Uma formalização da interpretação modal do sistema intuicionista

Elian Babireski

2024

Resumo

Resumo aqui.

Sumário

«‹Oh, you can't help that,› said the Cat: ‹we're all mad here. I'm mad. You're mad.› ‹How do you know I'm mad?› said Alice. ‹You must be,› said the Cat, ‹or you wouldn't have come here.›»

— Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

1. Introdução

As lógicas modais consistem em um conjunto de extensões da lógica clássica que contam com a adição de um ou mais operadores, chamados modalidades, que qualificam sentenças. No caso do sistema **S4**, são adicionadas as modalidades de necessidade ($\Box$) e possibilidade ($\Diamond$) em conjunto à regra da necessitação[1] e os axiomas **T**: $\Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B$, **T**: $\Box A \to A$ e **4**: $\Box A \to \Box\Box A$ (Troelstra and Schwichtenberg, 2000). Ademais, pode-se derivar nesse sistema, por meio da dualidade entre as modalidades[2], sentenças duais aos axiomas **T** e **4**, sendo elas $\mathbf{T}_\Diamond$: $A \to \Diamond A$ e $\mathbf{4}_\Diamond$: $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$, respectivamente Zach (2024).

As mônadas ganharam destaque na área de linguagens de programação desde que Moggi (1991) formalizou uma metalinguagem que faz uso dessas estruturas para modelar noções de computação — como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuações — de uma maneira puramente funcional. Pode-se notar uma grande semelhança entre as sentenças $\mathbf{T}_\Diamond$ e $\mathbf{4}_\Diamond$ e as transformações naturais monádicas $\eta : 1_C \to T$ e $\mu : T^2 \to T$, respectivamente. Nesse sentido, Pfenning and Davies (2001) demonstraram que se pode traduzir essa metalinguagem para o sistema **S4** da lógica modal, pelo qual se torna interessante analisar esse sistema como uma linguagem de programação sob a ótica do isomorfismo de Curry-Howard.

Troelstra and Schwichtenberg (2000) apresentam duas traduções equivalentes da lógica intuicionista para o sistema **S4** da lógica modal, sendo um deles correspondente a uma abordagem *call-by-name* e outra a um abordagem *call-by-value*. Tais traduções possuem grande similaridade com as traduções da lógica intuicionista para a lógica linear definidas por Girard (1987). Essas traduções equivalem à tradução por negação dupla que, por sua vez, equivalem a traduções *continuation-passing style* (CPS) em compiladores por meio do isomorfismo de Curry-Howard (Reynolds, 1993), o que torna esse tema interessante no ponto de vista de compilação.

Durante grande parte da história, provas lógicas e matemáticas eram validadas manualmente pela comunidade acadêmica, o que muitas vezes — a depender do tamanho e complexidade da prova — se mostrava ser um trabalho complexo e sujeito a erros. Hoje em dia, exitem *softwares* chamados assistentes de provas que permitem verificar — graças ao isomorfismo de Curry-Howard — a corretude de provas (Chlipala, 2022). O assistente de provas que será usado neste trabalho é o Coq, que utiliza o cálculo de construções indutivas e um conjunto axiomático

[1] Se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$

[2] $\Diamond A \equiv \neg\Box\neg A$

pequeno para permitir a escrita de provas simples e intuitivas **?**.

Este trabalho será uma continuação do desenvolvimento da biblioteca de lógica modal no assistente de provas Coq feito em **?** e posteriormente expandido de forma a permitir a fusão de lógicas modais em **?**. Uma formalização similar de traduções de lógicas foi feito em **?**, porém, neste caso, das lógicas clássica e intuicionista para a lógica linear.

1.1 Justificativa

1.2 Metas

1.3 Estruturação

2. Fundamentação

Nesta parte do trabalho, serão apresentadas definições gerais que fundamentarão as definições mais estritas que serão apresentadas futuramente. Notadamente, fundamentaremos as noções de sistemas e traduções. Ademais, discorreremos acerca da noção de provadores, que serão usados para certificar as provas apresentadas posteriormente. Antes disso, entretanto, introduziremos duas notações que serão usadas copiosamente, uma para o conjunto das partes e outra para sucessões.

Notação. *Sendo A um conjunto, $\wp(A)$ denota o conjunto das partes de A.*

Notação. *Sendo $i, n \in \mathbb{N}^+$, $\langle a_i \mid i \leq n \rangle$ denota uma sucessão de n elementos de modo que o elemento a_i encontra-se na posição i.*

2.1 Sistemas

Sistemas lógicos buscam formalizar e sistematizar o processo de razoamento. Estudos acerca disso datam da antiguidade, dentre os quais se destaca o trabalho de Aristotels (1938). Considera-se que os estudos modernos neste campo foram fundados por Frege (1879) e continuados por Whitehead and Russell (1910, 1911, 1912).

Sistemas podem ser definidos tanto sobre fechos $C : \wp(\mathcal{L}) \to \wp(\mathcal{L})$ quanto sobre relações $\vdash : \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$. Ambas as definições são equivalentes, uma vez que $\Gamma \vdash \alpha$ se e somente se $\alpha \in C(\Gamma)$. Desde modo, quaisquer propriedades provadas para um dos conceitos pode ser trivialmente provada para o outro.

Conforme visto, as noções de sistema variam entre diferentes autores e permanece um campo em aberto. Para as necessidades deste trabalho, usaremos a definição proposta por Béziau (1994), uma vez que se trata de uma definição simples e que, portanto, não traz elementos irrelevantes aos intuitos deste trabalho.

Definição 1 (Sistema)**.** *Um sistema consiste num par $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, onde $\mathcal{L}$ consiste em um conjunto e $\vdash : \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ em uma relação sobre o produto cartesiano do conjunto das partes de $\mathcal{L}$ e o conjunto $\mathcal{L}$ em si, sem demais condições.* □

Conforme Béziau (1994) aponta, a *qualidade* e *quantidade* dos elementos de $\mathbf{L}$ não são especificados, portanto sendo esta uma definição de grande generalidade. Deste modo, a relação $\vdash$ pode ser tanto uma relação de *derivação* — definida sintaticamente — quanto uma relação de *satisfação* — definida semanticamente.[1] Neste

[1]Sendo esta denotada por $\vDash$.

trabalho, serão abordados apenas sistemas definidos sobre relações de derivação. Cabe destacar, entretanto, que nada impede a tradução entre sistemas definidos sobre relações de satisfação, como veremos futuramente.

Ainda, com base no escopo deste trabalho, restringiremos a definição do conjunto $\mathcal{L}$ a um conjunto de *sentenças proposicionais bem-formadas* — doravante ocasionalmente chamadas apenas de sentenças. Estas sentenças, neste trabalho representadas por letras gregas em caixa-baixa, podem ser geradas indutivamente a partir de uma assinatura proposicional — que consiste em um conjunto de letras proposicionais e um conjunto de operadores com suas aridades —, conforme definido abaixo. Conjuntos de sentenças serão representados por letras gregas em caixa-alta — salvo Σ, usado para representar assinaturas proposicionais.

Definição 2 (Assinatura). *Uma assinatura proposicional consiste num par* $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$*, onde* $\mathcal{P}$ *consiste num conjunto letras e* $\mathcal{C} = \bigcup \{\mathcal{C}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *num conjunto de operadores de modo que* $\bullet \in \mathcal{C}_n$ *se e somente se* $\bullet$ *possuir aridade* n*.* □

Notação. *Seja* $\mathcal{C}$ *um conjunto de operadores,* $\bullet^n$ *denota um operador* $\bullet \in \mathcal{C}_n$*.*

Podemos interpretar o conjunto de letras $\mathcal{P}$ como blocos que poderão ser ligados pelos elementos do conjunto de operadores $\mathcal{C}$ de modo a formar sentenças. Neste sentido, os operadores $\bullet \in \mathcal{C}_0$ são degenerados por não gerarem ligações, motivo pelo qual os chamaremos de *constantes*. Nota-se que uma assinatura constitui um elemento suficiente para definirmos indutivamente a linguagem — ou seja, o conjunto de sentenças — de um sistema, conforme definido abaixo. Por fim, destacamos que, para todos os sistemas apresentados neste trabalho, usaremos $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e letras romanas em caixa-baixa para representar seus elementos.

