Uma formalização da interpretação modal do sistema intuicionista

Elian Babireski

2024

Resumo

Resumo aqui.

Sumário

«‹Oh, you can’t help that,› said the Cat: ‹we’re all mad here. I’m mad. You’re mad.› ‹How do you know I’m mad?› said Alice. ‹You must be,› said the Cat, ‹or you wouldn’t have come here.›»

— Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

1. Introdução

As lógicas modais consistem em um conjunto de extensões da lógica clássica que contam com a adição de um ou mais operadores, chamados modalidades, que qualificam sentenças. No caso do sistema **S4**, são adicionadas as modalidades de necessidade ($\Box$) e possibilidade ($\Diamond$) em conjunto à regra da necessitação[1] e os axiomas **K**: $\Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B$, **T**: $\Box A \to A$ e **4**: $\Box A \to \Box\Box A$ (Troelstra and Schwichtenberg, 2000). Ademais, pode-se derivar nesse sistema, por meio da dualidade entre as modalidades[2], sentenças duais aos axiomas **T** e **4**, sendo elas $\mathbf{T}_\Diamond$: $A \to \Diamond A$ e $\mathbf{4}_\Diamond$: $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$, respectivamente Zach (2024).

As mônadas ganharam destaque na área de linguagens de programação desde que Moggi (1991) formalizou uma metalinguagem que faz uso dessas estruturas para modelar noções de computação — como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuações — de uma maneira puramente funcional. Pode-se notar uma grande semelhança entre as sentenças $\mathbf{T}_\Diamond$ e $\mathbf{4}_\Diamond$ e as transformações naturais monádicas $\boldsymbol{\eta}$: $1_C \to T$ e $\boldsymbol{\mu}$: $T^2 \to T$, respectivamente. Nesse sentido, Pfenning and Davies (2001) demonstraram que se pode traduzir essa metalinguagem para o sistema **S4** da lógica modal, pelo qual se torna interessante analisar esse sistema como uma linguagem de programação sob a ótica do isomorfismo de Curry-Howard.

Troelstra and Schwichtenberg (2000) apresentam duas traduções equivalentes da lógica intuicionista para o sistema **S4** da lógica modal, sendo um deles correspondente a uma abordagem *call-by-name* e outra a um abordagem *call-by-value*. Tais traduções possuem grande similaridade com as traduções da lógica intuicionista para a lógica linear definidas por Girard (1987). Essas traduções equivalem à tradução por negação dupla que, por sua vez, equivalem a traduções *continuation-passing style* (CPS) em compiladores por meio do isomorfismo de Curry-Howard (Reynolds, 1993), o que torna esse tema interessante no ponto de vista de compilação.

Durante grande parte da história, provas lógicas e matemáticas eram validadas manualmente pela comunidade acadêmica, o que muitas vezes — a depender do tamanho e complexidade da prova — se mostrava ser um trabalho complexo e sujeito a erros. Hoje em dia, exitem *softwares* chamados assistentes de provas que permitem verificar — graças ao isomorfismo de Curry-Howard — a corretude de provas (Chlipala, 2022). O assistente de provas que será usado neste trabalho é o Coq, que utiliza o cálculo de construções indutivas e um conjunto axiomático pequeno para permitir a escrita de provas simples e intuitivas **?**.

Este trabalho será uma continuação do desenvolvimento da biblioteca de lógica modal no assistente de provas Coq feito em **?** e posteriormente expandido de forma a permitir a fusão de lógicas modais em **?**. Uma formalização similar de traduções de lógicas foi feito em **?**, porém, neste caso, das lógicas clássica e intuicionista para a lógica linear.

[1] Se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$

[2] $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$

1.1 Justificativa

1.2 Metas

1.3 Estruturação

2. Fundamentação

2.1 Sistemas

Conforme visto, as noções de sistema variam entre diferentes autores e permanece um campo em aberto. Para as necessidades deste trabalho, usaremos a definição proposta por Béziau (1994), uma vez que se trata de uma definição simples e que, portanto, não traz elementos irrelevantes aos intuitos deste trabalho.

Definição 1 (Sistema)**.** *Um sistema consiste num par* $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$*, onde* $\mathcal{L}$ *consiste em um conjunto de sentenças bem-formadas e* $\Vdash : \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ *em uma relação sobre as sentenças, sem demais condições.* $\square$

Cabe destacar que a definição de sistema provida foi definida com base em $\Vdash$, uma relação qualquer entre as sentenças, que pode ser uma relação de dedução, denotada $\vdash$, ou uma relação de satisfação, denotada $\vDash$. Propriedades da tradução podem ser provadas sobre qualquer uma dessas relações, como veremos adiante. Entretanto, neste trabalho, serão abordadas somente as relações de dedução.

Definição 2 (Assinatura)**.** *Uma assinatura consiste num conjunto de operadores e suas respeitivas aridades. A notação* $\circ^n$ *denota um operador* $\circ$ *com aridade* $n \in \mathbb{N}$*.* $\square$

Definiremos a noção de profundidade de uma sentença para que possamos realizar indução na profundidade da sentença, conforme Troelstra and Schwichtenberg (2000).

