Uma formalização da interpretação modal do sistema intuicionista

Elian Babireski

2024

Resumo

Resumo aqui.

Sumário

«‹Oh, you can’t help that,› said the Cat: ‹we’re all mad here. I’m mad. You’re mad.› ‹How do you know I’m mad?› said Alice. ‹You must be,› said the Cat, ‹or you wouldn’t have come here.›»

— Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

1. Introdução

As lógicas modais consistem em um conjunto de extensões da lógica clássica que contam com a adição de um ou mais operadores, chamados modalidades, que qualificam sentenças. No caso do sistema **S4**, são adicionadas as modalidades de necessidade ($\Box$) e possibilidade ($\Diamond$) em conjunto à regra da necessitação[1] e os axiomas **T**: $\Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B$, **T**: $\Box A \to A$ e **4**: $\Box A \to \Box\Box A$ (**?**). Ademais, pode-se derivar nesse sistema, por meio da dualidade entre as modalidades[2], sentenças duais aos axiomas **T** e **4**, sendo elas $\mathbf{T}_\Diamond$: $A \to \Diamond A$ e $\mathbf{4}_\Diamond$: $\Diamond \Diamond A \to \Diamond A$, respectivamente **?**.

As mônadas ganharam destaque na área de linguagens de programação desde que **?** formalizou uma metalinguagem que faz uso dessas estruturas para modelar noções de computação — como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuações — de uma maneira puramente funcional. Pode-se notar uma grande semelhança entre as sentenças $\mathbf{T}_\Diamond$ e $\mathbf{4}_\Diamond$ e as transformações naturais monádicas $\eta : 1_C \to T$ e $\mu : T^2 \to T$, respectivamente. Nesse sentido, **?** demonstraram que se pode traduzir essa metalinguagem para o sistema **S4** da lógica modal, pelo qual se torna interessante analisar esse sistema como uma linguagem de programação sob a ótica do isomorfismo de Curry-Howard.

? apresentam duas traduções equivalentes da lógica intuicionista para o sistema **S4** da lógica modal, sendo um deles correspondente a uma abordagem *call-by-name* e outra a um abordagem *call-by-value*. Tais traduções possuem grande similaridade com as traduções da lógica intuicionista para a lógica linear definidas por **?**. Essas traduções equivalem à tradução por negação dupla que, por sua vez, equivalem a traduções *continuation-passing style* (CPS) em compiladores por meio do isomorfismo de Curry-Howard (**?**), o que torna esse tema interessante no ponto de vista de compilação.

Durante grande parte da história, provas lógicas e matemáticas eram validadas manualmente pela comunidade acadêmica, o que muitas vezes — a depender do tamanho e complexidade da prova — se mostrava ser um trabalho complexo e sujeito a erros. Hoje em dia, exitem *softwares* chamados assistentes de provas que permitem verificar — graças ao isomorfismo de Curry-Howard — a corretude de provas (**?**). O assistente de provas que será usado neste trabalho é o Coq, que utiliza o cálculo de construções indutivas e um conjunto axiomático pequeno

[1] Se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$

[2] $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$

para permitir a escrita de provas simples e intuitivas **?**.

Este trabalho será uma continuação do desenvolvimento da biblioteca de lógica modal no assistente de provas Coq feito em **?** e posteriormente expandido de forma a permitir a fusão de lógicas modais em **?**. Uma formalização similar de traduções de lógicas foi feito em **?**, porém, neste caso, das lógicas clássica e intuicionista para a lógica linear.

1.1 Justificativa

1.2 Metas

1.3 Estruturação

2. Fundamentação

2.1 Sistemas

Sistemas podem ser definidos tanto sobre operadores de conseguimento $C : \wp(\mathcal{L}) \to \wp(\mathcal{L})$ quanto sobre relações de conseguimento $\vdash : \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$. Ambas as definições são equivalentes, uma vez que $\Gamma \vdash \alpha \Leftrightarrow \alpha \in C(\Gamma)$. Desde modo, quaisquer propriedades provadas para um dos conceitos pode ser trivialmente provada para o outro.

Conforme visto, as noções de sistema variam entre diferentes autores e permanece um campo em aberto. Para as necessidades deste trabalho, usaremos a definição proposta por **?**, uma vez que se trata de uma definição simples e que, portanto, não traz elementos irrelevantes aos intuitos deste trabalho.

Definição 1 (Sistema)**.** *Um sistema consiste num par* $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$*, onde* $\mathcal{L}$ *consiste em um conjunto e* $\vdash : \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ *em uma relação sobre o produto cartesiano do conjunto das partes de* $\mathcal{L}$ *e o conjunto* $\mathcal{L}$ *em si, sem demais condições.* □

Conforme **?** aponta, a *qualidade* e *quantidade* dos elementos de **L** não são especificados, portanto sendo esta uma definição de grande generalidade. Deste modo, a relação $\vdash$ pode ser tanto uma relação de *derivação* — definida sintaticamente — quanto uma relação de *satisfação* — definida semanticamente.[1] Neste trabalho, serão abordados apenas sistemas definidos sobre relações de derivação. Cabe destacar, entretanto, que nada impede a tradução entre sistemas definidos sobre relações de satisfação, como veremos futuramente.

Ainda, com base no escopo deste trabalho, restringiremos a definição do conjunto $\mathcal{L}$ a um conjunto de *sentenças proposicionais bem-formadas* — doravante ocasionalmente chamadas apenas de sentenças. Estas sentenças, neste trabalho representadas por letras gregas em caixa-baixa, podem ser geradas indutivamente a partir de uma assinatura proposicional — que consiste em um conjunto de letras proposicionais e um conjunto de operadores com suas aridades —, conforme definido abaixo. Conjuntos de sentenças serão representados por letras gregas em caixa-alta — salvo Σ, usado para representar assinaturas proposicionais.