Definição 3 (Linguagem). *Seja* $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$ *uma assinatura proposicional. Uma linguagem proposicional* $\mathcal{L}$ *consiste no menor conjunto de sentenças bem-formadas induzido a partir das seguintes regras:*

(a) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$

(b) *Se* $\bullet^n \in \mathcal{C}$ *e* $\{\varphi_i \mid i \leq n\} \subseteq \mathcal{L}$*, então* $\bullet \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle \in \mathcal{L}$*.* □

Tendo definidas as noções de assinatura e sentença, pode-se definir a noção de profundidade de uma sentença. Esta noção, em termos simples, consiste no comprimento do maior ramo da contrução da sentença. A definição abaixo provida consiste numa generalização da definição dada por Troelstra and Schwichtenberg (2000). Usaremos essa definição futuramente para provar propriedades por meio de indução sobre esta propriedade.

Definição 4 (Profundidade)**.** *Seja* $\mathbf{A} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *um sistema,* $\alpha \in \mathcal{L}$ *uma sentença e* $\bullet^n$ *um operador de aridade* $n \in \mathbb{N}$ *que consta na assinatura que define* $\mathcal{L}$*. Pode-se definir a profundidade* $|\alpha|$ *de* α *recursivamente da seguinte maneira:*

$$
\begin{aligned}
|a| &\coloneqq 0 \\
|\bullet^0| &\coloneqq 0 \\
|\bullet^n \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle| &\coloneqq \max\{|\varphi_i| \mid i \leq n\} + 1.
\end{aligned}
\qquad \square
$$

Definindo-se profundidade, encerramos as definições desta fundamentação que dizem respeito ao primeiro elemento de um sistema: a linguagem. Agora as definições fornecidas dirão respeito a relações de derivação. Neste trabalho, as relações de derivação abordadas serão baseadas em axiomatizações, ou seja, em pares de esquemas de axiomas e regras de dedução.

Definição 5 (Esquema)**.** *Um esquema consiste em um padrão com metavariaveis que permitem representar um conjunto, geralmente infinito, de sentenças.* $\square$

Definição 6 (Regra)**.** *Uma regra de dedução consiste num par* $\langle \Gamma, \alpha \rangle$*, sendo* Γ *um conjunto de sentenças chamadas de premissas e* α *uma sentença chamada conclusão.* $\square$

Definição 7 (Axiomatização)**.** *Um sistema de Hilbert para um sistema* $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ *consiste em um par* $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$*, sendo* $\mathcal{A}$ *um conjunto de esquemas de axiomas e* $\mathcal{R}_0 \subseteq \mathcal{R}$ *o conjunto de regras de dedução abaixo.*

A *Se* $\alpha \in \mathcal{A}$*, então* $\Gamma \vdash \alpha$

P *Se* $\alpha \in \Gamma$*, então* $\Gamma \vdash \alpha$

E *Se* $\vdash \alpha$*, então* $\Gamma \vdash \alpha$*.* $\square$

Definição 8 (Dedução)**.** *Uma dedução de* $\Gamma \vdash \alpha$ *consiste numa sucessão de sentenças* $\langle \varphi_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ *de modo que* $\varphi_n = \alpha$ *e cada sentença* φ_i *foi gerada a partir da aplicação de uma regra a axiomas, premissas ou sentenças anteriores.* $\square$

2.2 Traduções

Traduções entre sistemas consistem em funções que mapeiam sentenças de um sistema a sentenças de outro, garantindo certas propriedades. As propriedades a serem garantidas variam e ainda são discutidas na literatura, deixando a definição exata de tradução — assim como houve com a definição de sistema — varie de acordo com a predileção e as necessidades de cada autor. Nesta seção, serão abordadas historicamente noções de tradução entre sistemas, bem como serão definidos e nomeados os conceitos de tradução que serão usados no restante deste trabalho.

Neste trabalho, adotaremos uma noção forte de tradução que requer tanto a correção forte quanto a completude forte, conforme Coniglio (2005). Definiremos, ainda, uma notação que nos permite aplicar sucintamente a tradução a todos os elementos de um conjunto.

Definição 9 (Tradução)**.** *Uma sentença φ de um sistema $\mathbf{A} = \langle \mathcal{L}_\mathbf{A}, \vdash_\mathbf{A} \rangle$ pode ser traduzida a uma sentença φ^* em um sistema $\mathbf{B} = \langle \mathcal{L}_\mathbf{B}, \vdash_\mathbf{B} \rangle$ caso exista uma função $\bullet^*\colon \mathcal{L}_\mathbf{A} \to \mathcal{L}_\mathbf{B}$ que garanta que $\Gamma \vdash_\mathbf{A} \varphi \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash_\mathbf{B} \varphi^*$.* □

Notação. *Seja $\Gamma \in \wp(\mathcal{L}_\mathbf{A})$ um conjunto de sentenças bem-formadas e $\bullet^*\colon \mathcal{L}_\mathbf{A} \to \mathcal{L}_\mathbf{B}$ uma tradução. Γ^* denota o conjunto $\{\alpha^* \mid \alpha \in \Gamma\} \in \wp(\mathcal{L}_\mathbf{B})$, ou seja, a aplicação da tradução a todos os elementos do conjunto Γ.* □

A primeira tradução entre dois sistemas conhecida na literatura foi definida por Kolmogorov (1925) como uma maneira de demonstrar que o uso da *lei do terço excluso*[2] não leva a contradições. Essa definição consiste basicamente em dobre-negar cada elemento da construção de uma dada sentença, motivo pelo qual chamaremos essa tradução de *tradução de negação dupla* (Coniglio, 2005). Essa mesma tradução foi também descoberta independentemente por Gödel e por Getzen. Curiosamente, essa tradução mostra-se relevante para o escopo deste trabalho, uma vez que consiste na contraparte da passagem por continuações segundo a interpretação prova-programa.

Definição 10 ($\bullet^\neg$)**.** *Define-se a tradução $\bullet^\neg$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$
\begin{aligned}
p^\neg &:= \neg\neg p \\
\bot^\neg &:= \neg\neg\bot \\
(\varphi \wedge \psi)^\neg &:= \neg\neg(\varphi^\neg \wedge \psi^\neg) \\
(\varphi \vee \psi)^\neg &:= \neg\neg(\varphi^\neg \vee \psi^\neg) \\
(\varphi \to \psi)^\neg &:= \neg\neg(\varphi^\neg \to \psi^\neg)
\end{aligned}
$$
□

2.3 Provadores

[2] Definido como $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

3. Definições

Nesta parte do trabalho, uma vez apresentada a fundamentação, introduziremos as definições dos sistemas e traduções que serão de fato abordados. Serão elas: os sistemas intuicionista e modais — mais especificamente o $\mathbf{S_4}$ —, bem como duas traduções equivalentes do primeiro sistema ao segundo.