Definição 3 (Profundidade)**.** *A profundidade* $|\alpha|$ *de uma sentença* α *consiste no comprimento do maior ramo de sua construção. Seja* $\circ$ *um operador qualquer, define-se a profundidade recursivamente como:*

$$
\begin{aligned}
|p| &:= 0 \\
|\bot| &:= 0 \\
|\circ\alpha| &:= |\alpha| + 1 \\
|\alpha \circ \beta| &:= \max(|\alpha|, |\beta|) + 1.
\end{aligned}
$$

$\square$

Definição 4 (Esquema)**.** *Um esquema consiste em um padrão com metavariaveis que permitem representar um conjunto, geralmente infinito, de sentenças.* $\square$

Definição 5 (Regra)**.** *Uma regra de dedução consiste num par* $\langle \Gamma, \alpha \rangle$*, sendo* Γ *um conjunto de sentenças chamadas de premissas e* α *uma sentença chamada conclusão.* $\square$

Definição 6 (Axiomatização)**.** *Um sistema de Hilbert para um sistema* $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *consiste em um par* $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$*, sendo* $\mathcal{A}$ *um conjunto de esquemas axiomas e* $\mathcal{R}$ *um conjunto de regras de dedução.* $\square$

Definição 7 (Dedução)**.** *Uma dedução de* $\Gamma \vdash \alpha$ *consiste numa sucessão de sentenças* $\langle \varphi_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ *de modo que* $\varphi_n = \alpha$ *e cada sentença* φ_i *foi gerada a partir da aplicação de uma regra a axiomas, premissas ou sentenças anteriores.* $\square$

2.2 Traduções

Traduções entre sistemas consistem em funções que mapeiam sentenças de um sistema a sentenças de outro sistema garantindo certas propriedades. As propriedades a serem garantidas variam e ainda são discutidas na literatura, deixando a definição exata de tradução — assim como houve com a definição de sistema — varie de acordo com a predileção e as necessidades de cada autor. Nesta seção, serão abordadas historicamente noções de tradução entre sistemas, bem como serão definidos e nomeados os conceitos de tradução que serão usados no restante deste trabalho.

Definição 8 (Tradução)**.** *Uma sentença φ de um sistema $\mathbf{A} = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{A}}, \vdash_{\mathbf{A}} \rangle$ pode ser traduzida a uma sentença φ^* em um sistema $\mathbf{B} = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{B}}, \vdash_{\mathbf{B}} \rangle$ caso exista uma função $\bullet^* : \mathcal{L}_{\mathbf{A}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{B}}$ que garanta que $\Gamma \vdash_{\mathbf{A}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash_{\mathbf{B}} \varphi^*$.* $\square$

Notação. *Seja $\Gamma \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{A}})$ um conjunto de sentenças bem-formadas e $\bullet^* : \mathcal{L}_{\mathbf{A}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{B}}$ uma tradução. Γ^* denota o conjunto $\{\alpha^* \mid \alpha \in \Gamma\} \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{B}})$, ou seja, a aplicação da tradução a todos os elementos do conjunto.* $\square$

Definição 9 ($\bullet^{\neg}$)**.** *Define-se a tradução $\bullet^{\neg}$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned}
p^{\neg} &:= \neg\neg p \\
\bot^{\neg} &:= \bot \\
(\varphi \wedge \psi)^{\neg} &:= \neg\neg(\varphi^{\neg} \wedge \psi^{\neg}) \\
(\varphi \vee \psi)^{\neg} &:= \neg\neg(\varphi^{\neg} \vee \psi^{\neg}) \\
(\varphi \to \psi)^{\neg} &:= \neg\neg(\varphi^{\neg} \to \psi^{\neg})
\end{aligned}$$ $\square$

2.3 Provadores

3. Sistemas

3.1 Intuicionista

Definição 10 ($\mathcal{L}_{\mathbf{I}}$)**.** *A linguagem do sistema intuicionista, denotada $\mathcal{L}_{\mathbf{I}}$, consiste no menor conjunto induzido a partir das seguintes regras:*

$$\begin{aligned}
&\bot \in \mathcal{L}_{\mathbf{I}} \\
&\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{I}} \\
&\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{I}} \Rightarrow \alpha \circ \beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{I}},\ \textit{para}\ \circ \in \{\wedge, \vee, \to\}\,.
\end{aligned}$$ □

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\begin{aligned}
\top &\coloneqq \bot \to \bot \\
\neg\alpha &\coloneqq \alpha \to \bot \\
\alpha \leftrightarrow \beta &\coloneqq (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)
\end{aligned}$$

Definição 11. *A axiomatização do sistema intuicionista consiste no conjunto de esquemas de axiomas $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i \mid i \in [1, 8] \vee i = \bot\}$ e no conjunto de regras $\mathcal{R} = \{\mathbf{R_1}\}$, definidos abaixo:*

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{A_1} & \alpha \to \beta \to \alpha \\
\mathbf{A_2} & (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \\
\mathbf{A_3} & \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta \\
\mathbf{A_4} & \alpha \wedge \beta \to \alpha \\
\mathbf{A_5} & \alpha \wedge \beta \to \beta \\
\mathbf{A_6} & \alpha \to \alpha \vee \beta \\
\mathbf{A_7} & \beta \to \alpha \vee \beta \\
\mathbf{A_8} & (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma) \\
\mathbf{A}_\bot & \bot \to \alpha \\
\mathbf{R_1} & \textit{Se}\ \Gamma \vdash \alpha\ \textit{e}\ \Gamma \vdash \alpha \to \beta,\ \textit{então}\ \Gamma \vdash \beta.
\end{array}$$ □

Chamaremos $\mathbf{R_1}$ de *regra da separação.*

3.2 Modal

BABIRESKI: Blackburn et al. (2001) traz uma visão da evolução dos sistemas modais.

