **I**.

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução.[2] Assim, suponhamos que o teorema da dedução valha para qualquer sucessão de dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos analisando-se os casos e valendo-se da suposição acima — doravante chamada **H** — o passo de indução, ou seja, que o teorema da dedução vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k$.

CASO 1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de alguma premissa, sabe-se que $\beta \in \Gamma \cup \{\alpha\}$. Deste modo, existem dois casos a serem analisados.

CASO 1.1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de alguma premissa do conjunto Γ, sabe-se que $\beta \in \Gamma$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{R_1}$
2	$\Gamma \vdash \beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$
3	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 2\}$.

CASO 1.2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação da premissa α, sabe-se que $\beta = \alpha$. Deste modo, basta demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$, que consiste num enfraquecimento do lema $\mathbf{L_1}$.

CASO 2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de algum axioma, sabe-se que existe algum esquema $\mathbf{A}_\beta \in \mathcal{A}$ que instancia β. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{A}_\beta$
2	$\Gamma \vdash \beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$
3	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 2\}$.

CASO 3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido gerada pela aplicação da regra da necessitação a uma linha anterior $\mathbf{H_1}$, sabe-se que $\beta = \Box\varphi$ e que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$ pela seguinte sucessão de dedução:

[2] Nota-se que, para a indução forte, não se faz preciso provar nenhuma base (Velleman, 2019).

1	$\vdash \varphi$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Gamma \vdash \Box\varphi$	$\mathbf{R_3}$ $\{1\}$
3	$\Gamma \vdash \Box\varphi \to \alpha \to \Box\varphi$	$\mathbf{A_1}$
4	$\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$	$\mathbf{R_2}$ $\{2, 3\}$.

Caso 4. Seja a sentença $\varphi_n = \beta$ gerada pela aplicação da regra do *modus ponens* a duas sentenças φ_i e φ_j com $i < j < n$. Assumiremos, sem perda de generalidade, que $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_n$. Assim, a partir de **H** temos que $\mathbf{H_1} = \Gamma \vdash \alpha \to \varphi_i$ e que $\mathbf{H_2} = \Gamma \vdash \alpha \to \varphi_i \to \varphi_n$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \alpha \to \varphi_j$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Gamma \vdash \alpha \to \varphi_j \to \beta$	$\mathbf{H_2}$
3	$\Gamma \vdash (\alpha \to \varphi_j \to \beta) \to (\alpha \to \varphi_j) \to (\alpha \to \beta)$	$\mathbf{A_2}$
4	$\Gamma \vdash (\alpha \to \varphi_j) \to (\alpha \to \beta)$	$\mathbf{R_2}$ $\{2, 3\}$
5	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 4\}$.

Uma vez provada a propriedade para todos os casos do passo de indução, provamos que o teorema da dedução vale para o sistema **S4**. □

Teorema 2 (Enfraquecimento)**.** *Se* $\Gamma \subseteq \Delta$ *e* $\Gamma \vdash \alpha$*, então* $\Delta \vdash \alpha$*.*

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Assim, suponhamos que o teorema do enfraquecimento valha para qualquer sucessão de dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos analisando-se os casos e valendo-se da suposição acima — doravante chamada **H** — o passo de indução, ou seja, que o teorema do enfraquecimento vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k$.

Caso 1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a invocação de alguma premissa α, sabe-se que $\alpha \in \Gamma$. Como $\Gamma \subseteq \Delta$, sabe-se que $\alpha \in \Delta$. Deste modo, pode-se provar $\Delta \vdash \alpha$ pela invocação da mesma premissa α.

Caso 2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a invocação de algum axioma, sabe-se que existe algum esquema $\mathbf{A}_\alpha \in \mathcal{A}$ que instancia α. Deste modo, podemos demonstrar que $\Delta \vdash \alpha$ pela invocação do mesmo axioma $\mathbf{A}_\alpha$.

CASO 3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido gerada pela aplicação da regra da necessitação a uma linha anterior, sabe-se que $\alpha = \Box\varphi$ e que $\vdash \varphi$. Como pode-se provar φ sem o uso de premissas, podemos aplicar a regra da necessitação a $\vdash \varphi$ de modo a provar $\Delta \vdash \Box\varphi$.

CASO 4. Seja a sentença $\varphi_n = \alpha$ gerada pela aplicação da regra do *modus ponens* a duas sentenças φ_i e φ_j com $i < j < n$. Assumiremos, sem perda de generalidade, que $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_n$. Assim, a partir de **H** temos que $\mathbf{H_1} = \Delta \vdash \varphi_i$ e que $\mathbf{H_2} = \Delta \vdash \varphi_i \to \varphi_n$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Delta \vdash \alpha$ pela aplicação da regra do *modus ponens* a $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_2}$.

Uma vez provada a propriedade para todos os casos do passo de indução, provamos que o teorema do enfraquecimento vale para o sistema **S4**. □

Tendo-se provado o teorema da dedução, provaremos o teorema da generalização da regra da necessitação, conforme sugerido por Troelstra e Schwichtenberg (2000). Como apresentado abaixo, este teorema afirma que, caso possamos deduzir alguma sentença α a partir de um conjunto necessariamente verdadeiro de premissas, podemos concluir a necessidade desta sentença α.

Teorema 3 (Generalização da necessitação)**.** *Se* $\Box\Gamma \vdash \alpha$*, então* $\Box\Gamma \vdash \Box\alpha$.

Demonstração. Prova por indução fraca sobre o tamanho n do conjunto Γ (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Deste modo, a prova consiste em dois casos: a base de indução e o passo de indução.

CASO 1. Seja $|\Gamma| = 0$. Sabe-se que $\Gamma = \varnothing$ e, portanto, que $\mathbf{H_1} = \vdash \alpha$. Deste modo, pode-se demonstrar que $\vdash \Box\alpha$ trivialmente pela aplicação da regra da necessitação $\mathbf{R_3}$ sobre $\mathbf{H_1}$.

CASO 2. Para o passo, suponhamos que a generalização da regra da necessitação valha para qualquer conjunto Δ de tamanho $n = k$. Demonstraremos, valendo-se da suposição acima — doravante chamada $\mathbf{H_2}$ — e pela sucessão de dedução apresentada abaixo, que a generalização da regra da necessitação vale para conjuntos Δ de tamanho $n = k + 1$.

1	$\Box\Delta \vdash \beta$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Box\Delta \vdash \beta \to \Box\alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$
3	$\Box\Delta \vdash \Box\alpha \to \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 2\}$
4	$\Box\Delta \vdash \Box(\Box\alpha \to \beta)$	$\mathbf{H_2}$ $\{3\}$

5	$\Box\Delta \vdash \Box(\Box\alpha \to \beta) \to \Box\Box\alpha \to \Box\beta$	$\mathbf{B_1}$
6	$\Box\Delta \vdash \Box\Box\alpha \to \Box\beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{4, 5\}$
7	$\Box\Delta \vdash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$	$\mathbf{B_3}$
8	$\Box\Delta \vdash (\Box\alpha \to \Box\Box\alpha) \to (\Box\Box\alpha \to \Box\beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$	$\mathbf{A_2}$
9	$\Box\Delta \vdash (\Box\Box\alpha \to \Box\beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{7, 8\}$
10	$\Box\Delta \vdash \Box\alpha \to \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{6, 9\}$
11	$\Box\Delta \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$
12	$\Box\Delta \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \to \Box\beta$	$\mathbf{T_2}$ $\{10\}$
13	$\Box\Delta \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{11, 12\}$.