3.1 Intuicionismo

Definição 11 ($\mathcal{L}_\mathbf{I}$). *A linguagem do sistema intuicionista, denotada $\mathcal{L}_\mathbf{I}$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_\mathbf{I} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_\mathbf{I} \rangle$, onde $\mathcal{C}_\mathbf{I} = \{\bot^0, \wedge^2, \vee^2, \to^2\}$.* □

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\begin{aligned} \top &\coloneqq \bot \to \bot \\ \neg\alpha &\coloneqq \alpha \to \bot \\ \alpha \leftrightarrow \beta &\coloneqq (\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \end{aligned}$$

Definição 12. *A axiomatização do sistema intuicionista consiste no conjunto de esquemas de axiomas $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i \mid i \in [1, 8] \vee i = \bot\}$ e no conjunto de regras $\mathcal{R} = \{\mathbf{R_1}\}$, definidos abaixo:*

$$\begin{array}{ll} \mathbf{A_1} & \alpha \to \beta \to \alpha \\ \mathbf{A_2} & (\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \\ \mathbf{A_3} & \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta \\ \mathbf{A_4} & \alpha \wedge \beta \to \alpha \\ \mathbf{A_5} & \alpha \wedge \beta \to \beta \\ \mathbf{A_6} & \alpha \to \alpha \vee \beta \\ \mathbf{A_7} & \beta \to \alpha \vee \beta \\ \mathbf{A_8} & (\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \vee \beta \to \gamma) \\ \mathbf{A_\bot} & \bot \to \alpha \\ \mathbf{R_1} & \textit{Se } \Gamma \vdash \alpha \textit{ e } \Gamma \vdash \alpha \to \beta, \textit{ então } \Gamma \vdash \beta. \end{array}$$ □

Daremos nomes aos esquemas e regras acima de modo a facilitar a comunicação no decorrer deste trabalho. Chamaremos o esquema $\mathbf{A_1}$ de esquema da constante e o esquema $\mathbf{A_1}$ de esquema da aplicação.[1] Ao esquema $\mathbf{A_3}$ daremos o nome de introdução da conjunção, enquanto os esquemas $\mathbf{A_4}$ e $\mathbf{A_5}$ serão chamados de eliminação da conjunção. Analogamente, os esquemas $\mathbf{A_6}$ e $\mathbf{A_7}$ serão chamados de introdução da disjunção, enquanto ao esquema $\mathbf{A_8}$ chamaremos de eliminação da disjunção. Por fim, chamaremos $\mathbf{A}_\perp$ de esquema da explosão e $\mathbf{R_1}$ de regra da separação ou *modus ponens*.

3.2 Modalismo

BABIRESKI: Blackburn et al. (2001) traz uma visão da evolução dos sistemas modais.

Os sistemas modais consistem em extensões do sistema proposicional com a adição de modalidades que representam *necessidade* — denotada como $\Box$ — e *possibilidade* — denotada como $\Diamond$ — bem como esquemas e regras que dizem respeito a elas. Deste modo, estão contidas na linguagem do sistema sentenças da forma $\Box\alpha$ e $\Diamond\alpha$ — lidas *necessariamente* α e *possivelmente* α, respeitivamente. Intuitivamente, uma necessidade deve ser verdade em todos os casos, enquanto uma possibilidade deve ser verdade em algum caso.

Os primeiros desenvolvimentos acerca das modalidades acima foram feitos pelos gregos antigos, que anteciparam muitos dos preceitos aceitos modernamente. O fundador do modalismo moderno foi Lewis (1912), motivado pela sua insatisfação com a implicação material, uma vez que sua definição[2] permite que sentenças intuitivamente falsas em linguagem natural seja valoradas como verdade. Este sistema foi posteriormente melhor desenvolvido por Lewis and Langford (1932), onde foram apresentados os sistemas $\mathbf{S_1}$ a $\mathbf{S_5}$ — sendo $\mathbf{S_4}$ o abordado neste trabalho.

Primeiramente, definiremos a assinatura proposicional dos sistemas modais, a partir da qual sua linguagem deriva trivialmente.

Definição 13 ($\mathcal{L}_\mathbf{M}$). *A linguagem dos sistemas modais, denotada $\mathcal{L}_\mathbf{M}$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_\mathbf{M} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_\mathbf{M} \rangle$, onde $\mathcal{C}_\mathbf{M} = \{\perp^0, \Box^1, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2\}$.*

[1] Em analogia aos combinadores **K** e **S**.
[2] Definida como $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$.

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\top \coloneqq \bot \to \bot$$
$$\neg\alpha \coloneqq \alpha \to \bot$$
$$\Diamond\alpha \coloneqq \neg\Box\neg\alpha$$
$$\alpha \multimap \beta \coloneqq \Box(\alpha \to \beta)$$
$$\alpha \leftrightarrow \beta \coloneqq (\alpha \to \beta) \land (\beta \to \alpha)$$

Notação. *Seja* $\Gamma \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{M}})$ *um conjunto de sentenças bem-formadas.* $\Box\Gamma$ *denota o conjunto* $\{\Box\alpha \mid \alpha \in \Gamma\} \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{M}})$*, ou seja, a prefixação da necessitação a todos os elementos do conjunto* Γ*.*

Definição 14. *A axiomatização do sistema modal consiste no conjunto de esquemas de axiomas* $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i \mid i \in [1, 8] \lor i = \neg\} \cup \{\mathbf{B_1}, \mathbf{B_2}, \mathbf{B_3}\}$ *e no conjunto de regras* $\mathcal{R} = \{\mathbf{R_1}, \mathbf{R_2}\}$*, definidos abaixo:*

$\mathbf{A_1}$	$\alpha \to \beta \to \alpha$
$\mathbf{A_2}$	$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$
$\mathbf{A_3}$	$\alpha \to \beta \to \alpha \land \beta$
$\mathbf{A_4}$	$\alpha \land \beta \to \alpha$
$\mathbf{A_5}$	$\alpha \land \beta \to \beta$
$\mathbf{A_6}$	$\alpha \to \alpha \lor \beta$
$\mathbf{A_7}$	$\beta \to \alpha \lor \beta$
$\mathbf{A_8}$	$(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to (\alpha \lor \beta \to \gamma)$
$\mathbf{A}_\neg$	$\neg\neg\alpha \to \alpha$
$\mathbf{B_1}$	$\Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$
$\mathbf{B_2}$	$\Box\alpha \to \alpha$
$\mathbf{B_3}$	$\Box\alpha \to \Box\Box\alpha$
$\mathbf{R_1}$	*Se* $\Gamma \vdash \alpha$ *e* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$*, então* $\Gamma \vdash \beta$
$\mathbf{R_2}$	*Se* $\vdash \alpha$*, então* $\Gamma \vdash \Box\alpha$*.*

$\Box$

BABIRESKI: Falar aqui sobre como a axiomatização consiste nos esquemas clássicos mais os esquemas modais.

Assim como feito para o sistema intuicionista, nomearemos os esquemas e regras acima de modo a facilitar a comunicação. Aos axiomas e regras que correspondem aos axiomas e regras intuicionistas receberão os mesmos nomes. Ademais, chamaremos $\mathbf{B_1}$ de axiomas da normalidade, $\mathbf{B_2}$ de axiomas da reflexividade e $\mathbf{B_3}$ de axiomas da transitividade.[3] Nomearemos $\mathbf{A}_\neg$ como chamaremos de axiomas da eliminação da negação e a $\mathbf{R_2}$ como regra da necessitação.

A definição das regras de dedução em relação a conjuntos de sentenças baseia-se tanto em Troelstra and Schwichtenberg (2000) como em Hakli and Negri (2012). Ao decorrer do texto, ocasionalmente chamaremos $\mathbf{R_1}$ de *regra da separação* e $\mathbf{R_2}$ de *regra da necessitação*. A definição da regra da necessitação deve ser cuidadosa de modo a permitir a prova do metateorema da dedução, feita futuramente neste trabalho. Neste sentido, restringimos a aplicação desta regra apenas a teoremas.[4]

3.3 Traduções

A primeira tradução do sistema intuicionista ao sistema modal foi proposta por Gödel (1933) motivado pela possibilidade de leitura da necessidade como uma modalidade de construtividade. Ou seja, por meio dessa tradução, a sentença $\Box\varphi$ poderia ser lida como φ *pode ser provada construtivamente* (Troelstra and Schwichtenberg, 2000). Gödel conjeiturou a corretude fraca dessa tradução, que foi posteriormente provada por McKinsey and Tarski (1948) em conjunto com sua completude fraca.