Definição 12 ($\mathcal{L}_{\mathbf{M}}$)**.** *A linguagem dos sistemas modais, denotada $\mathcal{L}_{\mathbf{M}}$, consiste no menor conjunto* *induzido a partir das seguintes regras:*

$$\begin{aligned}
&\bot \in \mathcal{L}_{\mathbf{M}}\\
&\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{M}}\\
&\alpha \in \mathcal{L}_{\mathbf{M}} \Rightarrow \Box\alpha \in \mathcal{L}_{\mathbf{M}}\\
&\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{M}} \Rightarrow \alpha \circ \beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{M}},\ \textit{para}\ \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}\,.
\end{aligned}$$

□

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\begin{aligned}
\top &\coloneqq \bot \rightarrow \bot\\
\neg\alpha &\coloneqq \alpha \rightarrow \bot\\
\Diamond\alpha &\coloneqq \neg\Box\neg\alpha\\
\alpha \longrightarrow \beta &\coloneqq \Box(\alpha \rightarrow \beta)\\
\alpha \leftrightarrow \beta &\coloneqq (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)
\end{aligned}$$

Notação. *Seja $\Gamma \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{M}})$ um conjunto de sentenças bem-formadas. $\Box\Gamma$ denota o conjunto $\{\Box\alpha \mid \alpha \in \Gamma\} \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{M}})$, ou seja, a prefixação da negação a todos os elementos do conjunto.*

Definição 13. *A axiomatização do sistema modal consiste no conjunto de esquemas de axiomas $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i \mid i \in [1, 8] \vee i = \neg\} \cup \{\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, \mathbf{B_3}\}$ e no conjunto de regras $\mathcal{R} = \{\mathbf{R_1}, \mathbf{R_2}\}$, definidos abaixo:*

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{A_1} & \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha\\
\mathbf{A_2} & (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)\\
\mathbf{A_3} & \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta\\
\mathbf{A_4} & \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha\\
\mathbf{A_5} & \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta\\
\mathbf{A_6} & \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta\\
\mathbf{A_7} & \beta \rightarrow \alpha \vee \beta\\
\mathbf{A_8} & (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)\\
\mathbf{A_\neg} & \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha\\
\mathbf{B_1} & \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\alpha \rightarrow \Box\beta\\
\mathbf{B_2} & \Box\alpha \rightarrow \alpha\\
\mathbf{B_3} & \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha\\
\mathbf{R_1} & \textit{Se}\ \Gamma \vdash \alpha\ \textit{e}\ \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta,\ \textit{então}\ \Gamma \vdash \beta\\
\mathbf{R_2} & \textit{Se}\ \vdash \alpha,\ \textit{então}\ \Gamma \vdash \Box\alpha.
\end{array}$$

□

BABIRESKI: Falar aqui sobre como a axiomatização consiste nos esquemas clássicos mais os esquemas modais. A definição das regras de dedução em relação a conjuntos de sentenças baseia-se tanto em Troelstra and Schwichtenberg (2000) como em Hakli and Negri (2012). Ao decorrer do texto, ocasionalmente chamaremos $\mathbf{R_1}$ de *regra da separação* e $\mathbf{R_2}$ de *regra da necessitação*.

3.3 Metateoremas

Nesta seção apresentaremos alguns teoremas para os sistemas modais que permitirão simplificar muito as provas apresentadas no decorrer deste trabalho. Primeiramente, provaremos a regra da dedução $\mathbf{T_1}$ com base na prova apresentada por Hakli and Negri (2012). Pequenas alterações na prova foram feitas para garantir a adequação com a axiomatização provida na definição $\mathbf{D_{13}}$.

Teorema 1. *Se* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$*, então* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*.*

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução[1]. Assim, suponhamos que o teorema da dedução valha para qualquer sucessão dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos, analisando-se os casos, que o teorema da dedução vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k + 1$.

CASO 1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de alguma premissa, sabe-se que $\beta \in \Gamma \cup \{\alpha\}$. Deste modo, existem outros dois casos a serem analisados.

CASO 1.1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de alguma premissa, sabe-se que existe alguma premissa $\mathbf{P}_\beta \in \Gamma$ igual a β. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{P}_\beta$
2	$\Gamma \vdash \beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$
3	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$.

CASO 1.2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação da premissa α, sabe-se que $\beta = \alpha$. Deste modo, basta demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$ o que consiste num enfraquecimento do lema $\mathbf{L_1}$.

CASO 2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de algum axioma, sabe-se que existe algum esquema $\mathbf{A}_\beta \in \mathcal{A}$ que gera β. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{A}_\beta$
2	$\Gamma \vdash \beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$
3	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$.

CASO 3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido gerada pela aplicação da regra da necessitação a uma linha anterior, sabe-se que $\beta = \Box\varphi$ e que $\mathbf{H_1} = \varphi$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \varphi$	$\mathbf{H_1}$

[1] Note que, para a indução forte, não se faz preciso provar nenhuma base (Velleman, 2019).