Definição 2 (Assinatura)**.** *Uma assinatura proposicional consiste num par* $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$ *onde* $\mathcal{P}$ *consiste num conjunto letras proposicionais e* $\mathcal{C}$ *consiste num conjunto de pares* $\langle \bullet, n \rangle$*, onde* $\bullet$ *consiste em um operador e* $n \in \mathbb{N}$ *em sua respeitiva aridade.* □

[1] Sendo esta denotada por $\vDash$.

Notação. *Seja $\bullet$ um operador e n uma aridade, $\bullet^n$ denota o par $\langle \bullet, n \rangle$.*

Tendo-se a uma assinatura proposicional, podemos definir o conjunto $\mathcal{L}$ de um sistema — chamado de *linguagem* — indutivamente. Nesta definição, primeiramente definimos todas as letras proposicionais e operadores de aridade zero como pertencentes ao conjunto e, em seguida, aplicamos recursivamente sucessões de sentenças de tamanho n a operadores de aridade n. Antes disso, entretanto, introduziremos uma notação para sucessões que será usada no decorrer do trabalho.

Definição 3 (Sentença). *Seja $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$ uma assinatura proposicional. Uma sentença proposicional consiste em qualquer um dos elementos do conjunto $\mathcal{L}$, sendo este o menor conjunto induzido a partir das seguintes regras:*

(a) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$

(b) *Se $\bullet^n \in \mathcal{C}$ e $\{\varphi_i \mid i \leq n\} \subseteq \mathcal{L}$, então $\bullet^n \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle \in \mathcal{L}$.* □

Tendo definidas as noções de assinatura e sentença, pode-se definir a noção de profundidade de uma sentença. Esta noção, em termos simples, consiste no comprimento do maior ramo da contrução de uma sentença. A definição abaixo provida consiste numa generalização da definição dada por **?**. Usaremos essa definição futuramente para provar propriedades por meio de indução sobre a profundidade da sentença.

Definição 4 (Profundidade). *Seja $\mathbf{A} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ um sistema, $\alpha \in \mathcal{L}$ uma sentença e $\bullet^n$ um operador de aridade $n \in \mathbb{N}$ que consta na assinatura que define $\mathcal{L}$. Pode-se definir a profundidade $|\alpha|$ de α recursivamente da seguinte maneira:*

$$
\begin{aligned}
|a| &:= 0 \\
|\bullet^0| &:= 0 \\
|\bullet^n \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle| &:= \max \{ |\varphi_i| \mid i \leq n \} + 1.
\end{aligned}
$$
□

Definição 5 (Esquema). *Um esquema consiste em um padrão com metavariaveis que permitem representar um conjunto, geralmente infinito, de sentenças.* □

Definição 6 (Regra). *Uma regra de dedução consiste num par $\langle \Gamma, \alpha \rangle$, sendo Γ um conjunto de sentenças chamadas de premissas e α uma sentença chamada conclusão.* □

Definição 7 (Axiomatização). *Um sistema de Hilbert para um sistema $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ consiste em um par $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$, sendo $\mathcal{A}$ um conjunto de esquemas de axiomas e $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}$*

o conjunto de regras de dedução abaixo.

A *Se* $\alpha \in \mathcal{A}$*, então* $\Gamma \vdash \alpha$

P *Se* $\alpha \in \Gamma$*, então* $\Gamma \vdash \alpha$

E *Se* $\vdash \alpha$*, então* $\Gamma \vdash \alpha$. □

Definição 8 (Dedução). *Uma dedução de* $\Gamma \vdash \alpha$ *consiste numa sucessão de sentenças* $\langle \varphi_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ *de modo que* $\varphi_n = \alpha$ *e cada sentença* φ_i *foi gerada a partir da aplicação de uma regra a axiomas, premissas ou sentenças anteriores.* □

2.2 Traduções

Traduções entre sistemas consistem em funções que mapeiam sentenças de um sistema a sentenças de outro, garantindo certas propriedades. As propriedades a serem garantidas variam e ainda são discutidas na literatura, deixando a definição exata de tradução — assim como houve com a definição de sistema — varie de acordo com a predileção e as necessidades de cada autor. Nesta seção, serão abordadas historicamente noções de tradução entre sistemas, bem como serão definidos e nomeados os conceitos de tradução que serão usados no restante deste trabalho.

Neste trabalho, adotaremos uma noção forte de tradução que requer tanto a correção forte quanto a completude forte, conforme **?**. Definiremos, ainda, uma notação que nos permite aplicar sucintamente a tradução a todos os elementos de um conjunto.

Definição 9 (Tradução). *Uma sentença* φ *de um sistema* $\mathbf{A} = \langle \mathcal{L}_\mathbf{A}, \vdash_\mathbf{A} \rangle$ *pode ser traduzida a uma sentença* φ^* *em um sistema* $\mathbf{B} = \langle \mathcal{L}_\mathbf{B}, \vdash_\mathbf{B} \rangle$ *caso exista uma função* $\bullet^* : \mathcal{L}_\mathbf{A} \to \mathcal{L}_\mathbf{B}$ *que garanta que* $\Gamma \vdash_\mathbf{A} \varphi \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash_\mathbf{B} \varphi^*$. □