Tendo-se provado a base e o passo de indução, podemos concluir que generalização da regra da necessitação vale, ou seja, que se $\Box\Gamma \vdash \alpha$, então $\Box\Gamma \vdash \Box\alpha$. $\Box$

Uma vez provada a generalização da regra da necessitação, a prova da regra da dedução estrita — conforme descrito por Marcus (1946, 1953) — torna-se trivial, como pode ser visto abaixo. Esta regra afirma que, dada uma dedução de β partindo de um conjunto de premissas necessariamente verdadeiras e uma premissa α, podemos deduzir $\Box(\alpha \to \beta)$ a partir desse conjunto de premissas necessariamente verdadeiras. Isso nos permite simplificar as provas de correção das traduções, uma vez que uma das traduções apresentadas mapeia implicações materiais do sistema intuicionista em implicações estritas.

Teorema 4 (Dedução estrita)**.** *Se* $\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$*, então* $\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$*.*

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Box\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{T_1}$ $\{1\}$
3	$\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{T_3}$ $\{2\}$

Estando assim demonstrada a proposição. $\Box$

Agora, provaremos a aplicação da regra do *modus ponens* a uma implicação estrita. Essa regra afirma que, dada uma prova de α e uma prova de $\Box(\alpha \to \beta)$ a partir de um conjunto de premissas, sabe-se que deve haver alguma prova de β a partir desse mesmo conjunto de premissas.

Teorema 5 (Separação estrita)**.** *Se* $\Gamma \vdash \alpha$ *e* $\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$*, então* $\Gamma \vdash \beta$*.*

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \alpha$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{H_2}$
3	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{B_2}$
4	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{2, 3\}$
5	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 4\}$

Estando assim demonstrada a proposição. $\square$

Teorema 6 (Importação)**.** *Se* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \gamma$ *então* $\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \gamma$*.*

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \gamma$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_1}$
3	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$	$\mathbf{A_4}$
4	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$ $\{2, 3\}$
5	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$	$\mathbf{A_5}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{2, 5\}$
7	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \gamma$	$\mathbf{T_2}$ $\{1\}$
8	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \beta \to \gamma$	$\mathbf{R_2}$ $\{4, 7\}$
9	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_2}$ $\{6, 8\}$
10	$\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \gamma$	$\mathbf{T_1}$ $\{9\}$

Estando assim demonstrada a proposição. $\square$

Os lemas 2 a 13 abaixo serão demonstrados a fim de diminuir o tamanho das provas futuras acerca do isomorfismo entre as traduções e a correção da tradução *call-by-value*.

Lema 2. $\vdash \bot \to \alpha$*.*

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\bot\} \vdash \bot$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\bot\} \vdash \bot \to (\alpha \to \bot) \to \bot$	$\mathbf{A_1}$

3	$\{\perp\} \vdash \neg\neg\alpha$	$\mathbf{R_2}$ $\{1,2\}$
4	$\{\perp\} \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_\neg}$
5	$\{\perp\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$ $\{3,4\}$
6	$\vdash \perp \to \alpha$	$\mathbf{T_1}$ $\{5\}$.

Estando assim demonstrada a proposição. □

Lema 3. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \beta \to \perp$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\beta \to \perp) \to \alpha \to (\beta \to \perp)$	$\mathbf{A_1}$
3	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \perp$	$\mathbf{R_2}$ $\{1,2\}$
4	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\alpha \to \beta \to \perp) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \perp)$	$\mathbf{A_2}$
5	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$
6	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \perp)$	$\mathbf{R_2}$ $\{3,4\}$
7	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$	$\mathbf{R_2}$ $\{5,6\}$
8	$\{\alpha \to \beta\} \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$	$\mathbf{T_1}$ $\{7\}$
9	$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	$\mathbf{T_1}$ $\{8\}$.

Estando assim demonstrada a proposição. □

Lema 4. $\Gamma \vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha \wedge \Box\beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \to \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{B_2}$
3	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{1,2\}$
4	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$	$\mathbf{A_4}$
5	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$ $\{3,4\}$
6	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{T_3}$ $\{5\}$
7	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$	$\mathbf{A_5}$
8	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{3,7\}$

9	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{T_3}$ $\{8\}$
10	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box\alpha \to \Box\beta \to \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{A_3}$
11	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box\beta \to \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{6, 10\}$
12	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{9, 11\}$
13	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{T_1}$ $\{12\}$
14	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{T_2}$ $\{13\}$

Estando assim demonstrada a proposição. $\Box$

Lema 5. $\Gamma \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \to \alpha$	$\mathbf{B_2}$
3	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$
5	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\beta \to \beta$	$\mathbf{B_2}$
6	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{4, 5\}$
7	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{A_3}$
8	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \beta \to \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{3, 7\}$
9	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{6, 8\}$
10	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_3}$ $\{9\}$
11	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_1}$ $\{10\}$
12	$\vdash \Box\alpha \to \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_1}$ $\{11\}$
13	$\vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_6}$ $\{12\}$
14	$\Gamma \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_2}$ $\{13\}$

Estando assim demonstrada a proposição. $\Box$

Lema 6. *Se* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ *e* $\Gamma \vdash \beta \to \gamma$*, então* $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$*.*

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{H_1}$

2	$\Gamma \vdash \beta \to \gamma$	$\mathbf{H_2}$
3	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$
4	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{T_2}$ $\{1\}$
5	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{3,4\}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \to \gamma$	$\mathbf{T_2}$ $\{2\}$
7	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_2}$ $\{5,6\}$
8	$\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{T_1}$ $\{8\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Lema 7. $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \alpha \to \bot$	$\mathbf{R_1}$
3	$\{\alpha, \neg\alpha\} \vdash \bot$	$\mathbf{R_2}$ $\{1,2\}$
4	$\{\alpha\} \vdash \neg\neg\alpha$	$\mathbf{T_1}$ $\{3\}$
5	$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$	$\mathbf{T_1}$ $\{4\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Lema 8 (Dilema construtivo)**.** *Se* $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$ *e* $\Gamma \vdash \beta \to \delta$*, então* $\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \to \gamma \vee \delta$*.*

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{L_0}$
3	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$ $\{1,2\}$
4	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \beta \to \delta$	$\mathbf{H_1}$
5	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\beta \to \delta) \to \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{L_0}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$ $\{4,5\}$
7	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \vee \beta$	$\mathbf{R_1}$
8	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\alpha \to \gamma \vee \delta) \to (\beta \to \gamma \vee \delta) \to \alpha \vee \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{A_8}$
9	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\beta \to \gamma \vee \delta) \to \alpha \vee \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$ $\{3,8\}$

10	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \vee \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$ $\{6, 9\}$
11	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$ $\{7, 10\}$
12	$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{T_1}$ $\{11\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Lema 9. *Se* $\Gamma \vdash \Box\alpha \vee \Box\beta$*, então* $\Gamma \vdash \Box(\alpha \vee \beta)$*.*

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \to \alpha$	$\mathbf{B_2}$
3	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha \to \alpha \vee \beta$	$\mathbf{A_6}$
5	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha \vee \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{3, 4\}$
6	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_3}$ $\{5\}$
7	$\{\Box\beta\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$
8	$\{\Box\beta\} \vdash \Box\beta \to \beta$	$\mathbf{B_2}$
9	$\{\Box\beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{7, 8\}$
10	$\{\Box\beta\} \vdash \beta \to \alpha \vee \beta$	$\mathbf{A_7}$
11	$\{\Box\beta\} \vdash \alpha \vee \beta$	$\mathbf{R_2}$ $\{9, 10\}$
12	$\{\Box\beta\} \vdash \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_3}$ $\{11\}$
13	$\vdash \Box\alpha \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_1}$ $\{6\}$
14	$\vdash \Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_1}$ $\{12\}$
15	$\vdash (\Box\alpha \to \Box(\alpha \vee \beta)) \to (\Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)) \to \Box\alpha \vee \Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{A_8}$
16	$\vdash (\Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)) \to \Box\alpha \vee \Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{R_2}$ $\{13, 15\}$
17	$\vdash \Box\alpha \vee \Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{R_2}$ $\{14, 16\}$
18	$\Gamma \vdash \Box\alpha \vee \Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_2}$ $\{17\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

4.2 Interpretações computacionais

Conforme Zach et al. (2024) aponta, pode-se derivar sentenças duais aos axiomas modais por meio da contraposição das implicações e da definição da possibilidade.