2	$\Gamma \vdash \Box\varphi$	$\mathbf{R_2}$ $\{1\}$
3	$\Gamma \vdash \Box\varphi \to \alpha \to \Box\varphi$	$\mathbf{A_1}$
4	$\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$	$\mathbf{R_1}$ $\{2, 3\}$.

Caso 4. Seja a sentença $\varphi_n = \beta$ gerada pela aplicação da regra da separação a duas sentenças φ_i e φ_j com $i < j < n$. Assumiremos, sem perda de generalidade, que $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_n$. Assim, pela premissa da indução temos que $\mathbf{H_1} = \alpha \to \varphi_i$ e que $\mathbf{H_2} = \alpha \to \varphi_i \to \varphi_n$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \alpha \to \varphi_j$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Gamma \vdash \alpha \to \varphi_j \to \beta$	$\mathbf{H_2}$
3	$\Gamma \vdash (\alpha \to \varphi_j \to \beta) \to (\alpha \to \varphi_j) \to (\alpha \to \beta)$	$\mathbf{A_2}$
4	$\Gamma \vdash (\alpha \to \varphi_j) \to (\alpha \to \beta)$	$\mathbf{R_1}$ $\{2, 3\}$
5	$\alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 4\}$.

□

Teorema 2. *Se* $\Box\Gamma \vdash \alpha$*, então* $\Box\Gamma \vdash \Box\alpha$*.*

Demonstração. Prova por indução fraca sobre o tamanho n do conjunto $\Box\Gamma$ (Troelstra and Schwichtenberg, 2000). A prova consiste em dois casos: um para a base da indução e outro para o passo da indução.

Caso 1. Para a base, consideraremos que $\Box\Gamma = \varnothing$ — ou seja, que possui tamanho $n = 0$. Assim, sabemos que $\Box\Gamma \vdash \alpha$ e, portanto, que existe uma sucessão de dedução $\langle \varphi_i \mid 0 \leq i \leq n \rangle$ com $\varphi_n = \alpha$ Pode-se demonstrar que $\vdash \Box\alpha$ trivialmente pela aplicação da regra da necessitação $\mathbf{R_2}$ sobre a sentença φ_n.

Caso 2. Para o passo, suponhamos que a generalização da regra da necessitação valha para qualquer conjunto $\Box\Gamma$ de tamanho $n = k$. Demonstraremos, pela sucessão de dedução apresentada abaixo, que a generalização da regra da necessitação vale para conjuntos $\Box\Gamma$ de tamanho $n = k + 1$.

1	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \beta$
2	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \to \beta$
3	$\Box\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha \to \beta)$
4	$\Box\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha \to \beta) \to \Box\Box\alpha \to \Box\beta$
5	$\Box\Gamma \vdash \Box\Box\alpha \to \Box\beta$
6	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$
7	$\Box\Gamma \vdash (\Box\alpha \to \Box\Box\alpha) \to (\Box\Box\alpha \to \Box\beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$

8	$\Box\Gamma \vdash (\Box\Box\alpha \to \Box\beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$	
9	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \to \Box\beta$	
10	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$	
11	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \to \Box\beta$	
12	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\beta$	

□

Teorema 3. *Se* $\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, *então* $\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Box\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{T_1}$ $\{1\}$
3	$\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{T_2}$ $\{2\}$. □

3.4 Derivações

Nesta seção serão apresentadas diversas derivações feitas a partir da axiomatização do sistema modal que servirão de lemas para a prova de teoremas futuros neste trabalho.

Lema 1. $\vdash \alpha \to \alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$
2	$\vdash \alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$
3	$\vdash (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_2}$
4	$\vdash (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{2, 3\}$
5	$\vdash \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 4\}$. □

Lema 2. $\vdash \bot \to \alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\bot\} \vdash \bot$	$\mathbf{P_1}$
2	$\{\bot\} \vdash \bot \to (\alpha \to \bot) \to \bot$	$\mathbf{A_1}$
3	$\{\bot\} \vdash \neg\neg\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\bot\} \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_\neg}$
5	$\{\bot\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{3, 4\}$

6	$\vdash \bot \to \alpha$	$\mathbf{T_1}$ $\{5\}$. $\square$

Lema 3. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \beta \to \bot$	$\mathbf{P_2}$
2	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\beta \to \bot) \to \alpha \to (\beta \to \bot)$	$\mathbf{A_1}$
3	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \bot$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\alpha \to \beta \to \bot) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \bot)$	$\mathbf{A_2}$
5	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{P_1}$
6	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \bot)$	$\mathbf{R_1}$ $\{3, 4\}$
7	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{5, 6\}$
8	$\{\alpha \to \beta\} \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$	$\mathbf{T_1}$ $\{7\}$
9	$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	$\mathbf{T_1}$ $\{8\}$.

$\square$

Lema 4. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \beta \wedge \gamma$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{P_3}$
2	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{P_1}$
3	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{P_2}$
5	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 4\}$
6	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta \to \gamma \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{A_3}$
7	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{R_1}$ $\{3, 6\}$
8	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{R_1}$ $\{5, 7\}$
9	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma\} \vdash \alpha \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{T_1}$ $\{8\}$
10	$\{\alpha \to \beta\} \vdash (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{T_1}$ $\{9\}$
11	$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{T_1}$ $\{10\}$.

