UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS
BACHARELADO EM CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO

ELIAN GUSTAVO CHORNY BABIRESKI

UMA FORMALIZAÇÃO ASSISTIDA POR COMPUTADOR DAS IMERSÕES MODAIS DO SISTEMA INTUICIONISTA

JOINVILLE
2025

ELIAN GUSTAVO CHORNY BABIRESKI

UMA FORMALIZAÇÃO ASSISTIDA POR COMPUTADOR DAS IMERSÕES MODAIS DO SISTEMA INTUICIONISTA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Ciências da Computação da Universidade do Estado de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências da Computação.

Orientadora: Karina Girardi Roggia
Coorientador: Paulo Henrique Torrens

JOINVILLE
2025

Elian Gustavo Chorny Babireski

Uma formalização assistida por computador das imersões modais do sistema intuicionista / Elian Gustavo Chorny Babireski. – Joinville, 2025.

62 f. : il. p&b.

Orientadora: Karina Girardi Roggia

Trabalho de conclusão de curso – Universidade do Estado de Santa Catarina, Joinville, 2025.

1. Traduções entre lógicas. 2. Sistemas modais. 3. Efeitos computacionais. 4. Compilação. 5. *Rocq*. I. Karina Girardi Roggia. II. Universidade do Estado de Santa Catarina. III. Departamento de Ciências da Computação. IV. Uma formalização assistida por computador das imersões modais do sistema intuicionista.

CDU 02:141:005.7

ELIAN GUSTAVO CHORNY BABIRESKI

UMA FORMALIZAÇÃO ASSISTIDA POR COMPUTADOR DAS IMERSÕES MODAIS DO SISTEMA INTUICIONISTA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Bacharelado em Ciências da Computação da Universidade do Estado de Santa Catarina como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Ciências da Computação.

_____ de _______________ de __________.

Banca Examinadora:

Karina Girardi Roggia — Orientadora
Universidade do Estado de Santa Catarina

Paulo Henrique Torrens — Coorientador
Universidade de Kent

Cristiano Damiani Vasconcellos
Universidade do Estado de Santa Catarina

Ariel Agne da Silveira
Universidade Federal de Ouro Preto

JOINVILLE
2025

Aos meus pais, e a todos os amigos feitos durante esta jornada.

"'Oh, you can't help that,' said the Cat: 'we're all mad here. I'm mad. You're mad.' 'How do you know I'm mad?' said Alice. 'You must be,' said the Cat, 'or you wouldn't have come here.'"

— Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

Resumo

Alguns dos sistemas modais, sobretudo o **S4**, possuem atributos interessantes para a representação de efeitos computacionais. Uma linguagem baseada neste sistema, podendo representar efeitos monadicamente, pode ser imersa em continuações e vice-versa. O estilo de passagem por continuações trata-se de uma das diversas representações usadas em compiladores, o que torna estes sistemas relevantes do ponto de vista da compilação. O sistema intuicionista, do mesmo modo, possui interesses computacionais, uma vez que a noção intuicionista de *construção* assemelha-se com a noção de *computação*. Este trabalho apresenta duas traduções do sistema intuicionista ao sistema modal **S4** em conjunto com as demonstrações das propriedades de interderivação e correção. Todas as definições e asserções são implementadas e verificadas pela provador interativo de teoremas *Rocq*.

Palavras-chave — Traduções entre lógicas. Sistemas modais. Efeitos computacionais. Compilação. *Rocq*.

Abstract

Some modal systems, especially **S4**, have interesting attributes for representing computational effects. A language based on this system, capable of representing effects monadically, can be embedded into continuations and vice-versa. Continuation-passing style is one of the various representations used in compilers, making these systems relevant from a compilation perspective. Similarly, the intuitionistic system has computational significance, as the intuitionistic notion of *proof construction* resembles the notion of *computation*. This work presents two translations from the intuitionistic system to the modal system **S4**, along with proofs of their interderivability and correctness properties. All definitions and assertions are implemented and verified in the interactive theorem prover *Rocq*.

Keywords — Translations between logics. Modal systems. Computational effects. Compilation. *Rocq*.

Sumário

1. Introdução

Os sistemas modais consistem em um conjunto de aumentos aos sistemas proposicionais um ou mais operadores, chamados *modalidades*, que qualificam sentenças. No caso do sistema **S4**, dito $\mathfrak{M}$, são adicionadas as modalidades duais de *necessidade* e *possibilidade* — denotadas $\Box$ e $\Diamond$ —, bem como regras que governam o comportamento destas modalidades. Neste sistema, valem sentenças da forma $\Box(\alpha \to \alpha) \to \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$, da forma $\alpha \to \Diamond\alpha$ e da forma $\Diamond\alpha \to \Diamond\Diamond\alpha$ (Zach et al., 2019), que se assemelham com as transformações naturais de uma *mônada*.

As *mônadas* ganharam destaque em pesquisa de liguagens de programação deste de Moggi (1991) formalizou a metalinguagem λ_c como uma maneira de modelar *efeitos computacionais*, como parcialidade, não-determinismo e continuações. Pfenning e Davies (2001) notam que as modalidades de necessidade e possibilidade podem ser vistas como valores que sobrevivem a efeitos e como computações com efeitos, nesta ordem. Ainda, eles apresentam uma função que traduzem sentenças do sistema laxo, que corresponde com λ_c, a sentenças do sistema $\mathfrak{M}$.

Computações com efeitos modeladas por *mônadas* imergem e podem ser imersas em *continuações* (Filinski, 1994).[1] Como continuações são usadas como representação dentro de compiladores, uma linguagem baseada no sistema $\mathfrak{M}$ que consiga modelar efeitos mostra-se relevante do ponto de vista da compilação. Este trabalho busca fundamentar futuras investigações nesse sentido.

Para tanto, apresentaremos duas traduções do sistema intuicionista $\mathfrak{I}$ ao sistema $\mathfrak{M}$ conforme definidas por Troelstra e Schwichtenberg (2000), bem como suas provas de interderivação e correção. O sistema de origem, o intuicionista, destaca-se por abarcar a noção de *construção*, que em muito lembra a noção de *computação*. As traduções apresentadas e as asserções demonstradas serão verificadas no provador de teoremas *Rocq*.[2] Os artefatos desta formalização ficarão dispostos para consulta no endereço <`https://github.com/babireski/embedding`>.

As implementações das demonstrações deste trabalho usarão como base a biblioteca de sistemas modais normais desenvolvida em *Rocq* por Silveira et al. (2022) e posteriormente aumentada por Nunes et al. (2025) de modo a permitir a fusão os sistemas modais. Ainda, as implementações das traduções serão afins às im-

[1] *Embedded.*
[2] Antigamente conhecido como *Coq*.

plementações das traduções feitas por Sehnem (2023), estas tendo como sistema de destino o sistema linear de Girard (1987). Tais traduções, tal-qualmente definidas por Girard (1987), assemelham-se muito com as traduções abordadas neste trabalho.

Historicamente, demonstrações feitas por um autor são validadas à mão por seus pares, em um processo que pode ser laborioso e sujeito a erros. Neste sentido, provadores de teoremas tem-se mostrado ferramentas poderosas para a verificação de asserções em sistemas formais (Chlipala, 2013). Tais *softwares* — que usufruem de uma relação profunda entre demonstrações e provas (Wadler, 2015) — analisam cada passo da demonstração e podem apontar erros que em muitos casos passariam despercebidos. Assim, este trabalho busca fornecer uma base robusta para futuros estudos sobre o tema abordado.

1.1 Metas

Este trabalho busca apresentas duas traduções do sistema $\mathfrak{I}$ ao sistema $\mathfrak{M}$ conforme definidas por Troelstra e Schwichtenberg (2000) e as suas demonstrações de interderivação e correção, bem como formalizar tais traduções e propriedades no assistente de provas interativo *Rocq*. Para tanto, usaremos a biblioteca uma biblioteca de sistemas modais normais desenvolvida por Silveira et al. (2022) e posteriormente aumentada de forma a permitir a fusão de sistemas modais por Nunes et al. (2025). Listamos as metas que seguem para este trabalho.

(a) Apresentar a definição de *sistemas de dedução* e de *traduções* entre tais sistemas.

(b) Apresentar as definições do sistema $\mathfrak{I}$ e do sistema $\mathfrak{M}$.

(c) Apresentar as duas traduções do sistema $\mathfrak{I}$ ao sistema $\mathfrak{M}$ citadas.

(d) Apresentar demonstrações de interderivação e correção para as traduções.

(e) Formalizar as definições e demonstrações no assistente de provas *Rocq*.

1.2 Estruturação

Estruturaremos este trabalho em seis partes, a começar por esta introdução. Em seguida, na Parte 2, apresentaremos os conceitos basilares ao desenvolvimento deste trabalho, nomeadamente notadamente os conceitos de *sistemas de dedução* (Seção 2.1), *traduções* (Seção 2.2) e *provadores de teoremas* (Seção 2.3). Durante a parte

Parte 3, serão apresentadas as definições dos definições dos sistemas de dedução — o sistema $\mathfrak{I}$ (Seção 3.1) e o sistema $\mathfrak{M}$ (Seção 3.2) —, bem como as traduções abordadas neste trabalho (Seção 3.4). Ainda, relacionaremos o sistema $\mathfrak{M}$ com *efeitos computacionais* (Seção 3.3). Serão apresentados na Parte 4 as derivações das propriedades, divididas em *metateoremas* (Seção 4.1), *interderivabilidade* (Seção 4.2) e *correção* (Seção 4.3). Por fim, discutiremos a implementação na Parte 5 e faremos considerações finais na Parte 6.

2. Fundamentação

Nesta parte do trabalho, serão apresentadas definições gerais que fundamentarão as definições mais estritas que serão apresentadas futuramente. Notadamente, fundamentaremos as noções de sistemas e traduções. Ademais, discorreremos acerca da noção de provadores, que serão usados para certificar as provas apresentadas posteriormente. Antes disso, entretanto, introduziremos duas notações que serão usadas copiosamente, uma para o conjunto das partes e outra para sucessões.

Notação. *Seja A um conjunto, $\mathfrak{P}(A)$ denota o conjunto $\{X \mid X \subseteq A\}$.*

Notação. *Seja $i \in \mathbb{N}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, $\langle a_i \mid i \leq n \rangle$ denota uma sucessão de n elementos de modo que o elemento a_i encontra-se na posição i.*

2.1 Sistemas

Sistemas de dedução buscam formalizar e sistematizar o processo de razoamento. Para tanto, são consideradas regras de dedução que permitem derivar verdades a partir de outras verdades conhecidas. Estudos acerca deste processo datam da antiguidade, entretanto considera-se que os estudos modernos neste campo foram, dentre outras pessoas, fundados por Frege (1967). Desde então, surgiram diversos sistemas com diferentes linguagens e regras de dedução. Esta diversidade de sistemas justifica o desenvolvimento de uma teoria unificadora.

Definição 1 (Sistema). *Um sistema de dedução consiste num par $\mathfrak{S} = \langle \mathscr{L}, \vdash \rangle$, onde $\mathscr{L}$ consiste em um conjunto e $\vdash \subseteq \mathfrak{P}(\mathscr{L}) \times \mathscr{L}$ em uma relação sobre o produto cartesiano do conjunto das partes de $\mathscr{L}$ e o conjunto $\mathscr{L}$, sem demais condições.*

Os primeiros desenvolvimentos neste sentido foram feitos por Tarski (1983), que define o conceito de dedução com base num operador de fecho $\mathbf{C} : \mathfrak{P}(\mathscr{L}) \to \mathfrak{P}(\mathscr{L})$, sendo $\mathscr{L}$ um conjunto qualquer. Usaremos entretanto uma definição baseada numa relação de dedução $\vdash \subseteq \mathfrak{P}(\mathscr{L}) \times \mathscr{L}$, que se mostra mais conveniente para as intenções deste trabalho (Coniglio, 2005). Cabe destacar que ambas as definições são equivalentes, uma vez que $\Gamma \vdash \alpha$ se e somente se $\alpha \in \mathbf{C}(\Gamma)$. Destaca-se, entretanto, que o operador de fecho requer a satisfação de postulados não requeridos aqui, motivo pelos quais sistemas que respeitam tais condições são ditos *tarskianos*.

A qualidade e quantidade dos elementos de um sistema $\mathfrak{S} = \langle \mathscr{L}, \vdash \rangle$ não são especificados, portanto sendo esta uma definição de grande generalidade. Neste sentido, com base no escopo deste trabalho, restringiremos a definição do conjunto $\mathscr{L}$ — dito *linguagem* — a linguagens proposicionais. Os elementos destas, aos quais daremos o nome de *sentenças*, notabilizam-se por serem formadas por *letras* — que consistem em proposições indivisas — e *operadores* — que podem gerar proposições maiores a partir de proposições menores. Ao par formado por letras e operadores daremos o nome *assinatura*, conforme abaixo.

Definição 2 (Assinatura). *Uma assinatura proposicional consiste num par* $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C} \rangle$*, onde* $\mathscr{P}$ *consiste num conjunto letras e* $\mathscr{C} = \bigcup \{\mathscr{C}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *num conjunto de operadores de modo que* $\circ \in \mathscr{C}_n$ *se e somente se* $\circ$ *possuir aridade* n*.*

Notação. *Seja* $\mathscr{C}$ *um conjunto de operadores,* $\circ^n$ *denota um operador* $\circ \in \mathscr{C}_n$*.*

Podemos interpretar os conjuntos $\mathscr{P}$ e $\mathscr{C}$ de uma assinatura $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C} \rangle$ como construtores de sentenças. Neste sentido, o conjunto $\mathscr{C}_0$ assemelha-se mais ao conjunto $\mathscr{P}$, uma vez que seus elementos — ditos *constantes* — não geram sentenças maiores partindo de sentenças menores. Nota-se que uma assinatura constitui um elemento suficiente para definirmos indutivamente a linguagem de um sistema, conforme definido abaixo de maneira similar a Franks (2025). Por fim, destacamos que, para todos os sistemas apresentados neste trabalho, usaremos o conjunto de letras $\mathscr{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e letras romanas em caixa-baixa para representar seus elementos.

Definição 3 (Linguagem). *Seja* $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C} \rangle$ *uma assinatura proposicional. Uma linguagem proposicional* $\mathscr{L}$ *induzida a partir de* Σ *consiste no menor conjunto de sentenças bem-formadas induzido a partir das regras que seguem.*

(a) $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{L}$,

(b) *Se* $\circ \in \mathscr{C}_n$ *e* $\{\varphi_i \mid i \leq n\} \subseteq \mathscr{L}$*, então* $\circ \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle \in \mathscr{L}$.

Neste trabalho, representaremos sentenças por letras gregas em caixa-baixa e conjuntos de sentenças por letras gregas em caixa-alta.[1] Ademais, impõe-se definir a

[1]Desconsiderando-se o Σ, usado para representar assinaturas.

noção de profundidade de uma sentença. Esta noção, em termos simples, consiste no comprimento do maior ramo da construção da dada sentença. A definição provida abaixo consiste numa generalização para quaisquer aridades da definição dada por Troelstra e Schwichtenberg (2000). Usaremos essa definição futuramente para fazer demonstrações por meio provas indutivas sobre esta propriedade.

