

# Plano de Trabalho de Conclusão de Curso

## Uma formalização da tradução da lógica intuicionista para a lógica modal S4

Elían Gustavo Chorny Babireski – [elian.babireski@gmail.com](mailto:elian.babireski@gmail.com)  
Karina Girardi Roggia – [karina.roggia@udesc.br](mailto:karina.roggia@udesc.br) (*orientadora*)  
Paulo Henrique Torrens – [paulotorrens@gnu.org](mailto:paulotorrens@gnu.org) (*coorientador*)

Turma 2024/2 – Joinville/SC

23 de agosto de 2024

### Resumo

As lógicas modais consistem em um conjunto de extensões da lógica clássica que contam com a adição de um ou mais operadores, chamados modalidades, que qualificam sentenças. Uma lógica modal com particular interesse à computação é o sistema **S4**, uma vez que a metalinguagem de Moggi que modela noções de computação em linguagens de programação por meio de mônadas pode ser traduzida a esse sistema. Ademais, existem correspondências entre a tradução da lógica intuicionista ao sistema modal **S4** com traduções *continuation-passing style* (CPS) usadas em compiladores. Este trabalho busca formalizar a derivação das sentenças **T** $\Diamond$  e **4** $\Diamond$  no sistema **S4** – uma vez que estas correspondem às transformações naturais monádicas –, bem como formalizar duas traduções da lógica intuicionista para o sistema **S4** da lógica modal e demonstrar a equivalência entre elas. Todas as formalizações serão feitas no assistente de provas Coq.

**Palavras-chave:** Coq, lógica intuicionista, lógica modal, S4, tradução de lógicas.

## 1 Introdução e justificativa

As lógicas modais consistem em um conjunto de extensões da lógica clássica que contam com a adição de um ou mais operadores, chamados modalidades, que qualificam sentenças. No caso do sistema **S4**, são adicionadas as modalidades de necessidade ( $\Box$ ) e possibilidade ( $\Diamond$ ) em conjunto à regra da necessitação<sup>1</sup> e os axiomas **K**:  $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$ , **T**:  $\Box A \rightarrow A$  e **4**:  $\Box A \rightarrow \Box \Box A$  [Troelstra and Schwichtenberg 2000]. Ademais, pode-se derivar nesse sistema, por meio da dualidade entre as modalidades<sup>2</sup>, sentenças duais aos axiomas **T** e **4**, sendo elas **T** $\Diamond$ :  $A \rightarrow \Diamond A$  e **4** $\Diamond$ :  $\Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$ , respectivamente [Zach 2019].

As mônadas ganharam destaque na área de linguagens de programação desde que [Moggi 1991] formalizou uma metalinguagem que faz uso dessas estruturas para modelar noções de computação – como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuações – de uma maneira puramente funcional. Pode-se notar uma grande semelhança entre as sentenças **T** $\Diamond$  e **4** $\Diamond$  e as transformações naturais

---

<sup>1</sup>Se  $\vdash A$  então  $\vdash \Box A$

<sup>2</sup> $\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$

monádicas  $\eta: 1_C \rightarrow T$  e  $\mu: T^2 \rightarrow T$ , respectivamente. Nesse sentido, [Pfenning and Davies 2001] demonstraram que se pode traduzir essa metalinguagem para o sistema **S4** da lógica modal, pelo qual se torna interessante analisar esse sistema como uma linguagem de programação sob a ótica do isomorfismo de Curry-Howard.

[Troelstra and Schwichtenberg 2000] apresentam duas traduções equivalentes da lógica intuicionista para o sistema **S4** da lógica modal, sendo um deles correspondente a uma abordagem *call-by-name* e outra a um abordagem *call-by-value*. Tais traduções possuem grande similaridade com as traduções da lógica intuicionista para a lógica linear definidas por [Girard 1987]. Essas traduções equivalem à tradução por negação dupla que, por sua vez, equivalem a traduções *continuation-passing style* (CPS) em compiladores por meio do isomorfismo de Curry-Howard [Reynolds 1993], o que torna esse tema interessante no ponto de vista de compilação.

Durante grande parte da história, provas lógicas e matemáticas eram validadas manualmente pela comunidade acadêmica, o que muitas vezes – a depender do tamanho e complexidade da prova – se mostrava ser um trabalho complexo e sujeito a erros. Hoje em dia, existem *softwares* chamados assistentes de provas que permitem verificar – graças ao isomorfismo de Curry-Howard – a corretude de provas [Chlipala 2019]. O assistente de provas que será usado neste trabalho é o Coq, que utiliza o cálculo de construções indutivas e um conjunto axiomático pequeno para permitir a escrita de provas simples e intuitivas [Barras et al. 1997].

Este trabalho será uma continuação do desenvolvimento da biblioteca de lógica modal no assistente de provas Coq feito em [Silveira 2020] e posteriormente expandido de forma a permitir a fusão de lógicas modais em [Nunes 2023]. Uma formalização similar de traduções de lógicas foi feito em [Sehnem 2023], porém, neste caso, das lógicas clássica e intuicionista para a lógica linear.