No caso do sistema abordado neste trabalho, podemos derivar as sentenças $\alpha \to \Diamond\alpha$ e $\Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$. Faz-se interessante notar que estas sentenças apresentam grande similaridade com as tranformações naturais $\eta : 1_C \to T$ e $\mu : T^2 \to T$ de uma estrutura $\langle T, \eta, \mu\rangle$, chamada *mônada*. Esta estrutura inspirou uma metalinguagem definida por Moggi (1991) para a modelagem de noções de computação — como parcialidade, não-determinismo, excessões e continuações. Posteriormente, Wadler (1993) sugeriu o uso dessas estruturas como um *framework* para simular efeitos em linguagens de programação puramente funcionais.

Teorema 7. $\vdash \alpha \to \Diamond\alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$	$\mathbf{L_7}$
2	$\vdash \Box\neg\alpha \to \neg\alpha$	$\mathbf{B_2}$
3	$\vdash (\Box\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{L_3}$
4	$\vdash \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{2, 3\}$
5	$\vdash (\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha) \to \alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{L_6}$
6	$\vdash (\neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha) \to \alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 5\}$
7	$\vdash \alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{4, 6\}$

Estando assim demonstrada a proposição. $\Box$

Teorema 8. $\vdash \Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \Box\neg\alpha \to \Box\Box\neg\alpha$	$\mathbf{B_3}$
2	$\vdash \Box\neg\alpha \to \neg\Diamond\alpha$	$\mathbf{L_7}$
3	$\vdash \Box(\Box\neg\alpha \to \neg\Diamond\alpha)$	$\mathbf{R_2}$ $\{2\}$
4	$\vdash \Box(\neg\Diamond\alpha \to \Box\neg\alpha) \to \Box\Box\neg\alpha \to \Box\neg\Diamond\alpha$	$\mathbf{B_1}$
5	$\vdash \Box\Box\neg\alpha \to \Box\neg\Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{3, 4\}$
6	$\vdash (\Box\neg\alpha \to \Box\Box\neg\alpha) \to (\Box\Box\neg\alpha \to \Box\neg\Diamond\alpha) \to \Box\neg\alpha \to \Box\neg\Diamond\alpha$	$\mathbf{L_6}$
7	$\vdash (\Box\Box\neg\alpha \to \Box\neg\Diamond\alpha) \to \Box\neg\alpha \to \Box\neg\Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 6\}$
8	$\vdash \Box\neg\alpha \to \Box\neg\Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{5, 7\}$
9	$\vdash (\Box\neg\alpha \to \Box\neg\Diamond\alpha) \to \Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{L_3}$

10	$\vdash \Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{8, 9\}$

Estando assim demonstrada a proposição. $\square$

4.3 Isomorfismo entre as traduções

Conforme afirmado anteriormente, ambas as traduções apresentadas neste trabalho equivalem — ou seja, são isomorfas — na forma $\vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$. Nesta seção, provaremos este isomorfismo que, não somente constitui puramente um resultado de interesse, como permite tornar a prova de propriedades de uma tradução triviais caso tais propriedades valham para a outra tradução.

Teorema 9. $\vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre a profundidade de $\alpha \in \mathcal{L}_\mathbf{I}$ (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Assim, suponhamos que as traduções equivalham para qualquer α de profundidade $n < k$. Demonstraremos analisando-se os casos e valendo-se da suposição acima — doravante chamada **H** — o passo de indução, ou seja, que as traduções equivalem para qualquer α de profundidade $n = k$.

Caso 1. Se a sentença α for uma proposição $a \in \mathcal{P}$, sabe-se que $\Box a^\circ = \Box a$ e que $a^\Box = \Box a$ pelas definições das traduções. Deste modo, tanto a ida quanto a volta possuem a forma $\Box a \to \Box a$ e podem ser provadas pelo lema $\mathbf{L_1}$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 2. Se a sentença α for a constante $\bot$, sabe-se que $\Box\bot^\circ = \Box\bot$ e que $\bot^\Box = \bot$ pelas definições das traduções. Deste modo, a ida $\Box\bot \to \bot$ constitui um axioma gerado pelo esquema $\mathbf{B_2}$ — sendo assim provada trivialmente — e a volta $\bot \to \Box\bot$ pode ser provada pelo lema $\mathbf{L_2}$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 3. Se a sentença α for o resultado da conjunção de duas outras sentenças φ e ψ, sabe-se que $\Box(\varphi \wedge \psi)^\circ = \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$ e que $(\varphi \wedge \psi)^\Box = \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \to \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$ e outro para a volta $\varphi^\Box \wedge \psi^\Box \to \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema da introdução da conjunção $\mathbf{A_3}$.

CASO 3.1. A partir de **H**, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \Box\varphi^\circ \to \varphi^\Box$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \Box\psi^\circ \to \psi^\Box$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra do *modus ponens*. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \to \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \to \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ$	$\mathbf{L_4}$
3	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ \to \Box\varphi^\circ$	$\mathbf{A_4}$
5	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ$	$\mathbf{R_2}$ $\{3, 4\}$
6	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \to \varphi^\Box$	$\mathbf{H_1}$
7	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\Box$	$\mathbf{R_2}$ $\{5, 6\}$
8	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ \to \Box\psi^\circ$	$\mathbf{A_5}$
9	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\psi^\circ$	$\mathbf{R_2}$ $\{3, 8\}$
10	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\psi^\circ \to \psi^\Box$	$\mathbf{H_2}$
11	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \psi^\Box$	$\mathbf{R_2}$ $\{9, 10\}$
12	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\Box \to \psi^\Box \to \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	$\mathbf{A_3}$
13	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \psi^\Box \to \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	$\mathbf{R_2}$ $\{7, 12\}$
14	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	$\mathbf{R_2}$ $\{11, 13\}$
15	$\vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \to \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	$\mathbf{T_1}$ $\{14\}$

CASO 3.2. A partir de **H**, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi^\Box \to \Box\varphi^\circ$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \psi^\Box \to \Box\psi^\circ$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra do *modus ponens*. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \to \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \to \varphi^\Box$	$\mathbf{A_4}$
3	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \to \Box\varphi^\circ$	$\mathbf{H_1}$
5	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\varphi^\circ$	$\mathbf{R_2}$ $\{3, 4\}$
6	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \to \psi^\Box$	$\mathbf{A_5}$

7	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \psi^{\square}$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 6\}$
8	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \psi^{\square} \to \square\psi^{\circ}$	$\mathbf{H_2}$
9	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \square\psi^{\circ}$	$\mathbf{R_2}$ $\{7, 8\}$
10	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \square\varphi^{\circ} \to \square\psi^{\circ} \to \square\varphi^{\circ} \wedge \square\psi^{\circ}$	$\mathbf{A_3}$
11	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \square\psi^{\circ} \to \square\varphi^{\circ} \wedge \square\psi^{\circ}$	$\mathbf{R_2}$ $\{5, 10\}$
12	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \square\varphi^{\circ} \wedge \square\psi^{\circ}$	$\mathbf{R_2}$ $\{9, 11\}$
13	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \square\varphi^{\circ} \wedge \square\psi^{\circ} \to \square(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$	$\mathbf{L_5}$
14	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \square(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$	$\mathbf{R_2}$ $\{12, 13\}$
15	$\vdash \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square} \to \square(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$	$\mathbf{T_1}$ $\{14\}$

Caso 4. Se a sentença α for o resultado da disjunção de duas outras sentenças φ e ψ, sabe-se que $\square(\varphi \vee \psi)^{\circ} = \square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ})$ e que $(\varphi \vee \psi)^{\square} = \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$ e outro para a volta $\varphi^{\square} \vee \psi^{\square} \to \square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ})$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema da introdução da conjunção $\mathbf{A_3}$.