Definição 4 (Profundidade). *Seja $\mathfrak{S} = \langle \mathscr{L}, \vdash \rangle$ um sistema com linguagem induzida a partir de uma assinatura $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C} \rangle$. Considerando-se uma proposição $a \in \mathscr{P}$, um operador $\circ \in \mathscr{C}$ e uma aridade $n > 0$, definimos a profundidade $|\alpha|$ de uma sentença $\alpha \in \mathscr{L}$ indutivamente da maneira que segue.*

$$|a| \coloneqq 0$$
$$|\circ^0| \coloneqq 0$$
$$|\circ^n \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle| \coloneqq \max \{|\varphi_i| \mid i \leq n\} + 1$$

Agora, apresentaremos definições relacionadas a relações de dedução, que gozam da mesma generalidade dada a liguagens. Neste trabalho, definiremos as relações de dedução como relações de *derivação* baseadas em um conjunto de regras que permitem derivar sentenças verdadeiras caso um conjunto de *juízos* sejam satisfeitos. Caso não haja nenhuma condições antecedentes para o uso das regras, dizemos que estas são *axiomas*. Adotaremos uma abordagem hilbertiana de dedução, que se distingue por conter um conjunto reduzido de regras com condições antecedentes que nunca descartam premissas (Troelstra e Schwichtenberg, 2000).

Definição 5 (Dedução). *Seja um sistema $\mathfrak{S} = \langle \mathscr{L}, \vdash \rangle$ com uma relação de dedução definida sobre um conjunto de regras $\mathscr{R}$ e seja um conjunto de sentenças $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathscr{L}$. A dedução $\Gamma \vdash \alpha$ vale se e somente se houver uma sucessão de sentenças $\langle \varphi_i \in \mathscr{L} \mid i \leq n \rangle$ de modo que $\varphi_n = \alpha$ e de modo que cada sentença φ_i tenha sido gerada por alguma regra $\mathbf{R} \in \mathscr{R}$ aplicada, caso preciso, a sentenças anteriores.*

2.2 Traduções

Traduções entre sistemas consistem em funções que mapeiam sentenças de um sistema a sentenças de outro, garantindo certas propriedades. As propriedades a serem garantidas variam e ainda são discutidas na literatura, podendo ser mais fortes ou mais fracas. Neste trabalho, adotaremos uma noção forte de tradução que requer tanto a correção forte quanto a completude forte, dita *conservativa* (Coniglio, 2005). Definiremos, ainda, uma notação que nos permite aplicar sucintamente a tradução a todos os elementos de um conjunto.

Definição 6 (Tradução). *Uma sentença α de um sistema $\mathfrak{A} = \langle \mathscr{A}, \vdash_{\mathfrak{A}} \rangle$ pode ser traduzida a uma sentença α^* em um sistema $\mathfrak{B} = \langle \mathscr{B}, \vdash_{\mathfrak{B}} \rangle$ caso exista uma função $\bullet^* : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ que garanta que $\Gamma \vdash_{\mathfrak{A}} \alpha$ se e somente se $\Gamma^* \vdash_{\mathfrak{B}} \alpha^*$.*

Notação. *Seja $\Gamma \in \mathfrak{P}(\mathscr{A})$ um conjunto de sentenças bem-formadas e $\bullet^* : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ uma tradução. Γ^* denota o conjunto $\{\alpha^* \mid \alpha \in \Gamma\} \in \mathfrak{P}(\mathscr{B})$, ou seja, a aplicação da tradução a todos os elementos do conjunto Γ.* □

Uma *imersão* consiste numa função injetora que mapeia uma estrutura em outra de uma maneira que a estrutura de origem seja de alguma forma preservada. Percebe-se que uma tradução, da forma como foi apresentada, pode ser vista como uma imersão caso seja injetora, com a estrutura preservada sendo a relação de dedução. Dizemos então que um sistema foi *imerso* em outro.

A primeira tradução entre dois sistemas conhecida na literatura foi definida por Kolmogorov (1967) como uma maneira de demonstrar que o uso da lei do *tertium non datur* — que valida sentenças da forma $\alpha \vee \neg\alpha$ — não leva a contradições. Esta mesma tradução foi descoberta de maneira independente por Gödel (1986a) e por Gentzen (1969). Essa definição consiste basicamente em prefixar uma dupla negação a cada elemento da construção de uma dada sentença (Coniglio, 2005), motivo que levou esta tradução a ser chamada de *tradução por negação dupla*.

2.3 Provadores

A primeira prova de destaque a ser realizada com grande uso de computadores foi a do teorema das quatro cores, feita por Appel e Haken (1976), motivado pela grande quantidade de casos a serem analisados.[2] Conforme Wilson (2021) afirma, esta prova foi, por uns, recebida com entusiasmo e por outros, devido ao uso de computadores, com cetistismo e desapontamento. Dentre aqueles que compartilharam destas visões opositoras, destaca-se Tymoczko (1979). Ainda segundo Wilson (2021), o teorema tornou-se mais aceito com o passar do tempo e foi, posteriormente, formalizado em um provador de teoremas por Gonthier (2008).

[2]Este teorema afirma que *qualquer mapa planar tem uma quatro-coloração.*

Provadores de teoremas consistem em programas de computador que verificam a validade de teoremas. Dentre estes, podemos destacar as classes dos provadores *automáticos* e dos provadores *interativos*. Os primeiros buscam provar teoremas de maneira que requeira a menor quantidade de intervenção humana, enquanto os segundos — que ganharam destaque depois das limitações dos primeiros ficarem evidentes — delegam-se a verificar rigorosamente provas desenvolvidas por humanos em sua linguagem. Formalizaremos as provas apresentadas neste trabalho no provador de teoremas interativo *Rocq*, o mesmo *software* usado por Gonthier (2008).

O *Rocq* — previamente chamado *Coq* — trata-se de um provador de teoremas interativo baseado no formalismo das *construções* de Coquand e Huet (1988), que fica no topo do cubo-λ de Barendregt (1991). O cubo-λ classifica sistemas-λ em um cubo onde cada dimensão x, y e z representa uma propriedade. O eixo x representa a propriedade tipos poderem depender em termos, o eixo y representa a propriedade de termos poderem depender em tipos e o eixo z representa a propriedade de tipos poderem depender em tipos. Deste modo, o *Rocq* goza de todas estas capacidades.

Este sistema formal fornece uma estrutura unificada para definir funções, tipos e proposições, permitindo a construção e verificação de provas dentro do mesmo formalismo. No *Rocq*, entretanto, este formalismo foi estendido de modo a permitir tipos indutivos e coindutivos, criando as ditas *construções indutivas e coindutivas*. Neste, pode-se definir tipos de dados estruturados e funções e provas recursivas. Essa fundação alinha-se com a interpretação de programas como demonstrações e de tipos como proposições, tornando o *Rocq* uma ferramenta poderosa de formalização e verificação. Para um maior aprofundamento acerca do provador de teoremas *Rocq*, remetemos o leitor a Chlipala (2013) e Pierce et al. (2025).

3. Sistemas

Nesta parte do trabalho, uma vez apresentada a fundamentação, introduziremos as definições dos sistemas de origem e de destino das traduções consideradas, nomeadamente o sistema intuicionista e um dos sistemas modais. Ainda, relacionaremos as modalidades dos sistemas modais com efeitos computacionais de modo a justificar investigações acerca destes a partir um ponto de vista da computação, especialmente aquele da compilação. Por fim, apresentaremos duas traduções que levam sentenças intuicionistas a sentenças modais.

3.1 Sistema intuicionista

Nesta seção, definiremos o sistema intuicionista $\mathfrak{I} = \langle \mathscr{L}, \vdash_{\mathfrak{I}} \rangle$, cuja linguagem consiste no conjunto de origem das traduções apresentadas deste trabalho. Este sistema surge da rejeição da lei do *tertium non datur*, ou seja $\alpha \vee \neg\alpha$ não vale para todos os casos. O intuicionismo foi primeiramente considerado e defendido por Brouwer (1908). Este defendia que uma asserção poderia ser dita verdade apenas quando esta poderia ser *construída*. Assim, uma demonstração por contradição não valeria, uma vez que durante uma demonstração deste tipo, estar-se-ia construindo a dupla negação da proposição em apreciação, mas não a proposição em si.

Brouwer opunha-se a tentativas de formalização de seu pensamento como um sistema, todavia isso não impediu que esta fosse feita. A primeira formalização encontrada na literatura foi feita por Kolmogorov (1967), entretanto outros também a fizeram posteriormente. A linguagem abaixo foi definida conforme Troelstra e Schwichtenberg (2000). Adotamos as ordens usuais de avaliação dos operadores.

Definição 7 ($\mathscr{L}$). *A linguagem do sistema intuicionista, denotada $\mathscr{L}$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C} \rangle$, onde $\mathscr{C} = \left\{\bot^0, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2\right\}$.*

Notação. *Seja uma sentença $\alpha \in \mathscr{L}$, $\neg\alpha$ denota a sua negação $\alpha \rightarrow \bot$.*

Consideremos agora a relação de dedução para o sistema $\mathfrak{I}$, definida por suas regras de dedução. Estas destacam-se pela omissão de uma regra que gera sentenças do tipo $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$. Isso acontece porque não somente esta regra permite provas não-construtivas como permite a derivação de sentenças do tipo $\alpha \vee \neg\alpha$. Os axiomas abaixo estão organizados de acordo com os seus operadores principais: na primeira linha os axiomas da implicação, na segunda linha as axiomas da conjunção, na terceira linha os axiomas da disjunção e na quarta linha o axioma da contradição. Abaixo dos axiomas, temos as demais regras, nomeadamente a *regra da assunção* e a *regra da separação*.

Definição 8 ($\vdash_{\mathfrak{I}}$). *Abaixo estão definidas as regras do sistema* $\mathfrak{I}$.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha}\ \mathbf{A_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\ \mathbf{A_2}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta}\ \mathbf{A_3} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha}\ \mathbf{A_4} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \beta}\ \mathbf{A_5}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \alpha \vee \beta}\ \mathbf{A_6} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \beta \to \alpha \vee \beta}\ \mathbf{A_7} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \vee \beta \to \gamma}\ \mathbf{A_8}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \bot \to \alpha}\ \mathbf{A_\bot}$$

$$\frac{}{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha}\ \mathbf{R_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta}\ \mathbf{R_2}$$

A noção de *construção* representada pelo sistema intuicionista assemelha-se muito com a noção de *computação*. Mais que isso: elas são noções *isomorfas*. Com isso queremos dizer que, dado um termo-λ, a asserção de que este termo pertence ao tipo α implica que este termo demonstra a proposição α. Conversamente, a demonstração de uma proposição instuicionista α implica que deve haver algum termo-λ com tipo α. Como aponta Wadler (2015), podemos dizer que *proposições são tipos*, *derivações são programas* e *normalizações de derivações são avaliações de programas*.

Regras de dedução	Regras de tipagem
$\dfrac{}{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha}$	$\dfrac{}{\Gamma \cup \{x : \alpha\} \vdash x : \alpha}$
$\dfrac{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta}$	$\dfrac{\Gamma \cup \{x : \alpha\} \vdash e : \beta}{\Gamma \vdash \lambda x.e : \alpha \to \beta}$
$\dfrac{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash \alpha}{\Gamma \vdash \beta}$	$\dfrac{\Gamma \vdash e_1 : \alpha \to \beta \qquad \Gamma \vdash e_2 : \alpha}{\Gamma \vdash e_1\ e_2 : \beta}$

Tabela 2: Comparação entre regras de dedução intuicionistas and regras de tipagem de termos-λ. Elaborado pelo autor.

Os primeiros vislumbres dessa relação foram feitos por Curry e Feys (1958), no entando ela começou a ser de fato desvendada a partir do trabalho de Howard

(1980). Como ilustração, regras de dedução do sistema intuicionista e regras de tipagem de termos-λ são postas lado a lado na Tabela 2.

3.2 Sistemas modais

Os sistemas modais surgem a partir da investigação acerca dos *modos* em que uma proposição pode ser verdadeira, ou seja, das *modalidades*. As modalidades costumeiramente definidas são as noções duais de *necessidade* e *possibilidade*. Assim, estão presentes nas linguagens destes sistemas sentenças da forma $\Box\alpha$ e da forma $\Diamond\alpha$, lidas *necessariamente* α e *possivelmente* α. Intuitivamente, uma necessidade deve ser verdade em todos os casos, enquanto uma possibilidade deve ser verdade em algum caso. Em despeito dos seus nomes e de suas interpretações informais, estas modalidades podem ser usadas para modelar diferentes noções, como *conhecimento* ou *obrigação*. Como veremos adiante, podemos relacionar a possibilidade com efeitos computationais, o que a torna interessante do ponto de vista da computação.

As primeiras investigações acerca das modalidades foram feitas na antiguidade. Entretanto, os estudos modais modernos foram fundados por Lewis (1912). Lewis motivou-se a criar um sistema onde os condicionais tivessem uma interpretação mais perto daquela das linguagens naturais. Neste sistema, não valeriam para todos os casos sentenças da forma $\alpha \to \beta \to \alpha$, por exemplo. Estes estudos culminaram no trabalho conjunto de Lewis e Langford (1932). Este trabalho definiu cinco sistemas — nomeados de **S1** a **S5** — que contavam com a dita *implicação estrita* $\alpha \multimap \beta$ definida em termos da possibilidade e que não permitia a demonstração de sentenças consideradas indesejadas.

Definição 9 ($\mathscr{L}_\Box$). *A linguagem dos sistemas modais, denotada $\mathscr{L}_\Box$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_\Box = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C}_\Box \rangle$, onde $\mathscr{C}_\Box = \left\{\bot^0, \Box^1, \wedge^2, \vee^2, \to^2\right\}$.*

Gödel (1986b) apresentou uma definição equivalente do sistema **S4**, tendo a necessidade como operador primitivo e a dedução estrita podendo ser definida em termos desta e da implicação, como $\Box(\alpha \to \beta)$. Este sistema apresentou a vantagem de separar as regras proposicionais das regras modais, propriedade que não estava presente nas definições anteriores, e tornou-se o padrão a partir de então. Nesta seção, apresentaremos este sistema, doravante chamado $\mathfrak{M} = \langle \mathscr{L}_\Box, \vdash_{\mathfrak{M}} \rangle$, cuja linguagem foi definida conforme Troelstra e Schwichtenberg (2000). Foram definidas notações costumeiras, das quais destacamos a dedução estrita. Ainda, definiu-se uma notação para conjuntos com sentenças necessariamente verdadeiras.

Notação. *Sejam duas sentenças* $\alpha, \beta \in \mathscr{L}$. *Denotamos por* $\neg\alpha$ *a negação* $\alpha \to \bot$. *Denotamos por* $\diamond\alpha$ *a possibilidade* $\neg\Box\neg\alpha$. *Denotamos por* $\alpha \dashv\!\!\!\! - \beta$ *a implicação estrita* $\Box(\alpha \to \beta)$. *E denotamos por* $\alpha \leftrightarrow \beta$ *a bi-implicação* $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.

Notação. *Seja* $\Gamma \in \mathfrak{P}(\mathscr{L}_\Box)$ *um conjunto de sentenças bem-formadas.* $\Box\Gamma$ *denota o conjunto* $\{\Box\alpha \mid \alpha \in \Gamma\} \in \mathfrak{P}(\mathscr{L}_\Box)$, *ou seja, a anteposição da necessidade a todos os elementos do conjunto* Γ.

Consideremos agora a relação de dedução para o sistema $\mathfrak{M}$, definida por suas regras de dedução. Nomeamos as regras de maneira com que as regras comuns ao sistema $\mathfrak{I}$ e ao sistema $\mathfrak{M}$ tenham nomes comuns, enquanto as regras diferentes tenham nomes diferentes, bem como as arranjamos de forma semelhante. A presença da regra $\mathbf{A}_\neg$ permite a derivação do *tertium non datur*, em oposição ao sistema intuicionista. Assim sendo, esta relação consiste no aumento das regras proposicionais clássicas com regras para a necessidade. A definição que segue baseia-se tanto em Troelstra e Schwichtenberg (2000) como em Hakli e Negri (2012).