Definição 15 ($\bullet^\circ$). *Define-se a tradução $\bullet^\circ$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\circ &:= p \\ \bot^\circ &:= \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\circ &:= \varphi^\circ \wedge \psi^\circ \\ (\varphi \vee \psi)^\circ &:= \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ \\ (\varphi \to \psi)^\circ &:= \Box\varphi^\circ \to \psi^\circ \end{aligned} \qquad \Box$$

Definição 16 ($\bullet^\Box$). *Define-se a tradução $\bullet^\Box$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\Box &:= \Box p \\ \bot^\Box &:= \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\Box &:= \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \\ (\varphi \vee \psi)^\Box &:= \varphi^\Box \vee \psi^\Box \\ (\varphi \to \psi)^\Box &:= \Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box) \end{aligned} \qquad \Box$$

[3] Em analogia às condições relacionais impostas nos enquadramentos.
[4] Para uma discussão mais aprofudada, ver Hakli and Negri (2012).

Faz-se interessante pontuar que as traduções $\bullet^{\circ}$ e $\bullet^{\square}$ correspondem, respectivamente, às traduções $\bullet^{\circ}$ e $\bullet^{*}$ do sistema intuicionista ao sistema linear providas por Girard (1987), sendo as primeiras correspondentes a uma ordem de avaliação por nome (*call-by-name*) e as segundas a uma ordem de avaliação por valor (*call-by-value*). Ademais, as duas traduções providas são equivalentes, conforme demonstrado pelo teorema $\mathbf{T_2}$.

4. Formalização

Uma vez definidos os conceitos precisos para o desenvolvimento deste trabalho, aqui apresentaremos diversas provas que os dizem respeito. Notadamente, serão provados metateoremas acerca de $\mathbf{S_4}$, serão derivadas sentenças que possuem interpretações computacionais e serão demonstradas a correção e completude das traduções. Todas as derivações a seguir serão — a menos quando indicado — no sistema $\mathbf{S_4}$, motivo pelo qual denotaremos a relação de derivação $\vdash_{\mathbf{4}}$ apenas como $\vdash$.

4.1 Derivações

Nesta seção apresentaremos alguns lemas e teoremas para os sistemas modais que permitirão simplificar muito as provas apresentadas no decorrer deste trabalho. Primeiramente, provaremos que, dada uma sentença qualquer, esta sempre implica a si mesma. A este lema daremos o nome de identidade[1] e, em seguida, usaremo-no para a prova da regra da dedução.

Lema 1. $\vdash \alpha \to \alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$
2	$\vdash \alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha$	$\mathbf{A_1}$
3	$\vdash (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_2}$
4	$\vdash (\alpha \to \alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{2, 3\}$
5	$\vdash \alpha \to \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 4\}$

Estando assim provada a proposição. □

Tendo-se provado o lema da identidade, agora provaremos a regra da dedução para os sistemas modais com base na prova apresentada por Hakli and Negri (2012). Pequenas alterações foram feitas de modo a garantir a adequação da prova com a axiomatização provida na definição $\mathbf{D_{14}}$.

Teorema 1. *Se* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, *então* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

[1] Em analogia ao combinador **I**.

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução.[2] Assim, suponhamos que o teorema da dedução valha para qualquer sucessão dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos analisando-se os casos e valendo-se da suposição acima — doravante chamada $\mathbf{H}$ — o passo de indução, ou seja, que o teorema da dedução vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k + 1$.

Caso 1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de alguma premissa, sabe-se que $\beta \in \Gamma \cup \{\alpha\}$. Deste modo, existem outros dois casos a serem analisados.

Caso 1.1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de alguma premissa do conjunto Γ, sabe-se que $\beta \in \Gamma$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{P}_\beta$
2	$\Gamma \vdash \beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$
3	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$.

Caso 1.2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação da premissa α, sabe-se que $\beta = \alpha$. Deste modo, basta demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \alpha$, que consiste num enfraquecimento do lema $\mathbf{L_1}$.

Caso 2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de algum axioma, sabe-se que existe algum esquema $\mathbf{A}_\beta \in \mathcal{A}$ que instancia β. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \beta$	$\mathbf{A}_\beta$
2	$\Gamma \vdash \beta \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{A_1}$
3	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$.

Caso 3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido gerada pela aplicação da regra da necessitação a uma linha anterior, sabe-se que $\beta = \Box\varphi$ e que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$ pela seguinte sucessão de dedução:

[2] Note que, para a indução forte, não se faz preciso provar nenhuma base (Velleman, 2019).

1	$\vdash \varphi$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Gamma \vdash \Box\varphi$	$\mathbf{R_2}$ $\{1\}$
3	$\Gamma \vdash \Box\varphi \to \alpha \to \Box\varphi$	$\mathbf{A_1}$
4	$\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$	$\mathbf{R_1}$ $\{2, 3\}$.

CASO 4. Seja a sentença $\varphi_n = \beta$ gerada pela aplicação da regra da separação a duas sentenças φ_i e φ_j com $i < j < n$. Assumiremos, sem perda de generalidade, que $\varphi_j = \varphi_i \to \varphi_n$. Assim, a partir de **H** temos que $\mathbf{H_1} = \Gamma \vdash \alpha \to \varphi_i$ e que $\mathbf{H_2} = \Gamma \vdash \alpha \to \varphi_i \to \varphi_n$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \to \Box\varphi$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \alpha \to \varphi_j$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Gamma \vdash \alpha \to \varphi_j \to \beta$	$\mathbf{H_2}$
3	$\Gamma \vdash (\alpha \to \varphi_j \to \beta) \to (\alpha \to \varphi_j) \to (\alpha \to \beta)$	$\mathbf{A_2}$
4	$\Gamma \vdash (\alpha \to \varphi_j) \to (\alpha \to \beta)$	$\mathbf{R_1}$ $\{2, 3\}$
5	$\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 4\}$.

Uma vez provada a propriedade para todos os casos do passo de indução, provamos que o teorema da dedução vale para o sistema $\mathbf{S_4}$. $\square$

Teorema 2. *Se* $\Box\Gamma \vdash \alpha$, *então* $\Box\Gamma \vdash \Box\alpha$.

Demonstração. Prova por indução fraca sobre o tamanho n do conjunto Γ (Troelstra and Schwichtenberg, 2000). A prova consiste em dois casos: um para a base da indução e outro para o passo da indução.

CASO 1. Para a base, consideraremos que $\Gamma = \varnothing$. Assim, sabemos que o conjunto possui tamanho nulo e que $\vdash \alpha$. Portanto, sabe-se que existe uma sucessão de dedução $\langle \varphi_i \mid 0 \leq i \leq n \rangle$ com $\varphi_n = \alpha$ Deste modo, pode-se demonstrar que $\vdash \Box\alpha$ trivialmente pela aplicação da regra da necessitação $\mathbf{R_2}$ sobre a sentença φ_n.

CASO 2. Para o passo, suponhamos que a generalização da regra da necessitação valha para qualquer conjunto Γ de tamanho $n = k$. Demonstraremos, valendo-se da suposição acima — doravante chamada **H** — e pela sucessão de dedução apresentada abaixo, que a generalização da regra da necessitação vale para conjuntos Γ de tamanho $n = k + 1$.

1	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \beta$

2	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \to \beta$
3	$\Box\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha \to \beta)$
4	$\Box\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha \to \beta) \to \Box\Box\alpha \to \Box\beta$
5	$\Box\Gamma \vdash \Box\Box\alpha \to \Box\beta$
6	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \to \Box\Box\alpha$
7	$\Box\Gamma \vdash (\Box\alpha \to \Box\Box\alpha) \to (\Box\Box\alpha \to \Box\beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$
8	$\Box\Gamma \vdash (\Box\Box\alpha \to \Box\beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$
9	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \to \Box\beta$
10	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$
11	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \to \Box\beta$
12	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\beta$

$\Box$

Uma vez provada a generalização da regra da implicação, a prova da regra da dedução estrita — conforme descrito por Marcus (1946, 1953) — torna-se trivial, como pode ser visto abaixo. Esta regra derivada permite simplificar as provas de corretude das traduções, uma vez que uma das traduções que serão apresentadas mapeia implicações materiais do sistema intuicionista em implicações estritas.