$\square$

Lema 5. $\vdash \square(\alpha \wedge \beta) \to \square\alpha \wedge \square\beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha \land \beta \to \alpha$	$\mathbf{A_4}$
2	$\vdash \Box(\alpha \land \beta \to \alpha)$	$\mathbf{R_2}$ $\{1\}$
3	$\vdash \Box(\alpha \land \beta \to \alpha) \to (\Box(\alpha \land \beta) \to \Box\alpha)$	$\mathbf{B_1}$
4	$\vdash \Box(\alpha \land \beta) \to \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{2,3\}$
5	$\vdash \alpha \land \beta \to \beta$	$\mathbf{A_5}$
6	$\vdash \Box(\alpha \land \beta \to \beta)$	$\mathbf{R_2}$ $\{5\}$
7	$\vdash \Box(\alpha \land \beta \to \beta) \to (\Box(\alpha \land \beta) \to \Box\beta)$	$\mathbf{B_1}$
8	$\vdash \Box(\alpha \land \beta) \to \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{6,7\}$
9	$\vdash (\Box(\alpha \land \beta) \to \Box\alpha) \to (\Box(\alpha \land \beta) \to \Box\beta) \to \Box(\alpha \land \beta) \to \Box\alpha \land \Box\beta$	$\mathbf{L_4}$
10	$\vdash (\Box(\alpha \land \beta) \to \Box\beta) \to \Box(\alpha \land \beta) \to \Box\alpha \land \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{4,9\}$
11	$\vdash \Box(\alpha \land \beta) \to \Box\alpha \land \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{6,9\}$

□

Lema 6. $\vdash \Box\alpha \land \Box\beta \to \Box(\alpha \land \beta)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box\alpha \land \Box\beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \land \beta$	$\mathbf{A_3}$
2	$\{\Box\alpha \land \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \land \Box\beta \to \Box\alpha$	$\mathbf{A_4}$
3	$\{\Box\alpha \land \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \to \alpha$	
4	$\{\Box\alpha \land \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \land \Box\beta \to \Box\beta$	$\mathbf{A_5}$
5	$\{\Box\alpha \land \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \to \beta$	
6	$\{\Box\alpha \land \Box\beta\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,4\}$

□

Lema 7. $\vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{P_2}$
2	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \to \alpha$	$\mathbf{B_2}$
3	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,2\}$
4	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{P_1}$
5	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{B_2}$
6	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{4,5\}$
7	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{3,6\}$

8 | $\{\Box(\alpha \to \beta)\} \vdash \Box\alpha \to \beta$ **T_1** $\{7\}$
9 | $\vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \beta$ **T_1** $\{8\}$. $\square$

Lema 8. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1 | $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash$
2 | $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash$
3 | $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash$
4 | $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash$
5 | $\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash$

$\square$

3.5 Dualidades

BABIRESKI: Ver Zach (2024) acerca dos axiomas duais e suas derivações.

Teorema 4. $\vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1 | $\{\Box(\alpha \to \beta), \Diamond\alpha\} \vdash \Diamond\beta$
2 | $\{\Box(\alpha \to \beta)\} \vdash \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$
3 | $\vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \Diamond\alpha \to \Diamond\beta$ $\square$

Teorema 5. $\vdash \alpha \to \Diamond\alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1 | $\vdash \Box\neg\alpha \to \neg\alpha$ **B_2**
2 | $\vdash (\Box\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha$ **L_3**
3 | $\vdash \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha$ **R_1** $\{1, 2\}$
4 | $\vdash (\neg\neg\alpha \to \neg\Box\neg\alpha) \to \alpha \to (\neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha)$ **A_1**
5 | $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha$ **R_1** $\{3, 4\}$
6 | $\vdash (\alpha \to \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha) \to (\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\alpha \to \Diamond\alpha)$ **A_2**
7 | $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$ **BABIRESKI:** Provar.
8 | $\vdash (\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\alpha \to \Diamond\alpha)$ **R_1** $\{5, 6\}$

9 | $\vdash \alpha \to \Diamond\alpha$ **R₁** $\{7, 8\}$. ∎

Teorema 6. $\vdash \Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1 | $\vdash \neg\Box\alpha \to \neg\Box\Diamond\alpha$

2 | $\vdash \Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$ ∎

4. Traduções

4.1 Definições

A primeira tradução do sistema intuicionista ao sistema modal foi proposta por Gödel (1933) motivado pela possibilidade de leitura da necessidade como uma modalidade de construtividade. Ou seja, por meio dessa tradução, a sentença $\Box\varphi$ poderia ser lida como φ *pode ser provada construtivamente* (Troelstra and Schwichtenberg, 2000). Gödel conjeiturou a corretude fraca dessa tradução, que foi posteriormente provada por McKinsey and Tarski (1948) em conjunto com sua completude fraca.

