Uma formalização da interpretação modal do sistema intuicionista

Elian Babireski

2024

Resumo

Resumo aqui.

Sumário

"Oh, you can't help that," said the Cat: "we're all mad here. I'm mad. You're mad." "How do you know I'm mad?" said Alice. "You must be," said the Cat, "or you wouldn't have come here."

—Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

Capítulo 1

Introdução

As lógicas modais consistem em um conjunto de extensões da lógica clássica que contam com a adição de um ou mais operadores, chamados modalidades, que qualificam sentenças. No caso do sistema **S4**, são adicionadas as modalidades de necessidade ($\Box$) e possibilidade ($\Diamond$) em conjunto à regra da necessitação[1] e os axiomas **K**: $\Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B$, **T**: $\Box A \to A$ e **4**: $\Box A \to \Box\Box A$ [7]. Ademais, pode-se derivar nesse sistema, por meio da dualidade entre as modalidades[2], sentenças duais aos axiomas **T** e **4**, sendo elas $\mathbf{T}_\Diamond$: $A \to \Diamond A$ e $\mathbf{4}_\Diamond$: $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$, respectivamente [**?**].

As mônadas ganharam destaque na área de linguagens de programação desde que [5] formalizou uma metalinguagem que faz uso dessas estruturas para modelar noções de computação – como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuações – de uma maneira puramente funcional. Pode-se notar uma grande semelhança entre as sentenças $\mathbf{T}_\Diamond$ e $\mathbf{4}_\Diamond$ e as transformações naturais monádicas $\boldsymbol{\eta}$: $1_C \to T$ e $\boldsymbol{\mu}$: $T^2 \to T$, respectivamente. Nesse sentido, [6] demonstraram que se pode traduzir essa metalinguagem para o sistema **S4** da lógica modal, pelo qual se torna interessante analisar esse sistema como uma linguagem de programação sob a ótica do isomorfismo de Curry-Howard.

[7] apresentam duas traduções equivalentes da lógica intuicionista para o sistema **S4** da lógica modal, sendo um deles correspondente a uma abordagem *call-by-name* e outra a um abordagem *call-by-value*. Tais traduções possuem grande similaridade com as traduções da lógica intuicionista para a lógica linear definidas por [2]. Essas traduções equivalem à tradução por negação dupla que, por sua vez, equivalem a traduções *continuation-passing style* (CPS) em compiladores por meio do isomorfismo de Curry-Howard [**?**], o que torna esse tema interessante no ponto de vista de compilação.

Durante grande parte da história, provas lógicas e matemáticas eram validadas manualmente pela comunidade acadêmica, o que muitas vezes – a depender do tamanho e complexidade da prova – se mostrava ser um trabalho complexo

[1] Se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$

[2] $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$

e sujeito a erros. Hoje em dia, exitem *softwares* chamados assistentes de provas que permitem verificar – graças ao isomorfismo de Curry-Howard – a corretude de provas [**?**]. O assistente de provas que será usado neste trabalho é o Coq, que utiliza o cálculo de construções indutivas e um conjunto axiomático pequeno para permitir a escrita de provas simples e intuitivas [**?**].

Este trabalho será uma continuação do desenvolvimento da biblioteca de lógica modal no assistente de provas Coq feito em [**?**] e posteriormente expandido de forma a permitir a fusão de lógicas modais em [**?**]. Uma formalização similar de traduções de lógicas foi feito em [**?**], porém, neste caso, das lógicas clássica e intuicionista para a lógica linear.

1.1 Justificativa

1.2 Metas

1.3 Estruturação

Capítulo 2

Fundamentação

2.1 Sistemas

Conforme visto, as noções de sistema variam entre diferentes autores e permanece um campo em aberto. Para as necessidades deste trabalho, usaremos a definição proposta por [1], uma vez que se trata de uma definição simples e que, portanto, não traz elementos irrelevantes aos intuitos deste trabalho.

Definição 1 (Sistema). *Um sistema consiste num par* $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$, *onde* $\mathcal{L}$ *consiste em um conjunto de sentenças bem-formadas e* $\Vdash : \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ *em uma relação sobre as sentenças, sem demais condições.* $\square$

Cabe destacar que a definição de sistema provida foi definida com base em $\Vdash$, uma relação qualquer entre as sentenças, que pode ser uma relação de dedução, denotada $\vdash$, ou uma relação de satisfação, denotada $\vDash$. Propriedades da tradução podem ser provadas sobre qualquer uma dessas relações, como veremos adiante. Entretanto, neste trabalho, serão abordadas somente as relações de dedução.