Definição 10 ($\vdash_\mathfrak{M}$). *Abaixo estão definidas as regras do sistema* $\mathfrak{M}$.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha}\ \mathbf{A_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\ \mathbf{A_2}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta}\ \mathbf{A_3} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha}\ \mathbf{A_4} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \beta}\ \mathbf{A_5}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \alpha \vee \beta}\ \mathbf{A_6} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \beta \to \alpha \vee \beta}\ \mathbf{A_7} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \vee \beta \to \gamma}\ \mathbf{A_8}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha}\ \mathbf{A_\neg}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta}\ \mathbf{B_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Box\alpha \to \alpha}\ \mathbf{B_2} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha}\ \mathbf{B_3}$$

$$\frac{}{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha}\ \mathbf{R_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta}\ \mathbf{R_2} \qquad \frac{\vdash \alpha}{\Gamma \vdash \Box\alpha}\ \mathbf{R_3}$$

A definição da regra $\mathbf{R_3}$, dita *regra da necessitação*, foi feita de maneira cuidadosa, de modo a permitir a correta derivação do teorema da dedução. Este teorema mostra-se importante para tornar as demonstações feitas neste trabalho mais breves e claras. Para tanto, foi preciso restringir a condição antecedente da regra ao conjunto vazio. Em outras palavras, esta regra permite tornar apenas teoremas necessidades. Para uma discussão mais aprofundada acerca da validade do teorema da dedução em sistemas modais, remetemos o leitor a Hakli e Negri (2012).

3.3 Efeitos

Os *efeitos computacionais*, ou simplesmente *efeitos*, são todas as ações e interações efetuadas pelos computadores que vão além da simples computação. Assim, uma função que computa a soma entre dois valores não apresenta nenhum efeito, enquanto uma função que computa a soma entre dois valores e imprime o resultado na tela produz um efeito ao fazer a impressão. Alguns exemplos de efeitos são *parcialidade*, *continuações* e *não-determinismo*. Programas com efeitos podem mudar seus estados internos, bem como receber entradas externas. Tais capacidades tornam a avaliação do comportamento do programa menos clara.

Motivado pela busca de uma metalinguagem para modelar efeitos em linguagens de programação, Moggi (1991) introduziu a linguagem λ_c. Nesta linguagem, os termos-λ são distinguidos entre valores de tipo α e computações $\mu\ \alpha$ de tipo α de modo que estas se comportam *monadicamente*. O construtor de tipos μ representa alguma *noção de computação*, ou melhor dizendo, algum efeito. Inspirado por este trabalho, Wadler (1993) sugere e defende o uso de *mônadas* como estruturas dentro de linguagens funcionais como uma maneira de simular efeitos.

Para os fins deste trabalho, consideraremos mônadas como um construtor de tipos μ munido das operações `lift`, `unit` e `bind`.[1] A operação `lift` eleva funções a funções *efeituosas*.[2] Do mesmo modo, a operação `unit` eleva um valor a um valor com efeitos e a operação `bind` encadeia efeitos. Alternativamente, podemos usar a operação `join`, que une efeitos, em lugar da operação `bind`. A seguir temos as assinaturas de tipo das operações citadas.

```
lift : ∀α.∀β.∀μ.(α → β) → μα → μβ
unit : ∀α.∀μ.α → μα
bind : ∀α.∀β.∀μ.(α → μβ) → μα → μβ
join : ∀α.∀μ.μμα → μα
```

Conforme notado por Benton et al. (1998), a linguagem λ_c corresponde ao sistema *laxo* — doravante chamado de $\mathfrak{L}$ — por meio da interpretação prova-programa. Este

[1] Estas operações devem respeitar certas condições, que não serão abordadas.
[2] *Effectful*.

sistema, que aumenta o sistema intuicionista $\mathfrak{I}$ com uma modalidade de *laxidade*, foi inicialmente considerado por Curry (1950, 1952) e posteriormente redescoberto por Fairtlough e Mendler (1997). Esta modalidade — denotada $\circ$ — foi interpretada por estes como *verdade com restrições*, motivo que justifica seu nome. As regras que governam a modalidade laxa, conforme apresentadas abaixo, geram sentenças correspondentes aos tipos das funções `lift`, `unit` e `join`. Do mesmo modo, podemos derivar a sentença que corresponde ao tipo da função `bind`.

Definição 11 ($\mathscr{L}_\circ$). *A linguagem do sistema laxo, denotada $\mathscr{L}_\circ$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C}_\circ \rangle$, onde $\mathscr{C}_\circ = \{\bot^0, \circ^1, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2\}$.*

Definição 12 ($\vdash_{\mathfrak{L}}$). *Abaixo estão definidas as regras do sistema $\mathfrak{L}$.*

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha}\,\mathbf{A_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma}\,\mathbf{A_2}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta}\,\mathbf{A_3} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha}\,\mathbf{A_4} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta}\,\mathbf{A_5}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta}\,\mathbf{A_6} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha \vee \beta}\,\mathbf{A_7} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma}\,\mathbf{A_8}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha}\,\mathbf{A_\bot}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \circ\alpha \rightarrow \circ\beta}\,\mathbf{C_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \circ\alpha}\,\mathbf{C_2} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \circ\circ\alpha \rightarrow \circ\alpha}\,\mathbf{C_3}$$

$$\frac{}{\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha}\,\mathbf{R_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta}{\Gamma \vdash \beta}\,\mathbf{R_2}$$

Pode-se imergir sentenças do sistema $\mathfrak{L}$ em sentenças do sistema $\mathfrak{M}$ de modo que $\circ\alpha \coloneqq \Diamond\Box\alpha$, conforme definem Pfenning e Davies (2001). Como estes apontam, isso permite com que usemos o sistema $\mathfrak{M}$ para razoar sobre o sistema $\mathfrak{L}$, uma vez que as regras deste podem ser derivadas naquele. Outra imersão de interesse trata-se da tradução de Fairtlough e Mendler (1997), com sistema de origem o sistema $\mathfrak{L}$ e com sistema de destino um sistema bimodal $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M} \rangle$, que serve para reforçar ainda mais o caso da relação entre ambos os sistemas.

A imersão apresentada acima sugere que possamos interpretar algumas das sentenças do sistema $\mathfrak{M}$ como representando computações com efeitos. De fato, Pfenning e Davies (2001) alegam que $\Box\alpha$ intuitivamente representa valores de tipo α que sobrevivem a efeitos, enquanto $\Diamond\alpha$ representa computações que retornam valores de tipo α. Corrobora com esta visão o trabalho de Kobayashi (1997). Notamos que, segundo Zach et al. (2019), podem ser derivadas no sistema $\mathfrak{M}$ sentenças da forma

$\alpha \to \diamond\alpha$ e da forma $\diamond\diamond\alpha \to \diamond\alpha$. Do mesmo modo, podem ser derivadas sentenças da forma $\square(\alpha \to \beta) \to \diamond\alpha \to \diamond\beta$. Estas assemelham-se `aolift`, `unit` e `join`, o que reforça o ponto apresentado aqui.

Em computação, *continuações* são um conceito descoberto e redescoberto diversas vezes (Reynolds, 1993) que representa o restante de uma computação a partir de um determinado ponto. O *estilo de passagem por continuações* consiste num estilo de programação onde cada função, em vez de retornar um valor, recebe como argumento uma função com a sua continuação e a invoca ao fim de sua execução (Thielecke, 1999). O estilo de passagem por continuações pode ser usado como representação dentro de compiladores (Appel, 1991), uma vez que essa inversão de controle — ou seja, a passagem de continuações como argumento — revela o fluxo do programa. Uma vez que mônadas podem ser imersas em continuações e continuações podem ser imersas em mônadas (Filinski, 1994), o sistema $\mathfrak{M}$ torna-se interessante do ponto de vista de compilação, motivo que justifica investigações acerca do uso de uma linguagem baseada em $\mathfrak{M}$ como representação durante a compilação.

3.4 Traduções

Nesta seção, apresentaremos as duas traduções que serão abordadas neste trabalho. Estas traduções tem como sistema de origem o sistema $\mathfrak{I}$ e como sistema de destino o sistema $\mathfrak{M}$. A primeira tradução entre estes sistemas foi dada por Gödel (1986b), motivado pela possibilidade de leitura da necessidade como uma modalidade de *construtividade*. Ou seja, por meio desta tradução, a sentença $\square\alpha$ poderia ser lida como α *pode ser provada construtivamente* (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Esta tradução, que Gödel (1986b) alegou ser correta e completa, antepõe a necessidade a alguns — ou, numa outra formulação, a todos — dos elementos da construção de uma dada sentença. As duas traduções consideradas no conseguinte foram apresentadas conforme Troelstra e Schwichtenberg (2000), sendo a segunda delas reminiscente da tradução de Gödel (1986b).

Ambas as traduções são fortemente corretas e equivalem — ou seja, podem ser interderivadas —, conforme demonstraremos futuramente. Ademais, pontua-se que estas traduções assemelham-se muito com duas traduções do sistema intuicionista ao sistema linear providas por Girard (1987). Nelas, sentenças da forma $\alpha \to \beta$ são mapeadas para sentenças da forma $!(\alpha \multimap \beta)$ e da forma $!\alpha \multimap \beta$. De fato, Troelstra e Schwichtenberg (2000) alega ter baseado a primeira das traduções que seguem em uma das traduções de Girard (1987). De modo semelhante, Girard (1987) alega que baseou a outra de suas traduções na segunda apresentada a seguir, a tradução de Gödel (1986b). Nomeamo-las *tradução* $\circ$ e *tradução* $\bullet$.

Definição 13 (Tradução $\circ$). *Define-se a tradução* $\circ : \mathscr{L} \to \mathscr{L}_\Box$ *do sistema* $\mathfrak{I}$ *ao sistema* $\mathfrak{M}$ *indutivamente da maneira que segue. Considere* $a \in \mathscr{P}$.

$$a^\circ \coloneqq a \qquad\qquad \bot^\circ \coloneqq \bot$$

$$(\alpha \wedge \beta)^\circ \coloneqq \alpha^\circ \wedge \beta^\circ \qquad (\alpha \to \beta)^\circ \coloneqq \Box\alpha^\circ \to \beta^\circ \qquad (\alpha \vee \beta)^\circ \coloneqq \Box\alpha^\circ \vee \Box\beta^\circ$$

Definição 14 (Tradução $\bullet$). *Define-se a tradução* $\bullet : \mathscr{L} \to \mathscr{L}_\Box$ *do sistema* $\mathfrak{I}$ *ao sistema* $\mathfrak{M}$ *indutivamente da maneira que segue. Considere* $a \in \mathscr{P}$.

$$a^\bullet \coloneqq \Box a \qquad\qquad \bot^\bullet \coloneqq \bot$$

$$(\alpha \wedge \beta)^\bullet \coloneqq \alpha^\bullet \wedge \beta^\bullet \qquad (\alpha \to \beta)^\bullet \coloneqq \Box(\alpha^\bullet \to \beta^\bullet) \qquad (\alpha \vee \beta)^\bullet \coloneqq \alpha^\bullet \vee \beta^\bullet$$

As traduções do sistema intuicionista ao sistema linear de Girard (1987) possuem relação com os conceitos duais (Wadler, 2003) de *avaliação por valor* e de *avaliação por nome*, conforme notam Maraist et al. (1999). Isto sugere que pode haver uma relação semelhante para as traduções consideradas aqui, fato confirmado por Espírito Santo et al. (2019). Deste modo, a tradução $\circ$ corresponde a uma tradução de avaliação por nome e a tradução $\bullet$ a uma tradução de avaliação por valor.

4. Propriedades

Uma vez definidos os conceitos precisos para o desenvolvimento deste trabalho, aqui apresentaremos diversas provas que lhes dizem respeito. Notadamente, serão provados metateoremas acerca do sistema $\mathfrak{M}$, bem como serão demonstradas que as traduções são corretas e equivalem. Os metateoremas provados visam simplificar provas futuras. Como definido, $\Gamma \vdash_{\mathfrak{I}} \alpha$ representa uma dedução no sistema intuicionista $\mathfrak{I}$, enquanto $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha$ uma dedução no sistema modal $\mathfrak{M}$.

4.1 Metapropriedades

Metapropriedades são asserções acerca de um sistema provadas em uma metalinguagem. Nesta seção apresentaremos algumas metapropriedades para o sistema $\mathfrak{L}$ provadas na metalinguagem da teoria dos conjuntos que nos permitirão simplificar as demais demonstrações deste trabalho. Entretanto antes disso demonstraremos que dada uma sentença qualquer, esta sempre implica a si mesma. Nomearemos este lema *identidade* em analogia ao combinador **I**, cujo tipo correspondente ao lema. Em seguida, o usaremos para a demonstração do teorema da dedução.

Lema 1 (Identidade). $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha \to \alpha$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \alpha \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$	
2	$\Gamma \vdash \alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$	
3	$\Gamma \vdash (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_2}$	
4	$\vdash (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$
5	$\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 4\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Tendo-se provado o lema da identidade, agora provaremos o teorema da *dedução* com base na prova apresentada por Hakli e Negri (2012). Como dito anteriormente, houve o cuidado em definir a regra da necessitação de modo a permitir a derivação correta deste teorema. Pequenas alterações foram feitas de modo a garantir a adequação da prova de Hakli e Negri (2012) com as definições usadas neste trabalho. O teorema da dedução permite que com que provemos muitas asserções futuras de maneira mais breve e intuitiva.

Teorema 1 (Dedução). *Se* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathfrak{M}} \beta$, *então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha \rightarrow \beta$.

Demonstração. Demonstração por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Seja $n \in \mathbb{N}^{+}$ o tamanho da sucessão de dedução que deriva $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$. Suponhamos que o teorema da dedução valha para qualquer sucessão de dedução de tamanho menor que n e nomeemos esta suposição **H**. Devemos considerar quatro casos: o dos axiomas e os das demais regras de dedução.

CASO 1. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que deriva $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gerada pela invocação de alguma premissa. Assim, devem ser analisados dois casos. Caso $\beta \in \{\alpha\}$, sabe-se que $\alpha = \beta$ e portanto que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \alpha$ e $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ são iguais. Desta maneira, a asserção $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ foi demonstrada pelo lema $\mathbf{L_1}$. Caso $\beta \in \Gamma$, podemos demonstrar $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{A_1}$	
3	$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$

CASO 2. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que deriva $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gerada pela a invocação de algum axioma. Sabe-se que existe algum axioma $\mathbf{A}_{\beta} \in \mathscr{R}$ gerou β. Pode-se demonstrar $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{A}_{\beta}$	
2	$\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{A_1}$	
3	$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$

CASO 3. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que deriva $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gerada pela aplicação da regra da necessitação. Sabe-se que $\beta = \Box\gamma$, para algum γ. A partir disso, sabemos que $\vdash \gamma$, dito $\mathbf{H_1}$. Deste modo, podemos demonstrar $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ pela dedução que segue.

1	$\vdash \gamma$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \vdash \Box\gamma$	$\mathbf{R_3}$	$\{1\}$

3	$\Gamma \vdash \Box\gamma \to \alpha \to \Box\gamma$	$\mathbf{A_1}$	
4	$\Gamma \vdash \alpha \to \Box\gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$

Caso 4. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que deriva $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ gerada pela aplicação da regra da separação $\mathbf{R_2}$. Sabe-se que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$ e que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma \to \beta$, para algum γ. A partir de **H**, temos que $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$ e que $\Gamma \vdash \alpha \to \gamma \to \beta$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_1}$. Deste modo, podemos demonstrar $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela dedução que segue.