Caso 4.1. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \square\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square}$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \square\psi^{\circ} \to \psi^{\square}$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra do *modus ponens*. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$ pela seguinte sucessão de dedução, sendo $\chi = \square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ})$:

1	$\{\square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ})\} \vdash \square\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square}$	$\mathbf{H_1}$
2	$\{\square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ})\} \vdash \square\psi^{\circ} \to \psi^{\square}$	$\mathbf{H_2}$
3	$\{\square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ})\} \vdash \square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ})$	$\mathbf{R_1}$
4	$\{\square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ})\} \vdash \square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ}) \to \square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ}$	$\mathbf{B_2}$
5	$\{\square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ})\} \vdash \square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ}$	$\mathbf{R_2}$ $\{3, 4\}$
6	$\{\square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ})\} \vdash \square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ} \to \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$	$\mathbf{L_8}$ $\{1, 2\}$
7	$\{\square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ})\} \vdash \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$	$\mathbf{R_2}$ $\{5, 6\}$
8	$\vdash \square(\square\varphi^{\circ} \vee \square\psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$	$\mathbf{T_1}$ $\{7\}$

Caso 4.2. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi^{\square} \to \square\varphi^{\circ}$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \psi^{\square} \to \square\psi^{\circ}$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra do *modus*

ponens. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^\square \vee \psi^\square \to \square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)$ pela seguinte sucessão de dedução.

1	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \varphi^\square \to \square\varphi^\circ$	$\mathbf{H_1}$
2	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \square\varphi^\circ \to \square\square\varphi^\circ$	$\mathbf{B_3}$
3	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \varphi^\square \to \square\square\varphi^\circ$	$\mathbf{L_6}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \psi^\square \to \square\psi^\circ$	$\mathbf{H_2}$
5	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \square\psi^\circ \to \square\square\psi^\circ$	$\mathbf{B_3}$
6	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \psi^\square \to \square\square\psi^\circ$	$\mathbf{L_6}$ $\{4, 5\}$
7	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \varphi^\square \vee \psi^\square$	$\mathbf{R_1}$
8	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \varphi^\square \vee \psi^\square \to \square\square\varphi^\circ \vee \square\square\psi^\circ$	$\mathbf{L_8}$ $\{5, 10\}$
9	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \square\square\varphi^\circ \vee \square\square\psi^\circ$	$\mathbf{R_2}$ $\{11, 14\}$
10	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \square\square\varphi^\circ \vee \square\square\psi^\circ \to \square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)$	$\mathbf{L_9}$
11	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)$	$\mathbf{R_2}$ $\{15, 16\}$
12	$\vdash \varphi^\square \vee \psi^\square \to \square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)$	$\mathbf{T_1}$ $\{17\}$

Caso 5. Se a sentença α for o resultado da implicação de uma sentença φ a uma sentença ψ, sabe-se que $\square(\varphi \to \psi)^\circ = \square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ)$ e que $(\varphi \to \psi)^\square = \square(\varphi^\square \to \psi^\square)$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ) \to \square(\varphi^\square \to \psi^\square)$ e outro para a volta $\square(\varphi^\square \to \psi^\square) \to \square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ)$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 5.1. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi^\square \to \square\varphi^\circ$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \square\psi^\circ \to \psi^\square$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra do *modus ponens*. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ) \to \square(\psi^\square \to \psi^\square)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ), \varphi^\square\} \vdash \varphi^\square$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ), \varphi^\square\} \vdash \varphi^\square \to \square\varphi^\circ$	$\mathbf{H_1}$
3	$\{\square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ), \square\varphi^\circ\} \vdash \square\varphi^\circ$	$\mathbf{R_1}$
4	$\{\square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ), \square\varphi^\circ\} \vdash \square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ)$	$\mathbf{R_1}$
5	$\{\square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ), \square\varphi^\circ\} \vdash \square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ) \to \square\varphi^\circ \to \psi^\circ$	$\mathbf{B_2}$
6	$\{\square(\square\varphi^\circ \to \psi^\circ), \square\varphi^\circ\} \vdash \square\varphi^\circ \to \psi^\circ$	$\mathbf{R_2}$ $\{4, 5\}$

7	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ), \Box\varphi^\circ\} \vdash \psi^\circ$	$\mathbf{R_2}$ $\{3, 6\}$
8	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\psi^\circ$	$\mathbf{T_3}$ $\{7\}$
9	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ$	$\mathbf{T_1}$ $\{8\}$
10	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ), \varphi^\Box\} \vdash \Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ$	$\mathbf{T_2}$ $\{9\}$
11	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ), \varphi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \to \Box\psi^\circ$	$\mathbf{L_6}$ $\{2, 10\}$
12	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ), \varphi^\Box\} \vdash \Box\psi^\circ \to \psi^\Box$	$\mathbf{H_2}$
13	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ), \varphi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \to \psi^\Box$	$\mathbf{L_6}$ $\{11, 12\}$
14	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ), \varphi^\Box\} \vdash \psi^\Box$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 13\}$
15	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box)$	$\mathbf{T_3}$ $\{14\}$
16	$\vdash \Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ) \to \Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box)$	$\mathbf{T_1}$ $\{15\}$

Caso 5.2. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \Box\varphi^\circ \to \varphi^\Box$ e que $\mathbf{H_2} = \psi^\Box \to \Box\psi^\circ$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra do *modus ponens*. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\psi^\Box \to \psi^\Box) \to \Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\varphi^\circ$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\varphi^\circ \to \varphi^\Box$	$\mathbf{H_1}$
3	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box)$	$\mathbf{R_1}$
4	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box) \to \varphi^\Box \to \psi^\Box$	$\mathbf{B_2}$
5	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \varphi^\Box \to \psi^\Box$	$\mathbf{R_2}$ $\{2, 3\}$
6	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\varphi^\circ \to \psi^\Box$	$\mathbf{L_6}$ $\{2, 5\}$
7	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \psi^\Box$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 6\}$
8	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \psi^\Box \to \Box\psi^\circ$	$\mathbf{H_2}$
9	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\psi^\circ$	$\mathbf{R_2}$ $\{7, 8\}$
10	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\psi^\circ \to \psi^\circ$	$\mathbf{B_2}$
11	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \psi^\circ$	$\mathbf{R_2}$ $\{9, 10\}$
12	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box)\} \vdash \Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)$	$\mathbf{T_4}$ $\{11\}$
13	$\vdash \Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box) \to \Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)$	$\mathbf{T_1}$ $\{12\}$

Tendo-se provado todos os casos do passo de indução, podemos concluir que ambas as traduções apresentadas equivalem, ou seja, que $\vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$. $\Box$

4.4 Correção

Neste sessão, apresentaremos uma prova de correção para a $\Box$-tradução. Antes disso, entretanto, apresentaremos uma prova de $\vdash \alpha^{\Box} \to \Box\alpha^{\Box}$, que usaremos como lema para a prova da correção conforme sugerido por Troelstra e Schwichtenberg (2000). Provaremos o lema por indução sobre a profundidade da sentença e a correção por indução sobre o tamanho da prova.

Lema 10. $\vdash \alpha^{\Box} \to \Box\alpha^{\Box}$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre a profundidade de $\alpha \in \mathcal{L}_{\mathbf{I}}$ (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Assim, suponhamos que a proposição valha para qualquer sentença α de profundidade $n < k$. Demonstraremos analisando-se os casos e valendo-se da suposição acima — doravante chamada **H** — o passo de indução, ou seja, que a proposição vale para qualquer α de profundidade $n = k$.

Caso 1. Se a sentença α for uma proposição $a \in \mathcal{P}$, sabe-se que $a^{\Box} = \Box a$ pela definição da tradução. Deste modo, $\Box a \to \Box\Box a$ constitui um axioma gerado pelo esquema $\mathbf{B_3}$ — sendo assim $\vdash \Box a \to \Box\Box a$ provado trivialmente.