Definição 2 (Assinatura). *Uma assinatura consiste num conjunto de operadores e suas respeitivas aridades. A notação* $\circ^n$ *denota um operador* $\circ$ *com aridade* $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definiremos a noção de profundidade de uma sentença para que possamos realizar indução na profundidade da sentença, conforme Troelstra [7].

Definição 3 (Profundidade). *A profundidade* $|\alpha|$ *de uma sentença* α *consiste no comprimento do maior ramo de sua construção. Seja* $\circ$ *um operador qualquer, define-se a profundidade recursivamente como:*

$$\begin{aligned} |p| &\coloneqq 0 \\ |\bot| &\coloneqq 0 \\ |\circ\,\alpha| &\coloneqq |\alpha| + 1 \\ |\alpha \circ \beta| &\coloneqq \max(|\alpha|, |\beta|) + 1. \end{aligned} \qquad \square$$

Definição 4 (Esquema)**.** *Definição.*

Definição 5 (Axiomatização)**.** *Um sistema de Hilbert para um sistema* $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *consiste em um par* $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$*, sendo* $\mathcal{A}$ *um conjunto de esquemas axiomas e* $\mathcal{R}$ *um conjunto de regras de dedução.*

Definição 6 (Dedução)**.** *Uma sucessão* $\langle \varphi_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$*, onde cada sentença* φ_i *trata-se de um axioma* $\alpha \in \mathcal{A}$*, uma assunção* $\gamma \in \Gamma$ *ou sentenças geradas pela aplicação de regras de dedução* $\rho \in \mathcal{R}$ *a sentenças anteriores, consiste em uma prova de* $\Gamma \vdash \varphi_n$*.* □

2.2 Traduções

Traduções entre sistemas consistem em funções que mapeiam sentenças de um sistema a sentenças de outro sistema e garantem certas propriedades. As propriedades a serem garantidas variam e ainda são discutidas na literatura, deixando a definição exata de tradução – assim como houve com a definição de sistema – varie de acordo com a predileção de cada autor. Nesta seção, serão abordadas historicamente noções de tradução entre sistemas, bem como serão definidos e nomeados os conceitos de tradução que serão usados no restante deste trabalho.

Definição 7 (Tradução)**.** *Uma sentença* φ *de um sistema* $\mathbf{A} = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{A}}, \vdash_{\mathbf{A}} \rangle$ *pode ser traduzida a uma sentença* φ^* *em um sistema* $\mathbf{B} = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{B}}, \vdash_{\mathbf{B}} \rangle$ *caso exista uma função* $\bullet^* : \mathcal{L}_{\mathbf{A}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{B}}$ *que garanta que* $\Gamma \vdash_{\mathbf{A}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash_{\mathbf{B}} \varphi^*$*.* □

Notação. *Seja* $\Gamma \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{A}})$ *um conjunto de sentenças e* $\bullet^* : \mathcal{L}_{\mathbf{A}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{B}}$ *uma tradução.* Γ^* *denota o conjunto* $\{\alpha^* \mid \alpha \in \mathcal{L}_{\mathbf{A}}\} \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{B}})$*, ou seja, a aplicação da tradução a todos os elementos do conjunto.* □

Definição 8 ($\bullet^\neg$)**.** *Define-se a tradução* $\bullet^\neg$ *indutivamente da seguinte maneira:*

$$
\begin{aligned}
p^\neg &:= \neg\neg p \\
\bot^\neg &:= \bot \\
(\varphi \wedge \psi)^\neg &:= \neg\neg(\varphi^\neg \wedge \psi^\neg) \\
(\varphi \vee \psi)^\neg &:= \neg\neg(\varphi^\neg \vee \psi^\neg) \\
(\varphi \to \psi)^\neg &:= \neg\neg(\varphi^\neg \to \psi^\neg)
\end{aligned}
$$
□

2.3 Provadores

Capítulo 3

Formalização

3.1 Sistemas

Definição 9 ($\mathcal{L}_\mathbf{I}$)**.** *A linguagem do sistema intuicionista, denotada $\mathcal{L}_\mathbf{I}$, consiste no menor conjunto induzido a partir das seguintes regras:*

$$\begin{aligned}
&\bot \in \mathcal{L}_\mathbf{I} \\
&\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_\mathbf{I} \\
&\alpha, \beta \in \mathcal{L}_\mathbf{I} \Rightarrow \alpha \circ \beta \in \mathcal{L}_\mathbf{I},\ \textit{para}\ \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}.
\end{aligned}$$