Definição 14 ($\bullet^\circ$)**.** *Define-se a tradução* $\bullet^\circ$ *indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\circ &\coloneqq p \\ \bot^\circ &\coloneqq \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\circ &\coloneqq \varphi^\circ \wedge \psi^\circ \\ (\varphi \vee \psi)^\circ &\coloneqq \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ \\ (\varphi \to \psi)^\circ &\coloneqq \Box\varphi^\circ \to \psi^\circ \end{aligned}$$

□

Definição 15 ($\bullet^\Box$)**.** *Define-se a tradução* $\bullet^\Box$ *indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\Box &\coloneqq \Box p \\ \bot^\Box &\coloneqq \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\Box &\coloneqq \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \\ (\varphi \vee \psi)^\Box &\coloneqq \varphi^\Box \vee \psi^\Box \\ (\varphi \to \psi)^\Box &\coloneqq \Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box) \end{aligned}$$

□

Faz-se interessante pontuar que as traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^\Box$ correspondem, respectivamente, às traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^*$ do sistema intuicionista ao sistema linear providas por Girard (1987), sendo as primeiras correspondentes a uma ordem de avaliação por nome (*call-by-name*) e as segundas a uma ordem de avaliação por valor (*call-by-value*). Ademais, as duas traduções providas são equivalentes, conforme demonstrado pelo teorema $\mathbf{T_2}$.

Teorema 7. $\vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre a profundidade de α. Assim, suponhamos que as traduções equivalham para qualquer α de profundidade $n < k$. Demonstraremos, analisando-se os casos, que as traduções equivalem para qualquer α de profundidade $n = k$.

CASO 1. Se a sentença α for uma proposição a, sabe-se que $\Box a^\circ = \Box a$ e que $a^\Box = \Box a$ pelas definições das traduções. Deste modo, tanto a ida quanto a volta possuem a forma $\Box a \to \Box a$ e podem ser provadas pelo lema $\mathbf{L_1}$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 2. Se a sentença α for a constante $\bot$, sabe-se que $\Box\bot^{\circ} = \Box\bot$ e que $\bot^{\square} = \bot$ pelas definições das traduções. Deste modo, a ida $\Box\bot \to \bot$ constitui um axioma gerado pelo esquema $\mathbf{B_2}$ — sendo assim provada trivialmente — e a volta $\bot \to \Box\bot$ pode ser provada pelo lema $\mathbf{L_2}$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 3. Se a sentença α for o resultado da conjunção de duas outras sentenças φ e ψ, sabe-se que $\Box(\varphi \wedge \psi)^{\circ} = \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$ e que $(\varphi \wedge \psi)^{\square} = \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$ e outro para a volta $\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square} \to \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 3.1. Pela premissa de indução, temos que $\mathbf{H_1} = \Box\varphi^{\circ} \leftrightarrow \varphi^{\square}$ e que $\mathbf{H_2} = \Box\psi^{\circ} \leftrightarrow \psi^{\square}$. Valendo-se dessas sentenças e da regra da relocação em conjunto com alguns lemas, pode-se provar a sentença $\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$	$\mathbf{P}$
2	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ}) \to \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ}$	$\mathbf{L_5}$
3	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ}$	$\mathbf{R_1}\ \langle 1, 2\rangle$
4	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ} \to \Box\varphi^{\circ}$	$\mathbf{A_4}$
5	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ}$	$\mathbf{R_1}\ \langle 3, 4\rangle$
6	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \to \varphi^{\square}$	$\mathbf{H}$
7	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \varphi^{\square}$	$\mathbf{R_1}\ \langle 5, 6\rangle$
8	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ} \to \Box\psi^{\circ}$	$\mathbf{A_4}$
9	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \Box\psi^{\circ}$	$\mathbf{R_1}\ \langle 3, 8\rangle$
10	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \Box\psi^{\circ} \to \psi^{\square}$	$\mathbf{H}$
11	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \psi^{\square}$	$\mathbf{R_1}\ \langle 9, 10\rangle$
12	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \varphi^{\square} \to \psi^{\square} \to \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$	$\mathbf{A_3}$
13	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \psi^{\square} \to \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$	$\mathbf{R_1}\ \langle 7, 12\rangle$
14	$\{\Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})\} \vdash \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$	$\mathbf{R_1}\ \langle 9, 13\rangle$
15	$\vdash \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ}) \to \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$	$\mathbf{T_1}\ \langle 14\rangle$

Caso 3.2. Pela premissa de indução, temos que $\mathbf{H_1} = \Box\varphi^{\circ} \leftrightarrow \varphi^{\square}$ e que $\mathbf{H_2} = \Box\psi^{\circ} \leftrightarrow \psi^{\square}$. Valendo-se dessas sentenças e da regra da relocação em conjunto com alguns lemas, pode-se provar a sentença $\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square} \to \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}$	$\mathbf{P}$
2	$\{\varphi^{\square} \wedge \psi^{\square}\} \vdash \varphi^{\square} \wedge \psi^{\square} \to \varphi^{\square}$	$\mathbf{P}$

3	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box}$	**P**
4	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \rightarrow \Box\varphi^{\circ}$	**P**
5	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \Box\varphi^{\circ}$	**P**
6	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box}$	**P**
7	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \psi^{\Box}$	**P**
8	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \psi^{\Box} \rightarrow \Box\psi^{\circ}$	**P**
9	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \Box\psi^{\circ}$	**P**
10	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \rightarrow \Box\psi^{\circ} \rightarrow \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ}$	**P**
11	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \Box\psi^{\circ} \rightarrow \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ}$	**P**
12	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ}$	**P**
13	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \wedge \Box\psi^{\circ} \rightarrow \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$	**P**
14	$\{\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}\} \vdash \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$	**P**
15	$\vdash \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \rightarrow \Box(\varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ})$	**P**