1	$\vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \vdash \alpha \to \gamma \to \beta$	$\mathbf{H_2}$	
3	$\Gamma \vdash (\alpha \to \gamma \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \to (\alpha \to \beta)$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$
4	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 4\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Uma vez demonstrado o teorema da dedução, provaremos o teorema do *enfraquecimento*. Este teorema afirma que, dada uma dedução $\Gamma \vdash \alpha$, sempre podemos deduzir esta mesma sentença α a partir de um sobreconjunto Δ de Γ. Em outras palavras, se pudermos derivar α dado um conjunto de assunções, sempre podemos fazer mais assunções sem alterar a verdade de α. Usaremos este teorema para, adiante, demonstrar o teorema da generalização da necessitação. Do mesmo modo, usaremos este teorema novamente em outras demonstrações no decorrer deste trabalho.

Teorema 2 (Enfraquecimento). *Se* $\Delta \subseteq \Gamma$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha$*, então* $\Delta \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha$*.*

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Seja $n \in \mathbb{N}^+$ o tamanho da sucessão de dedução que prova $\Delta \vdash \alpha$. Suponhamos que o enfraquecimento valha para qualquer sucessão de dedução de tamanho menor que n e nomeemos esta suposição **H**. Devemos considerar quatro casos: o dos axiomas e os das demais regras de dedução

Caso 1. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela invocação de alguma premissa $\alpha \in \Gamma$. Como $\Delta \subseteq \Gamma$, sabe-se que $\alpha \in \Delta$. Deste modo, pode-se provar $\Delta \vdash \alpha$ pela invocação desta premissa α.

CASO 2. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela invocação de algum axioma. Sabe-se que existe algum axioma $\mathbf{A}_\alpha \in \mathscr{R}$ que gera α. Deste modo, podemos demonstrar $\Delta \vdash \alpha$ pela invocação deste mesmo axioma $\mathbf{A}_\alpha$.

CASO 3. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela aplicação da regra da necessitação $\mathbf{R_3}$. Sabe-se que $\alpha = \Box\beta$ e que $\vdash \beta$. Como se pode provar β sem o uso de premissas, podemos aplicar a regra da necessitação a $\vdash \beta$ de modo a provar $\Delta \vdash \Box\beta$.

CASO 4. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela aplicação da regra da separação $\mathbf{R_2}$. Sabe-se que $\Gamma \vdash \beta$ e que $\Gamma \vdash \beta \to \alpha$, para algum β. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\Delta \vdash \beta$ e que $\Delta \vdash \beta \to \alpha$. Deste modo, podemos demonstrar $\Delta \vdash \alpha$ pela aplicação da regra da separação a $\Delta \vdash \beta$ e a $\Delta \vdash \beta \to \alpha$.

Estando assim demonstrada a proposição. □

Agora, faz-se preciso demonstrar um novo lema. Usaremos este para demonstrar o teorema da generalização da necessitação. O lema afirma que, dadas a implicação de α em β e a implicação de β em γ, podemos derivar a implicação de α em γ. A ele demos o nome *composição*, referindo-se ao combinador de composição **B**, cujo tipo correspondente ao lema. Outros usos deste lema serão feitos ao longo deste trabalho, especialmente nas provas de interderivabilidade e correção.

Lema 2 (Composição). *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha \to \beta$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \beta \to \gamma$, *então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha \to \gamma$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \vdash \beta \to \gamma$	$\mathbf{H_2}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$	
4	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{T_2}$	$\{1\}$
5	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{3,4\}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \to \gamma$	$\mathbf{T_2}$	$\{2\}$
7	$\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{5,6\}$
8	$\Gamma \vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{T_1}$	$\{7\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Tendo-se demonstrado o lema da composição, provaremos o teorema da *generalização da regra da necessitação*, conforme Troelstra e Schwichtenberg (2000). Como apresentado abaixo, este teorema afirma que, caso possamos deduzir alguma sentença α a partir de um conjunto necessariamente verdadeiro de premissas, podemos deduzir a necessidade desta sentença α. Trata-se este de uns dos resultados de maior valor para o desenvolvimento deste trabalho, sendo usado diversas vezes no decorrer deste, como durante as provas de interderivabilidade e correção.

Teorema 3 (Generalização da necessitação). *Se* $\Box\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha$, *então* $\Box\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \Box\alpha$.

Demonstração. Demonstração por indução fraca sobre o tamanho do conjunto de assunções (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Seja $n \in \mathbb{N}$ o tamanho do conjunto Γ e $\mathbf{H_1}$ a suposição $\Box\Gamma \vdash \alpha$. Deve-se analisar dois casos: um para a base de indução $n = 0$ e o outro para o passo de indução $n > 0$.

Caso 1. Seja $n = 0$ o tamanho do conjunto Γ. Sabe-se que $\Gamma = \{\}$ e, a partir de $\mathbf{H_1}$, que $\vdash \alpha$. Como se pode provar α sem o uso de premissas, podemos aplicar a regra da necessitação $\mathbf{R_3}$ a $\vdash \alpha$ de modo a provar $\vdash \Box\alpha$.

Caso 2. Seja $n > 0$ o tamanho do conjunto Γ. Suponhamos que a generalização da necessitação valha para qualquer conjunto de tamanho $n-1$ e nomeemos esta suposição $\mathbf{H_2}$. Podemos demonstrar que a generalização da regra da necessitação vale para conjuntos de tamanho n pela dedução que segue.

1	$\Box\Delta \vdash \Box\beta \to \Box\Box\beta$	$\mathbf{B_3}$	
2	$\Box\Delta \vdash \alpha$	$\mathbf{H_1}$	
3	$\Box\Delta \vdash \alpha \to \Box\beta \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$	
4	$\Box\Delta \vdash \Box\beta \to \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$
5	$\Box\Delta \vdash \Box(\Box\beta \to \alpha)$	$\mathbf{H_2}$	$\{4\}$
6	$\Box\Delta \vdash \Box(\Box\beta \to \alpha) \to \Box\Box\beta \to \Box\alpha$	$\mathbf{B_1}$	
7	$\Box\Delta \vdash \Box\Box\beta \to \Box\alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{5, 6\}$
8	$\Box\Delta \vdash \Box\beta \to \Box\alpha$	$\mathbf{L_2}$	$\{1, 7\}$
9	$\Box\Delta \cup \{\Box\beta\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$	

10	$\Box\Delta \cup \{\Box\beta\} \vdash \Box\beta \to \Box\alpha$	$\mathbf{T_2}$	$\{8\}$
11	$\Box\Delta \cup \{\Box\beta\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{9, 10\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Uma vez demonstrada a generalização da regra da necessitação, a demonstração da regra da *dedução estrita* pode ser feita rapidamente, como abaixo. Esta regra afirma que, dada uma dedução de β partindo de um conjunto de premissas necessariamente verdadeiras e uma premissa α, podemos deduzir $\Box(\alpha \to \beta)$ a partir desse conjunto de premissas necessariamente verdadeiras. Isso nos permite simplificar as demonstrações de correção das traduções, uma vez que uma das traduções apresentadas mapeia implicações materiais do sistema do origem em implicações estritas no sistema de destino.

Lema 3 (Dedução estrita). *Se* $\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\mathfrak{M}} \beta$*, então* $\Box\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \Box(\alpha \to \beta)$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Box\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{T_1}$	$\{1\}$
3	$\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{T_3}$	$\{2\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Agora, demonstraremos o lema derradeiro desta seção, que também diz respeito à *implicação estrita*. Trata-se de uma versão estrita da regra da separação. Este lema afirma que, dada uma prova de α e uma prova de $\Box(\alpha \to \beta)$ a partir de um conjunto de premissas, sabe-se que deve haver alguma prova de β a partir desse mesmo conjunto de premissas. Assim como o lema anterior, este nos permite simplificar as demonstrações que envolvam a implicação estrita.

Lema 4 (Separação estrita). *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \Box(\alpha \to \beta)$*, então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \beta$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \alpha$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{H_2}$	
2	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{B_2}$	
2	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$
3	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 4\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

4.2 Interderivação

Conforme afirmado anteriormente, ambas as traduções apresentadas gozam de propriedade da interderivação. Ou seja, pode-se derivar uma sentença traduzida por uma das traduções se e somente se pudermos derivar esta mesma sentença traduzida pela outra tradução. Esta seção busca demonstrar essa interderivabilidade de duas maneiras: tanto como uma bi-implicação dentro do sistema $\mathfrak{M}$ quanto como uma bi-implicação na metalinguagem. Para tanto, precisaremos demonstrar uma quantidade de lemas. Nomearemos o primeiro deles *explosão*, conforme abaixo.

Lema 5 (Explosão). $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \bot \to \alpha$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma\{\bot\} \vdash \bot$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\Gamma\{\bot\} \vdash \bot \to (\alpha \to \bot) \to \bot$	$\mathbf{A_1}$	
3	$\Gamma\{\bot\} \vdash (\alpha \to \bot) \to \bot$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\Gamma\{\bot\} \vdash ((\alpha \to \bot) \to \bot) \to \alpha$	$\mathbf{A_\neg}$	
5	$\Gamma\{\bot\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\Gamma \vdash \bot \to \alpha$	$\mathbf{T_1}$	$\{5\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Em seguida, demonstraremos um lema que combina duas implicações com uma conjunção dos antecedentes de modo a inferir uma conjunção dos consequentes.

Para tanto, foram usados os axiomas de introdução e eliminação da negação em conjunto com a regra da separação.

Lema 6. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha \to \gamma$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \beta \to \delta$*, então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha \wedge \beta \to \gamma \wedge \delta$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$	$\mathbf{A_4}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$	$\mathbf{A_4}$	
5	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 4\}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{H_1}$	
7	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \beta \to \delta$	$\mathbf{H_2}$	
8	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 6\}$
9	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{5, 7\}$
10	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \gamma \to \delta \to \gamma \wedge \delta$	$\mathbf{A_4}$	
11	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \delta \to \gamma \wedge \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{8, 10\}$
12	$\Gamma \cup \{\alpha \wedge \beta\} \vdash \gamma \wedge \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{9, 11\}$
13	$\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \gamma \wedge \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{12\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Agora, demonstraremos a *distribuição da necessidade sobre a conjunção.* Neste lema, o teorema da generalização da necessitação e o teorema do enfraqueciemnto desempenham funções importantes.

Lema 7. $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha \wedge \Box\beta$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\{\Box(\alpha \wedge \beta)\} \vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \to \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{B_2}$	

3	$\{\Box(\alpha \land \beta)\} \vdash \alpha \land \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\{\Box(\alpha \land \beta)\} \vdash \alpha \land \beta \to \alpha$	$\mathbf{A_4}$	
5	$\{\Box(\alpha \land \beta)\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\{\Box(\alpha \land \beta)\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{T_3}$	$\{5\}$
7	$\{\Box(\alpha \land \beta)\} \vdash \alpha \land \beta \to \beta$	$\mathbf{A_5}$	
8	$\{\Box(\alpha \land \beta)\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 7\}$
9	$\{\Box(\alpha \land \beta)\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{T_3}$	$\{8\}$
10	$\{\Box(\alpha \land \beta)\} \vdash \Box\alpha \to \Box\beta \to \Box\alpha \land \Box\beta$	$\mathbf{A_3}$	
11	$\{\Box(\alpha \land \beta)\} \vdash \Box\beta \to \Box\alpha \land \Box\beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{6, 10\}$
12	$\{\Box(\alpha \land \beta)\} \vdash \Box\alpha \land \Box\beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{9, 11\}$
13	$\vdash \Box(\alpha \land \beta) \to \Box\alpha \land \Box\beta$	$\mathbf{T_1}$	$\{12\}$
14	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \land \beta) \to \Box\alpha \land \Box\beta$	$\mathbf{T_2}$	$\{13\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

O lema da *importação*, demonstrado a seguir, corresponde ao tipo da função de *descurrificação*. Usaremos esta asseção para a demonstração do lema que o segue.

Lema 8 (Importação). *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha \to \beta \to \gamma$ *então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha \land \beta \to \gamma$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \gamma$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \cup \{\alpha \land \beta\} \vdash \alpha \land \beta$	$\mathbf{R_1}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha \land \beta\} \vdash \alpha \land \beta \to \alpha$	$\mathbf{A_4}$	
4	$\Gamma \cup \{\alpha \land \beta\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$
5	$\Gamma \cup \{\alpha \land \beta\} \vdash \alpha \land \beta \to \beta$	$\mathbf{A_5}$	
6	$\Gamma \cup \{\alpha \land \beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 5\}$
7	$\Gamma \cup \{\alpha \land \beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \gamma$	$\mathbf{T_2}$	$\{1\}$
8	$\Gamma \cup \{\alpha \land \beta\} \vdash \beta \to \gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{4, 7\}$
9	$\Gamma \cup \{\alpha \land \beta\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{6, 8\}$
10	$\Gamma \vdash \alpha \land \beta \to \gamma$	$\mathbf{T_1}$	$\{9\}$

Estando assim demonstrada a proposição. $\square$

A demonstração do lema da importação nos permite demonstrar o lema da *agregação da necessidade sobre a conjunção*, que se trata da implicação conversa ao lema da distribuição da necessidade sobre a conjunção. O uso da importação se mostra importante porque este nos permite assumir um conjunto de sentenças necessariamente verdadeiras, anuindo o uso do teorema da generalização da necessitação. Esse conjunto pode então ser transformado em uma implicação por meio do teorema da dedução e em uma conjunção por meio do lema da importação.

Lema 9. $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \to \alpha$	$\mathbf{B_2}$	
3	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$	
5	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\beta \to \beta$	$\mathbf{B_2}$	
6	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{4, 5\}$
7	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{A_3}$	
8	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \beta \to \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 7\}$
9	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{6, 8\}$
10	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_3}$	$\{9\}$
11	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_1}$	$\{10\}$
12	$\vdash \Box\alpha \to \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_1}$	$\{11\}$
13	$\vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{L_8}$	$\{12\}$
14	$\Gamma \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$	$\mathbf{T_2}$	$\{13\}$

Estando assim demonstrada a proposição. $\square$

Demonstraremos agora a versão disjuntiva do Lema 6.

Lema 10. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha \to \gamma$ *e* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \beta \to \delta$*, então* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha \vee \beta \to \gamma \vee \delta$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{R_1}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{A_6}$	
5	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \to \delta, \beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_1}$	
7	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \to \delta, \beta\} \vdash \beta \to \delta$	$\mathbf{R_1}$	
8	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \to \delta, \beta\} \vdash \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{6, 7\}$
9	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \to \delta, \beta\} \vdash \delta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{A_7}$	
10	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \to \delta, \beta\} \vdash \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{8, 9\}$
11	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \alpha \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{4\}$
12	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta, \beta \to \delta\} \vdash \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{10\}$
13	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{H_1}$	
14	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{11\}$
15	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{13, 14\}$
16	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \beta \to \delta$	$\mathbf{H_2}$	
17	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\beta \to \delta) \to \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{12\}$
18	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{16, 17\}$
19	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \vee \beta$	$\mathbf{R_1}$	
20	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\alpha \to \gamma \vee \delta) \to (\beta \to \gamma \vee \delta) \to \alpha \vee \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{A_8}$	
21	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash (\beta \to \gamma \vee \delta) \to \alpha \vee \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{15, 20\}$
22	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \vee \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{18, 21\}$
23	$\Gamma \cup \{\alpha \vee \beta\} \vdash \gamma \vee \delta$	$\mathbf{R_2}$	$\{19, 22\}$
24	$\Gamma \vdash \alpha \vee \beta \to \gamma \vee \delta$	$\mathbf{T_1}$	$\{23\}$

Estando assim demonstrada a proposição.