□

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\begin{aligned}
\top &\coloneqq \bot \rightarrow \bot \\
\neg\alpha &\coloneqq \alpha \rightarrow \bot \\
\alpha \leftrightarrow \beta &\coloneqq (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \beta \rightarrow \alpha
\end{aligned}$$

Definição 10. *A axiomatização do sistema intuicionista consiste nos seguintes esquemas e regras:*

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{A_1} & \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \\
\mathbf{A_2} & (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \\
\mathbf{A_3} & \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta \\
\mathbf{A_4} & \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \\
\mathbf{A_5} & \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \\
\mathbf{A_6} & \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \\
\mathbf{A_7} & \beta \rightarrow \alpha \vee \beta \\
\mathbf{A_8} & (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) \\
\mathbf{A_\bot} & \bot \rightarrow \alpha \\
\mathbf{R_1} & \textit{Se}\ \vdash \alpha\ \textit{e}\ \vdash \alpha \rightarrow \beta,\ \textit{então}\ \vdash \beta.
\end{array}$$

□

Definição 11 ($\mathcal{L}_{\mathbf{M}}$)**.** *A linguagem do sistemas modais, denotada $\mathcal{L}_{\mathbf{M}}$, consiste no menor conjunto induzido a partir das seguintes regras:*

$$\begin{aligned}
&\bot \in \mathcal{L}_{\mathbf{M}}\\
&\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_{\mathbf{M}}\\
&\alpha \in \mathcal{L}_{\mathbf{M}} \Rightarrow \Box\alpha \in \mathcal{L}_{\mathbf{M}}\\
&\alpha, \beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{M}} \Rightarrow \alpha \circ \beta \in \mathcal{L}_{\mathbf{M}},\ \textit{para}\ \circ \in \{\wedge, \vee, \to\}.
\end{aligned}$$ □

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\begin{aligned}
\top &\coloneqq \bot \to \bot\\
\neg\alpha &\coloneqq \alpha \to \bot\\
\Diamond\alpha &\coloneqq \neg\Box\neg\alpha\\
\alpha \leftrightarrow \beta &\coloneqq (\alpha \to \beta) \wedge \beta \to \alpha
\end{aligned}$$

Definição 12. *A axiomatização do sistema modal consiste nos seguintes esquemas e regras:*

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{A_1} & \alpha \to \beta \to \alpha\\
\mathbf{A_2} & (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)\\
\mathbf{A_3} & \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta\\
\mathbf{A_4} & \alpha \wedge \beta \to \alpha\\
\mathbf{A_5} & \alpha \wedge \beta \to \beta\\
\mathbf{A_6} & \alpha \to \alpha \vee \beta\\
\mathbf{A_7} & \beta \to \alpha \vee \beta\\
\mathbf{A_8} & (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma)\\
\mathbf{A_\neg} & \neg\neg\alpha \to \alpha\\
\mathbf{B_1} & \Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta\\
\mathbf{B_2} & \Box\alpha \to \alpha\\
\mathbf{B_3} & \Box\alpha \to \Box\Box\alpha\\
\mathbf{R_1} & \textit{Se}\ \vdash \alpha\ \textit{e}\ \vdash \alpha \to \beta,\ \textit{então}\ \vdash \beta\\
\mathbf{R_2} & \textit{Se}\ \vdash \alpha,\ \textit{então}\ \vdash \Box\alpha.
\end{array}$$ □

Provaremos, para o sistema modal apresentado, uma variação do teorema da dedução, que permite simplificar muitas das demonstrações apresentadas futuramente neste trabalho.

Teorema 1. $\forall\, \Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{M}})\ .\ \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Rightarrow \Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$.

Demonstração. Seja Γ um conjunto de sentenças e sejam α e β sentenças de modo que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, deve-se provar que $\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$. Como $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, existe uma prova de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$. A prova baseia-se numa indução sobre o tamanho n da prova.

Caso 1 (Base)**.** Para a base requer-se considerar os seguintes casos: **(1)** β consiste num axioma, **(2)** $\beta \in \Gamma$ e **(3)** $\beta = \alpha$.