## 2 Objetivos

**Objetivo geral:** Formalização no assistente de provas Coq das traduções da lógica intuicionista para o sistema **S4** da lógica modal apresentados em [Troelstra and Schwichtenberg 2000], bem como provar a derivabilidade das sentenças  $\mathbf{T}_\Diamond$  e  $\mathbf{4}_\Diamond$  no sistema.

**Objetivos específicos:**

- Fornecer uma introdução à lógica intuicionista e às lógicas modais, bem como evidenciar suas aplicações na computação;
- Descrever o sistema modal **S4** e suas semelhanças com as categorias das mônadas e comôndas;
- Apresentar o estado da arte de traduções entre sistemas lógicos em assistentes de provas;
- Apresentar traduções do sistema intuicionista para sistema modal **S4**;
- Provar manualmente a corretude das traduções bem como outras propriedades pertinentes;
- Formalizar as provas no assistente de provas Coq.

## 3 Metodologia

Este trabalho será dividido em três etapas. A primeira delas consiste em uma revisão bibliográfica acerca das lógicas intuicionista e modal **S4** e suas aplicações na ciência da computação. Em seguida, serão provados manualmente os teoremas pertinentes ao sistema **S4** e às traduções da lógica intuicionista a esse sistema. Por fim, tais provas serão formalizadas no assistente de provas Coq.

## 4 Cronograma proposto

Para a realização dos objetivos citados acima, o trabalho foi dividido nas seguintes etapas:

1. Pesquisa bibliográfica sobre as lógicas intuicionista e modal;
2. Pesquisa bibliográfica sobre o sistema modal **S4**;
3. Pesquisa bibliográfica sobre tradução de lógicas;
4. Demontração de provas referentes ao sistema **S4** e à tradução da lógica intuicionista a esse sistema manualmente;
5. Formalização da tradução *call-by-name* no assistente de provas Coq;
6. Formalização da tradução *call-by-value* no assistente de provas Coq;
7. Formalização da equivalência entre as traduções e demais teoremas pertinentes no sistema de provas Coq;
8. Escrita do texto.

Atividades	2024						2025					
	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												

## 5 Linha e grupo de pesquisa

O trabalho faz parte das atividades do Grupo de Pesquisa em Fundamentos da Computação (FUNÇÃO) por meio do projeto de pesquisa NPP3236-2023 UDESC “Lógicas não-clássicas em Coq”.

## 6 Forma de acompanhamento e orientação

O acompanhamento das atividades desenvolvidas será realizada em reuniões semanais, presenciais ou via *chat*, com até uma hora de duração. Também serão utilizados correio eletrônico e outros recursos para, caso necessário, orientação ao longo da semana. A adição de novos encontros pode vir a ser necessária de acordo com o desenvolvimento do trabalho. Os artefatos produzidos pelo orientado serão disponibilizados à orientadora em ambientes de acesso mútuo para acompanhamento contínuo.

## Referências

[Barras et al. 1997] Barras, B., Boutin, S., Cornes, C., Courant, J., Filliâtre, J.-C., Giménez, E., Herbelin, H., Huet, G., Muñoz, C., and Murthy, C. (1997). The Coq proof assistant reference manual.

- [Chlipala 2019] Chlipala, A. (2019). *Certified programming with dependent types: a pragmatic introduction to the Coq proof assistant*. Massachusetts Institute of Technology Press.
- [Girard 1987] Girard, J.-Y. (1987). Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 50.
- [Moggi 1991] Moggi, E. (1991). Notions of computation and monads. *Information and Computation*, 93.
- [Nunes 2023] Nunes, M. A. (2023). Fusão de lógicas modais no assistentes de provas Coq. Dissertação (Bacharelado), Universidade do Estado de Santa Catarina.
- [Pfenning and Davies 2001] Pfenning, F. and Davies, R. (2001). A judgmental reconstruction of modal logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 11.
- [Reynolds 1993] Reynolds, J. C. (1993). The discoveries of continuations. *LISP and Symbolic Computation*.
- [Sehnem 2023] Sehnem, A. J. (2023). Formalização da tradução das lógicas clássicas e intuicionista para a lógica linear em Coq. Dissertação (Bacharelado), Universidade do Estado de Santa Catarina.
- [Silveira 2020] Silveira, A. A. d. (2020). Implementação de uma biblioteca de lógica modal em Coq. Dissertação (Bacharelado), Universidade do Estado de Santa Catarina.
- [Troelstra and Schwichtenberg 2000] Troelstra, A. S. and Schwichtenberg, H. (2000). *Basic Proof Theory*. Cambridge Tracts in Theoretical Computer Science 43. Cambridge University Press, 2nd edition.
- [Zach 2019] Zach, R. (2019). Boxes and diamonds: an open introduction to modal logic.

---

**Karina Girardi Roggia**  
Orientadora

---

**Elían Gustavo Chorny Babireski**  
Discente