Teorema 3. *Se* $\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, *então* $\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{H_1}$
2	$\Box\Gamma \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{T_1}$ $\{1\}$
3	$\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{T_2}$ $\{2\}$. $\Box$

Lema 2. $\vdash \bot \to \alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\bot\} \vdash \bot$	$\mathbf{P_1}$
2	$\{\bot\} \vdash \bot \to (\alpha \to \bot) \to \bot$	$\mathbf{A_1}$
3	$\{\bot\} \vdash \neg\neg\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\bot\} \vdash \neg\neg\alpha \to \alpha$	$\mathbf{A_\neg}$
5	$\{\bot\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{3, 4\}$

6	$\vdash \bot \to \alpha$	$\mathbf{T_1}$ $\{5\}$. $\square$

Lema 3. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \beta \to \bot$	$\mathbf{P_2}$
2	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\beta \to \bot) \to \alpha \to (\beta \to \bot)$	$\mathbf{A_1}$
3	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \bot$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\alpha \to \beta \to \bot) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \bot)$	$\mathbf{A_2}$
5	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{P_1}$
6	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \bot)$	$\mathbf{R_1}$ $\{3, 4\}$
7	$\{\alpha \to \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{5, 6\}$
8	$\{\alpha \to \beta\} \vdash \neg\beta \to \neg\alpha$	$\mathbf{T_1}$ $\{7\}$
9	$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$	$\mathbf{T_1}$ $\{8\}$.

$\square$

Lema 4. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \beta \wedge \gamma$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{P_3}$
2	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{P_1}$
3	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \to \gamma$	$\mathbf{P_2}$
5	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 4\}$
6	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta \to \gamma \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{A_3}$
7	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{R_1}$ $\{3, 6\}$
8	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{R_1}$ $\{5, 7\}$
9	$\{\alpha \to \beta, \alpha \to \gamma\} \vdash \alpha \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{T_1}$ $\{8\}$
10	$\{\alpha \to \beta\} \vdash (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{T_1}$ $\{9\}$
11	$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma) \to \alpha \to \beta \wedge \gamma$	$\mathbf{T_1}$ $\{10\}$.

$\square$

Lema 5. $\vdash \square(\alpha \wedge \beta) \to \square\alpha \wedge \square\beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha \wedge \beta \to \alpha$	$\mathbf{A_4}$
2	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \to \alpha)$	$\mathbf{R_2}$ $\{1\}$
3	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \to \alpha) \to (\Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha)$	$\mathbf{B_1}$
4	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{2,3\}$
5	$\vdash \alpha \wedge \beta \to \beta$	$\mathbf{A_5}$
6	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \to \beta)$	$\mathbf{R_2}$ $\{5\}$
7	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \to \beta) \to (\Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\beta)$	$\mathbf{B_1}$
8	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{6,7\}$
9	$\vdash (\Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha) \to (\Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\beta) \to \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{L_4}$
10	$\vdash (\Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\beta) \to \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{4,9\}$
11	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \to \Box\alpha \wedge \Box\beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{6,9\}$

□

Lema 6. $\vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box(\alpha \wedge \beta)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta$	$\mathbf{A_3}$
2	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box\alpha$	$\mathbf{A_4}$
3	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \to \alpha$	
4	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \to \Box\beta$	$\mathbf{A_5}$
5	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \to \beta$	
6	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,4\}$

□

Lema 7. $\vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$	$\mathbf{P_2}$
2	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \to \alpha$	$\mathbf{B_2}$
3	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1,2\}$
4	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \to \beta)$	$\mathbf{P_1}$
5	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta$	$\mathbf{B_2}$

6	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \alpha \to \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{4, 5\}$
7	$\{\Box(\alpha \to \beta), \Box\alpha\} \vdash \beta$	$\mathbf{R_1}$ $\{3, 6\}$
8	$\{\Box(\alpha \to \beta)\} \vdash \Box\alpha \to \beta$	$\mathbf{T_1}$ $\{7\}$
9	$\vdash \Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \beta$	$\mathbf{T_1}$ $\{8\}$.

□

Lema 8. $\vdash (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha$
2	$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \to \beta$
3	$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta$
4	$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \beta \to \gamma$
5	$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$
6	$\{\alpha \to \beta, \beta \to \gamma\} \vdash \alpha \to \gamma$
7	$\{\alpha \to \beta\} \vdash (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$
8	$\vdash (\alpha \to \beta) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \to \gamma$

Daremos a este lema o nome *lema da composição.* □

Lema 9. $\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha\} \vdash \alpha$

Daremos a este lema o nome *lema da introdução da dupla negação.* □

Lema 10. $\vdash (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta \vee \gamma$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \alpha$
2	$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \alpha \to \beta$
3	$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta$
4	$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta \to \beta \vee \gamma$
5	$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta \vee \gamma$

6	$\{\alpha \to \beta\} \vdash \alpha \to \beta \vee \gamma$
7	$\vdash (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \beta \vee \gamma$

$\square$

Lema 11. $\vdash (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \vee \beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \alpha$
2	$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \alpha \to \beta$
3	$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta$
4	$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \beta \to \gamma \vee \beta$
5	$\{\alpha \to \beta, \alpha\} \vdash \gamma \vee \beta$
6	$\{\alpha \to \beta\} \vdash \alpha \to \gamma \vee \beta$
7	$\vdash (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \vee \beta$

$\square$

4.2 Dualidades

BABIRESKI: Ver Zach (2024) acerca dos axiomas duais e suas derivações.

Teorema 4. $\vdash \alpha \to \Diamond\alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \Box\neg\alpha \to \neg\alpha$	$\mathbf{B_2}$
2	$\vdash (\Box\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{L_3}$
3	$\vdash \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$
4	$\vdash (\neg\neg\alpha \to \neg\Box\neg\alpha) \to \alpha \to (\neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha)$	$\mathbf{A_1}$
5	$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha$	$\mathbf{R_1}$ $\{3, 4\}$
6	$\vdash (\alpha \to \neg\neg\alpha \to \Diamond\alpha) \to (\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\alpha \to \Diamond\alpha)$	$\mathbf{A_2}$
7	$\vdash \alpha \to \neg\neg\alpha$	**BABIRESKI:** Provar.
8	$\vdash (\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\alpha \to \Diamond\alpha)$	$\mathbf{R_1}$ $\{5, 6\}$

9 $\vdash \alpha \to \Diamond\alpha$ $\quad$ $\mathbf{R_1}$ $\{7, 8\}$. $\square$

Teorema 5. $\vdash \Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1 $\vdash \neg\Box\alpha \to \neg\Box\Diamond\alpha$

2 $\vdash \Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$ $\square$

Apesar da similaridades com as transformações naturais, deve-se destacar que as noções de computação não podem ser interpretadas simplesmente como necessidade ou possibilidade, uma vez que apresenta propriedades presente em ambas as modalidades. Neste sentido, a modalidade de *laxidade* — que combina noções de necessidade e possibilidade — mostra-se uma melhor representação de efeitos computacionais sobre a interpretação programa-prova.