Por fim, consideremos o lema final desta seção. Demonstraremos o lema da *agregação da necessidade sobre a disjunção*, a versão disjuntiva do lema da agregação da necessidade sobre a conjunção apresentada anteriormente. Este lema afirma que, caso tenhamos a disjunção de duas necessidades, temos a necessidade dos disjuntos. De maneira semelhante à sua contraparte conjuntiva, este lema faz uso do teorema da dedução e da generalização da necessitação.

Lema 11. $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \Box\alpha \vee \Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)$.

Demonstração. Pode ser demonstrado pela dedução que segue.

1	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \to \alpha$	$\mathbf{B_2}$	
3	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 2\}$
4	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha \to \alpha \vee \beta$	$\mathbf{A_6}$	
5	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha \vee \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_3}$	$\{5\}$
7	$\{\Box\beta\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$	
8	$\{\Box\beta\} \vdash \Box\beta \to \beta$	$\mathbf{B_2}$	
9	$\{\Box\beta\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{7, 8\}$
10	$\{\Box\beta\} \vdash \beta \to \alpha \vee \beta$	$\mathbf{A_7}$	
11	$\{\Box\beta\} \vdash \alpha \vee \beta$	$\mathbf{R_2}$	$\{9, 10\}$
12	$\{\Box\beta\} \vdash \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_3}$	$\{11\}$
13	$\vdash \Box\alpha \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_1}$	$\{6\}$
14	$\vdash \Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_1}$	$\{12\}$
15	$\vdash (\Box\alpha \to \Box(\alpha \vee \beta)) \to (\Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)) \to \Box\alpha \vee \Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{A_8}$	
16	$\vdash (\Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)) \to \Box\alpha \vee \Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{R_2}$	$\{13, 15\}$
17	$\vdash \Box\alpha \vee \Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{R_2}$	$\{14, 16\}$
18	$\Gamma \vdash \Box\alpha \vee \Box\beta \to \Box(\alpha \vee \beta)$	$\mathbf{T_2}$	$\{17\}$

Estando assim demonstrada a proposição. □

Demonstrados os lemas anteriores, pode-se demonstrar o teorema da interderivabilidade como uma bi-implicação dentro do sistema de destino. Para tanto, induziremos sobre a profundidade da sentença intuicionista traduzida, conforme Troelstra e Schwichtenberg (2000). A bi-implicação neste teorema torna a sua demonstração uma das maiores sucessões de dedução neste trabalho, em virtude da necessidade do uso abundante dos axiomas da introdução e eliminação da conjunção.

Teorema 4. $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\bullet$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre a profundidade da sentença (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Seja $n \in \mathbb{N}^+$ a profundidade da sentença $\alpha \in \mathscr{L}$. Suponhamos que a asserção valha para qualquer sentença de profundidade menor que n e nomeemos esta suposição **H**. Devemos considerar cinco casos: a letra, a contradição, a conjunção, a disjunção e a implicação.

Caso 1. Se a sentença α for uma proposição $a \in \mathscr{P}$, sabe-se que $\Box a^\circ = \Box a$ e que $a^\bullet = \Box a$ pelas definições das traduções. Deste modo, tanto a ida quanto a volta da bi-implicação possuem a forma $\Box a \to \Box a$ e podem ser provadas pelo lema $\mathbf{L_1}$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio das regras $\mathbf{A_3}$ e $\mathbf{R_2}$.

Caso 2. Se a sentença α for a constante $\bot$, sabe-se que $\Box\bot^\circ = \Box\bot$ e que $\bot^\bullet = \bot$ pelas definições das traduções. Deste modo, a ida $\Box\bot \to \bot$ da bi-implicação constitui um axioma gerado pela regra $\mathbf{B_2}$. A volta $\bot \to \Box\bot$ da bi-implicação pode ser provada pelo lema $\mathbf{L_3}$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio das regras $\mathbf{A_3}$ e $\mathbf{R_2}$.

Caso 3. Seja a sentença α a conjunção de duas sentenças α_1 e α_2. Sabe-se que $\Box(\alpha_1 \land \alpha_2)^\circ = \Box(\alpha_1^\circ \land \alpha_2^\circ)$ e que $(\alpha_1 \land \alpha_2)^\bullet = \alpha_1^\bullet \land \alpha_2^\bullet$ pelas definições das traduções. A partir de **H**, temos que $\Gamma \vdash \Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet$ e que $\Gamma \vdash \Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_2}$. Pode-se demonstrar $\Gamma \vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\bullet$ por meio da dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Gamma \vdash \Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{H_2}$
3	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet) \to \Box\alpha_1^\circ \to \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{A_4}$
4	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet) \to \Box\alpha_2^\circ \to \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{A_4}$
5	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet) \to \alpha_1^\bullet \to \Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{A_5}$

6	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet) \rightarrow \alpha_2^\bullet \rightarrow \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{A_5}$	
7	$\Gamma \vdash \Box\alpha_1^\circ \rightarrow \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{1,3\}$
8	$\Gamma \vdash \Box\alpha_2^\circ \rightarrow \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{2,4\}$
9	$\Gamma \vdash \alpha_1^\bullet \rightarrow \Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{1,5\}$
10	$\Gamma \vdash \alpha_2^\bullet \rightarrow \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{2,6\}$
11	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \rightarrow \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{T_2}$	$\{7\}$
12	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box\alpha_2^\circ \rightarrow \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{T_2}$	$\{8\}$
13	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)$	$\mathbf{R_1}$	
14	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ) \rightarrow \Box\alpha_1^\circ \wedge \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{L_7}$	
15	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \wedge \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{13,14\}$
16	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \wedge \Box\alpha_2^\circ \rightarrow \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{L_6}$	$\{11,12\}$
17	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{15,16\}$
18	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \rightarrow \Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{T_2}$	$\{9\}$
19	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \alpha_2^\bullet \rightarrow \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{T_2}$	$\{10\}$
20	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_1}$	
21	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet \rightarrow \Box\alpha_1^\circ \wedge \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{L_6}$	$\{18,19\}$
22	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \wedge \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{20,21\}$
23	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \wedge \Box\alpha_2^\circ \rightarrow \Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)$	$\mathbf{L_9}$	
24	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)$	$\mathbf{R_2}$	$\{22,23\}$
25	$\Gamma \vdash \Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ) \rightarrow \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{T_1}$	$\{17\}$
26	$\Gamma \vdash \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet \rightarrow \Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ)$	$\mathbf{T_1}$	$\{24\}$
27	$\Gamma \vdash (\Box\alpha^\circ \rightarrow \alpha^\bullet) \rightarrow (\alpha^\bullet \rightarrow \Box\alpha^\circ) \rightarrow (\Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ) \leftrightarrow \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{A_4}$	
28	$\Gamma \vdash (\alpha^\bullet \rightarrow \Box\alpha^\circ) \rightarrow (\Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ) \leftrightarrow \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{R_2}$	$\{25,27\}$
29	$\Gamma \vdash \Box(\alpha_1^\circ \wedge \alpha_2^\circ) \leftrightarrow \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{26,28\}$

Caso 4. Seja a sentença α a disjunção de duas sentenças α_1 e α_2. Sabe-se que $\Box(\alpha_1 \vee \alpha_2)^\circ = \Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)$ e que $(\alpha_1 \vee \alpha_2)^\bullet = \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet$ pelas definições das traduções. A partir de **H**, temos que $\Gamma \vdash \Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet$ e que $\Gamma \vdash \Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_2}$. Pode-se demonstrar $\Gamma \vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\bullet$ por meio da dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet$	**H₁**	
2	$\Gamma \vdash \Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet$	**H₂**	
3	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet) \to \Box\alpha_1^\circ \to \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{A_4}$	
4	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet) \to \Box\alpha_2^\circ \to \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{A_4}$	
5	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet) \to \alpha_1^\bullet \to \Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{A_5}$	
6	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet) \to \alpha_2^\bullet \to \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{A_5}$	
7	$\Gamma \vdash \Box\alpha_1^\circ \to \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 3\}$
8	$\Gamma \vdash \Box\alpha_2^\circ \to \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 4\}$
9	$\Gamma \vdash \alpha_1^\bullet \to \Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 5\}$
10	$\Gamma \vdash \alpha_2^\bullet \to \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 6\}$
11	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \to \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{T_2}$	$\{7\}$
12	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box\alpha_2^\circ \to \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{T_2}$	$\{8\}$
13	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)$	$\mathbf{R_1}$	
14	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ) \to \Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{B_2}$	
15	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{13, 14\}$
16	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ \to \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{L_{10}}$	$\{11, 12\}$
17	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{15, 16\}$
19	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \to \Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{T_2}$	$\{9\}$
20	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \alpha_2^\bullet \to \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{T_2}$	$\{10\}$
21	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \to \Box\Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{B_3}$	
22	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \Box\alpha_2^\circ \to \Box\Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{B_3}$	
23	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \to \Box\Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{L_2}$	$\{18, 20\}$
24	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \alpha_2^\bullet \to \Box\Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{L_2}$	$\{19, 21\}$
25	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_1}$	
26	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \to \Box\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{L_{10}}$	$\{22, 23\}$
27	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \Box\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{24, 25\}$
28	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \Box\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\Box\alpha_2^\circ \to \Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)$	$\mathbf{L_{11}}$	
29	$\Gamma \cup \left\{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\} \vdash \Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)$	$\mathbf{R_2}$	$\{26, 27\}$
30	$\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ) \to \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{T_1}$	$\{17\}$

31	$\Gamma \vdash \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \to \Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ)$	$\mathbf{T_1}$	$\{28\}$
32	$\Gamma \vdash (\Box\alpha^\circ \to \alpha^\bullet) \to (\alpha^\bullet \to \Box\alpha^\circ) \to (\Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ) \leftrightarrow \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{A_4}$	
33	$\Gamma \vdash (\alpha^\bullet \to \Box\alpha^\circ) \to (\Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ) \leftrightarrow \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{R_2}$	$\{29, 31\}$
34	$\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha_1^\circ \vee \Box\alpha_2^\circ) \leftrightarrow \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{30, 32\}$

Caso 5. Seja a sentença α a implicação de duas sentenças α_1 e α_2. Sabe-se que $\Box(\alpha_1 \to \alpha_2)^\circ = \Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ)$ e que $(\alpha_1 \to \alpha_2)^\bullet = \Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet)$ pelas definições das traduções. A partir de **H**, temos que $\Gamma \vdash \Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet$ e que $\Gamma \vdash \Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_2}$. Pode-se demonstrar $\Gamma \vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\bullet$ por meio da dedução que segue.

1	$\Gamma \vdash \Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \vdash \Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{H_2}$	
3	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet) \to \Box\alpha_1^\circ \to \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{A_4}$	
4	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet) \to \Box\alpha_2^\circ \to \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{A_4}$	
5	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_1^\circ \leftrightarrow \alpha_1^\bullet) \to \alpha_1^\bullet \to \Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{A_5}$	
6	$\Gamma \vdash (\Box\alpha_2^\circ \leftrightarrow \alpha_2^\bullet) \to \alpha_2^\bullet \to \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{A_5}$	
7	$\Gamma \vdash \Box\alpha_1^\circ \to \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 3\}$
8	$\Gamma \vdash \Box\alpha_2^\circ \to \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 4\}$
9	$\Gamma \vdash \alpha_1^\bullet \to \Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 5\}$
10	$\Gamma \vdash \alpha_2^\bullet \to \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 6\}$
11	$\Gamma \cup \{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \Box\alpha_1^\circ\} \vdash \Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{R_1}$	
12	$\Gamma \cup \{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \Box\alpha_1^\circ\} \vdash \Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ)$	$\mathbf{R_1}$	
13	$\Gamma \cup \{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \Box\alpha_1^\circ\} \vdash \Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ) \to \Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ$	$\mathbf{B_2}$	
14	$\Gamma \cup \{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \Box\alpha_1^\circ\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{12, 13\}$
15	$\Gamma \cup \{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \Box\alpha_1^\circ\} \vdash \alpha_2^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{11, 14\}$
16	$\Gamma \cup \{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \Box\alpha_1^\circ\} \vdash \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{T_3}$	$\{15\}$
17	$\Gamma \cup \{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ)\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \to \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{T_1}$	$\{16\}$
18	$\Gamma \cup \{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \alpha_1^\bullet\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \to \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{T_2}$	$\{17\}$
19	$\Gamma \cup \{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \alpha_1^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{R_1}$	
20	$\Gamma \cup \{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \alpha_1^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet \to \Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{T_2}$	$\{9\}$

21	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \alpha_1^\bullet\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \to \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{L_2}$	$\{18, 20\}$
22	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \alpha_1^\bullet\right\} \vdash \Box\alpha_2^\circ \to \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{T_2}$	$\{8\}$
23	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \alpha_1^\bullet\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{L_2}$	$\{21, 22\}$
24	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ), \alpha_1^\bullet\right\} \vdash \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{19, 23\}$
25	$\Gamma \cup \left\{\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ)\right\} \vdash \Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{T_3}$	$\{24\}$
26	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet), \Box\alpha_1^\circ\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ$	$\mathbf{R_1}$	
27	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet), \Box\alpha_1^\circ\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \to \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{T_2}$	$\{7\}$
28	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet), \Box\alpha_1^\circ\right\} \vdash \Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{R_1}$	
29	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet), \Box\alpha_1^\circ\right\} \vdash \Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet) \to \alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{B_2}$	
30	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet), \Box\alpha_1^\circ\right\} \vdash \alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{28, 29\}$
31	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet), \Box\alpha_1^\circ\right\} \vdash \Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{L_2}$	$\{27, 30\}$
32	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet), \Box\alpha_1^\circ\right\} \vdash \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{26, 31\}$
33	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet), \Box\alpha_1^\circ\right\} \vdash \alpha_2^\bullet \to \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{T_2}$	$\{10\}$
34	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet), \Box\alpha_1^\circ\right\} \vdash \Box\alpha_2^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{32, 33\}$
35	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet), \Box\alpha_1^\circ\right\} \vdash \Box\alpha_2^\circ \to \alpha_2^\circ$	$\mathbf{B_2}$	
36	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet), \Box\alpha_1^\circ\right\} \vdash \alpha_2^\circ$	$\mathbf{R_2}$	$\{34, 35\}$
37	$\Gamma \cup \left\{\Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet)\right\} \vdash \Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ)$	$\mathbf{L_3}$	$\{36\}$
38	$\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ) \to \Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{T_1}$	$\{25\}$
39	$\Gamma \vdash \Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet) \to \Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ)$	$\mathbf{T_1}$	$\{37\}$
40	$\Gamma \vdash (\Box\alpha^\circ \to \alpha^\bullet) \to (\alpha^\bullet \to \Box\alpha^\circ) \to ((\Box\alpha^\circ \to \alpha^\bullet) \leftrightarrow (\alpha^\bullet \to \Box\alpha^\circ))$	$\mathbf{A_3}$	
41	$\Gamma \vdash (\alpha^\bullet \to \Box\alpha^\circ) \to (\Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ) \leftrightarrow \Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet))$	$\mathbf{R_2}$	$\{38, 40\}$
42	$\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha_1^\circ \to \alpha_2^\circ) \leftrightarrow \Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{R_2}$	$\{39, 41\}$

Estando assim demonstrada a proposição.

Demonstrada o teorama da interderivação dentro do sistema de destino, usaremos esta propriedade para demonstrar a propriedade da interderivabilidade na metalinguagem. Para tanto, induzimos sobre o tamanho da sucessão de dedução.

Teorema 5 (Interderivação). $\Box\Gamma^\circ \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha^\circ$ *se e somente se* $\Gamma^\bullet \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha^\bullet$.