Caso 1.1 ($\beta \in \mathcal{A}$)**.**

1	$\beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$
2	β	$\mathbf{A}_\beta$
3	$\alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\langle 1, 2 \rangle$
4	$\Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{R_2}$ $\langle 3 \rangle$

Caso 1.2 ($\beta \in \Gamma$)**.**

1	$\beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$
2	β	$\mathbf{P}$
3	$\alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\langle 1, 2 \rangle$
4	$\Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{R_2}$ $\langle 3 \rangle$

Caso 1.3 ($\beta = \alpha$)**.**

1	$\alpha \to \alpha$	$\mathbf{L_1}$
2	$\Box(\alpha \to \alpha)$	$\mathbf{R_2}$ $\langle 1 \rangle$

Caso 2 (Passo)**.** Supõe-se que, para qualquer prova de $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ com tamanho k, tem-se que $\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$. Deve-se mostrar que a proposição segue verdadeira caso a prova tenha tamanho $k+1$. Assim, sendo $\langle \varphi_i \mid 1 \leq i \leq k+1 \rangle$ uma sucessão de dedução com $\varphi_{k+1} = \beta$, requer-se considerar os seguintes casos:

Caso 2.1 ($\beta \in \mathcal{A}$)**.** *Vide* caso $\mathbf{C_{1.1}}$.

Caso 2.2 ($\beta \in \Gamma$)**.** *Vide* caso $\mathbf{C_{1.2}}$.

Caso 2.3 ($\beta = \alpha$)**.** *Vide* caso $\mathbf{C_{1.3}}$.

Caso 2.4 ($\mathbf{R_1}$)**.**

Caso 2.5 ($\mathbf{R_2}$)**.**

$\square$

3.2 Traduções

A primeira tradução do sistema intuicionista ao sistema modal foi proposta por Gödel [3] motivado pela possibilidade de leitura da necessidade como uma modalidade de construtividade. Ou seja, por meio dessa tradução, a sentença $\Box\varphi$ poderia ser lida como φ *pode ser provada construtivamente* [7]. Gödel conjeiturou a corretude fraca dessa tradução, que foi posteriormente provada por McKinsey e Tarski [4] em conjunto com sua completude fraca.

Definição 13 **(**$\bullet^\circ$**).** *Define-se a tradução* $\bullet^\circ$ *indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\circ &:= p \\ \bot^\circ &:= \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\circ &:= \varphi^\circ \wedge \psi^\circ \\ (\varphi \vee \psi)^\circ &:= \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ \\ (\varphi \rightarrow \psi)^\circ &:= \Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ \end{aligned}$$

□

Definição 14 **(**$\bullet^\Box$**).** *Define-se a tradução* $\bullet^\Box$ *indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\Box &:= \Box p \\ \bot^\Box &:= \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\Box &:= \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \\ (\varphi \vee \psi)^\Box &:= \varphi^\Box \vee \psi^\Box \\ (\varphi \rightarrow \psi)^\Box &:= \Box(\varphi^\Box \rightarrow \psi^\Box) \end{aligned}$$

□

Faz-se interessante pontuar que as traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^\Box$ correspondem, respectivamente, às traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^*$ do sistema intuicionista ao sistema linear providas por Girard [2], sendo as primeiras correspondentes a uma ordem de avaliação por nome (*call-by-name*) e as segundas a uma ordem de avaliação por valor (*call-by-value*). Ademais, as duas traduções providas são equivalentes, conforme demonstrado pelo teorema $\mathbf{T_2}$.

Teorema 2. $\forall\alpha \in \mathcal{L}_\mathbf{I} \,.\, \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$.

Demonstração. Prova por indução na profundidade de α.

Caso 1 (Base)**.** Para $|\alpha| = 0$, existem dois casos a serem considerados.

Caso 1.1 $(\alpha = a)$**.** $a^\circ = a$ e $a^\Box = \Box a$, assim $\Box a^\circ = a^\Box$ e, portanto, $\Box a^\circ \leftrightarrow a^\Box$.

Caso 2.1 ($\alpha = \bot$)**.** $\bot^\circ = \bot$ e $\bot^\Box = \bot$. A ida $\Box\bot \to \bot$ consiste em um axioma, sendo, portando provada trivialmente pela sucessão de dedução $\langle \Box\bot \to \bot \rangle$. A volta $\bot \to \Box\bot$ equivale a provar, por meio do teorema da dedução, que $\{\bot\} \vdash_{\mathbf{M}} \Box\bot$, o que pode ser provado trivialmente pela sucessão de dedução $\langle \bot, \Box\bot \rangle$, que consiste na invocação da premissa e aplicação da regra da necessitação, nessa ordem.