Ao sistema que comporta essa modalidade — denotada $\bigcirc$ — damos o nome de sistema laxo ou simplesmente **L**. Este sistema foi primeiramente considerado por Curry (1952, 1957) e posteriormente redescoberto por Fairtlough and Mendler (1995, 1997) como uma tentativa de representar correção dentro de restrições na verificação formal de *hardware* de computadores. Pode ser definido formalmente por meio da assinatura $\Sigma_{\mathbf{L}} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_{\mathbf{L}} \rangle$ e da axiomatização $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}_{\mathbf{L}}, \mathcal{R}_{\mathbf{I}} \rangle$, onde $\mathcal{C}_{\mathbf{L}} = \mathcal{C}_{\mathbf{I}} \cup \{\circ^1\}$ e $\mathcal{A}_{\mathbf{L}} = \mathcal{A}_{\mathbf{I}} \cup \{\mathbf{C_1}, \mathbf{C_2}, \mathbf{C_3}\}$, considerando-se os esquemas abaixo:

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{C_1} & \alpha \to \bigcirc\alpha \\
\mathbf{C_2} & \bigcirc\bigcirc\alpha \to \bigcirc\alpha \\
\mathbf{C_3} & (\alpha \to \beta) \to \bigcirc\alpha \to \bigcirc\beta
\end{array}
$$

Esse sistema, entretanto, pode ser interpretado modalmente por meio da seguinte tradução (Pfenning and Davies, 2001):

Definição 17 ($\bullet^+$)**.** *A tradução* $\bullet^+ \colon \mathcal{L}_{\mathbf{M}} \to \mathcal{L}_{\mathbf{L}}$ *do sistema* $\mathbf{S_4}$ *intuicionista ao sistema* **L** *pode ser definida indutivamente da seguinte maneira:*

$$
\begin{aligned}
a^+ &:- a \\
\bot^+ &:- \bot \\
(\bigcirc\alpha)^+ &:- \Diamond\Box\alpha^+ \\
(\alpha \to \beta)^+ &:- \Box\alpha^+ \to \beta^+
\end{aligned}
$$

$\square$

4.3 Isomorfismo

Conforme afirmado anteriormente, ambas as traduções apresentadas neste trabalho equivalem — ou seja, são isomorfas — na forma $\vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$. Nesta seção, provaremos este isomorfismo que, não somente constitui puramente um resultado de interesse, como permite tornar a prova de propriedades de uma tradução triviais caso tais propriedades valham para a outra tradução.

Teorema 6. $\vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre a profundidade de α. Assim, suponhamos que as traduções equivalham para qualquer α de profundidade $n < k$. Demonstraremos analisando-se os casos e valendo-se da suposição acima — doravante chamada **H** — o passo de indução, ou seja, que as traduções equivalem para qualquer α de profundidade $n = k$.

Caso 1. Se a sentença α for uma proposição a, sabe-se que $\Box a^\circ = \Box a$ e que $a^\Box = \Box a$ pelas definições das traduções. Deste modo, tanto a ida quanto a volta possuem a forma $\Box a \rightarrow \Box a$ e podem ser provadas pelo lema $\mathbf{L_1}$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 2. Se a sentença α for a constante $\bot$, sabe-se que $\Box\bot^\circ = \Box\bot$ e que $\bot^\Box = \bot$ pelas definições das traduções. Deste modo, a ida $\Box\bot \rightarrow \bot$ constitui um axioma gerado pelo esquema $\mathbf{B_2}$ — sendo assim provada trivialmente — e a volta $\bot \rightarrow \Box\bot$ pode ser provada pelo lema $\mathbf{L_2}$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 3. Se a sentença α for o resultado da conjunção de duas outras sentenças φ e ψ, sabe-se que $\Box(\varphi \wedge \psi)^\circ = \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$ e que $(\varphi \wedge \psi)^\Box = \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$ e outro para a volta $\varphi^\Box \wedge \psi^\Box \rightarrow \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema da introdução da conjunção $\mathbf{A_3}$.

Caso 3.1. A partir de **H**, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \varphi^\Box$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \Box\psi^\circ \rightarrow \psi^\Box$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$	$\mathbf{P_1}$
2	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \to \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ$	$\mathbf{L_5}$
3	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ$	$\mathbf{R_1}$ $\{1, 2\}$
4	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ \to \Box\varphi^\circ$	$\mathbf{A_4}$
5	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ$	$\mathbf{R_1}$ $\{3, 4\}$
6	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \to \varphi^\Box$	$\mathbf{H_1}$
7	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\Box$	$\mathbf{R_1}$ $\{5, 6\}$
8	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ \to \Box\psi^\circ$	$\mathbf{A_4}$
9	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\psi^\circ$	$\mathbf{R_1}$ $\{3, 8\}$
10	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\psi^\circ \to \psi^\Box$	$\mathbf{H_2}$
11	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \psi^\Box$	$\mathbf{R_1}$ $\{9, 10\}$
12	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\Box \to \psi^\Box \to \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	$\mathbf{A_3}$
13	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \psi^\Box \to \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	$\mathbf{R_1}$ $\{7, 12\}$
14	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	$\mathbf{R_1}$ $\{9, 13\}$
15	$\vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \to \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	$\mathbf{T_1}$ $\{14\}$

CASO 3.2. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi^\Box \to \Box\varphi^\circ$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \psi^\Box \to \Box\psi^\circ$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \to \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	$\mathbf{P}$
2	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \to \varphi^\Box$	$\mathbf{P}$
3	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box$	$\mathbf{P}$
4	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \to \Box\varphi^\circ$	$\mathbf{P}$
5	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\varphi^\circ$	$\mathbf{P}$
6	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \to \psi^\Box$	$\mathbf{P}$
7	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \psi^\Box$	$\mathbf{P}$
8	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \psi^\Box \to \Box\psi^\circ$	$\mathbf{P}$
9	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\psi^\circ$	$\mathbf{P}$
10	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ \to \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ$	$\mathbf{P}$

11	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \square\psi^\circ \to \square\varphi^\circ \wedge \square\psi^\circ$	**P**
12	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \square\varphi^\circ \wedge \square\psi^\circ$	**P**
13	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \square\varphi^\circ \wedge \square\psi^\circ \to \square(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$	**P**
14	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \square(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$	**P**
15	$\vdash \varphi^\square \wedge \psi^\square \to \square(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$	**P**

Caso 4. Se a sentença α for o resultado da disjunção de duas outras sentenças φ e ψ, sabe-se que $\square(\varphi \vee \psi)^\circ = \square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)$ e que $(\varphi \vee \psi)^\square = \varphi^\square \vee \psi^\square$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ) \to \varphi^\square \vee \psi^\square$ e outro para a volta $\varphi^\square \vee \psi^\square \to \square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema da introdução da conjunção $\mathbf{A_3}$.

Caso 4.1. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \square\varphi^\circ \to \varphi^\square$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \square\psi^\circ \to \psi^\square$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ) \to \varphi^\square \vee \psi^\square$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash \square\varphi^\circ \to \varphi^\square$
2	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash (\square\varphi^\circ \to \varphi^\square) \to \square\varphi^\circ \to \varphi^\square \vee \psi^\square$
3	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash \square\varphi^\circ \to \varphi^\square \vee \psi^\square$
4	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash \square\psi^\circ \to \psi^\square$
5	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash (\square\psi^\circ \to \psi^\square) \to \square\psi^\circ \to \varphi^\square \vee \psi^\square$
6	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash \square\psi^\circ \to \varphi^\square \vee \psi^\square$
7	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash \square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)$
8	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash \square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ) \to \square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ$
9	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash \square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ$
10	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash (\square\varphi^\circ \to \varphi^\square \vee \psi^\square) \to (\square\psi^\circ \to \varphi^\square \vee \psi^\square) \to \square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ \to \varphi^\square \vee \psi^\square$
11	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash (\square\psi^\circ \to \varphi^\square \vee \psi^\square) \to \square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ \to \varphi^\square \vee \psi^\square$
12	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash \square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ \to \varphi^\square \vee \psi^\square$
13	$\{\square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ)\} \vdash \varphi^\square \vee \psi^\square$
14	$\vdash \square(\square\varphi^\circ \vee \square\psi^\circ) \to \varphi^\square \vee \psi^\square$

Caso 4.2. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\circ}$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \psi^{\Box} \to \Box\psi^{\circ}$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box} \to \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$ pela seguinte sucessão de dedução:

1 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\circ}$

2 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box\varphi^{\circ} \to \Box\Box\varphi^{\circ}$

3 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash (\varphi^{\Box} \to \Box\varphi^{\circ}) \to (\Box\varphi^{\circ} \to \Box\Box\varphi^{\circ}) \to \varphi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ}$

4 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash (\Box\varphi^{\circ} \to \Box\Box\varphi^{\circ}) \to \varphi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ}$

5 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ}$

6 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash (\varphi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ}) \to \varphi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}$

7 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}$

8 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \psi^{\Box} \to \Box\psi^{\circ}$