Demonstração. Demonstração por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Seja $n \in \mathbb{N}^+$ o tamanho da sucessão de dedução que deriva $\Box\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ e seja $m \in \mathbb{N}^+$ o tamanho da sucessão de dedução que deriva $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$. Suponhamos que a ida da implicação valha para qualquer sucessão de dedução de tamanho menor que n e que a sua conversa valha para qualquer sucessão de dedução de tamanho menor que m, e nomeemos estas suposições **H**. Devemos considerar quatro casos.

Caso 1. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Box\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ gerada por algum axioma $\mathbf{A}_\alpha \in \mathcal{R}_{\mathfrak{M}}$. Pode-se demonstrar que $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ a partir dos teoremas $\mathbf{T_3}$ e $\mathbf{T_4}$ e da regras $\mathbf{A_4}$ e $\mathbf{R_2}$. Ainda, seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ gerada por algum axioma $\mathbf{A}_\alpha \in \mathcal{R}_{\mathfrak{M}}$. De maneira semelhante, pode-se demonstrar $\Box\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ a partir do teorema $\mathbf{T_4}$ e das regras $\mathbf{A_5}$, $\mathbf{B_2}$ e $\mathbf{R_2}$.

Caso 2. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Box\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ gerada pela regra $\mathbf{R_1}$. Sabe-se que $\alpha^\circ \in \Box\Gamma^\circ$ e que $\alpha^\circ = \Box\beta^\circ$, para algum β. Isso contradiz a definição da tradução e portanto, tudo segue desta afirmação. Ainda, seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ gerada pela regra $\mathbf{R_1}$. Sabe-se que $\alpha^\bullet \in \Gamma^\bullet$ e, portanto, que $\alpha^\circ = \Box\beta^\circ$. Desta maneira, pode-se demonstrar $\Box\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ a partir da regra $\mathbf{R_1}$.

Caso 3. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Box\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ gerada pela regra $\mathbf{R_2}$. Sabe-se que $\Box\Gamma^\circ \vdash \beta$ e que $\Box\Gamma^\circ \vdash \beta \to \alpha^\circ$. A partir de **H**, temos que $\Gamma^\bullet \vdash \beta$ e que $\Gamma^\bullet \vdash \beta \to \alpha^\bullet$. Pode-se demonstrar que $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ a partir da aplicação da regra da separação a essas sentenças. Ainda, seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ gerada pela regra $\mathbf{R_2}$. Sabe-se que $\Gamma^\circ \vdash \beta$ e que $\Gamma^\circ \vdash \beta \to \alpha^\bullet$. Deste modo, demonstração de $\Box\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ acontece de maneira semelhante.

Caso 4. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Box\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ gerada pela regra $\mathbf{R_3}$. Sabe-se que $\alpha^\circ = \Box\beta$, para algum β. Isso contradiz a definição da tradução e portanto, tudo segue desta afirmação. Ainda, seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ gerada pela regra $\mathbf{R_3}$. Sabe-se que $\vdash a$ ou que $\vdash \alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet$. Para o primeiro caso, pode-se demonstrar $\Box\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ por meio da aplicação do teorema $\mathbf{T_2}$. Para o segundo caso, pode-se demonstrar $\Box\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$ por meio das regras $\mathbf{A_1}$. e $\mathbf{R_3}$.

Estando assim demonstrada a proposição.

4.3 Correção

Neste seção, apresentaremos demosntrações de correção para ambas as traduções. Antes disso, entretanto, demonstraremos a *estabilidade* da tradução quadrado por indução sobre a profundidade da sentença, como sugerido por Troelstra e Schwichtenberg (2000). Usaremos este teorema, cujo nome tiramos de Flagg e Friedman (1986), para a demonstração da correção da tradução quadrado.

Teorema 6 (Estabilidade). $\Gamma \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha^\bullet \to \Box\alpha^\bullet$.

Demonstração. Demonstração por indução forte sobre a profundidade da sentença (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Seja $n \in \mathbb{N}^+$ a profundidade da sentença $\alpha \in \mathcal{L}$. Suponhamos que a asserção valha para qualquer sentença de profundidade menor que n e nomeemos esta suposição **H**. Devemos considerar cinco casos: a letra, a contradição, a conjunção, a disjunção e a implicação.

Caso 1. Seja a sentença α for uma proposição $a \in \mathcal{P}$. Sabe-se que $a^\bullet = \Box a$ pela definição da tradução. Deste modo, $\Gamma \vdash \Box a \to \Box\Box a$ pode ser gerado por $\mathbf{B_3}$.

Caso 2. Seja a sentença α a constante $\bot$. Sabe-se que $\bot^\bullet = \bot$ pela definição da tradução. Deste modo, $\Gamma \vdash \bot \to \Box\bot$ foi provado pelo lema $\mathbf{L_3}$.

Caso 3. Seja a sentença α a conjunção de duas sentenças α_1 e α_2. Sabe-se que $(\alpha_1 \wedge \alpha_2)^\bullet = \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$ pela definição da tradução. A partir de **H**, temos que $\Gamma \vdash \alpha_1^\bullet \to \Box\alpha_1^\bullet$ e que $\Gamma \vdash \alpha_2^\bullet \to \Box\alpha_2^\bullet$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_2}$. Pode-se demonstrar $\Gamma \vdash (\alpha_1 \wedge \alpha_2)^\bullet \to \Box(\alpha_1 \wedge \alpha_2)^\bullet$ pela dedução que segue.

1	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet \to \Box\alpha_1^\bullet$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\} \vdash \alpha_2^\bullet \to \Box\alpha_2^\bullet$	$\mathbf{H_2}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_1}$	
4	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet \to \Box\alpha_1^\bullet \wedge \Box\alpha_2^\bullet$	$\mathbf{L_6}$	
5	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\} \vdash \Box\alpha_1^\bullet \wedge \Box\alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\} \vdash \Box\alpha_1^\bullet \wedge \Box\alpha_2^\bullet \to \Box(\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{L_9}$	
7	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet\} \vdash \Box(\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{R_2}$	$\{5, 6\}$

8	$\Gamma \vdash \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet \rightarrow \Box(\alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{T_1}$	$\{7\}$

Caso 4. Seja a sentença α a disjunção de duas sentenças α_1 e α_2. Sabe-se que $(\alpha_1 \vee \alpha_2)^\bullet = \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet$ pela definição da tradução. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\Gamma \vdash \alpha_1^\bullet \rightarrow \Box\alpha_1^\bullet$ e que $\Gamma \vdash \alpha_2^\bullet \rightarrow \Box\alpha_2^\bullet$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_2}$. Pode-se demonstrar $\Gamma \vdash (\alpha_1 \vee \alpha_2)^\bullet \rightarrow \Box(\alpha_1 \vee \alpha_2)^\bullet$ pela dedução que segue.

1	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet \rightarrow \Box\alpha_1^\bullet$	$\mathbf{H_1}$	
2	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\} \vdash \alpha_2^\bullet \rightarrow \Box\alpha_2^\bullet$	$\mathbf{H_2}$	
3	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_1}$	
4	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \rightarrow \Box\alpha_1^\bullet \vee \Box\alpha_2^\bullet$	$\mathbf{L_{10}}$	$\{1, 2\}$
5	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\} \vdash \Box\alpha_1^\bullet \vee \Box\alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
6	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\} \vdash \Box\alpha_1^\bullet \vee \Box\alpha_2^\bullet \rightarrow \Box(\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{L_9}$	
7	$\Gamma \cup \{\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\} \vdash \Box(\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{R_2}$	$\{5, 6\}$
8	$\Gamma \vdash \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \rightarrow \Box(\alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet)$	$\mathbf{T_1}$	$\{7\}$

Caso 5. Seja a sentença α a implicação de duas sentenças α_1 e α_2. Sabe-se que $(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2)^\bullet = \Box(\alpha_1^\bullet \rightarrow \alpha_2^\bullet)$ pela definição da tradução. Deste modo, $\Gamma \vdash \Box(\alpha_1^\bullet \rightarrow \alpha_2^\bullet) \rightarrow \Box\Box(\alpha_1^\bullet \rightarrow \alpha_2^\bullet)$ pode ser gerado pela regra $\mathbf{B_3}$.

Estando assim demonstrada a proposição.

Uma vez demonstrado o teorema da estabilidade podemos, então, demonstrar o teorema correção da tradução quadrado por indução sobre o tamanho da sucessão de dedução, conforme Troelstra e Schwichtenberg (2000).

Teorema 7. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{I}} \alpha$*, então* $\Gamma^\bullet \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha^\bullet$.

Demonstração. Demonstração por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Seja $n \in \mathbb{N}^+$ o tamanho da sucessão de dedução que deriva $\Gamma \vdash \alpha$. Suponhamos que a correção da tradução quadrado valha para qualquer sucessão de dedução de tamanho menor que n e nomeemos esta suposição $\mathbf{H}$. Demos considerar onze casos: um para cada regra de dedução.

Caso 1. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela a regra **A₁**. Sabe-se que $\alpha = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_1$ e que $\alpha^\bullet = \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet$. Pode-se demonstrar $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ pela dedução que segue.

1	$\vdash \alpha_1^\bullet \rightarrow \Box\alpha_1^\bullet$	$\mathbf{T_6}$	
2	$\vdash \alpha_1^\bullet \rightarrow \alpha_2^\bullet \rightarrow \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{A_1}$	
3	$\vdash \Box(\alpha_1^\bullet \rightarrow \alpha_2^\bullet \rightarrow \alpha_1^\bullet)$	$\mathbf{R_3}$	$\{2\}$
4	$\vdash \Box(\alpha_1^\bullet \rightarrow \alpha_2^\bullet \rightarrow \alpha_1^\bullet) \rightarrow \Box\alpha_1^\bullet \rightarrow \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{B_1}$	
5	$\vdash \Box\alpha_1^\bullet \rightarrow \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 4\}$
8	$\vdash \alpha_1^\bullet \rightarrow \Box\alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{L_2}$	$\{1, 5\}$
9	$\Gamma^\bullet \vdash \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{R_3}$	$\{6\}$

Caso 2. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela a regra **A₂**. Sabe-se que $\alpha = (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_3) \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2) \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_3$ e que $\alpha^\bullet = (\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \strictif (\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet) \strictif \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$. Pode-se demonstrar $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ pela dedução que segue.

1	$\{\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet, \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet, \alpha_1^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet$	$\mathbf{R_1}$	
2	$\{\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet, \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet, \alpha_1^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{R_1}$	
3	$\{\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet, \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet, \alpha_1^\bullet\} \vdash \alpha_2^\bullet$	$\mathbf{L_4}$	$\{1, 2\}$
4	$\{\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet, \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet, \alpha_1^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{R_1}$	
5	$\{\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet, \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet, \alpha_1^\bullet\} \vdash \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{L_4}$	$\{1, 4\}$
6	$\{\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet, \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet, \alpha_1^\bullet\} \vdash \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{L_4}$	$\{3, 5\}$
7	$\{\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet, \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{L_3}$	$\{6\}$
8	$\{\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet\} \vdash (\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet) \strictif \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{L_3}$	$\{7\}$
9	$\vdash (\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \rightarrow (\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet) \strictif \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{T_1}$	$\{8\}$
10	$\Gamma^\bullet \vdash (\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \strictif (\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet) \strictif \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{R_3}$	$\{9\}$

Caso 3. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela a regra **A₃**. Sabe-se que $\alpha = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_1 \wedge \alpha_2$ e que $\alpha^\bullet = \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$. Pode-se demonstrar $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ pela dedução que segue.

1	$\vdash \alpha_1^\bullet \to \Box\alpha_1^\bullet$	**T_6**	
2	$\vdash \alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet \to \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$	**A_3**	
3	$\vdash \Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet \to \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet)$	**R_3**	$\{2\}$
4	$\vdash \Box(\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet \to \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet) \to \Box\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$	**B_1**	
5	$\vdash \Box\alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$	**R_2**	$\{3,4\}$
8	$\vdash \alpha_1^\bullet \to \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$	**L_2**	$\{1,6\}$
9	$\Gamma^\bullet \vdash \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet$	**R_3**	$\{6\}$

Caso 4. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela a regra **A_4**. Sabe-se que $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \alpha_1$ e que $\alpha^\bullet = \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet$ Pode-se demonstrar $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ pelo uso da regra **A_4** seguido do uso da regra **R_3**.

Caso 5. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela a regra **A_5**. Sabe-se que $\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \to \alpha_2$ e que $\alpha^\bullet = \alpha_1^\bullet \wedge \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_2^\bullet$ Pode-se demonstrar $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ pelo uso da regra **A_5** seguido do uso da regra **R_3**.

Caso 6. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela a regra **A_6**. Sabe-se que $\alpha = \alpha_1 \to \alpha_1 \vee \alpha_2$ e que $\alpha^\bullet = \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet$ Pode-se demonstrar $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ pelo uso da regra **A_6** seguido do uso da regra **R_3**.

Caso 7. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela a regra **A_7**. Sabe-se que $\alpha = \alpha_2 \to \alpha_1 \vee \alpha_2$ e que $\alpha^\bullet = \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet$ Pode-se demonstrar $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ pelo uso da regra **A_7** seguido do uso da regra **R_3**.

Caso 8. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela a regra **A_8**. Sabe-se $\alpha = (\alpha_1 \to \alpha_3) \to (\alpha_2 \to \alpha_3) \to \alpha_1 \vee \alpha_2 \to \alpha_3$ e que $\alpha^\bullet = (\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \strictif (\alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \strictif \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$. Pode-se demonstrar $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ pela dedução que segue, onde $\Delta = \left\{\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet, \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet, \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet\right\}$.

1	$\Delta \vdash \alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	**R_1**	
2	$\Delta \vdash (\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \to \alpha_1^\bullet \to \alpha_1^\bullet$	**B_2**	
3	$\Delta \vdash \alpha_1^\bullet \to \alpha_3^\bullet$	**R_2**	$\{1,2\}$
4	$\Delta \vdash \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	**R_1**	
5	$\Delta \vdash (\alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \to \alpha_2^\bullet \to \alpha_3^\bullet$	**B_2**	
6	$\Delta \vdash \alpha_2^\bullet \to \alpha_3^\bullet$	**R_2**	$\{4,5\}$
7	$\Delta \vdash \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet$	**R_1**	

8	$\Delta \vdash (\alpha_1^\bullet \to \alpha_3^\bullet) \to (\alpha_2^\bullet \to \alpha_3^\bullet) \to \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \to \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{A_8}$	
9	$\Delta \vdash (\alpha_2^\bullet \to \alpha_3^\bullet) \to \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \to \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{3, 8\}$
10	$\Delta \vdash \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \to \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{6, 9\}$
11	$\Delta \vdash \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{7, 10\}$
12	$\{\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet, \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet\} \vdash \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{T_3}$	$\{11\}$
13	$\{\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet\} \vdash (\alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \strictif \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{T_3}$	$\{12\}$
14	$\vdash (\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \to (\alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \strictif \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{T_1}$	$\{13\}$
15	$\Gamma^\bullet \vdash (\alpha_1^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \strictif (\alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet) \strictif \alpha_1^\bullet \vee \alpha_2^\bullet \strictif \alpha_3^\bullet$	$\mathbf{R_3}$	$\{14\}$

CASO 9. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela a regra $\mathbf{A_\perp}$. Sabe-se que $\alpha = \perp \to \alpha_1$ e que $\alpha^\bullet = \Box(\perp \to \alpha_1^\bullet)$. Pode-se demonstrar $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ pelo uso do lema $\mathbf{L_5}$ seguido do uso da regra $\mathbf{R_3}$.