Caso 4. Se a sentença α for o resultado da disjunção de duas outras sentenças φ e ψ, sabe-se que $\Box(\varphi \vee \psi)^{\circ} = \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$ e que $(\varphi \vee \psi)^{\Box} = \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ}) \rightarrow \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}$ e outro para a volta $\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box} \rightarrow \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

1	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$
2	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ}) \rightarrow \Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ}$
3	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ}$
4	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})\} \vdash \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}$
5	$\vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ}) \rightarrow \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}$

1	$\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}$	**P**
2	$\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \leftrightarrow \Box\varphi^{\circ}$	**H**
3	$\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \vee \psi^{\Box}$	$\mathbf{T_0}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \psi^{\Box} \leftrightarrow \Box\psi^{\circ}$	**H**
5	$\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ}$	$\mathbf{T_0}$ $\{3, 4\}$
6	$\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \leftrightarrow \Box\Box\varphi^{\circ}$	
7	$\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ}$	
8	$\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box\psi^{\circ} \leftrightarrow \Box\Box\psi^{\circ}$	
9	$\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}$	
10	$\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ} \rightarrow \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$	
11	$\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$	
12	$\vdash \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box} \rightarrow \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$	

Caso 5. Se a sentença α for o resultado da implicação de uma sentença φ a uma sentença ψ, sabe-se que $\Box(\varphi \rightarrow \psi)^{\circ} = \Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \psi^{\circ})$ e que $(\varphi \rightarrow \psi)^{\Box} = \Box(\varphi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box})$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \psi^{\circ}) \rightarrow \Box(\varphi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box})$ e outro para a volta $\Box(\varphi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box}) \rightarrow \Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \psi^{\circ})$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

1	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \psi^{\circ})\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \psi^{\circ})$
2	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \psi^{\circ})\} \vdash \Box\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \Box\psi^{\circ}$
3	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \psi^{\circ})\} \vdash \Box\varphi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box}$
4	$\{\Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \psi^{\circ})\} \vdash \Box(\varphi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box})$

1	$\{\Box(\varphi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box})\} \vdash \Box(\varphi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box})$
2	$\{\Box(\varphi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box})\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \psi^{\Box})$
3	$\{\Box(\varphi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box})\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \Box\psi^{\circ})$
4	$\{\Box(\varphi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box})\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \psi^{\circ})$
5	$\vdash \Box(\varphi^{\Box} \rightarrow \psi^{\Box}) \rightarrow \Box(\Box\varphi^{\circ} \rightarrow \psi^{\circ})$

$\Box$

4.2 Corretude

Teorema 8. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$, *então* $\Gamma^{\Box} \vdash_{\mathbf{M}} \alpha^{\Box}$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Assim, suponhamos que a tradução seja correta para qualquer sucessão dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos, analisando-se os casos, que o a corretude da tradução vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k + 1$.

Caso 1. Como $\alpha \in \Gamma$, sabe-se que $\alpha^{\Box} \in \Gamma^{\Box}$, uma vez que $\Gamma^{\Box} = \{\varphi^{\Box} \mid \varphi \in \Gamma\}$. Desta forma, $\langle \alpha^{\Box} \rangle$ constitui uma prova para $\Gamma^{\Box} \vdash \alpha^{\Box}$.

Caso 2.

Caso 2.1 ($\mathbf{A_1}$).

1	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box a$	$\mathbf{P_1}$
2	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a\} \vdash \Box b \longrightarrow \Box a$	$\mathbf{T_3}$ $\{1\}$
3	$\Gamma^{\Box} \vdash \Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box a$	$\mathbf{T_3}$ $\{2\}$.

Caso 2.2 ($\mathbf{A_2}$).

1	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \longrightarrow \Box b, \Box a\} \vdash \Box a$
2	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \longrightarrow \Box b, \Box a\} \vdash \Box a \longrightarrow \Box b$
3	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \longrightarrow \Box b, \Box a\} \vdash \Box b$
4	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \longrightarrow \Box b, \Box a\} \vdash \Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box c$
5	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \longrightarrow \Box b, \Box a\} \vdash \Box b \longrightarrow \Box c$
6	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \longrightarrow \Box b, \Box a\} \vdash \Box c$
7	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \longrightarrow \Box b\} \vdash \Box a \longrightarrow \Box c$
8	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box c\} \vdash (\Box a \longrightarrow \Box b) \longrightarrow \Box a \longrightarrow \Box c$
9	$\Gamma^{\Box} \vdash (\Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box c) \longrightarrow (\Box a \longrightarrow \Box b) \longrightarrow \Box a \longrightarrow \Box c$

Caso 2.3 ($\mathbf{A_3}$).

1	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box a$
2	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box b$
3	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box a \rightarrow \Box b \rightarrow \Box a \land \Box b$
4	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box b \rightarrow \Box a \land \Box b$
5	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box a \land \Box b$
6	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box a \land \Box b$
7	$\Gamma^{\Box} \cup \{\Box a\} \vdash \Box b \longrightarrow \Box a \land \Box b$

8 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash \Box a \longrightarrow \Box b \longrightarrow \Box a \wedge \Box b$

Caso 2.4 ($\mathbf{A_4}$).

1 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash \Box a \wedge \Box b \to \Box a \qquad \mathbf{A_4}$

2 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash \Box a \wedge \Box b \longrightarrow \Box a \qquad \mathbf{R_2}\ \{1\}.$

Caso 2.5 ($\mathbf{A_5}$).