Caso 2. Se a sentença α for a constante $\perp$, sabe-se que $\perp^{\Box} = \perp$ pela definição da tradução. Deste modo, devemos provar que $\vdash \perp \to \Box\perp$, o que consiste num caso particular da explosão provada pelo lema $\mathbf{L_2}$.

Caso 3. Se a sentença α for o resultado da conjunção de duas outras sentenças φ e ψ, sabe-se que $(\varphi \wedge \psi)^{\Box} = \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}$ pela definição da tradução. A partir de **H**, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\Box}$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \psi^{\Box} \to \Box\psi^{\Box}$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra do *modus ponens*. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \to \Box(\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}$	$\mathbf{R_1}$
2	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}$	$\mathbf{A_4}$
3	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box}$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\Box}$	$\mathbf{H_1}$
5	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \Box\varphi^{\Box}$	$\mathbf{R_2}$ $\{3, 4\}$
6	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \to \psi^{\Box}$	$\mathbf{A_5}$

7	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \psi^\square$	$\mathbf{R_2}$ $\{1,6\}$
8	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \psi^\square \to \Box\psi^\square$	$\mathbf{H_2}$
9	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \Box\psi^\square$	$\mathbf{R_2}$ $\{7,8\}$
10	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \Box\varphi^\square \to \Box\psi^\square \to \Box\varphi^\square \wedge \Box\psi^\square$	$\mathbf{A_3}$
11	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \Box\psi^\square \to \Box\varphi^\square \wedge \Box\psi^\square$	$\mathbf{R_2}$ $\{5,10\}$
12	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \Box\varphi^\square \wedge \Box\psi^\square$	$\mathbf{R_2}$ $\{9,11\}$
13	$\vdash \varphi^\square \wedge \psi^\square \to \Box\varphi^\square \wedge \Box\psi^\square$	$\mathbf{T_1}$ $\{12\}$
14	$\vdash \Box\varphi^\square \wedge \Box\psi^\square \to \Box(\varphi^\square \wedge \psi^\square)$	$\mathbf{L_4}$
15	$\vdash \varphi^\square \wedge \psi^\square \to \Box(\varphi^\square \wedge \psi^\square)$	$\mathbf{L_6}$ $\{13,14\}$

Caso 4. Se a sentença α for o resultado da disjunção de duas outras sentenças φ e ψ, sabe-se que $(\varphi \vee \psi)^\square = \varphi^\square \vee \psi^\square$ pela definição da tradução. A partir de **H**, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi^\square \to \Box\varphi^\square$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \psi^\square \to \Box\psi^\square$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra do *modus ponens*. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^\square \vee \psi^\square \to \Box(\varphi^\square \vee \psi^\square)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \varphi^\square \to \Box\varphi^\square$	$\mathbf{H_1}$
2	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \psi^\square \to \Box\psi^\square$	$\mathbf{H_2}$
3	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \varphi^\square \vee \psi^\square$	$\mathbf{R_1}$
4	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash (\varphi^\square \to \Box\varphi^\square) \to (\psi^\square \to \Box\psi^\square) \to \varphi^\square \vee \psi^\square \to \Box\varphi^\square \vee \Box\psi^\square$	$\mathbf{L_8}$
5	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash (\psi^\square \to \Box\psi^\square) \to \varphi^\square \vee \psi^\square \to \Box\varphi^\square \vee \Box\psi^\square$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,4\}$
6	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \varphi^\square \vee \psi^\square \to \Box\varphi^\square \vee \Box\psi^\square$	$\mathbf{R_2}$ $\{2,5\}$
7	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \Box\varphi^\square \vee \Box\psi^\square$	$\mathbf{R_2}$ $\{3,6\}$
8	$\{\varphi^\square \vee \psi^\square\} \vdash \Box(\varphi^\square \vee \psi^\square)$	$\mathbf{L_9}$ $\{7\}$
9	$\vdash \varphi^\square \vee \psi^\square \to \Box(\varphi^\square \vee \psi^\square)$	$\mathbf{T_1}$ $\{8\}$

Caso 5. Se a sentença α for o resultado da implicação de uma sentença φ a uma sentença ψ, sabe-se que $(\varphi \to \psi)^\square = \Box(\varphi^\square \to \psi^\square)$ pela definição da tradução. Deste modo, $\Box(\varphi^\square \to \psi^\square) \to \Box\Box(\varphi^\square \to \psi^\square)$ constitui um axioma gerado pelo esquema $\mathbf{B_3}$ — sendo assim $\vdash \Box(\varphi^\square \to \psi^\square) \to \Box\Box(\varphi^\square \to \psi^\square)$ provado trivialmente.

Tendo-se provado todos os casos do passo de indução, podemos concluir que a propriedade vale, ou seja, que $\vdash \alpha^\square \to \Box\alpha^\square$. $\square$

Uma vez provado o lema podemos, por fim, provar a correção da $\Box$-tradução.

Teorema 10. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{B}} \alpha$*, então* $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathfrak{L}} \alpha^{\Box}$*.*

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Assim, suponhamos que a tradução seja correta para qualquer sucessão dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos, analisando-se os casos, que a correção da tradução vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k$.

Caso 1. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela invocação de alguma premissa. Sabe-se que $\alpha \in \Gamma$ e, portanto, que $\alpha^{\Box} \in \Gamma^{\Box}$. Desde modo, pode-se demonstrar que $\Gamma^{\Box} \vdash \alpha^{\Box}$ trivialmente pela evocação da premissa $\alpha^{\Box}$.

Caso 2. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela invocação de algum axioma. Sabe-se que existe algum esquema $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ que gera α. Deste modo, analisaremos os casos e demonstraremos que se pode derivar $\Gamma^{\Box} \vdash \alpha^{\Box}$ para cada esquema $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$. Nos casos abaixo, usaremos ocasionalmente a implicação estrita de modo a diminuir o espaço ocupado pelas provas.

Caso 2.1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_1}$, sabemos que $\alpha = \varphi \to \psi \to \varphi$ e que $\alpha^{\Box} = \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}))$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}))$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\Box}$	$\mathbf{L_{10}}$
2	$\vdash \varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}$	$\mathbf{A_1}$
3	$\vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{R_3}$ $\{2\}$
4	$\vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}) \to \Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{B_1}$
5	$\vdash \Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{R_2}$ $\{3, 4\}$
6	$\vdash (\varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\Box}) \to (\Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})) \to \varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{L_6}$
7	$\vdash (\Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})) \to \varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{R_2}$ $\{1, 6\}$
8	$\vdash \varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box})$	$\mathbf{R_2}$ $\{5, 7\}$
9	$\Gamma^{\Box} \vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box}))$	$\mathbf{R_3}$ $\{8\}$

Caso 2.2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_2}$, sabemos que

$\alpha = (\varphi \to \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) \to \varphi \to \chi$ e que $\alpha^{\Box} = (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}) \strictif (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}) \strictif \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}) \strictif (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}) \strictif \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box}$	$\mathbf{R}_1$
2	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}$	$\mathbf{R}_1$
3	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \psi^{\Box}$	$\mathbf{T}_5$ $\{1, 2\}$
4	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{R}_1$
5	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{T}_5$ $\{1, 4\}$
6	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}, \varphi^{\Box}\} \vdash \chi^{\Box}$	$\mathbf{T}_5$ $\{3, 5\}$
7	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}, \varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{T}_4$ $\{6\}$
8	$\{\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}\} \vdash (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}) \strictif \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{T}_4$ $\{7\}$
9	$\vdash (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}) \to (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}) \strictif \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{T}_1$ $\{8\}$
10	$\Gamma^{\Box} \vdash (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}) \strictif (\varphi^{\Box} \strictif \psi^{\Box}) \strictif \varphi^{\Box} \strictif \chi^{\Box}$	$\mathbf{R}_3$ $\{9\}$