Notação. *Seja* $\Gamma \in \wp(\mathcal{L}_\mathbf{A})$ *um conjunto de sentenças bem-formadas e* $\bullet^* : \mathcal{L}_\mathbf{A} \to \mathcal{L}_\mathbf{B}$ *uma tradução.* Γ^* *denota o conjunto* $\{\alpha^* \mid \alpha \in \Gamma\} \in \wp(\mathcal{L}_\mathbf{B})$*, ou seja, a aplicação da tradução a todos os elementos do conjunto* Γ. □

A primeira tradução entre dois sistemas conhecida na literatura foi definida por **?** como uma maneira de demonstrar que o uso da *lei do terço excluso*[2] não leva a contradições. Essa definição consiste basicamente em dobre-negar cada elemento da construção de uma dada sentença, motivo pelo qual chamaremos

[2]Definido como $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

essa tradução de *tradução de negação dupla* (**?**). Essa mesma tradução foi também descoberta independentemente por Gödel e por Getzen. Curiosamente, essa tradução mostra-se relevante para o escopo deste trabalho, uma vez que consiste na contraparte da passagem por continuações segundo a interpretação prova-programa.

Definição 10 ($\bullet^{\neg}$)**.** *Define-se a tradução* $\bullet^{\neg}$ *indutivamente da seguinte maneira:*

$$
\begin{aligned}
p^{\neg} &:= \neg\neg p \\
\bot^{\neg} &:= \neg\neg\bot \\
(\varphi \wedge \psi)^{\neg} &:= \neg\neg(\varphi^{\neg} \wedge \psi^{\neg}) \\
(\varphi \vee \psi)^{\neg} &:= \neg\neg(\varphi^{\neg} \vee \psi^{\neg}) \\
(\varphi \rightarrow \psi)^{\neg} &:= \neg\neg(\varphi^{\neg} \rightarrow \psi^{\neg})
\end{aligned}
$$

□

2.3 Provadores

3. Definições

3.1 Intuicionismo

Definição 11 ($\mathcal{L}_\mathbf{I}$)**.** *A linguagem do sistema intuicionista, denotada $\mathcal{L}_\mathbf{I}$, consiste no menor conjunto induzido a partir das seguintes regras:*

$$\bot \in \mathcal{L}_\mathbf{I}$$
$$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_\mathbf{I}$$
$$\alpha, \beta \in \mathcal{L}_\mathbf{I} \Rightarrow \alpha \circ \beta \in \mathcal{L}_\mathbf{I}, \text{ para } \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}. \qquad \square$$

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\top := \bot \rightarrow \bot$$
$$\neg\alpha := \alpha \rightarrow \bot$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta := (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$$

Definição 12. *A axiomatização do sistema intuicionista consiste no conjunto de esquemas de axiomas $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i \mid i \in [1,8] \vee i = \bot\}$ e no conjunto de regras $\mathcal{R} = \{\mathbf{R_1}\}$, definidos abaixo:*

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{A_1} & \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \\
\mathbf{A_2} & (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \\
\mathbf{A_3} & \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta \\
\mathbf{A_4} & \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \\
\mathbf{A_5} & \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \\
\mathbf{A_6} & \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \\
\mathbf{A_7} & \beta \rightarrow \alpha \vee \beta \\
\mathbf{A_8} & (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) \\
\mathbf{A_\bot} & \bot \rightarrow \alpha \\
\mathbf{R_1} & \textit{Se } \Gamma \vdash \alpha \textit{ e } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta\textit{, então } \Gamma \vdash \beta.
\end{array}
\qquad \square
$$

Daremos nomes aos esquemas e regras acima de modo a facilitar a comunicação no decorrer deste trabalho. Chamaremos o esquema $\mathbf{A_1}$ de esquema da constante e o esquema $\mathbf{A}_1$ de esquema da aplicação.[1] Ao esquema $\mathbf{A}_3$ daremos o nome de introdução da conjunção, enquanto os esquemas $\mathbf{A}_4$ e $\mathbf{A}_5$ serão chamados de eliminação da conjunção. Analogamente, os esquemas $\mathbf{A}_6$ e $\mathbf{A}_7$ serão chamados de introdução da disjunção, enquanto ao esquema $\mathbf{A}_8$ chamaremos de eliminação da disjunção. Por fim, chamaremos $\mathbf{A}_\bot$ de esquema da explosão e $\mathbf{R}_1$ de regra da separação ou *modus ponens*.

3.2 Modalismo

BABIRESKI: ? traz uma visão da evolução dos sistemas modais.

Definição 13 ($\mathcal{L}_\mathbf{M}$)**.** *A linguagem dos sistemas modais, denotada $\mathcal{L}_\mathbf{M}$, consiste no menor conjunto induzido a partir das seguintes regras:*

$$
\begin{aligned}
&\bot \in \mathcal{L}_\mathbf{M}\\
&\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_\mathbf{M}\\
&\alpha \in \mathcal{L}_\mathbf{M} \Rightarrow \Box\alpha \in \mathcal{L}_\mathbf{M}\\
&\alpha, \beta \in \mathcal{L}_\mathbf{M} \Rightarrow \alpha \circ \beta \in \mathcal{L}_\mathbf{M}, \textit{ para } \circ \in \{\wedge, \vee, \to\}\,.
\end{aligned}
$$
□

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$
\begin{aligned}
\top &:= \bot \to \bot\\
\neg\alpha &:= \alpha \to \bot\\
\Diamond\alpha &:= \neg\Box\neg\alpha\\
\alpha \prec \beta &:= \Box(\alpha \to \beta)\\
\alpha \leftrightarrow \beta &:= (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)
\end{aligned}
$$