CASO 10. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela regra $\mathbf{R_1}$. Sabe-se que $\alpha \in \Gamma$ e, portanto, que $\alpha^\bullet \in \Gamma^\bullet$. Pode-se demonstrar que $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ por meio da invocação da premissa $\alpha^\bullet$ com a regra $\mathbf{R_1}$.

CASO 11. Seja a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ gerada pela regra $\mathbf{R_2}$. Sabe-se que $\Gamma \vdash \beta$ e que $\Gamma \vdash \beta \to \alpha$, para algum β. A partir de **H**, temos que $\Gamma^\bullet \vdash \beta^\bullet$ e que $\Gamma^\bullet \vdash \Box(\beta^\bullet \to \alpha^\bullet)$, ditos $\mathbf{H_1}$ e $\mathbf{H_2}$. Pode-se demonstrar $\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$ pela dedução que segue.

1	$\Gamma^\bullet \vdash \beta^\bullet$	$\mathbf{H_2}$	
2	$\Gamma^\bullet \vdash \Box(\beta^\bullet \to \alpha^\bullet)$	$\mathbf{H_1}$	
3	$\Gamma^\bullet \vdash \Box(\beta^\bullet \to \alpha^\bullet) \to \beta^\bullet \to \alpha^\bullet$	$\mathbf{B_2}$	
4	$\Gamma^\bullet \vdash \beta^\bullet \to \alpha^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{2, 3\}$
5	$\Gamma^\bullet \vdash \alpha^\bullet$	$\mathbf{R_2}$	$\{1, 4\}$

Estando assim demonstrada a proposição.

A demonstração postrema deste trabalho, o teorema da correção da tradução redondo, segue de maneira simples das demonstrações de interderivação e de correção da tradução quadrado, conforme apresentado a seguir.

Teorema 8 (Correção). *Se* $\Gamma \vdash_{\mathfrak{I}} \alpha$, *então* $\Box\Gamma^{\circ} \vdash_{\mathfrak{M}} \alpha^{\circ}$.

Demonstração. Sabe-se que $\Gamma \vdash \alpha$. A partir do teorema **T7**, temos que $\Gamma^{\bullet} \vdash \alpha^{\bullet}$. Então, a partir do teorema **T5**, temos que $\Box\Gamma^{\circ} \vdash \alpha^{\circ}$.

Estando assim demonstrada a proposição.

5. Implementação

Nesta seção, discorreremos sobre a implementação da formalização das provas apresentadas neste trabalho em *Rocq*,[1] disposta para consulta no endereço <`https://github.com/babireski/embedding`>. Esta, faz uso da biblioteca para sistemas modais normais desenvolvida por Silveira et al. (2022) e posteriormente aumentada por Nunes et al. (2025). Assim sendo, antes disso destacaremos as diferenças entre as definições usadas na biblioteca e as definições usadas neste trabalho.

5.1 Preliminares

A linguagem da biblioteca para sistemas modais normais desenvolvida por Silveira et al. (2022) foi definida de maneira ligeiramente diferente da definida neste trabalho. Silveira et al. (2022) tratam a negação como operação primitiva enquanto, neste trabalho, tratamos a contradição como primitiva e a negação como definida em termos dessa e da implicação. De modo similar, considerou-se o operador de possibilidade primitivo na biblioteca, enquanto neste trabalho define-se este em termos da necessidade. Remetemos o leitor à Definição 9 para comparações.

Esta biblioteca foi posteriormente aumentada de modo a permitir a fusão de sistemas modais normais por Nunes et al. (2025). Para tanto, a linguagem dos sistemas modais precisou ser alterada de modo a permitir a definição de sistemas multimodais, ou seja, sistemas com mais de uma modalidade. Considerando as diferenças apontadas, redefiniremos abaixo a linguagem do sistema $\mathfrak{L}$. As diversas modalidades serão distinguidas por um valor $i \in \mathcal{I}$. Pequenas modificações nas demais definições deste trabalho precisaram, do mesmo modo, serem feitas para dar conta de tais diferenças. Tais modificações serão assomadas quando relevantes.

Definição 15 ($\mathscr{L}_\Box$). *A linguagem dos sistemas multimodais com $n = |\mathcal{I}|$ modalidades indexadas por um valor $i \in \mathcal{I}$ pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_\Box = \langle \mathscr{P}, \mathscr{C}_\Box \rangle$, onde $\mathscr{C}_\Box = \left\{\neg^1, \Box_i^1, \Diamond_i^1, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2 \mid i \in \mathcal{I}\right\}$.*

Silveira et al. (2022) definem o sistema de dedução da biblioteca de modo levemente maior do que feito neste trabalho. Isso acontece da regra $\mathbf{A_9}$ — que pode ser derivada usando as demais regras apresentadas neste trabalho — e da regra $\mathbf{B_4}$ —

[1] Antigamente conhecido como *Coq*.

neste trabalho tratada como notação. O trabalho posterior de Nunes et al. (2025) precisou quantificar univesalmente sobre um valor $i \in \mathcal{I}$ as regras $\mathbf{B_1}$, $\mathbf{B_2}$ e $\mathbf{B_3}$. Considerando as diferenças apontadas, redefiniremos abaixo a relação de dedução do sistema $\mathfrak{L}$. Remetemos o leitor à DEFINIÇÃO 10 para comparações.

Definição 16 ($\vdash_{\mathfrak{L}}$). *Abaixo estão definidas as regras do sistema multimodal $\mathfrak{L}$.*

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha}\,\mathbf{A_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma}\,\mathbf{A_2}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta}\,\mathbf{A_3} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha}\,\mathbf{A_4} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \alpha \wedge \beta \to \beta}\,\mathbf{A_5}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \alpha \to \alpha \vee \beta}\,\mathbf{A_6} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \beta \to \alpha \vee \beta}\,\mathbf{A_7} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \vee \beta \to \gamma}\,\mathbf{A_8}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash (\neg\beta \to \neg\alpha) \to \alpha \to \beta}\,\mathbf{A_9} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha}\,\mathbf{A_{\neg}}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Box_i(\alpha \to \beta) \to \Box_i\alpha \to \Box_i\beta}\,\mathbf{B_1} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Box_i\alpha \to \alpha}\,\mathbf{B_2} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \Box_i\alpha \to \Box_i\Box_i\alpha}\,\mathbf{B_3}$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \Diamond_i\alpha \leftrightarrow \neg\Box_i\neg\alpha}\,\mathbf{B_4}$$

$$\frac{\alpha \in \Gamma}{\Gamma \vdash \alpha}\,\mathbf{R_1} \qquad \frac{\Gamma \vdash \alpha \qquad \Gamma \vdash \alpha \to \beta}{\Gamma \vdash \beta}\,\mathbf{R_2} \qquad \frac{\vdash \alpha}{\Gamma \vdash \Box_i\alpha}\,\mathbf{R_3}$$

5.2 Desenvolvimento

Uma vez indicadas as diferenças, partiremos para a implementação propriamente dita. Consideremos a definição da linguagem intuicionista. Para tanto, definiu-se um tipo indutivo com cinco construtores, conforme apresentado abaixo. O construtor `Contradiction` representa a contradição $\bot$. O construtor `Proposition` leva um valor $n \in \mathbb{N}$ a uma sentença intuicionista que representa uma letra proposicional. Por fim, os construtores `Conjunction`, `Disjunction` e `Implication` criam conjunções, disjunções e implicações — nesta ordem — a partir de sentenças menores. Notações foram definidas de modo a replicar a notação usada neste trabalho, com letras propositionais sendo introduzidas por um operador #. Deste modo, podemos representar a sentença intuicionista $a \wedge b \to a \vee b$ como `#1 ∧ #2 → #1 ∨ #2`, para $a, b \in \mathcal{P}$. Remetemos o leitor à DEFINIÇÃO 7 para comparações.

```
Inductive Propositional : Set :=
| Contradiction : Propositional
| Proposition   : nat → Propositional
```

```
| Conjunction   : Propositional → Propositional → Propositional
| Disjunction   : Propositional → Propositional → Propositional
| Implication   : Propositional → Propositional → Propositional.

Notation " ⊥ " := Contradiction.
```

Similarmente, uma dedução intuicionista foi definida como um tipo indutivo, desta vez com onze construtores. Cada um desses construtores representa uma das regras de dedução apresentadas anteriormente na Definição 8. Assim como feito com a linguagem, foi definida uma notação de modo a facilitar a escrita de asserções. Cabe destacar que o conjunto de assunções Γ foi representado pela sua função indicadora $\mathbf{I}_\Gamma : \mathscr{L} \to \{0,1\}$, em que $\mathbf{I}_\Gamma(\alpha) = 1$ se e somente se $\alpha \in \Gamma$. Na implementação oferecida abaixo, isso foi feito por meio de uma função do tipo `Sentence` ao tipo `Prop`, o tipo das proposições.

```
Definition Theory := Propositional → Prop.

Reserved Notation "Γ ⊢ α" (at level 110).

Inductive Deduction : Theory → Propositional → Prop :=
| A₁ : forall Γ α β,   Γ ⊢ α → β → α
| A₂ : forall Γ α β γ, Γ ⊢ (α → β → γ) → (α → β) → α → γ
| A₃ : forall Γ α β,   Deduction Γ (α → β → α ∧ β)
(* Alguns construtores omitidos *)
| A₉ : forall Γ α,     Deduction Γ (⊥ → α)
| R₁ : forall Γ α,     Γ ∈ α → Γ ⊢ α
| R₂ : forall Γ α β,   Γ ⊢ α → β → Γ ⊢ α → Γ ⊢ β
where "Γ ⊢ α":= (Deduction Γ α).

Notation "Γ ⊢ α":= (Deduction Γ α) (at level 110).
```

Para ilustração do uso do tipo indutivo `Deduction`, abaixo fornecemos a prova da identidade $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$. A prova tem uma relação de um para um com a prova apresentada anteriormente no Lema 1, tirando-se o fato desta ser feita de baixo para cima, da conclusão em direção às assunções. Isso acontece porque o comando `apply`, que aplica regras a uma asserção, as aplica por padrão à meta de prova.

Nada impediria, entretanto, que o oposto fosse feito. Ao usarmos o comando `apply` estamos dizendo que esta conclusão foi gerada a partir da aplicação da dita regra. A meta de prova torna-se, então, os antecedentes da regra, caso haja.

```
Lemma identity : forall Γ α, Γ ⊢ α → α.
Proof.
    intros Γ α.
    apply R₂ with (α → α → α).
    + apply R₂ with (α → (α → α) → α).
        * apply A₂.
        * apply A₁.
    + apply A₁.
Qed.
```

Uma vez definido o sistema intuicionista, podemos definir as funções de tradução do sistema $\mathfrak{B}$ ao sistema $\mathfrak{L}$. A tradução quadrado e a tradução redondo, agora chamadas **square** e **circle**, foram definidas com apenas duas alterações. Primeiramente, ambas as funções agora recebem um argumento a mais, que identifica a modalidade usada, uma vez que estamos usando uma biblioteca para sistema multimodais. Em segundo lugar, a contradição $\bot$ passou a ser mapeada para $a \wedge \neg a$ para algum $a \in \mathcal{P}$, uma vez que a biblioteca não traz a contradição como um operador primitivo. Remetemos o leitor às Definições 14 e 13 para comparações.

```
Fixpoint square (α : Propositional) (i : Index) : Multimodal :=
match α with
| ⊥     ⇒ #1 ∧ ¬#1
| #a    ⇒ [i] #a
| α ∧ β ⇒ (square α i) ∧ (square β i)
| α ∨ β ⇒ (square α i) ∨ (square β i)
| α → β ⇒ [i]((square α i) → (square β i))
end.

Fixpoint circle (α : Propositional) (i : Index) : Multimodal :=
match α with
| ⊥     ⇒ #1 ∧ ¬#1
| #a    ⇒ #a
```

```
| α ∧ β ⇒ (circle α i) ∧ (circle β i)
| α ∨ β ⇒ [i](circle α i) ∨ [i](circle β i)
| α → β ⇒ [i](circle α i) → (circle β i)
end.
```

Faz-se preciso definir novos construtores de tipos para representar conjuntos cujas sentenças são resultados da aplicação de alguma função ou operação, que foram chamados de `Imboxed`, `Squared` e `Circled`. Cada um desses possui apenas um construtor, nomeados `Imboxing`, `Squaring` e `Circling`, nesta ordem. `Imboxing` recebe como argumento um conjunto de sentenças multimodais e prefixa a necessidade a cada uma destas sentenças, ou seja, representa o conjunto $\Box\Gamma$. `Squaring` e `Circling` recebem como argumento conjuntos de sentenças intuicionistas e aplicam os seus elementos às funções de tradução `square` e `circled`, ou seja, representam o conjunto $\Gamma^\bullet$ e o conjunto Γ°.

```
Inductive Imboxed Γ i : Multimodal → Prop :=
| Imboxing : forall α , Γ α → Imboxed Γ i ([i]α).

Inductive Squared Γ i : Multimodal → Prop :=
| Squaring : forall α , Γ α → Squared Γ i (square α i).

Inductive Circled Γ i : Multimodal → Prop :=
| Circling : forall α , Γ α → Circled Γ i (circle α i).
```

Agora que as definições iniciais para o desenvolvimento desta formalização foram feitas, partiremos pra uma enumeração das principais asserções provadas, com considerações pontuais. Não serão apresentadas as provas das asserções por questões de brevidade. As provas, entretanto, são paralelas às provas apresentadas anteriormente, a não ser quando destacado o oposto. As provas que envolvem modalidades foram quantificadas universalmente sobre um valor $i \in \mathcal{I}$, assim como foi feito no sistema dedutivo por Nunes et al. (2025).

Já estão presentes na biblioteca provas do teorema da dedução e do teorema do enfraquecimento. Deste modo, a primeira grande prova feita foi a prova do teorema da generalização da necessitação, dito `generalization`. Não podemos induzir diretamente sobre o conjunto Γ, uma vez que este consiste numa função, um tipo não-indutivo. Para a prova deste teorema, então, usou-se outra asserção demonstrada na biblioteca, que afirma que qualquer dedução a partir de um conjunto Γ pode ser feita a partir de um conjunto finito Δ contido em Γ. Podemos induzir sobre este novo conjunto Δ, uma vez que ele foi definido usando-se uma lista, um tipo indutivo. O restante da prova procedeu conforme o TEOREMA 3.

```
Theorem generalization : forall Γ α i,
Imboxed Γ i ⊢ α → Imboxed Γ i ⊢ [i]α.
```

Consideremos demonstração da estabilidade da tradução quadrado e a demonstração da bi-implicação entre ambas as traduções, ditas `stability` e `biimplication`. Ambas foram feitas por indução sobre a profundidade da sentença α, e não houve grandes diferenças entre as demonstrações implementadas e as demonstrações apresentadas nos TEOREMAS 6 e 4.

```
Theorem stability : forall Γ α i,
Γ ⊢ square α i → [i](square α i).

Theorem biimplication : forall Γ α i,
Γ ⊢ [i](circle α i) ↔ square α i.
```

A prova que apresentou maior dificuldade a esta implementação foi a prova do teorema da interderivabilidade, dita `interderivability`. Em um primeiro momento, tentou-se provar este por indução sobre a dedução, assim como no TEOREMA 5. Entretanto, quando da indução, perdeu-se a forma do conjunto $\Box\Gamma^\circ$ e do conjunto $\Gamma^\bullet$ que passaram a ser representados por um conjunto qualquer Δ. Isso não permite inferir a forma de uma sentença $\alpha \in \Delta$, para algum α. Caso as formas tivessem sido mantidas, seriam igualmente mantidas informações sobre α, uma vez que a partir de $\alpha \in \Box\Gamma$ sabe-se que $\alpha = \Box\beta$ para algum β. De modo semelhante, perdeu-se informação sobre a forma das sentenças traduzidas.