9 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box\psi^{\circ} \to \Box\Box\psi^{\circ}$

10 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash (\psi^{\Box} \to \Box\psi^{\circ}) \to (\Box\psi^{\circ} \to \Box\Box\psi^{\circ}) \to \psi^{\Box} \to \Box\Box\psi^{\circ}$

11 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash (\Box\psi^{\circ} \to \Box\Box\psi^{\circ}) \to \psi^{\Box} \to \Box\Box\psi^{\circ}$

12 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \psi^{\Box} \to \Box\Box\psi^{\circ}$

13 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash (\psi^{\Box} \to \Box\Box\psi^{\circ}) \to \psi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}$

14 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \psi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}$

15 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}$

16 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash (\varphi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}) \to (\psi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}) \to \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}$

17 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash (\psi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}) \to \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}$

18 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box} \to \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}$

19 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ}$

20 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\Box\psi^{\circ} \to \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$

21 $\{\varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box}\} \vdash \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$

22 $\vdash \varphi^{\Box} \vee \psi^{\Box} \to \Box(\Box\varphi^{\circ} \vee \Box\psi^{\circ})$

Caso 5. Se a sentença α for o resultado da implicação de uma sentença φ a uma sentença ψ, sabe-se que $\Box(\varphi \to \psi)^{\circ} = \Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})$ e que $(\varphi \to \psi)^{\Box} = \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box})$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ}) \to \Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box})$ e outro para a volta $\Box(\varphi^{\Box} \to \psi^{\Box}) \to \Box(\Box\varphi^{\circ} \to \psi^{\circ})$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema $\mathbf{A_3}$.

Caso 5.1. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \vdash \varphi^\square \to \Box\varphi^\circ$ e que $\mathbf{H_2} = \vdash \psi^\square \to \Box\psi^\circ$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ) \to \Box(\psi^\square \to \psi^\square)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)$
2	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ) \to \Box\Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ$
3	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \to \Box\Box\varphi^\circ$
4	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \Box\Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ$
5	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash (\Box\varphi^\circ \to \Box\Box\varphi^\circ) \to (\Box\Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ) \to \Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ$
6	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash (\Box\Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ) \to \Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ$
7	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\square \to \Box\varphi^\circ$
8	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ$
9	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash (\varphi^\square \to \Box\varphi^\circ) \to (\Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ) \to \varphi^\square \to \Box\psi^\circ$
10	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash (\Box\varphi^\circ \to \Box\psi^\circ) \to \varphi^\square \to \Box\psi^\circ$
11	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\square \to \Box\psi^\circ$
12	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \Box\psi^\circ \to \psi^\square$
13	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash (\varphi^\square \to \Box\psi^\circ) \to (\Box\psi^\circ \to \psi^\square) \to \psi^\square \to \psi^\square$
14	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash (\Box\psi^\circ \to \psi^\square) \to \psi^\square \to \psi^\square$
15	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \psi^\square \to \psi^\square$
16	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)\} \vdash \Box(\psi^\square \to \psi^\square)$
17	$\vdash \Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ) \to \Box(\psi^\square \to \psi^\square)$

Caso 5.2. A partir de $\mathbf{H}$, temos que $\mathbf{H_1} = \Box\varphi^\circ \to \varphi^\square$ e que $\mathbf{H_2} = \psi^\square \to \Box\psi^\circ$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\psi^\square \to \psi^\square) \to \Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\varphi^\square \to \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\varphi^\circ \to \varphi^\square$
2	$\{\Box(\varphi^\square \to \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box(\varphi^\square \to \psi^\square)$
3	$\{\Box(\varphi^\square \to \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box(\varphi^\square \to \psi^\square) \to \varphi^\square \to \psi^\square$

4	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \varphi^\Box \to \psi^\Box$
5	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash (\Box\varphi^\circ \to \varphi^\Box) \to (\varphi^\Box \to \psi^\Box) \to \Box\varphi^\circ \to \psi^\Box$
6	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash (\varphi^\Box \to \psi^\Box) \to \Box\varphi^\circ \to \psi^\Box$
7	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\varphi^\circ \to \psi^\Box$
8	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \psi^\Box$
9	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \psi^\Box \to \Box\psi^\circ$
10	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\psi^\circ$
11	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\psi^\circ \to \psi^\circ$
12	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box), \Box\varphi^\circ\} \vdash \psi^\circ$
13	$\{\Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box)\} \vdash \Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)$
14	$\vdash \Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box) \to \Box(\Box\varphi^\circ \to \psi^\circ)$

Tendo-se provado todos os casos do passo de indução, podemos concluir que ambas as traduções apresentadas equivalem, ou seja, que $\vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$. $\Box$

4.4 Correção

Teorema 7. *Se* $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$*, então* $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{4}} \alpha^\Box$*.*

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Assim, suponhamos que a tradução seja correta para qualquer sucessão dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos, analisando-se os casos, que o a correção da tradução vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k + 1$.

Caso 1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de alguma premissa, sabe-se que $\alpha \in \Gamma$ e, portanto, que $\alpha^\Box \in \Gamma^\Box$. Desde modo, pode-se demonstrar que $\Gamma^\Box \vdash \alpha^\Box$ trivialmente pela evocação da premissa $\alpha^\Box$.

Caso 2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma, sabe-se que existe algum esquema $\mathbf{A}_\alpha \in \mathcal{A}$ que gera α. Deste modo, devemos demonstrar que para cada esquema $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, pode-se derivar $\Gamma^\Box \vdash_{\mathbf{4}} \mathbf{A}^\Box$.

Caso 2.1 ($\mathbf{A_1}$).

$$
\begin{array}{r|ll}
1 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box a & \mathbf{P_1} \\
2 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a\} \vdash \Box b \strictif \Box a & \mathbf{T_3}\ \{1\} \\
3 & \Gamma^{\Box} \vdash \Box a \strictif \Box b \strictif \Box a & \mathbf{T_3}\ \{2\}.
\end{array}
$$

Caso 2.2 ($\mathbf{A_2}$).

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \strictif \Box b \strictif \Box c, \Box a \strictif \Box b, \Box a\} \vdash \Box a \\
2 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \strictif \Box b \strictif \Box c, \Box a \strictif \Box b, \Box a\} \vdash \Box a \strictif \Box b \\
3 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \strictif \Box b \strictif \Box c, \Box a \strictif \Box b, \Box a\} \vdash \Box b \\
4 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \strictif \Box b \strictif \Box c, \Box a \strictif \Box b, \Box a\} \vdash \Box a \strictif \Box b \strictif \Box c \\
5 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \strictif \Box b \strictif \Box c, \Box a \strictif \Box b, \Box a\} \vdash \Box b \strictif \Box c \\
6 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \strictif \Box b \strictif \Box c, \Box a \strictif \Box b, \Box a\} \vdash \Box c \\
7 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \strictif \Box b \strictif \Box c, \Box a \strictif \Box b\} \vdash \Box a \strictif \Box c \\
8 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \strictif \Box b \strictif \Box c\} \vdash (\Box a \strictif \Box b) \strictif \Box a \strictif \Box c \\
9 & \Gamma^{\Box} \vdash (\Box a \strictif \Box b \strictif \Box c) \strictif (\Box a \strictif \Box b) \strictif \Box a \strictif \Box c
\end{array}
$$

Caso 2.3 ($\mathbf{A_3}$).

$$
\begin{array}{r|l}
1 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box a \\
2 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box b \\
3 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box a \to \Box b \to \Box a \wedge \Box b \\
4 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box b \to \Box a \wedge \Box b \\
5 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box a \wedge \Box b \\
6 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a, \Box b\} \vdash \Box a \wedge \Box b \\
7 & \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a\} \vdash \Box b \strictif \Box a \wedge \Box b \\
8 & \Gamma^{\Box} \vdash \Box a \strictif \Box b \strictif \Box a \wedge \Box b
\end{array}
$$

Caso 2.4 ($\mathbf{A_4}$).