Notação. *Seja $\Gamma \in \wp(\mathcal{L}_\mathbf{M})$ um conjunto de sentenças bem-formadas. $\Box\Gamma$ denota o conjunto $\{\Box\alpha \mid \alpha \in \Gamma\} \in \wp(\mathcal{L}_\mathbf{M})$, ou seja, a prefixação da negação a todos os elementos do conjunto.*

Definição 14. *A axiomatização do sistema modal consiste no conjunto de esquemas de axiomas $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i \mid i \in [1,8] \vee i = \neg\} \cup \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3\}$ e no conjunto de regras $\mathcal{R} = \{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2\}$,*

[1] Em analogia aos combinadores **K** e **S**.

definidos abaixo:

$\mathbf{A_1}$ $\alpha \to \beta \to \alpha$

$\mathbf{A_2}$ $(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$

$\mathbf{A_3}$ $\alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta$

$\mathbf{A_4}$ $\alpha \wedge \beta \to \alpha$

$\mathbf{A_5}$ $\alpha \wedge \beta \to \beta$

$\mathbf{A_6}$ $\alpha \to \alpha \vee \beta$

$\mathbf{A_7}$ $\beta \to \alpha \vee \beta$

$\mathbf{A_8}$ $(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)$

$\mathbf{A_\neg}$ $\neg\neg\alpha \to \alpha$

$\mathbf{B_1}$ $\Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$

$\mathbf{B_2}$ $\Box\alpha \to \alpha$

$\mathbf{B_3}$ $\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$

$\mathbf{R_1}$ *Se* $\Gamma \vdash \alpha$ *e* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*, então* $\Gamma \vdash \beta$

$\mathbf{R_2}$ *Se* $\vdash \alpha$*, então* $\Gamma \vdash \Box\alpha$. □

BABIRESKI: Falar aqui sobre como a axiomatização consiste nos esquemas clássicos mais os esquemas modais.

Assim como feito para o sistema intuicionista, nomearemos os esquemas e regras acima de modo a facilitar a comunicação. Aos axiomas e regras que correspondem aos axiomas e regras intuicionistas receberão os mesmos nomes. Ademais, chamaremos $\mathbf{B_1}$ de axiomas da normalidade, $\mathbf{B_2}$ de axiomas da reflexividade e $\mathbf{B_3}$ de axiomas da transitividade.[2] Nomearemos $\mathbf{A_\neg}$ como chamaremos de axiomas da eliminação da negação e a $\mathbf{R_2}$ como regra da necessitação.

A definição das regras de dedução em relação a conjuntos de sentenças baseia-se tanto em **?** como em **?**. Ao decorrer do texto, ocasionalmente chamaremos $\mathbf{R_1}$ de *regra da separação* e $\mathbf{R_2}$ de *regra da necessitação*.

3.3 Traduções

A primeira tradução do sistema intuicionista ao sistema modal foi proposta por **?** motivado pela possibilidade de leitura da necessidade como uma modalidade de construtividade. Ou seja, por meio dessa tradução, a sentença $\Box\varphi$ poderia ser

[2] Em analogia às condições relacionais impostas nos quadros.

lida como φ *pode ser provada construtivamente* (**?**). Gödel conjeiturou a corretude fraca dessa tradução, que foi posteriormente provada por **?** em conjunto com sua completude fraca.

Definição 15 **($\bullet^\circ$).** *Define-se a tradução $\bullet^\circ$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\circ &:= p \\ \bot^\circ &:= \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\circ &:= \varphi^\circ \wedge \psi^\circ \\ (\varphi \vee \psi)^\circ &:= \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ \\ (\varphi \to \psi)^\circ &:= \Box\varphi^\circ \to \psi^\circ \end{aligned}$$

□

Definição 16 **($\bullet^\Box$).** *Define-se a tradução $\bullet^\Box$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\Box &:= \Box p \\ \bot^\Box &:= \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\Box &:= \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \\ (\varphi \vee \psi)^\Box &:= \varphi^\Box \vee \psi^\Box \\ (\varphi \to \psi)^\Box &:= \Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box) \end{aligned}$$

□

Faz-se interessante pontuar que as traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^\Box$ correspondem, respectivamente, às traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^*$ do sistema intuicionista ao sistema linear providas por **?**, sendo as primeiras correspondentes a uma ordem de avaliação por nome (*call-by-name*) e as segundas a uma ordem de avaliação por valor (*call-by-value*). Ademais, as duas traduções providas são equivalentes, conforme demonstrado pelo teorema $\mathbf{T_2}$.

4. Formalização

Todas as derivações a seguir serão no sistema $\mathbf{S_4}$, motivo pelo qual denotaremos a relação de derivação $\vdash_4$ apenas como $\vdash$.

4.1 Derivações

Nesta seção apresentaremos alguns lemas e teoremas para os sistemas modais que permitirão simplificar muito as provas apresentadas no decorrer deste trabalho. Primeiramente, provaremos que, dada uma sentença qualquer, esta sempre implica a si mesma. A este lema daremos o nome de identidade[1] e, em seguida, usaremo-no para a prova da regra da dedução.

Lema 1. $\vdash \alpha \to \alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$
2	$\vdash \alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$
3	$\vdash (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_2}$
4	$\vdash (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{2,3\}$
5	$\vdash \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,4\}$

Estando assim provada a proposição. □

Tendo-se provado o lema da identidade, agora provaremos a regra da dedução para os sistemas modais com base na prova apresentada por **?**. Pequenas alterações foram feitas de modo a garantir a adequação da prova com a axiomatização provida na definição $\mathbf{D_0}$.

Teorema 1. *Se* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, *então* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução.[2] Assim, suponhamos que o teorema da dedução valha para qualquer sucessão dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos, analisando-se os casos, que o teorema da dedução vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k + 1$.

