Uma formalização da interpretação modal do sistema intuicionista

Elian Babireski

2024

Axioma	**Sentença**	**Condição**
K	$\Box(\varphi \to \psi) \to \Box\varphi \to \Box\psi$	Distributividade
T	$\Box\varphi \to \varphi$	Reflexividade
B	$\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	Simetria
D	$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$	Serialidade
4	$\Box\varphi \to \Box\Box\varphi$	Transitividade
5	$\Diamond\varphi \to \Box\Diamond\varphi$	Euclidianidade

Table 1: Sample Table

Definição 1 (Tradução)**.** *Uma sentença φ de um sistema $\mathbf{A} = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{A}}, \vdash_{\mathbf{A}} \rangle$ pode ser traduzida a uma sentença φ^* em um sistema $\mathbf{B} = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{B}}, \vdash_{\mathbf{B}} \rangle$ caso exista uma função $\bullet^*\colon \mathcal{L}_{\mathbf{A}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{B}}$ que garanta que $\Gamma \vdash_{\mathbf{A}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash_{\mathbf{B}} \varphi^*$.* $\square$

A primeira tradução do sistema intuicionista ao sistema modal foi definida por Gödel [2] motivado pela possibilidade de leitura da necessidade como uma modalidade de construtividade. Ou seja, por meio dessa tradução, a sentença $\Box\varphi$ poderia ser lida como φ *pode ser provada construtivamente* [3]. Gödel demonstrou grande crença acerca da corretude fraca – $\varnothing \vdash_{\mathbf{I}} \varphi \Rightarrow \varnothing \vdash_{\mathbf{M}} \varphi^{\Box}$ – dessa tradução.

Definição 2 ($\bullet^{\Box}$)**.** *Define-se a tradução $\bullet^{\Box}$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$
\begin{aligned}
p^{\Box} &\coloneqq \Box p \\
\bot^{\Box} &\coloneqq \Box\bot \\
(\varphi \wedge \psi)^{\Box} &\coloneqq \Box(\varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box}) \\
(\varphi \vee \psi)^{\Box} &\coloneqq \Box(\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}) \\
(\varphi \to \psi)^{\Box} &\coloneqq \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box}) \\
(\exists x.\varphi)^{\Box} &\coloneqq \Box(\exists x.\varphi^{\Box}) \\
(\forall x.\varphi)^{\Box} &\coloneqq \Box(\forall x.\varphi^{\Box})
\end{aligned}
$$

$\square$

Definição 3 ($\bullet^{\circ}$)**.** *Define-se a tradução $\bullet^{\circ}$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$
\begin{aligned}
p^{\circ} &\coloneqq p \\
\bot^{\circ} &\coloneqq \bot \\
(\varphi \wedge \psi)^{\circ} &\coloneqq \varphi^{\circ} \wedge \psi^{\circ} \\
(\varphi \vee \psi)^{\circ} &\coloneqq \Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ} \\
(\varphi \to \psi)^{\circ} &\coloneqq \Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ} \\
(\exists x.\varphi)^{\circ} &\coloneqq \exists x.\Box\varphi^{\circ} \\
(\forall x.\varphi)^{\circ} &\coloneqq \forall x.\varphi^{\circ}
\end{aligned}
$$

$\square$

Definição 4 ($\bullet^{\Box}$)**.** *Define-se a tradução* $\bullet^{\Box}$ *indutivamente da seguinte maneira:*

$$
\begin{aligned}
p^{\Box} &\coloneqq \Box\, p \\
\bot^{\Box} &\coloneqq \bot \\
(\varphi \wedge \psi)^{\Box} &\coloneqq \varphi^{\Box} \wedge \psi^{\Box} \\
(\varphi \vee \psi)^{\Box} &\coloneqq \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box} \\
(\varphi \to \psi)^{\Box} &\coloneqq \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box}) \\
(\exists x.\varphi)^{\Box} &\coloneqq \exists x.\varphi^{\Box} \\
(\forall x.\varphi)^{\Box} &\coloneqq \Box\, \forall x.\varphi^{\Box}
\end{aligned}
$$

$\Box$

Faz-se interessante pontuar que as traduções $\bullet^{\circ}$ e $\bullet^{\Box}$ correspondem, respectivamente, às traduções $\bullet^{0}$ e $\bullet^{*}$ do sistema intuicionista ao sistema linear providas por [1], bastando trocar o modalidade $\Box$ pelo expoente ! e os conectivos intuicionistas pelas suas contrapartes lineares.

Bibliography

[1] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 1987.

[2] Kurt Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 1933.

[3] Anne Sjerp Troelstra and Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Cambridge University Press, 2000.