Caso 2.3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A}_3$, sabemos que $\alpha = \varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$ e que $\alpha^{\Box} = \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}))$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}))$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\Box}$	$\mathbf{L}_{10}$
2	$\vdash \varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}$	$\mathbf{A}_3$
3	$\vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})$	$\mathbf{R}_3$ $\{2\}$
4	$\vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}) \to \Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})$	$\mathbf{B}_1$
5	$\vdash \Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})$	$\mathbf{R}_2$ $\{3, 4\}$
6	$\vdash (\varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\Box}) \to (\Box\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \strictif \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}) \to \varphi^{\Box} \to \psi^{\Box} \strictif \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}$	$\mathbf{L}_6$
7	$\vdash (\Box\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})) \to \varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})$	$\mathbf{R}_2$ $\{1, 6\}$
8	$\vdash \varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box})$	$\mathbf{R}_2$ $\{5, 7\}$
9	$\Gamma^{\Box} \vdash \Box(\varphi^{\Box} \to \Box(\psi^{\Box} \to \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}))$	$\mathbf{R}_3$ $\{8\}$

Caso 2.4. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A}_4$, sabemos que

$\alpha = \varphi \land \psi \to \varphi$ e que $\alpha^\Box = \Box(\varphi^\Box \land \psi^\Box \to \varphi^\Box)$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi^\Box \land \psi^\Box \to \varphi^\Box)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi^\Box \land \psi^\Box \to \varphi^\Box$	$\mathbf{A_4}$
2	$\Gamma^\Box \vdash \Box(\varphi^\Box \land \psi^\Box \to \varphi^\Box)$	$\mathbf{R_3}$ $\{1\}$

Caso 2.5. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_5}$, sabemos que $\alpha = \varphi \land \psi \to \psi$ e que $\alpha^\Box = \Box(\varphi^\Box \land \psi^\Box \to \psi^\Box)$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi^\Box \land \psi^\Box \to \psi^\Box)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi^\Box \land \psi^\Box \to \psi^\Box$	$\mathbf{A_5}$
2	$\Gamma^\Box \vdash \Box(\varphi^\Box \land \psi^\Box \to \psi^\Box)$	$\mathbf{R_3}$ $\{1\}$

Caso 2.6. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_6}$, sabemos que $\alpha = \varphi \to \varphi \lor \psi$ e que $\alpha^\Box = \Box(\varphi^\Box \to \varphi^\Box \lor \psi^\Box)$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi^\Box \to \varphi^\Box \lor \psi^\Box)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi^\Box \to \varphi^\Box \lor \psi^\Box$	$\mathbf{A_6}$
2	$\Gamma^\Box \vdash \Box(\varphi^\Box \to \varphi^\Box \lor \psi^\Box)$	$\mathbf{R_3}$ $\{1\}$

Caso 2.7. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_7}$, sabemos que $\alpha = \psi \to \varphi \lor \psi$ e que $\alpha^\Box = \Box(\psi^\Box \to \varphi^\Box \lor \psi^\Box)$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\psi^\Box \to \varphi^\Box \lor \psi^\Box)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \psi^\Box \to \varphi^\Box \lor \psi^\Box$	$\mathbf{A_7}$
2	$\Gamma^\Box \vdash \Box(\psi^\Box \to \varphi^\Box \lor \psi^\Box)$	$\mathbf{R_3}$ $\{1\}$

Caso 2.8. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A_8}$, sabemos que $\alpha = (\varphi \to \chi) \to (\psi \to \chi) \to \varphi \lor \psi \to \chi$ e que $\alpha^\Box = (\varphi^\Box \strictif \chi^\Box) \strictif (\psi^\Box \strictif \chi^\Box) \strictif \varphi^\Box \lor \psi^\Box \strictif \chi^\Box$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{S4}} (\varphi^\Box \strictif \chi^\Box) \strictif (\psi^\Box \strictif \chi^\Box) \strictif \varphi^\Box \lor \psi^\Box \strictif \chi^\Box$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box, \varphi^\Box \lor \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \strictif \chi^\Box$	$\mathbf{R_1}$

2	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box, \varphi^\Box \vee \psi^\Box\} \vdash (\varphi^\Box \strictif \chi^\Box) \to \varphi^\Box \to \chi^\Box$	$\mathbf{B_2}$	
3	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box, \varphi^\Box \vee \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \to \chi^\Box$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box, \varphi^\Box \vee \psi^\Box\} \vdash \psi^\Box \strictif \chi^\Box$	$\mathbf{R_1}$	
5	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box, \varphi^\Box \vee \psi^\Box\} \vdash (\psi^\Box \strictif \chi^\Box) \to \psi^\Box \to \chi^\Box$	$\mathbf{B_2}$	
6	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box, \varphi^\Box \vee \psi^\Box\} \vdash \psi^\Box \to \chi^\Box$	$\mathbf{R_2}$	$\{4, 5\}$
7	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box, \varphi^\Box \vee \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \vee \psi^\Box$	$\mathbf{R_1}$	
8	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box, \varphi^\Box \vee \psi^\Box\} \vdash (\varphi^\Box \to \chi^\Box) \to (\psi^\Box \to \chi^\Box) \to \varphi^\Box \vee \psi^\Box \to \chi^\Box$	$\mathbf{A_8}$	
9	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box, \varphi^\Box \vee \psi^\Box\} \vdash (\psi^\Box \to \chi^\Box) \to \varphi^\Box \vee \psi^\Box \to \chi^\Box$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 8\}$
10	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box, \varphi^\Box \vee \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \vee \psi^\Box \to \chi^\Box$	$\mathbf{R_2}$	$\{6, 9\}$
11	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box, \varphi^\Box \vee \psi^\Box\} \vdash \chi^\Box$	$\mathbf{R_2}$	$\{7, 10\}$
12	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box, \psi^\Box \strictif \chi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \vee \psi^\Box \strictif \chi^\Box$	$\mathbf{T_4}$	$\{11\}$
13	$\{\varphi^\Box \strictif \chi^\Box\} \vdash (\psi^\Box \strictif \chi^\Box) \strictif \varphi^\Box \vee \psi^\Box \strictif \chi^\Box$	$\mathbf{T_4}$	$\{12\}$
14	$\vdash (\varphi^\Box \strictif \chi^\Box) \to (\psi^\Box \strictif \chi^\Box) \strictif \varphi^\Box \vee \psi^\Box \strictif \chi^\Box$	$\mathbf{T_1}$	$\{13\}$
15	$\Gamma^\Box \vdash (\varphi^\Box \strictif \chi^\Box) \strictif (\psi^\Box \strictif \chi^\Box) \strictif \varphi^\Box \vee \psi^\Box \strictif \chi^\Box$	$\mathbf{R_3}$	$\{14\}$

Caso 2.9. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema $\mathbf{A}_\bot$, sabemos que $\alpha = \bot \to \varphi$ e que $\alpha^\Box = \Box(\bot \to \varphi^\Box)$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\bot \to \varphi^\Box)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \bot \to \varphi^\Box$	$\mathbf{L_2}$	
2	$\Gamma^\Box \vdash \Box(\bot \to \varphi^\Box)$	$\mathbf{R_3}$	$\{1\}$

Caso 3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$ tenha sido gerada pela aplicação da regra do *modus ponens* a duas sentenças φ_i e φ_j com $i < j < n$ pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $\varphi_j = \varphi_i \to \alpha$. Assim, a partir de $\mathbf{H}$ temos que $\mathbf{H_1} = \Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{S4}} \varphi_i^\Box$ e que $\mathbf{H_2} = \Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{S4}} \Box(\varphi_i^\Box \to \alpha^\Box)$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{S4}} \alpha^\Box$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\varphi_i^\Box$	$\mathbf{H_2}$	
2	$\Box(\varphi_i^\Box \to \alpha^\Box)$	$\mathbf{H_1}$	
3	$\Box(\varphi_i^\Box \to \alpha^\Box) \to \varphi_i^\Box \to \alpha^\Box$	$\mathbf{B_2}$	
4	$\varphi_i^\Box \to \alpha^\Box$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$