[1] Em analogia ao combinador **I**.

[2] Note que, para a indução forte, não se faz preciso provar nenhuma base (**?**).

Caso 1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de alguma premissa, sabe-se que $\beta \in \Gamma \cup \{\alpha\}$. Deste modo, existem outros dois casos a serem analisados.

Caso 1.1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de alguma premissa, sabe-se que existe alguma premissa $\mathbf{P}_\beta \in \Gamma$ igual a β. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{P}_\beta$
2	$\Gamma \vdash \beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$
3	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,2\}$.

Caso 1.2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação da premissa α, sabe-se que $\beta = \alpha$. Deste modo, basta demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$ o que consiste num enfraquecimento do lema $\mathbf{L_0}$.

Caso 2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de algum axioma, sabe-se que existe algum esquema $\mathbf{A}_\beta \in \mathcal{A}$ que gera β. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{A}_\beta$
2	$\Gamma \vdash \beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$
3	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,2\}$.

Caso 3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido gerada pela aplicação da regra da necessitação a uma linha anterior, sabe-se que $\beta = \Box\varphi$ e que $\mathbf{H_1} = \varphi$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Gamma \vdash \Box\varphi$	$\mathbf{R_2}$ $\{1\}$
3	$\Gamma \vdash \Box\varphi \to \alpha \to \Box\varphi$	$\mathbf{A_1}$
4	$\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$	$\mathbf{R_1}$ $\{2,3\}$.

Caso 4. Seja a sentença $\varphi_n = \beta$ gerada pela aplicação da regra da separação a duas sentenças φ_i e φ_j com $i < j < n$. Assumiremos, sem perda de generalidade, que $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_n$. Assim, pela premissa da indução temos que $\mathbf{H_1} = \alpha \to \varphi_i$ e que $\mathbf{H_2} = \alpha \to \varphi_i \to \varphi_n$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \alpha \to \varphi_j$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Gamma \vdash \alpha \to \varphi_j \to \beta$	$\mathbf{H_2}$
3	$\Gamma \vdash (\alpha \to \varphi_j \to \beta) \to (\alpha \to \varphi_j) \to (\alpha \to \beta)$	$\mathbf{A_2}$
4	$\Gamma \vdash (\alpha \to \varphi_j) \to (\alpha \to \beta)$	$\mathbf{R_1}$ $\{2,3\}$
5	$\alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,4\}$.

Uma vez provada a propriedade para todos os casos do passo de indução □

Teorema 2. *Se* $\Box\Gamma \vdash \alpha$, *então* $\Box\Gamma \vdash \Box\alpha$.

Demonstração. Prova por indução fraca sobre o tamanho n do conjunto $\Box\Gamma$ (**?**). A prova consiste em dois casos: um para a base da indução e outro para o passo da indução.

Caso 1. Para a base, consideraremos que $\Box\Gamma = \varnothing$ — ou seja, que possui tamanho $n = 0$. Assim, sabemos que $\Box\Gamma \vdash \alpha$ e, portanto, que existe uma sucessão de dedução $\langle \varphi_i \mid 0 \leq i \leq n \rangle$ com $\varphi_n = \alpha$ Pode-se demonstrar que $\vdash \Box\alpha$ trivialmente pela aplicação da regra da necessitação $\mathbf{R_2}$ sobre a sentença φ_n.

Caso 2. Para o passo, suponhamos que a generalização da regra da necessitação valha para qualquer conjunto $\Box\Gamma$ de tamanho $n = k$. Demonstraremos, pela sucessão de dedução apresentada abaixo, que a generalização da regra da necessitação vale para conjuntos $\Box\Gamma$ de tamanho $n = k + 1$.

1	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \beta$
2	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \to \beta$
3	$\Box\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha \to \beta)$
4	$\Box\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha \to \beta) \to \Box\Box\alpha \to \Box\beta$
5	$\Box\Gamma \vdash \Box\Box\alpha \to \Box\beta$
6	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$
7	$\Box\Gamma \vdash (\Box\alpha \to \Box\Box\alpha) \to (\Box\Box\alpha \to \Box\beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$

8	$\Box\Gamma \vdash (\Box\Box\alpha \to \Box\beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$	
9	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \to \Box\beta$	
10	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$	
11	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \to \Box\beta$	
12	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\beta$	

□

Uma vez provada a generalização da regra da implicação, a prova da regra da dedução estrita — conforme descrito por **??** — torna-se trivial, como pode ser visto abaixo. Esta regra derivada permite simplificar as provas de corretude das traduções, uma vez que uma das traduções que serão apresentadas mapeia implicações materiais do sistema intuicionista em implicações estritas.

Teorema 3. *Se* $\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$*, então* $\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$*.*

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Box\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{T_0}$ $\{1\}$
3	$\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{T_0}$ $\{2\}$. □

Lema 2. $\vdash \bot \to \alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\bot\} \vdash \bot$	$\mathbf{P_1}$
2	$\{\bot\} \vdash \bot \to (\alpha \to \bot) \to \bot$	$\mathbf{A_1}$
3	$\{\bot\} \vdash \neg\neg\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,2\}$
4	$\{\bot\} \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_\neg}$
5	$\{\bot\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{3,4\}$
6	$\vdash \bot \to \alpha$	$\mathbf{T_1}$ $\{5\}$. □

Lema 3. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \beta \to \bot$	$\mathbf{P_2}$
2	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\beta \to \bot) \to \alpha \to (\beta \to \bot)$	$\mathbf{A_1}$

3	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \bot$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,2\}$
4	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\alpha \to \beta \to \bot) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \bot)$	$\mathbf{A_2}$
5	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{P_1}$
6	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \bot)$	$\mathbf{R_1}$ $\{3,4\}$
7	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{5,6\}$
8	$\{\alpha \to \beta\} \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$	$\mathbf{T_0}$ $\{7\}$
9	$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	$\mathbf{T_0}$ $\{8\}$.