1	$\Gamma^{\square} \vdash \square a \wedge \square b \rightarrow \square a$	$\mathbf{A_4}$
2	$\Gamma^{\square} \vdash \square a \wedge \square b \strictif \square a$	$\mathbf{R_2}$ $\{1\}$.

Caso 2.5 ($\mathbf{A_5}$).

1	$\Gamma^{\square} \vdash \square a \wedge \square b \rightarrow \square b$	$\mathbf{A_5}$
2	$\Gamma^{\square} \vdash \square a \wedge \square b \strictif \square b$	$\mathbf{R_2}$ $\{1\}$.

Caso 2.6 ($\mathbf{A_6}$).

1	$\Gamma^{\square} \vdash \square a \rightarrow \square a \vee \square b$	$\mathbf{A_6}$
2	$\Gamma^{\square} \vdash \square a \strictif \square a \vee \square b$	$\mathbf{R_2}$ $\{1\}$.

Caso 2.7 ($\mathbf{A_7}$).

1	$\Gamma^{\square} \vdash \square b \rightarrow \square a \vee \square b$	$\mathbf{A_7}$
2	$\Gamma^{\square} \vdash \square b \strictif \square a \vee \square b$	$\mathbf{R_2}$ $\{1\}$.

Caso 2.8 ($\mathbf{A_8}$).

1	$\Gamma^{\square} \cup \{\square a \strictif \square c, \square b \strictif \square c, \square a \vee \square b\} \vdash \square a \strictif \square c$
2	$\Gamma^{\square} \cup \{\square a \strictif \square c, \square b \strictif \square c, \square a \vee \square b\} \vdash (\square a \strictif \square c) \rightarrow \square a \rightarrow \square c$
3	$\Gamma^{\square} \cup \{\square a \strictif \square c, \square b \strictif \square c, \square a \vee \square b\} \vdash \square a \rightarrow \square c$
4	$\Gamma^{\square} \cup \{\square a \strictif \square c, \square b \strictif \square c, \square a \vee \square b\} \vdash \square b \strictif \square c$
5	$\Gamma^{\square} \cup \{\square a \strictif \square c, \square b \strictif \square c, \square a \vee \square b\} \vdash (\square b \strictif \square c) \rightarrow \square b \rightarrow \square c$
6	$\Gamma^{\square} \cup \{\square a \strictif \square c, \square b \strictif \square c, \square a \vee \square b\} \vdash \square b \rightarrow \square c$
7	$\Gamma^{\square} \cup \{\square a \strictif \square c, \square b \strictif \square c, \square a \vee \square b\} \vdash \square a \vee \square b$
8	$\Gamma^{\square} \cup \{\square a \strictif \square c, \square b \strictif \square c, \square a \vee \square b\} \vdash (\square a \rightarrow \square c) \rightarrow (\square b \rightarrow \square c) \rightarrow \square a \vee \square b \rightarrow \square c$
9	$\Gamma^{\square} \cup \{\square a \strictif \square c, \square b \strictif \square c, \square a \vee \square b\} \vdash (\square b \rightarrow \square c) \rightarrow \square a \vee \square b \rightarrow \square c$
10	$\Gamma^{\square} \cup \{\square a \strictif \square c, \square b \strictif \square c, \square a \vee \square b\} \vdash \square a \vee \square b \rightarrow \square c$
11	$\Gamma^{\square} \cup \{\square a \strictif \square c, \square b \strictif \square c\} \vdash \square a \vee \square b \strictif \square c$

12 $\quad \Gamma^{\Box} \cup \{\Box a \strictif \Box c\} \vdash (\Box b \strictif \Box c) \strictif \Box a \vee \Box b \strictif \Box c$

13 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash (\Box a \strictif \Box c) \strictif (\Box b \strictif \Box c) \strictif \Box a \vee \Box b \strictif \Box c$

Caso 2.9 ($\mathbf{A}_{\perp}$).

1 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash \perp \to \Box a \qquad \mathbf{L_2}$

2 $\quad \Gamma^{\Box} \vdash \perp \strictif \Box a \qquad \mathbf{R_2}\ \{1\}.$

Caso 3. Deve-se demonstrar que, se $\vdash \Box(\alpha^{\Box} \to \beta^{\Box})$ ($\mathbf{H_1}$) e $\vdash \alpha^{\Box}$ ($\mathbf{H_2}$), então $\beta^{\Box}$. Isso pode ser feito pela seguinte sucessão de dedução:

1 $\quad \Box(\alpha^{\Box} \to \beta^{\Box}) \to \alpha^{\Box} \to \beta^{\Box} \qquad \mathbf{B_2}$

2 $\quad \Box(\alpha^{\Box} \to \beta^{\Box}) \qquad \mathbf{H_1}$

3 $\quad \alpha^{\Box} \to \beta^{\Box} \qquad \mathbf{R_1}\ \langle 1, 2\rangle$

4 $\quad \alpha^{\Box} \qquad \mathbf{H_2}$

5 $\quad \beta^{\Box} \qquad \mathbf{R_1}\ \langle 3, 4\rangle.$

$\Box$

4.5 Completude

BABIRESKI: Não vai rolar de provar a completude como Troelstra and Schwichtenberg (2000). Vou precisar procurar outros artigos.

BABIRESKI: Ver Benton et al. (1998), Pfenning and Davies (2001) e Fairtlough and Mendler (1995) acerca do sistema laxo.

Referências Bibliográficas

Aristotels. *Organon*. Harvard University Press, 1938.

Peter Nicholas Benton, Gavin Mark Bierman, and Valeria Correa Vaz de Paiva. Computational types from a logical perspective. *Journal of Functional Programming*, 1998.

Patrick Blackburn, Maarten de Rijke, and Yde Venema. *Modal logic*. Cambridge University Press, 2001.

Jean-Yves Béziau. Universal logic. *Logica*, 1994.

Adam Chlipala. *Certified programming with dependent types*. Massachusetts Institute of Technology Press, 2022.

Marcelo Esteban Coniglio. Towards a stronger notion of translation between logics. *Manuscrito*, 2005.

Haskell Brooks Curry. The elimination theorem when modality is present. *Journal of Symbolic Logic*, 1952.

Haskell Brooks Curry. *A theory of formal deducibility*. University of Notre Dame Press, 1957.

Matt Fairtlough and Michael Mendler. An intuitionistic modal logic with applications to the formal verification of hardware. In *Computer Science Logic*, 1995.

Matt Fairtlough and Michael Mendler. Propositional lax logic. *Information and Computation*, 1997.

Gottlob Frege. *Begriffsschrift: Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Verlag von Louis Nebert, 1879.

Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 1987.

Kurt Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 1933.

Raul Hakli and Sara Negri. Does the deduction theorem fail for modal logic? *Synthese*, 2012.

Andrej Nikolaevi Kolmogorov. On the principle of the excluded middle. *Matematieskij Sbornik*, 1925.

Clarence Irving Lewis. Implication and the algebra of logic. *Mind*, 1912.

Clarence Irving Lewis and Cooper Harold Langford. *Modal logic*. Symbolic logic, 1932.

Ruth Barcan Marcus. The deduction theorem in a functional calculus of first order based on strict implication. *The Journal of Symbolic Logic*, 1946.

Ruth Barcan Marcus. Strict implication, deducibility and the deduction theorem. *The Journal of Symbolic Logic*, 1953.

John Charles Chenoweth McKinsey and Alfred Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, 1948.

Eugenio Moggi. Notions of computation and monads. *Information and Computation*, 1991.

Frank Pfenning and Rowan Davies. A judgmental reconstruction of modal logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 2001.

John Charles Reynolds. The discoveries of continuations. *Higher-Order and Symbolic Computation*, 1993.

Anne Sjerp Troelstra and Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Cambridge University Press, 2000.

Daniel Jon Velleman. *How to prove it: a structured approach*. Cambridge University Press, 2019.

Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Cambridge University Press, 1910.

Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Cambridge University Press, 1911.

Alfred North Whitehead and Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Cambridge University Press, 1912.

Richard Zach. *Box and diamonds: an open introcution to modal logic*. Open Logic Project, 2024.