5 | $\alpha^{\Box}$ | $\mathbf{R_2}$ $\{1, 4\}$

Tendo-se provado todos os casos do passo de indução, podemos concluir que a correção da $\Box$-tradução, ou seja, que se $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$, então $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{S4}} \alpha^{\Box}$. $\Box$

4.5 Completude

Esta seção dedica-se a provar que as traduções são completas, ou seja, que derivações de sentenças traduzidas no sistema de destino implicam em derivações no sistema de origem. Para tanto, deixaremos de basear-nos nas provas de Troelstra e Schwichtenberg (2000) e passaremos a basear-nos na prova de Flagg e Friedman (1986). Este abandono deve-se ao uso de propriedades de sequentes na demontração que seriam complicadas de acomodar ao sistema de dedução usado neste trabalho, enquanto escolha da prova usada deu-se por esta ser feita construtivamente. A construtividade da prova releva por esta conter uma computação — ou seja, um procedimento que descreve *como* transformar uma prova de uma sentença traduzida no sistema de destino em uma prova traduzida no sistema de origem.

A prova de Flagg e Friedman (1986) baseia-se na definição de uma contratradução da tradução por necessitação foco deste trabalho. Com isso, eles reduzem o problema de provar a completude da tradução ao problema de provar a correção da contratradução, coisa que pode ser feita por indução sobre o tamanho da prova em conjunto com uma coleção de lemas. Esta nova tradução faz grande uso de implicações duplas — ou seja, sentenças da forma $(\alpha \to \varepsilon) \to \varepsilon$ —, motivo que justifica a introdução abaixo de uma nova notação para a implicação.

Notação. *Sejam $\alpha, \varepsilon \in \mathcal{L}$ sentenças proposicionais bem-formadas. Denota-se por $\neg_{\varepsilon}\alpha$ a sentença $\alpha \to \varepsilon$, ou seja, a implicação de α em ε.*

Definição 15 ($\bullet^{\varepsilon}$)**.** *Seja $\Gamma \in \wp(\mathcal{L})$ um conjunto de sentenças proposicionais bem-formadas e seja $\varepsilon \in \Gamma$ uma dessas sentenças. Define-se a tradução $\bullet^{\varepsilon}\colon \mathcal{L}_{\Box} \times \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ do sistema intuicionista ao sistema modal* **S4** *indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned}
a^{\varepsilon} &\mapsto \neg_{\varepsilon}\neg_{\varepsilon} a \\
\bot^{\varepsilon} &\mapsto \bot \\
(\Box\varphi)^{\varepsilon} &\mapsto \neg_{\varepsilon}\neg_{\varepsilon} \textstyle\bigwedge_{\gamma} \varphi^{\gamma} \\
(\varphi \wedge \psi)^{\varepsilon} &\mapsto \varphi^{\varepsilon} \wedge \psi^{\varepsilon} \\
(\varphi \vee \psi)^{\varepsilon} &\mapsto \neg_{\varepsilon}\neg_{\varepsilon}(\varphi^{\varepsilon} \vee \psi^{\varepsilon})
\end{aligned}$$

$$(\varphi \to \psi)^\varepsilon \mapsto \varphi^\varepsilon \to \psi^\varepsilon$$ □

Teorema 11. *Se* $\Gamma \vdash \alpha$*, então* $\neg_\varepsilon \neg_\varepsilon \Gamma \vdash \neg_\varepsilon \neg_\varepsilon \alpha$*.*

Teorema 12. *Se* $\Gamma \vdash \alpha$*, então* $\Gamma^\varepsilon \vdash \alpha^\varepsilon$*.*

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Assim, suponhamos que a contratradução seja correta para qualquer sucessão de dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos, analisando-se os casos, que a correção da contratradução vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k$.

Caso 1. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela invocação de alguma premissa. Sabe-se que $\alpha \in \Gamma$ e, portanto, que $\alpha^\varepsilon \in \Gamma^\varepsilon$. Deste modo, pode-se demonstrar que $\Gamma^\varepsilon \vdash \alpha^\varepsilon$ trivialmente pela invocação da premissa α^ε.

Caso 2. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela invocação de algum axioma. Sabe-se que existe algum esquema $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ que gera α. Deste modo, analisaremos os casos e demonstraremos que se pode derivar $\Gamma^\varepsilon \vdash \alpha^\varepsilon$ para cada esquema $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$.

Caso 2.1. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pelo esquema $\mathbf{A_1}$. Sabe-se que $\alpha = \varphi \to \psi \to \varphi$ e que $\alpha^\varepsilon = \varphi^\varepsilon \to \psi^\varepsilon \to \varphi^\varepsilon$. Deste modo, pode-se provar $\Gamma^\varepsilon \vdash \alpha^\varepsilon$ trivialmente pela invocação de $\mathbf{A_1}$.

Caso 2.2. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pelo esquema $\mathbf{A_2}$. Sabe-se que $\alpha = (\varphi \to \psi \to \chi) \to (\varphi \to \psi) \to \varphi \to \chi$ e que $\alpha^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon \to \psi^\varepsilon \to \chi^\varepsilon) \to (\varphi^\varepsilon \to \psi^\varepsilon) \to \varphi^\varepsilon \to \chi^\varepsilon$. Deste modo, pode-se provar $\Gamma^\varepsilon \vdash \alpha^\varepsilon$ trivialmente pela invocação de $\mathbf{A_2}$.

Caso 2.3. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pelo esquema $\mathbf{A_3}$. Sabe-se que $\alpha = \varphi \to \psi \to \varphi \wedge \psi$ e que $\alpha^\varepsilon = \varphi^\varepsilon \to \psi^\varepsilon \to \varphi^\varepsilon \wedge \psi^\varepsilon$. Deste modo, pode-se provar $\Gamma^\varepsilon \vdash \alpha^\varepsilon$ trivialmente pela invocação de $\mathbf{A_3}$.

Caso 2.4. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pelo esquema $\mathbf{A_4}$. Sabe-se que $\alpha = \varphi \wedge \psi \to \varphi$ e que $\alpha^\varepsilon = \varphi^\varepsilon \wedge \psi^\varepsilon \to \varphi^\varepsilon$. Deste modo, pode-se provar $\Gamma^\varepsilon \vdash \alpha^\varepsilon$ trivialmente pela invocação de $\mathbf{A_4}$.

CASO 2.5. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pelo esquema **$\mathbf{A_5}$**. Sabe-se que $\alpha = \varphi \wedge \psi \rightarrow \psi$ e que $\alpha^\varepsilon = \varphi^\varepsilon \wedge \psi^\varepsilon \rightarrow \varphi^\psi$. Deste modo, pode-se provar $\Gamma^\varepsilon \vdash \alpha^\varepsilon$ trivialmente pela invocação de **$\mathbf{A_5}$**.

CASO 2.6. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pelo esquema **$\mathbf{A_6}$**. Sabe-se que $\alpha = \varphi \rightarrow \varphi \vee \psi$ e que $\alpha^\varepsilon = \varphi^\varepsilon \rightarrow \neg_\varepsilon\neg_\varepsilon(\varphi^\varepsilon \vee \psi^\varepsilon)$.

CASO 2.7. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pelo esquema **$\mathbf{A_7}$**. Sabe-se que $\alpha = \psi \rightarrow \varphi \vee \psi$ e que $\alpha^\varepsilon = \psi^\varepsilon \rightarrow \neg_\varepsilon\neg_\varepsilon(\varphi^\varepsilon \vee \psi^\varepsilon)$.