□

Lema 4. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \beta \wedge \gamma$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{P_3}$
2	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{P_1}$
3	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,2\}$
4	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{P_2}$
5	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,4\}$
6	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta \to \gamma \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{A_3}$
7	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{R_1}$ $\{3,6\}$
8	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{R_1}$ $\{5,7\}$
9	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma\} \vdash \alpha \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{T_0}$ $\{8\}$
10	$\{\alpha \to \beta\} \vdash (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{T_0}$ $\{9\}$
11	$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{T_0}$ $\{10\}$.

□

Lema 5. $\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha \wedge \Box\beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$	$\mathbf{A_4}$
2	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \to \alpha)$	$\mathbf{R_2}$ $\{1\}$
3	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \to \alpha) \to (\Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha)$	$\mathbf{B_1}$
4	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{2,3\}$
5	$\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$	$\mathbf{A_5}$
6	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \to \beta)$	$\mathbf{R_2}$ $\{5\}$

7	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\beta)$	$\mathbf{B_1}$
8	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{6,7\}$
9	$\vdash (\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha) \rightarrow (\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{L_0}$
10	$\vdash (\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{4,9\}$
11	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{6,9\}$

□

Lema 6. $\vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{A_3}$
2	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \rightarrow \Box\alpha$	$\mathbf{A_4}$
3	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \rightarrow \alpha$	
4	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \rightarrow \Box\beta$	$\mathbf{A_5}$
5	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \rightarrow \beta$	
6	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,4\}$

□

Lema 7. $\vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\alpha \rightarrow \beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{P_2}$
2	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \rightarrow \alpha$	$\mathbf{B_2}$
3	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,2\}$
4	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$	$\mathbf{P_1}$
5	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{B_2}$
6	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{4,5\}$
7	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{3,6\}$
8	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta)\} \vdash \Box\alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{T_1}$ $\{7\}$
9	$\vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{T_1}$ $\{8\}$.

□

Lema 8. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1 $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha$

2 $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \to \beta$

3 $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta$

4 $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta \to \gamma$

5 $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$

6 $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$

7 $\{\alpha \to \beta\} \vdash (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$

8 $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$

Daremos a este lema o nome *lema da composição*. □

Lema 9. $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1 $\{\alpha\} \vdash \alpha$

Daremos a este lema o nome *lema da introdução da dupla negação*. □

Lema 10. $\vdash (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta \vee \gamma$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1 $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \alpha$

2 $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \alpha \to \beta$

3 $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta$

4 $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta \to \beta \vee \gamma$

5 $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta \vee \gamma$

6 $\{\alpha \to \beta\} \vdash \alpha \to \beta \vee \gamma$

7 $\vdash (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta \vee \gamma$

□

Lema 11. $\vdash (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \vee \beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1 $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \alpha$

2 $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \alpha \to \beta$

3 $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta$

4 $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta \to \gamma \vee \beta$

5 $\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \gamma \vee \beta$

6 $\{\alpha \to \beta\} \vdash \alpha \to \gamma \vee \beta$

7 $\vdash (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \vee \beta$

□

4.2 Dualidades

BABIRESKI: Ver **?** acerca dos axiomas duais e suas derivações.

Teorema 4. $\vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1 $\{\Box(\alpha \to \beta), \Diamond\alpha\} \vdash \Diamond\beta$

2 $\{\Box(\alpha \to \beta)\} \vdash \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$

3 $\vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$

□

Teorema 5. $\vdash \alpha \to \Diamond\alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \Box\neg\alpha \to \neg\alpha$	$\mathbf{B_2}$
2	$\vdash (\Box\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{L_3}$
3	$\vdash \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,2\}$
4	$\vdash (\neg\neg\alpha \to \neg\Box\neg\alpha) \to \alpha \to (\neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha)$	$\mathbf{A_1}$
5	$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{3,4\}$
6	$\vdash (\alpha \to \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha) \to (\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\alpha \to \Diamond\alpha)$	$\mathbf{A_2}$
7	$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$	**BABIRESKI:** Provar.
8	$\vdash (\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\alpha \to \Diamond\alpha)$	$\mathbf{R_1}$ $\{5,6\}$

9	$\vdash \alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{7,8\}$.

$\square$

Teorema 6. $\vdash \Diamond \Diamond \alpha \to \Diamond\alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \neg\square\alpha \to \neg\square \Diamond \alpha$
2	$\vdash \Diamond \Diamond \alpha \to \Diamond\alpha$

$\square$

4.3 Isomorfismo

Conforme afirmado anteriormente, ambas as traduções apresentada neste trabalho equivalem — ou seja, são isomorfas — na forma $\vdash \square\alpha^{\circ} \leftrightarrow \alpha^{\square}$. Nesta seção, provaremos este isomorfismo que, não somente consititui puramente um resultado de interesse, como permite tornar a prova de propriedades de uma tradução triviais caso tais propriedades valham para a outra tradução.

Teorema 7. $\vdash \square\alpha^{\circ} \leftrightarrow \alpha^{\square}$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre a profundidade de α. Assim, suponhamos que as traduções equivalham para qualquer α de profundidade $n < k$. Demonstraremos analisando-se os casos e valendo-se da suposição acima — doravante chamada **H** — o passo de indução, ou seja, que as traduções equivalem para qualquer α de profundidade $n = k$.

