Uma formalização da interpretação modal do sistema intuicionista

Elian Babireski

2024

Chapter 1

Introdução

Chapter 2

Fundamentação

2.1 Sistema

Definição 1 (Sistema)**.** *Um sistema consiste numa tripla* $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash, \vDash \rangle$*, onde* $\mathcal{L}$ *consiste em um conjunto de sentenças bem-formadas,* $\vdash : \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ *em uma relação de dedução e* $\vDash : \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$*.* $\square$

Definição 2 ($\mathcal{L}_\mathbf{I}$)**.** *Define-se a linguagem do sistema intuicionista, denotada* $\mathcal{L}_\mathbf{I}$*, como o menor conjunto induzido a partir das seguintes regras:*

$\top, \bot \in \mathcal{L}_\mathbf{I}$
$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_\mathbf{I}$
$\varphi \in \mathcal{L}_\mathbf{I} \Rightarrow \neg\varphi \in \mathcal{L}_\mathbf{I}$
$\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\mathbf{I} \Rightarrow \varphi \circ \psi \in \mathcal{L}_\mathbf{I}$*, para* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Definição 3 ($\mathcal{L}_\mathbf{M}$)**.** *Define-se a linguagem dos sistemas modais, denotada* $\mathcal{L}_\mathbf{M}$*, como o menor conjunto induzido a partir das seguintes regras:*

$\top, \bot \in \mathcal{L}_\mathbf{I}$
$\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}_\mathbf{I}$
$\varphi \in \mathcal{L}_\mathbf{I} \Rightarrow \circ\varphi \in \mathcal{L}_\mathbf{I}$*, para* $\circ \in \{\square, \diamond, \neg\}$
$\varphi, \psi \in \mathcal{L}_\mathbf{I} \Rightarrow \varphi \circ \psi \in \mathcal{L}_\mathbf{I}$*, para* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

2.2 Tradução

Traduções entre sistemas consistem em funções que mapeiam sentenças de um sistema a sentenças de outro sistema e garantem certas propiedades. As propriedades a serem garantidas variam e ainda são discutidas na literatura, fazendo deixando a definição exata de tradução – assim como houve com a definição de sistema – varie de acordo com a predileção de cada autor. Nesta seção, serão abordadas historicamente noções de tradução entre sistemas, bem como serão definidos e nomeados os conceitos de tradução que serão usados no restante desta tese.

Definição 4 (Tradução). *Uma sentença φ de um sistema $\mathbf{A} = \langle \mathcal{L}_\mathbf{A}, \vdash_\mathbf{A} \rangle$ pode ser traduzida a uma sentença φ^* em um sistema $\mathbf{B} = \langle \mathcal{L}_\mathbf{B}, \vdash_\mathbf{B} \rangle$ caso exista uma função $\bullet^*\colon \mathcal{L}_\mathbf{A} \to \mathcal{L}_\mathbf{B}$ que garanta que $\Gamma \vdash_\mathbf{A} \varphi \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash_\mathbf{B} \varphi^*$.* □

Definição 5 ($\bullet^\neg$). *Define-se a tradução $\bullet^\neg$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\neg &\coloneqq \neg\neg p \\ \bot^\neg &\coloneqq \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\neg &\coloneqq \neg\neg(\varphi^\neg \wedge \psi^\neg) \\ (\varphi \vee \psi)^\neg &\coloneqq \neg\neg(\varphi^\neg \vee \psi^\neg) \\ (\varphi \to \psi)^\neg &\coloneqq \neg\neg(\varphi^\neg \to \psi^\neg) \end{aligned}$$

□

A primeira tradução do sistema intuicionista ao sistema modal foi proposta por Gödel [2] motivado pela possibilidade de leitura da necessidade como uma modalidade de construtividade. Ou seja, por meio dessa tradução, a sentença $\Box \varphi$ poderia ser lida como φ *pode ser provada construtivamente* [4]. Gödel conjeiturou a corretude fraca dessa tradução, que foi posteriormente provada por McKinsey e Tarski [3] em conjunto com sua completude fraca.

Definição 6 ($\bullet^\circ$). *Define-se a tradução $\bullet^\circ$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\circ &\coloneqq p \\ \bot^\circ &\coloneqq \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\circ &\coloneqq \varphi^\circ \wedge \psi^\circ \\ (\varphi \vee \psi)^\circ &\coloneqq \Box \varphi^\circ \vee \Box \psi^\circ \\ (\varphi \to \psi)^\circ &\coloneqq \Box \varphi^\circ \to \psi^\circ \\ (\exists x.\varphi)^\circ &\coloneqq \exists x. \Box \varphi^\circ \\ (\forall x.\varphi)^\circ &\coloneqq \forall x.\varphi^\circ \end{aligned}$$

□

Definição 7 ($\bullet^\Box$). *Define-se a tradução $\bullet^\Box$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\Box &\coloneqq \Box p \\ \bot^\Box &\coloneqq \bot \\ (\varphi \wedge \psi)^\Box &\coloneqq \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \\ (\varphi \vee \psi)^\Box &\coloneqq \varphi^\Box \vee \psi^\Box \\ (\varphi \to \psi)^\Box &\coloneqq \Box(\varphi^\Box \to \psi^\Box) \\ (\exists x.\varphi)^\Box &\coloneqq \exists x.\varphi^\Box \\ (\forall x.\varphi)^\Box &\coloneqq \Box \forall x.\varphi^\Box \end{aligned}$$

□

Faz-se interessante pontuar que as traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^\Box$ correspondem, respectivamente, às traduções $\bullet^\circ$ e $\bullet^*$ do sistema intuicionista ao sistema linear providas por Girard [1], sendo as primeiras correspondentes a uma ordem de avaliação por nome (*call-by-name*) e as segundas a uma ordem de avaliação por valor (*call-by-value*).

Bibliography

[1] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 1987.

[2] Kurt Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 1933.

[3] John Charles Chenoweth McKinsey and Alfred Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, 1948.

[4] Anne Sjerp Troelstra and Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Cambridge University Press, 2000.