CASO 2.8. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pelo esquema **$\mathbf{A_8}$**. Sabe-se que $\alpha = (\varphi \rightarrow \chi) \rightarrow (\psi \rightarrow \chi) \rightarrow \varphi \vee \psi \rightarrow \chi$ e que $\alpha^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon \rightarrow \chi^\varepsilon) \rightarrow (\psi^\varepsilon \rightarrow \chi^\varepsilon) \rightarrow \neg_\varepsilon\neg_\varepsilon(\varphi^\varepsilon \vee \psi^\varepsilon) \rightarrow \chi^\varepsilon$.

CASO 2.9. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pelo esquema **$\mathbf{A_\neg}$**. Sabe-se que $\alpha = \neg\neg\varphi \rightarrow \varphi$ e que $\alpha^\varepsilon = \neg\neg\varphi^\varepsilon \rightarrow \varphi^\varepsilon$.

$\square$

Teorema 13. *Se* $\Gamma^\square \vdash \alpha^\square$ *então* $\Gamma \vdash \alpha$.

Teorema 14. *Se* $\square\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ *então* $\Gamma \vdash \alpha$.

5. Implementação

Definição 16 ($\mathcal{L}_{\Box^n}$). *A linguagem dos sistemas multimodais com n modalidades, denotada* $\mathcal{L}_{\Box^n}$*, pode ser induzida a partir da assinatura* $\Sigma_{\Box^n} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_{\Box^n} \rangle$*, onde* $\mathcal{C}_{\Box^n} = \{\bot^0, \wedge^2, \vee^2, \to^2\} \cup \{\Box_i^1 \mid i < n \wedge i, n \in \mathbb{N}\}$.

```
Inductive Boxed Γ i : formula → Prop :=
| Boxing : forall α, Γ α → Boxed Γ i [! [i]α !].
```

```
Definition Boxed Γ i := forall α, Γ α → exists β, α = [! [i
   ]β !].
```

Referências Bibliográficas

Kenneth Appel e Wolfgang Haken. Every map is four colourable. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1976. DOI: https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1976-14122-5.

Aristotélēs. *Organon*. Tradução de Harold Percy Cooke, Hugh Tredennick e Edward Seymour Forster. Cambridge, Harvard University Press, 1938.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer. *Over de grondslagen der wiskunde*. Maas & van Suchtelen, 1907.

Luitzen Egbertus Jan Brouwer. De onbetrouwbaarheid der logische principes. *Tijdschrift voor Wijsbegeerte*, 1908.

Jean-Yves Béziau. Universal logic. *Logica*, 1994.

Jean-Yves Béziau. From consequence operator to universal logic: a survey of general abstract logic. In *Logica Universalis*, Basileia, 2007. Birkhäuser Basel. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8354-1_1.

Adam Chlipala. *Certified programming with dependent types*. The Massachusetts Institute of Technology Press, 2022. ISBN: 9780262545747.

Marcelo Esteban Coniglio. Towards a stronger notion of translation between logics. *Manuscrito*, 2005.

Robert Flagg e Harvey Friedman. Epistemic and intuitionistic formal systems. *Annals of Pure and Applied Logic*, 1986. DOI: https://doi.org/10.1016/0168-0072(86)90043-6.

Josep Maria Font, Ramon Jansana e Don Leonard Pigozzi. A survey of abstract algebraic logic. *Studia Logica*, 2003. DOI: https://doi.org/10.1023/A:1024621922509.

Curtis Franks. Propositional Logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University, 2024. URL: https://plato.stanford.edu/entries/logic-propositional/.

Gottlob Frege. *Begriffsschrift: Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Verlag von Louis Nebert, 1879.

Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 1987. ISSN: 0304-3975. DOI: https://doi.org/10.1016/0304-3975(87)90045-4.

Valerij Ivanovič Glivenko. Sur la logique de monsieur Brouwer. *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 1928.

Valerij Ivanovič Glivenko. Sur quelques points de la logique de monsieur Brouwer. *Bulletins de l'Académie Royale de Belgique*, 1929.

Georges Gonthier. Formal proof: the four-color theorem. *Notices of the American Mathematical Society*, 2008.

Kurt Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 1933.

Raul Hakli e Sara Negri. Does the deduction theorem fail for modal logic? *Synthese*, 2012. DOI: https://doi.org/10.1007/s11229-011-9905-9.

David Hilbert. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 1926. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01206605.

David Hilbert. *Die Grundlagen der Mathematik*. Springer, 1928. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-663-16102-8.

Andrej Nikolaevič Kolmogorov. On the principle of the excluded middle. *Matematičeskij Sbornik*, 1925.

Clarence Irving Lewis. Implication and the algebra of logic. *Mind*, 1912. ISSN: 0026-4423. DOI: https://doi.org/10.1093/mind/XXI.84.522.

Clarence Irving Lewis e Cooper Harold Langford. *Symbolic logic*. Nova York, Century, 1932.

John Maraist et al. Call-by-name, call-by-value, call-by-need and the linear lambda calculus. *Theoretical Computer Science*, 1999. DOI: https://doi.org/10.1016/S0304-3975(98)00358-2.

Ruth Barcan Marcus. The deduction theorem in a functional calculus of first order based on strict implication. *The Journal of Symbolic Logic*, 1946.

Ruth Barcan Marcus. Strict implication, deducibility and the deduction theorem. *The Journal of Symbolic Logic*, 1953.

John Charles Chenoweth McKinsey e Alfred Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, 1948.

Eugenio Moggi. Notions of computation and monads. *Information and Computation*, 1991. ISSN: 0890-5401. DOI: https://doi.org/10.1016/0890-5401(91)90052-4.

Miguel Alfredo Nunes, Karina Girardi Roggia e Paulo Henrique Torrens. Soundness-preserving fusion of modal logics in Coq. In *Formal methods: foundations and applications*, 2024. ISBN: 978-3-031-78116-2. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-78116-2_8.

Frank Pfenning e Rowan Davies. A judgmental reconstruction of modal logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 2001. DOI: https://doi.org/10.1017/S0960129501003322.

Benjamin Crawford Pierce et al. *Logical foundations*. Software Foundations, 2024.

John Charles Reynolds. The discoveries of continuations. *Higher-Order and Symbolic Computation*, 1993. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01019459.

Alexandre Sehnem. Formalização da tradução das lógicas clássica e intuicionista para a lógica linear em Coq. Trabalho de conclusão de curso, Universidade do Estado de Santa Catarina, 2023.

Ariel Agne da Silveira et al. A sound deep embedding of arbitrary normal modal logics in Coq. In *Proceedings of the XXVI Brazilian Symposium on Programming Languages*. Association for Computing Machinery, 2022. ISBN: 9781450397445. DOI: https://doi.org/10.1145/3561320.3561329.

Alfred Tarski. Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques. *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, 1928.

The Coq Development Team. *The Coq proof assistant reference manual*, 2024.

Anne Sjerp Troelstra e Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000. ISBN: 9781139168717. DOI: https://doi.org/10.1017/CBO9781139168717.

Thomas Tymoczko. The four-color problem and its philosophical significance. *The Journal of Philosophy*, 1979. DOI: https://doi.org/10.2307/2025976.

Daniel Jon Velleman. *How to prove it: a structured approach*. Cambridge, Cambridge University Press, 2019. DOI: https://doi.org/10.1017/9781108539890.

Phillip Wadler. Monads for functional programming. In *Program Design Calculi*. Springer, 1993. ISBN: 978-3-662-02880-3. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-662-02880-3_8.

Alfred North Whitehead e Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Volume 1. Cambrige, Cambridge University Press, 1910.

Alfred North Whitehead e Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Volume 2. Cambrige, Cambridge University Press, 1911.

Alfred North Whitehead e Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Volume 3. Cambrige, Cambridge University Press, 1912.

Robin Wilson. *Four colors suffice: how the map problem was solved*. Princeton University Press, 2021.

Richard Zach et al. *Box and diamonds: an open introduction to modal logic*. Open Logic Project, 2024.