Caso 1. Se a sentença α for uma proposição a, sabe-se que $\square a^{\circ} = \square a$ e que $a^{\square} = \square a$ pelas definições das traduções. Deste modo, tanto a ida quanto a volta possuem a forma $\square a \to \square a$ e podem ser provadas pelo lema $\mathbf{L_0}$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 2. Se a sentença α for a constante $\bot$, sabe-se que $\square\bot^{\circ} = \square\bot$ e que $\bot^{\square} = \bot$ pelas definições das traduções. Deste modo, a ida $\square\bot \to \bot$ constitui um axioma gerado pelo esquema $\mathbf{B_2}$ — sendo assim provada trivialmente — e a volta $\bot \to \square\bot$ pode ser provada pelo lema $\mathbf{L_2}$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 3. Se a sentença α for o resultado da conjunção de duas outras sentenças φ e ψ, sabe-se que $\Box(\varphi \wedge \psi)^\circ = \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$ e que $(\varphi \wedge \psi)^{\square} = \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \rightarrow \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$ e outro para a volta $\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square} \rightarrow \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema da introdução da conjunção $\mathbf{A_3}$.

Caso 3.1. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \varphi^{\square}$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \Box\psi^\circ \rightarrow \psi^{\square}$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \rightarrow \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$	$\mathbf{P_1}$
2	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \rightarrow \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ$	$\mathbf{L_5}$
3	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,2\}$
4	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ \rightarrow \Box\varphi^\circ$	$\mathbf{A_4}$
5	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ$	$\mathbf{R_1}$ $\{3,4\}$
6	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \varphi^{\square}$	$\mathbf{H_1}$
7	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^{\square}$	$\mathbf{R_1}$ $\{5,6\}$
8	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ$	$\mathbf{A_4}$
9	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\psi^\circ$	$\mathbf{R_1}$ $\{3,8\}$
10	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\psi^\circ \rightarrow \psi^{\square}$	$\mathbf{H_2}$
11	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \psi^{\square}$	$\mathbf{R_1}$ $\{9,10\}$
12	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^{\square} \rightarrow \psi^{\square} \rightarrow \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$	$\mathbf{A_3}$
13	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \psi^{\square} \rightarrow \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$	$\mathbf{R_1}$ $\{7,12\}$
14	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$	$\mathbf{R_1}$ $\{9,13\}$
15	$\vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \rightarrow \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$	$\mathbf{T_1}$ $\{14\}$

Caso 3.2. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi^{\square} \rightarrow \Box\varphi^\circ$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \psi^{\square} \rightarrow \Box\psi^\circ$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square} \rightarrow \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$	$\mathbf{P}$

2	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square} \to \varphi^{\square}$	**P**
3	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square}$	**P**
4	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \to \Box\varphi^{\circ}$	**P**
5	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \Box\varphi^{\circ}$	**P**
6	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square} \to \psi^{\square}$	**P**
7	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \psi^{\square}$	**P**
8	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \psi^{\square} \to \Box\psi^{\circ}$	**P**
9	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \Box\psi^{\circ}$	**P**
10	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \to \Box\psi^{\circ} \to \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ}$	**P**
11	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \Box\psi^{\circ} \to \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ}$	**P**
12	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ}$	**P**
13	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ} \to \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$	**P**
14	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$	**P**
15	$\vdash \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square} \to \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$	**P**

Caso 4. Se a sentença α for o resultado da disjunção de duas outras sentenças φ e ψ, sabe-se que $\Box(\varphi \vee \psi)^{\circ} = \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$ e que $(\varphi \vee \psi)^{\square} = \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$ e outro para a volta $\varphi^{\square} \vee \psi^{\square} \to \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema da introdução da conjunção $\mathbf{A_3}$.

Caso 4.1. A partir de **H**, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \Box\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square}$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \Box\psi^{\circ} \to \psi^{\square}$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square}$
2	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})\} \vdash (\Box\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square}) \to \Box\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$
3	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$
4	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})\} \vdash \Box\psi^{\circ} \to \psi^{\square}$
5	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})\} \vdash (\Box\psi^{\circ} \to \psi^{\square}) \to \Box\psi^{\circ} \to \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$
6	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})\} \vdash \Box\psi^{\circ} \to \varphi^{\square} \vee \psi^{\square}$

7 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})$

8 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ}) \to \Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ}$

9 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ}$

10 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})\} \vdash (\Box\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square} \lor \psi^{\square}) \to (\Box\psi^{\circ} \to \varphi^{\square} \lor \psi^{\square}) \to \Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ} \to \varphi^{\square} \lor \psi^{\square}$

11 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})\} \vdash (\Box\psi^{\circ} \to \varphi^{\square} \lor \psi^{\square}) \to \Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ} \to \varphi^{\square} \lor \psi^{\square}$

12 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ} \to \varphi^{\square} \lor \psi^{\square}$

13 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})\} \vdash \varphi^{\square} \lor \psi^{\square}$

14 $\vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \lor \psi^{\square}$

Caso 4.2. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi^{\square} \to \Box\varphi^{\circ}$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \psi^{\square} \to \Box\psi^{\circ}$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^{\square} \lor \psi^{\square} \to \Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})$ pela seguinte sucessão de dedução:

1 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \to \Box\varphi^{\circ}$

2 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \to \Box\Box\varphi^{\circ}$

3 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash (\varphi^{\square} \to \Box\varphi^{\circ}) \to (\Box\varphi^{\circ} \to \Box\Box\varphi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ}$

4 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash (\Box\varphi^{\circ} \to \Box\Box\varphi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ}$