Houveram duas tentativas de solução. A primeira delas foi o uso do comando `remember`, que nos permitiu lembrar as informações perdidas na forma de equações, como $\Delta = \Box\Gamma^\circ$. Isso, entretanto, alterou a premissa indutiva de um modo que não se pode fazer uso dela. Tentou-se, do mesmo modo, fazer a prova usando-se o comando `dependent induction`, que se comporta de maneira semelhante ao uso do comando `remember` seguido do comando `induction`. Tampouco logrou-se sucesso, pelas mesmas razões da tentativa anterior. A solução adotada foi buscar outra maneira de se provar o teorema. A prova foi, então, feita por indução sobre o tamanho do conjunto de assunções. Para tanto, novas asserções precisaram ser provadas, dentre as quais destacamos duas: o lema $\Box\Gamma^{\bullet} \vdash \Box(\alpha^{\bullet} \to \beta^{\bullet}) \implies \Gamma^{\bullet} \vdash \Box(\alpha^{\bullet} \to \beta^{\bullet})$ e o lema $\Gamma \vdash \alpha \implies \Box\Gamma \vdash \alpha$. Ambos os lemas foram inspirados em Troelstra e Schwichtenberg (2000).

```
Theorem interderivability : forall Γ α i,
Imboxed (Circled Γ i) i ⊢ circle α i ⟷ Squared Γ i ⊢ square α i.
```

Por fim, consideremos a implementação das principais demosntrações deste trabalho: as demosntrações de correção das traduções, ditas `soundness`. A demonstração da correção da tradução quadrado foi feita por indução sobre o tamanho da sucessão de dedução. Assim como foi o caso da demonstração apresentada anteriormente neste trabalho, a demonstração da correção da tradução redondo segue trivialmente das demonstrações de interderivação e de correção da tradução quadrado. Não houve grandes diferenças entre as demonstrações implementadas e as demonstrações apresentadas nos TEOREMAS 7 e 8. Destacamos que os nomes de ambas as traduções não conflitam, uma vez que as asserções foram definidas em arquivos diferentes e podem ser desambiguadas por prefixação.

```
Theorem soundness : forall Γ α i,
Γ ⊢ α → Squared Γ i ⊢ square α i.

Theorem soundness : forall Γ α i,
Γ ⊢ α → Imboxed (Squared Γ i) i ⊢ circle α i.
```

6. Conclusão

Os sistemas modais possuem atributos interessantes para a representação de efeitos computacionais, sobretudo o sistema $\mathfrak{M}$. Uma linguagem baseada nesse sistema, podendo representar efeitos monadicamente, pode ser imersa em continuações. Do mesmo modo, continuações podem ser imersas nesta (Filinski, 1994). O estilo de passagem por continuações constitui uma das representações usadas em compiladores. Deste modo, este sistema possui interesse no ponto de vista de compilação. Motivados por esta relação, formalizamos duas traduções do sistema intuicionista $\mathfrak{I}$ ao sistema $\mathfrak{M}$ encontradas em Troelstra e Schwichtenberg (2000) no provador de teoremas *Rocq*.[1] Esperamos que estes desenvolvimentos, que podem ser consultados no endereço <https://github.com/babireski/embedding>, fundamentem investigações futuras acerca do uso de uma linguagem baseada no sistema $\mathfrak{M}$ como uma representação durante o processo de compilação.

Apresentamos neste trabalho apresentou noções gerais sobre sistemas formais e sobre traduções entre tais sistemas. Com base nisso, foram definidos os sistemas intuicionista e modais, bem como duas traduções da linguagem do primeiro à linguagem do segundo. Foram apresentadas demonstrações da correção de ambas as traduções e de sua interderivabilidade. Para tanto, foram usados um conjunto de lemas e teoremas. Todas as demonstrações foram formalizadas no provador de teoremas *Rocq*. Deste modo, cumpriram-se as metas definidas na introdução.

Sugerimos diversos trabalhos futuros. Primeiramente, a demonstração da completude das traduções apresentadas neste trabalho e sua formalização assistida por computador. Em segundo lugar, sugerimos que o mesmo seja feito para a tradução do sistema laxo $\mathfrak{L}$ ao sistema $\mathfrak{M}$, conforme apresentada por Pfenning e Davies (2001) e vista na Seção 3.3. Outra tradução de interesse trata-se da tradução de Fairtlough e Mendler (1997) do sistema $\mathfrak{L}$ a um sistema bimodal $\langle \mathfrak{M}, \mathfrak{M} \rangle$, uma vez que os desenvolvimentos de Nunes et al. (2025) permitem a fusões entre sistemas modais. Por fim, sugerimos investigações acerca do uso de uma de linguagem de representação baseada no sistema $\mathfrak{M}$ para uso em compiladores.

Para as demonstrações de completude, sugerimos que estas deixem de se basear nas demonstrações de Troelstra e Schwichtenberg (2000) e passem a se basear na demonstração de Flagg e Friedman (1986). Este abandono deve-se ao uso de pro-

[1] Antigamente conhecido como *Coq*.

priedades de sequentes na demonstração, que deveriam ser acomodadas ao sistema de dedução usado neste trabalho. A sugestão desta demonstração, que se baseia na definição de uma contratradução a uma das traduções abordadas neste trabalho, acontece por esta ser feita construtivamente. Com isso, os autores reduzem o problema de demonstrar a completude da tradução ao problema de demonstrar a correção da contratradução, feito por indução sobre o tamanho da demonstração.

Este trabalho foi apresentado como *poster* durante a *XXI Brazilian Logic Conference*, ocorrido entre os dias doze e dezesseis de maio do corrente ano em Serra Negra — São Paulo, e foi parcialmente apoiado pela *Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Estado de Santa Catarina* — Fapesc.

Referências Bibliográficas

(Appel, 1991) Andrew Wilson Appel. *Compiling with continuations*. Cambridge University Press, Cambridge, 1991. Recuperado de <https://doi.org/10.1017/CBO9780511609619>.

(Appel e Haken, 1976) Kenneth Appel e Wolfgang Haken. Every map is four colourable. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 82:711-712, 1976. Recuperado de <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1976-14122-5>.

(Barendregt, 1991) Henk Barendregt. Introduction to generalized type systems. *Journal of Functional Programming*, 1(2):125-154, 1991. Recuperado de <https://doi.org/10.1017/S0956796800020025>.

(Benton et al., 1998) Peter Nicholas Benton et al. Computational types from a logical perspective. *Journal of Functional Programming*, 8(2):177193, 1998. Recuperado de <https://doi.org/10.1017/S0956796898002998>.

(Brouwer, 1975) Luitzen Egbertus Jan Brouwer. The unreliability of the logical principles. Traduzido por Arend Heyting e Christopher Gibson. In *Collected works*. Editado por Arend Heyting. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975. Publicado originalmente em 1908. Recuperado de <https://doi.org/10.1016/B978-0-7204-2076-0.50009-X>.

(Chlipala, 2013) Adam Chlipala. *Certified programming with dependent types*. The Massachusetts Institute of Technology Press, Cambridge, 2013. Recuperado de <https://doi.org/10.7551/mitpress/9153.001.0001>.

(Coniglio, 2005) Marcelo Esteban Coniglio. Towards a stronger notion of translation between logics. *Manuscrito*, 28(2):231262, 2005.

(Coquand e Huet, 1988) Thierry Coquand e Gérard Huet. The calculus of constructions. *Information and Computation*, 76(2-3):95-120, 1988. Recuperado de <https://doi.org/10.1016/0890-5401(88)90005-3>.

(Curry, 1950) Haskell Brooks Curry. *A theory of formal deducibility*. University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1950.

(Curry, 1952) Haskell Brooks Curry. The elimination theorem when modality is present. *Journal of Symbolic Logic*, 17(4):249-265, 1952. Recuperado de <https://doi.org/10.2307/2266613>.

(Curry e Feys, 1958) Haskell Brooks Curry and Robert Feys. *Combinatory logic*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1958.

(Espírito Santo et al., 2019) José Espírito Santo et al. Modal embeddings and calling paradigms. In *Fourth International Conference on Formal Structures for Computation and Deduction*. Dagstuhl, 2019. Recuperado de <https://doi.org/10.4230/LIPIcs.FSCD.2019.18>.

(Fairtlough e Mendler, 1997) Matt Fairtlough e Michael Mendler. Propositional lax logic. *Information and Computation*, 137(1):1-33, 1997. Recuperado de <https://doi.org/10.1006/inco.1997.2627>.

(Filinski, 1994) Andrzej Filinski. Representing monads. In *Proceedings of the Symposium on Principles of Programming Languages*. Association for Computing Machinery, 1994. Recuperado de <https://doi.org/10.1145/174675.178047>.

(Flagg e Friedman, 1986) Robert Flagg e Harvey Friedman. Epistemic and intuitionistic formal systems. *Annals of Pure and Applied Logic*, 32:53-60, 1986. Recuperado de <https://doi.org/10.1016/0168-0072(86)90043-6>.

(Franks, 2025) Curtis Franks. Propositional logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University, 2025. Recuperado de <https://plato.stanford.edu/entries/logic-propositional>.

(Frege, 1967) Gottlob Frege. Begriffsschrift, a formula language, modeled upon that of arithmetic, for pure thought. Traduzido por Stefan Bauer-Mengelberg. In *A source book in mathematical logic*. Editado por Jean van Heijenoort. Harvard University Press, Cambridge, 1967. Publicado originalmente em 1879.

(Gentzen, 1969) Gerhard Gentzen. The consistency of elementary number theory. Traduzido por Manfred Szabo. In *Collected papers*. Editado por Manfred Szabo. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Amsterdam, 1969. Publicado originalmente em 1936.

(Girard, 1987) Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50(1):1-101, 1987. Recuperado de <https://doi.org/10.1016/0304-3975(87)90045-4>.

(Gonthier, 2008) Georges Gonthier. Formal proof: the four-color theorem. *Notices of the American Mathematical Society*, 55(11):1382-1393, 2008.

(Gödel, 1986a) Kurt Gödel. On intuitionistic arithmetic and number theory. Traduzido por Stefan Bauer-Mengelberg e Jean van Heijenoort. In *Collected works*. Editado por Solomon Feferman et al. Oxford University Press, Nova York, 1986. Publicado originalmente em 1933.

(Gödel, 1986b) Kurt Gödel. An interpretation of the intuitionistic propositional calculus. Traduzido por John Dawson. In *Collected works*. Editado por Solomon Feferman et al. Oxford University Press, Nova York, 1986. Publicado originalmente em 1933.

(Hakli e Negri, 2012) Raul Hakli e Sara Negri. Does the deduction theorem fail for modal logic? *Synthese*, 187:849867, 2012. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/s11229-011-9905-9>.

(Howard, 1980) William Alvin Howard. The formulae-as-types notion of construction. In *Essays on combinatory logic, lambda calculus, and formalism*. Editado por John Roger Hindley e Jonathan Seldin. Academic Press, 1980. Circulando particularmente desde 1969.

(Kobayashi, 1997) Satoshi Kobayashi. Monad as modality. *Theoretical Computer Science*, 175(1):29-74, 1997. Recuperado de <https://doi.org/10.1016/S0304-3975(96)00169-7>.

(Kolmogorov, 1967) Andrey Nikolaevich Kolmogorov. On the principle of the excluded middle. Traduzido por Jean van Heijenoort. In *A source book in mathematical logic*. Editado por Jean van Heijenoort. Harvard University Press, Cambridge, 1967. Publicado originalmente em 1925.

(Lewis, 1912) Clarence Irving Lewis. Implication and the algebra of logic. *Mind*, 21(84):522531, 1912. Recuperado de <https://doi.org/10.1093/mind/XXI.84.522>.

(Lewis e Langford, 1932) Clarence Irving Lewis and Cooper Harold Langford. *Symbolic logic*. Century, Nova York, 1932.

(Maraist et al., 1999) John Maraist et al. Call-by-name, call-by-value, call-by-need and the linear lambda calculus. *Theoretical Computer Science*, 228(1-2):175-210, 1999. Recuperado de <https://doi.org/10.1016/S0304-3975(98)00358-2>.

(Moggi, 1991) Eugenio Moggi. Notions of computation and monads. *Information and Computation*, 93(1):55-92, 1991. Recuperado de <https://doi.org/10.1016/0890-5401(91)90052-4>.

(Nunes et al., 2025) Miguel Alfredo Nunes et al. Soundness-preserving fusion of modal logics in *Coq*. In *Formal methods: foundations and applications*. Springer, 2025. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/978-3-031-78116-2_8>.

(Pfenning e Davies, 2001) Frank Pfenning e Rowan Davies. A judgmental reconstruction of modal logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11(4):511-540, 2001. Recuperado de <https://doi.org/10.1017/S0960129501003322>.

(Pierce et al., 2025) Benjamin Crawford Pierce et al. *Logical foundations*. Software Foundations, 2025. Recuperado de <https://softwarefoundations.cis.upenn.edu>.

(Reynolds, 1993) John Charles Reynolds. The discoveries of continuations. *Higher-Order and Symbolic Computation*, 6:233-247, 1993. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/BF01019459>.

(Sehnem, 2023) Alexandre Sehnem. *Formalização da tradução das lógicas clássica e intuicionista para a lógica linear em Coq*. Trabalho de conclusão de curso, Universidade do Estado de Santa Catarina, 2023.

(Silveira et al., 2022) Ariel Agne da Silveira et al. A sound deep embedding of arbitrary normal modal logics in *Coq*. In *Proceedings of the Brazilian Symposium on Programming Languages*. Association for Computing Machinery, 2022. Recuperado de <https://doi.org/10.1145/3561320.3561329>.

(Tarski, 1983) Alfred Tarski. On some fundamental concepts of metamathematics. Traduzido por Joseph Henry Woodger. In *Logic, semantics, metamathematics*. Editado por John Corcoran. Clarendon Press, Oxford, 1983. Publicado originalmente em 1930.

(Thielecke, 1999) Hayo Thielecke. Continuations, functions and jumps. *Special Interest Group on Algorithms and Computation Theory News*, 30(2):33-42, 1999. Recuperado de <https://doi.org/10.1145/568547.568561>.

(Troelstra e Schwichtenberg, 2000) Anne Sjerp Troelstra and Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Recuperado de <https://doi.org/10.1017/CBO9781139168717>.

(Tymoczko, 1979) Thomas Tymoczko. The four-color problem and its philosophical significance. *The Journal of Philosophy*, 76(2):57-83, 1979. Recuperado de <https://doi.org/10.2307/2025976>.

(Wadler, 1993) Philip Wadler. Monads for functional programming. In *Program Design Calculi*. Springer, 1993. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/978-3-662-02880-3_8>.

(Wadler, 2003) Philip Wadler. Call-by-value is dual to call-by-name. In *Proceedings of the International Conference on Functional Programming*. Association for Computing Machinery, 2003. Recuperado de <https://doi.org/10.1145/944705.944723>.

(Wadler, 2015) Philip Wadler. Propositions as types. *Communications of the Association for Computing Machinery*, 58(12):75-84, 2015. Recuperado de <https://doi.org/10.1145/2699407>.

(Wilson, 2021) Robin Wilson. *Four colors suffice: how the map problem was solved*. Princeton University Press, 2021.

(Zach et al., 2000) Richard Zach et al. *Box and diamonds: an open introduction to modal logic*. Open Logic Project, 2019. Recuperado de <https://builds.openlogicproject.org/>.