Caso 2 (Passo)**.** No passo, deve-se demonstrar que, caso $\Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$ para $|\alpha| = n$, então $\Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$ para $|\alpha| = n + 1$, onde $n \in \mathbb{N}$. Assim, seja $\Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$ uma proposição verdadeira para $|\alpha| = k$, onde $k \in \mathbb{N}$. Existem os seguintes casos a serem considerados para $|\alpha| = k + 1$.

Caso 2.1 ($\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$)**.**

Caso 2.2 ($\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$)**.**

Caso 2.3 ($\alpha = \alpha_1 \to \alpha_2$)**.**

$\Box$

Teorema 3. $\forall \alpha \in \mathcal{L}_{\mathbf{I}} \,.\, \Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha \Rightarrow \Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{M}} \alpha^\Box$

Demonstração. Como $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$, sabe-se que existe uma prova $\langle \varphi_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ tal que $\varphi_n = \alpha$. A demonstração deste teorema será feita por indução no tamanho n da prova.

Passo ($n = 1$)**.** A prova, caso possua tamanho $n = 1$, tem obrigatoriamente a forma $\langle \alpha \rangle$. Deste modo, existem duas casos a serem considerados: α ser um axioma ou α ser uma premissa.

Caso 1 ($\alpha \in \Gamma$)**.** Como $\alpha \in \Gamma$, sabe-se que $\alpha^\Box \in \Gamma^\Box$, uma vez que $\Gamma^\Box = \{\varphi^\Box \mid \varphi \in \Gamma\}$. Desta forma, $\langle \alpha^\Box \rangle$ constitui uma prova para $\Gamma^\Box \vdash \alpha^\Box$.

Caso 2 ($\alpha \in \mathcal{A}$)**.**

Caso 2.1 ($\mathbf{A_1}$)**.** Deve-se demonstrar que $\vdash \Box(\alpha^\Box \to \Box(\beta^\Box \to \alpha^\Box))$. Pelo teorema $\mathbf{T_1}$, basta provar que $\{\alpha^\Box, \beta^\Box\} \vdash \alpha^\Box$, o que pode ser feito pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\alpha^\Box$	**P**

Caso 2.2 ($\mathbf{A_2}$)**.**

1	$\Box(\alpha^\Box \to \beta^\Box) \to \alpha^\Box \to \beta^\Box$
2	$\Box(\alpha^\Box \to \beta^\Box)$
3	$\alpha^\Box \to \beta^\Box$
4	$\alpha^\Box$
5	$\beta^\Box$
6	$\Box(\alpha^\Box \to \Box(\beta^\Box \to \alpha^\Box)) \to \alpha^\Box \to \Box(\beta^\Box \to \alpha^\Box)$
7	$\Box(\alpha^\Box \to \Box(\beta^\Box \to \alpha^\Box))$
8	$\alpha^\Box \to \Box(\beta^\Box \to \alpha^\Box)$
9	$\Box(\beta^\Box \to \alpha^\Box)$
10	$\Box(\beta^\Box \to \alpha^\Box) \to \beta^\Box \to \gamma^\Box$
11	$\beta^\Box \to \gamma^\Box$
12	$\gamma^\Box$

Caso 2.3 ($\mathbf{A_3}$).

1	$\alpha^\Box \to \beta^\Box \to \alpha^\Box \land \beta^\Box$	$\mathbf{A_3}$
2	$\alpha^\Box$	$\mathbf{P}$
3	$\beta^\Box \to \alpha^\Box \land \beta^\Box$	$\mathbf{R_1}\ \langle 1, 2\rangle$
4	$\beta^\Box$	$\mathbf{P}$
5	$\alpha^\Box \land \beta^\Box$	$\mathbf{R_1}\ \langle 3, 4\rangle$

Caso 2.4 ($\mathbf{A_4}$).

1	$\alpha^\Box \land \beta^\Box \to \alpha^\Box$	$\mathbf{A_4}$
2	$\Box(\alpha^\Box \land \beta^\Box \to \alpha^\Box)$	$\mathbf{R_2}\ \langle 1\rangle$

Caso 2.5 ($\mathbf{A_5}$).