5 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ}$

6 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash (\varphi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ}$

7 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ}$

8 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \psi^{\square} \to \Box\psi^{\circ}$

9 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \Box\psi^{\circ} \to \Box\Box\psi^{\circ}$

10 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash (\psi^{\square} \to \Box\psi^{\circ}) \to (\Box\psi^{\circ} \to \Box\Box\psi^{\circ}) \to \psi^{\square} \to \Box\Box\psi^{\circ}$

11 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash (\Box\psi^{\circ} \to \Box\Box\psi^{\circ}) \to \psi^{\square} \to \Box\Box\psi^{\circ}$

12 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \psi^{\square} \to \Box\Box\psi^{\circ}$

13 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash (\psi^{\square} \to \Box\Box\psi^{\circ}) \to \psi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ}$

14 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \psi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ}$

15 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \lor \psi^{\square}$

16 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash (\varphi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ}) \to (\psi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \lor \psi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ}$

17 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash (\psi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \lor \psi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ}$

18 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \lor \psi^{\square} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ}$

19 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ}$

20 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \Box\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\Box\psi^{\circ} \to \Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})$

21 $\{\varphi^{\square} \lor \psi^{\square}\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})$

22 $\vdash \varphi^{\square} \lor \psi^{\square} \to \Box(\Box\varphi^{\circ} \lor \Box\psi^{\circ})$

Caso 5. Se a sentença α for o resultado da implicação de uma sentença φ a uma sentença ψ, sabe-se que $\Box(\varphi \to \psi)^{\circ} = \Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})$ e que $(\varphi \to \psi)^{\square} = \Box(\varphi^{\square} \to \psi^{\square})$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ}) \to \Box(\varphi^{\square} \to \psi^{\square})$ e outro para a volta $\Box(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}) \to \Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 5.1. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi^{\square} \to \Box\varphi^{\circ}$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \psi^{\square} \to \Box\psi^{\circ}$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ}) \to \Box(\psi^{\square} \to \psi^{\square})$ pela seguinte sucessão de dedução:

1 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})$

2 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ}) \to \Box\Box\varphi^{\circ} \to \Box\psi^{\circ}$

3 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \to \Box\Box\varphi^{\circ}$

4 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash \Box\Box\varphi^{\circ} \to \Box\psi^{\circ}$

5 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash (\Box\varphi^{\circ} \to \Box\Box\varphi^{\circ}) \to (\Box\Box\varphi^{\circ} \to \Box\psi^{\circ}) \to \Box\varphi^{\circ} \to \Box\psi^{\circ}$

6 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash (\Box\Box\varphi^{\circ} \to \Box\psi^{\circ}) \to \Box\varphi^{\circ} \to \Box\psi^{\circ}$

7 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash \varphi^{\square} \to \Box\varphi^{\circ}$

8 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \to \Box\psi^{\circ}$

9 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash (\varphi^{\square} \to \Box\varphi^{\circ}) \to (\Box\varphi^{\circ} \to \Box\psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \to \Box\psi^{\circ}$

10 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash (\Box\varphi^{\circ} \to \Box\psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \to \Box\psi^{\circ}$

11 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash \varphi^{\square} \to \Box\psi^{\circ}$

12 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash \Box\psi^{\circ} \to \psi^{\square}$

13 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash (\varphi^{\square} \to \Box\psi^{\circ}) \to (\Box\psi^{\circ} \to \psi^{\square}) \to \psi^{\square} \to \psi^{\square}$

14 $\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash (\Box\psi^{\circ} \to \psi^{\square}) \to \psi^{\square} \to \psi^{\square}$

15 $\{\square(\square\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash \psi^{\square} \to \psi^{\square}$

16 $\{\square(\square\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})\} \vdash \square(\psi^{\square} \to \psi^{\square})$

17 $\vdash \square(\square\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ}) \to \square(\psi^{\square} \to \psi^{\square})$

Caso 5.2. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \square\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square}$ e que $\mathbf{H_2} = \psi^{\square} \to \square\psi^{\circ}$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \square(\psi^{\square} \to \psi^{\square}) \to \square(\square\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})$ pela seguinte sucessão de dedução:

1 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash \square\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square}$

2 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash \square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square})$

3 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash \square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}) \to \varphi^{\square} \to \psi^{\square}$

4 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash \varphi^{\square} \to \psi^{\square}$

5 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash (\square\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square}) \to (\varphi^{\square} \to \psi^{\square}) \to \square\varphi^{\circ} \to \psi^{\square}$

6 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash (\varphi^{\square} \to \psi^{\square}) \to \square\varphi^{\circ} \to \psi^{\square}$

7 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash \square\varphi^{\circ} \to \psi^{\square}$

8 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash \psi^{\square}$

9 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash \psi^{\square} \to \square\psi^{\circ}$

10 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash \square\psi^{\circ}$

11 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash \square\psi^{\circ} \to \psi^{\circ}$

12 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}), \square\varphi^{\circ}\} \vdash \psi^{\circ}$

13 $\{\square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square})\} \vdash \square(\square\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})$

14 $\vdash \square(\varphi^{\square} \to \psi^{\square}) \to \square(\square\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})$

Tendo-se provado todos os casos do passo de indução, podemos concluir que ambas as traduções apresentadas equivalem, ou seja, que $\vdash \square\alpha^{\circ} \leftrightarrow \alpha^{\square}$. $\square$

4.4 Correção

Teorema 8. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$, *então* $\Gamma^{\square} \vdash_{\mathbf{4}} \alpha^{\square}$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Assim, suponhamos que a tradução seja correta para qualquer sucessão dedução