1 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash \Box a \wedge \Box b \to \Box b \qquad \mathbf{A_5}$

2 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash \Box a \wedge \Box b \longrightarrow \Box b \qquad \mathbf{R_2}\ \{1\}.$

Caso 2.6 ($\mathbf{A_6}$).

1 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash \Box a \to \Box a \vee \Box b \qquad \mathbf{A_6}$

2 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash \Box a \longrightarrow \Box a \vee \Box b \qquad \mathbf{R_2}\ \{1\}.$

Caso 2.7 ($\mathbf{A_7}$).

1 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash \Box b \to \Box a \vee \Box b \qquad \mathbf{A_7}$

2 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash \Box b \longrightarrow \Box a \vee \Box b \qquad \mathbf{R_2}\ \{1\}.$

Caso 2.8 ($\mathbf{A_8}$).

1 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c, \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \vee \Box b\} \vdash \Box a \longrightarrow \Box c$

2 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c, \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \vee \Box b\} \vdash (\Box a \longrightarrow \Box c) \to \Box a \to \Box c$

3 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c, \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \vee \Box b\} \vdash \Box a \to \Box c$

4 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c, \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \vee \Box b\} \vdash \Box b \longrightarrow \Box c$

5 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c, \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \vee \Box b\} \vdash (\Box b \longrightarrow \Box c) \to \Box b \to \Box c$

6 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c, \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \vee \Box b\} \vdash \Box b \to \Box c$

7 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c, \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \vee \Box b\} \vdash \Box a \vee \Box b$

8 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c, \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \vee \Box b\} \vdash (\Box a \to \Box c) \to (\Box b \to \Box c) \to \Box a \vee \Box b \to \Box c$

9 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c, \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \vee \Box b\} \vdash (\Box b \to \Box c) \to \Box a \vee \Box b \to \Box c$

10 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c, \Box b \longrightarrow \Box c, \Box a \vee \Box b\} \vdash \Box a \vee \Box b \to \Box c$

11 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c, \Box b \longrightarrow \Box c\} \vdash \Box a \vee \Box b \longrightarrow \Box c$

12 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \longrightarrow \Box c\} \vdash (\Box b \longrightarrow \Box c) \longrightarrow \Box a \vee \Box b \longrightarrow \Box c$

13	$\Gamma^{\Box} \vdash (\Box a \multimap \Box c) \multimap (\Box b \multimap \Box c) \multimap \Box a \vee \Box b \multimap \Box c$

CASO 2.9 ($\mathbf{A}_{\perp}$).

1	$\Gamma^{\Box} \vdash \perp \to \Box a$	$\mathbf{L_2}$
2	$\Gamma^{\Box} \vdash \perp \multimap \Box a$	$\mathbf{R_2}$ $\{1\}$.

CASO 3. Deve-se demonstrar que, se $\vdash \Box(\alpha^{\Box} \to \beta^{\Box})$ ($\mathbf{H_1}$) e $\vdash \alpha^{\Box}$ ($\mathbf{H_2}$), então $\beta^{\Box}$. Isso pode ser feito pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Box(\alpha^{\Box} \to \beta^{\Box}) \to \alpha^{\Box} \to \beta^{\Box}$	$\mathbf{B_2}$
2	$\Box(\alpha^{\Box} \to \beta^{\Box})$	$\mathbf{H_1}$
3	$\alpha^{\Box} \to \beta^{\Box}$	$\mathbf{R_1}$ $\langle 1, 2\rangle$
4	$\alpha^{\Box}$	$\mathbf{H_2}$
5	$\beta^{\Box}$	$\mathbf{R_1}$ $\langle 3, 4\rangle$.

$\Box$

4.3 Completude

BABIRESKI: Não vai rolar de provar a completude como Troelstra and Schwichtenberg (2000). Vou precisar procurar outros artigos.

BABIRESKI: Ver Benton et al. (1998), Pfenning and Davies (2001) e Fairtlough and Mendler (1995) acerca do sistema laxo.

Referências Bibliográficas

Peter Nicholas Benton, Gavin Mark Bierman, and Valeria Correa Vaz de Paiva. Computational types from a logical perspective. *Journal of Functional Programming*, 1998.

Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal logic.* Cambridge University Press, 2001.

Jean-Yves Béziau. Universal logic. *Logica*, 1994.

Adam Chlipala. *Certified programming with dependent types.* Massachusetts Institute of Technology Press, 2022.

Matt Fairtlough and Michael Mendler. An intuitionistic modal logic with applications to the formal verification of hardware. In Leszek Pacholski and Jerzy Tiuryn, editors, *Computer Science Logic*, 1995.

Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 1987.

Kurt Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 1933.

Raul Hakli and Sara Negri. Does the deduction theorem fail for modal logic? *Synthese*, 2012.

John Charles Chenoweth McKinsey and Alfred Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, 1948.

Eugenio Moggi. Notions of computation and monads. *Information and Computation*, 1991.

Frank Pfenning and Rowan Davies. A judgmental reconstruction of modal logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 2001.

John Charles Reynolds. The discoveries of continuations. *Higher-Order and Symbolic Computation*, 1993.

Anne Sjerp Troelstra and Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory.* Cambridge University Press, 2000.

Daniel Jon Velleman. *How to prove it: a structured approach.* Cambridge University Press, 2019.

Richard Zach. *Box and diamonds: an open introcution to modal logic.* Open Logic Project, 2024.