1	$\alpha^\Box \land \beta^\Box \to \beta^\Box$	$\mathbf{A_5}$
2	$\Box(\alpha^\Box \land \beta^\Box \to \beta^\Box)$	$\mathbf{R_2}\ \langle 1\rangle$

Caso 2.6 ($\mathbf{A_6}$).

1	$\alpha^\Box \to \alpha^\Box \lor \beta^\Box$	$\mathbf{A_6}$
2	$\Box(\alpha^\Box \to \alpha^\Box \lor \beta^\Box)$	$\mathbf{R_2}\ \langle 1\rangle$

Caso 2.7 $(\mathbf{A_7})$**.**

1	$\beta^{\Box} \to \alpha^{\Box} \vee \beta^{\Box}$	$\mathbf{A_7}$
2	$\Box(\beta^{\Box} \to \alpha^{\Box} \vee \beta^{\Box})$	$\mathbf{R_2}\ \langle 1 \rangle$

Caso 2.8 $(\mathbf{A_8})$**.**

1	$(\alpha^{\Box} \to \gamma^{\Box}) \to (\beta^{\Box} \to \gamma^{\Box}) \to \alpha^{\Box} \vee \beta^{\Box} \to \gamma^{\Box}$
2	$\Box(\alpha^{\Box} \to \gamma^{\Box}) \to \alpha^{\Box} \to \gamma^{\Box}$
3	$\Box(\alpha^{\Box} \to \gamma^{\Box})$
4	$\alpha^{\Box} \to \gamma^{\Box}$
5	$(\beta^{\Box} \to \gamma^{\Box}) \to \alpha^{\Box} \vee \beta^{\Box} \to \gamma^{\Box}$
6	$\Box(\beta^{\Box} \to \gamma^{\Box}) \to \beta^{\Box} \to \gamma^{\Box}$
7	$\Box(\beta^{\Box} \to \gamma^{\Box})$
8	$\beta^{\Box} \to \gamma^{\Box}$
9	$\alpha^{\Box} \vee \beta^{\Box} \to \gamma^{\Box}$
10	$\alpha^{\Box} \vee \beta^{\Box}$
11	$\gamma^{\Box}$

Caso 2.9 $(\mathbf{A_\perp})$**.** Deve-se demonstrar que $\vdash \Box(\perp \to \alpha^{\Box})$. Pelo teorema $\mathbf{T_1}$, basta provar que $\{\perp\} \vdash \alpha^{\Box}$, o que pode ser feito pela seguinte sucessão de dedução:

1	$((\alpha^{\Box} \to \perp) \to \perp) \to \alpha^{\Box}$	$\mathbf{A_\neg}$
2	$\perp \to (\alpha^{\Box} \to \perp) \to \perp$	$\mathbf{A_1}$
3	$\perp$	$\mathbf{P}$
4	$(\alpha^{\Box} \to \perp) \to \perp$	$\mathbf{R_1}\ \langle 2, 3 \rangle$
5	$\alpha^{\Box}$	$\mathbf{R_1}\ \langle 1, 4 \rangle$.

Caso 2.9 $(\mathbf{R_1})$**.** Deve-se demonstrar que, se $\vdash \Box(\alpha^{\Box} \to \beta^{\Box})$ $(\mathbf{H_1})$ e $\vdash \alpha^{\Box}$ $(\mathbf{H_2})$, então $\beta^{\Box}$. Isso pode ser feito pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Box(\alpha^{\Box} \to \beta^{\Box}) \to \alpha^{\Box} \to \beta^{\Box}$	$\mathbf{B_2}$
2	$\Box(\alpha^{\Box} \to \beta^{\Box})$	$\mathbf{H_1}$
3	$\alpha^{\Box} \to \beta^{\Box}$	$\mathbf{R_1}\ \langle 1, 2 \rangle$
4	$\alpha^{\Box}$	$\mathbf{H_2}$
5	$\beta^{\Box}$	$\mathbf{R_1}\ \langle 3, 4 \rangle$.

□

Referências Bibliográficas

[1] Jean-Yves Béziau. Universal logic. *Logica*, 1994.

[2] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 1987.

[3] Kurt Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 1933.

[4] John Charles Chenoweth McKinsey and Alfred Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, 1948.

[5] Eugenio Moggi. Notions of computation and monads. *Information and Computation*, 1991.

[6] Frank Pfenning and Rowan Davies. A judgmental reconstruction of modal logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 2001.

[7] Anne Sjerp Troelstra and Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory.* Cambridge University Press, 2000.