

Uma formalização assistida por computador da
interpretação modal do sistema intuicionista

Elían Babireski

2024

Resumo

Uma das primeiras traduções de um sistema de dedução a outro apresentadas na literatura consiste na tradução do sistema intuicionista ao sistema modal **S4** com o intuito de interpretar a modalidade da *necessidade* como uma modalidade de *provabilidade*. Dezenas de anos depois, foi apresentada uma metalinguagem que se dedicava a representar semanticamente noções de computação como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuações. A codificação dessas noções apresenta grandes similaridades com os axiomas modais do sistema **S4** e, Assim, com inspiração nos diversos casos de sucesso de formalizações assistidas por computador, este trabalho busca verificar formalmente esta tradução.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Abstract

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Ut purus elit, vestibulum ut, placerat ac, adipiscing vitae, felis. Curabitur dictum gravida mauris. Nam arcu libero, nonummy eget, consectetur id, vulputate a, magna. Donec vehicula augue eu neque. Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Mauris ut leo. Cras viverra metus rhoncus sem. Nulla et lectus vestibulum urna fringilla ultrices. Phasellus eu tellus sit amet tortor gravida placerat. Integer sapien est, iaculis in, pretium quis, viverra ac, nunc. Praesent eget sem vel leo ultrices bibendum. Aenean faucibus. Morbi dolor nulla, malesuada eu, pulvinar at, mollis ac, nulla. Curabitur auctor semper nulla. Donec varius orci eget risus. Duis nibh mi, congue eu, accumsan eleifend, sagittis quis, diam. Duis eget orci sit amet orci dignissim rutrum.

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Justificativa	4
1.2	Metas	4
1.3	Estruturação	4
2	Fundamentação	5
2.1	Sistemas	5
2.2	Traduções	8
2.3	Provadores	9
3	Sistemas e traduções	11
3.1	Intuicionismo	11
3.2	Modalismo	12
3.3	Traduções	15
4	Formalização	16
4.1	Derivações	16
4.2	Interpretações computacionais	25
4.3	Isomorfismo entre as traduções	26
4.4	Correção	32

“‘Oh, you can’t help that,’ said the Cat:
‘we’re all mad here. I’m mad. You’re mad.’
‘How do you know I’m mad?’ said Alice.
‘You must be,’ said the Cat, ‘or you wouldn’t
have come here.’”

— Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

1. Introdução

As lógicas modais consistem em um conjunto de extensões da lógica clássica que contam com a adição de um ou mais operadores, chamados modalidades, que qualificam sentenças. No caso do sistema **S4**, são adicionadas as modalidades de necessidade (\Box) e possibilidade (\Diamond) em conjunto à regra da necessitação¹ e os axiomas **T**: $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$, **T**: $\Box A \rightarrow A$ e **4**: $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Ademais, pode-se derivar nesse sistema, por meio da dualidade entre as modalidades², sentenças duais aos axiomas **T** e **4**, sendo elas **T** $_{\Diamond}$: $A \rightarrow \Diamond A$ e **4** $_{\Diamond}$: $\Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$, respectivamente Zach (2024).

As mônadas ganharam destaque na área de linguagens de programação desde que Moggi (1991) formalizou uma metalinguagem que faz uso dessas estruturas para modelar noções de computação — como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuções — de uma maneira puramente funcional. Pode-se notar uma grande semelhança entre as sentenças **T** $_{\Diamond}$ e **4** $_{\Diamond}$ e as transformações naturais monádicas $\eta : 1_C \rightarrow T$ e $\mu : T^2 \rightarrow T$, respectivamente. Nesse sentido, Pfenning e Davies (2001) demonstraram que se pode traduzir essa metalinguagem para o sistema **S4** da lógica modal, pelo qual se torna interessante analisar esse sistema como uma linguagem de programação sob a ótica do isomorfismo de Curry-Howard.

Troelstra e Schwichtenberg (2000) apresentam duas traduções equivalentes da lógica intuicionista para o sistema **S4** da lógica modal, sendo um deles correspondente a uma abordagem *call-by-name* e outra a um abordagem *call-by-value*. Tais traduções possuem grande similaridade com as traduções da lógica intuicionista para a lógica linear definidas por Girard (1987). Essas traduções equivalem à tradução por negação dupla que, por sua vez, equivalem a traduções *continuation-passing style* (CPS) em compiladores por meio do isomorfismo de Curry-Howard (Reynolds, 1993), o que torna esse tema interessante no ponto de vista de compilação.

Durante grande parte da história, provas lógicas e matemáticas eram validadas manualmente pela comunidade acadêmica, o que muitas vezes — a depender do tamanho e complexidade da prova — se mostrava ser um trabalho complexo e sujeito a erros. Hoje em dia, existem *softwares* chamados assistentes de provas que permitem verificar — graças ao isomorfismo de Curry-Howard — a corretude de provas (Chlipala, 2022). O assistente de provas que será usado neste trabalho é o Coq, que utiliza o cálculo de construções indutivas e um conjunto axiomático

¹Se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$

² $\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$

pequeno para permitir a escrita de provas simples e intuitivas ?.

Este trabalho consiste numa continuação do desenvolvimento da biblioteca de formalização de sistemas modais normais iniciado por [Silveira et al. \(2022\)](#) e posteriormente expandida de forma a permitir a fusão de sistemas modais por [Nunes et al. \(2024\)](#). Uma formalização de traduções entre sistemas de dedução similar a nossa foi feita por [Sehnem \(2023\)](#), neste caso tendo como alvo o sistema linear de [Girard \(1987\)](#). Todas as formalizações citadas acima deram-se no assistente de provas COQ, o mesmo assistente usado neste trabalho.

1.1 Justificativa

1.2 Metas

1.3 Estruturação

2. Fundamentação

Nesta parte do trabalho, serão apresentadas definições gerais que fundamentarão as definições mais estritas que serão apresentadas futuramente. Notadamente, fundamentaremos as noções de sistemas e traduções. Ademais, discorreremos acerca da noção de provadores, que serão usados para certificar as provas apresentadas posteriormente. Antes disso, entretanto, introduziremos duas notações que serão usadas copiosamente, uma para o conjunto das partes e outra para sucessões.

Notação. *Seja A um conjunto, $\wp(A)$ denota o conjunto $\{X \mid X \subseteq A\}$.*

Notação. *Seja $i \in \mathbb{N}^+$ e $n \in \mathbb{N}$, $\langle a_i \mid i \leq n \rangle$ denota uma sucessão de n elementos de modo que o elemento a_i encontra-se na posição i .*

2.1 Sistemas

Sistemas de dedução buscam formalizar e sistematizar o processo de raciocínio. Estudos acerca disso datam da antiguidade, dentre os quais destaca-se [Aristotélēs \(1938\)](#). Considera-se que os estudos modernos neste campo foram, dentre outras pessoas, fundados por [Frege \(1879\)](#) e continuados por [Whitehead e Russell \(1910, 1911, 1912\)](#). Estas investigações — bem como outras — levaram ao desenvolvimento do sistema hoje tido como padrão. Posteriormente a isso, viu-se o surgimento de diversos sistemas não-padrões, fato que — conforme [Béziau \(2007\)](#) — justifica uma conceituação de sistema de dedução, que apresentaremos nesta seção.

Ainda segundo [Béziau \(2007\)](#), os primeiros desenvolvimentos neste sentido foram feitos por [Tarski \(1928\)](#), que define o conceito de dedução com base num operador de fecho $C : \wp(\mathcal{L}) \rightarrow \wp(\mathcal{L})$, sendo \mathcal{L} um conjunto qualquer. Neste trabalho entretanto usaremos a definição proposta por [Béziau \(1994\)](#) baseada numa relação de dedução $\vdash \subseteq \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$, uma vez que, por sua simplicidade, não traz elementos irrelevantes aos intuítos deste. Cabe destacar, conforme apontam [Font et al. \(2003\)](#), que ambas as definições são equivalentes¹, uma vez que $\Gamma \vdash \alpha$ se e somente se $\alpha \in C(\Gamma)$.

Definição 1 (Sistema). *Um sistema de dedução consiste num par $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, onde \mathcal{L} consiste em um conjunto e $\vdash \subseteq \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ em uma relação sobre o produto cartesiano do conjunto das partes de \mathcal{L} e o conjunto \mathcal{L} , sem demais condições. \square*

¹Destaca-se, entretanto, que a definição de [Tarski \(1928\)](#) requer a satisfação de postulados não requeridos por [Béziau \(1994\)](#), sendo portanto menos geralista.

Conforme [Béziau \(1994\)](#) aponta, a qualidade e quantidade dos elementos de um sistema $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ não são especificados, portanto sendo esta uma definição de grande generalidade. Neste sentido, com base no escopo deste trabalho, restringiremos a definição do conjunto \mathcal{L} — dito *linguagem* — a linguagens proposicionais. Os elementos destas, aos quais daremos o nome de *sentenças*, notabilizam-se por serem formadas por *letras* — que consistem em proposições indivisas — e *operadores* — que podem gerar proposições maiores a partir de proposições menores. Ao par formado por letras e operadores daremos o nome *assinatura*, conforme abaixo.

Definição 2 (Assinatura). *Uma assinatura proposicional consiste num par $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$, onde \mathcal{P} consiste num conjunto letras e $\mathcal{C} = \bigcup \{\mathcal{C}_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ num conjunto de operadores de modo que $\bullet \in \mathcal{C}_n$ se e somente se \bullet possuir aridade n .* \square

Notação. *Seja \mathcal{C} um conjunto de operadores, \bullet^n denota um operador $\bullet \in \mathcal{C}_n$.*

Podemos interpretar os conjuntos \mathcal{P} e \mathcal{C} de uma assinatura $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$ como contrutores de sentenças. Neste sentido, o conjunto \mathcal{C}_0 assemelha-se mais ao conjunto \mathcal{P} , uma vez que seus elementos — ditos *constantes* — não geram sentenças maiores partindo de sentenças menores. Nota-se que uma assinatura constitui um elemento suficiente para definirmos indutivamente a linguagem de um sistema, conforme definido abaixo de maneira similar a [Franks \(2024\)](#). Por fim, destacamos que, para todos os sistemas apresentados neste trabalho, usaremos o conjunto de letras $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e letras romanas em caixa-baixa para representar seus elementos.

Definição 3 (Linguagem). *Seja $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$ uma assinatura proposicional. Uma linguagem proposicional \mathcal{L} induzida a partir de Σ consiste no menor conjunto de sentenças bem-formadas induzido a partir das seguintes regras:*

(a) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{L}$

(b) *Se $\bullet \in \mathcal{C}_n$ e $\{\varphi_i \mid i \leq n\} \subseteq \mathcal{L}$, então $\bullet \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle \in \mathcal{L}$.* \square

Neste trabalho, representaremos sentenças por letras gregas em caixa-baixa e conjuntos de sentenças por letras gregas em caixa-alta.² Ademais, impõe-se definir a noção de profundidade de uma sentença. Esta noção, em termos simples, consiste no comprimento do maior ramo da construção da dada sentença. A definição provida abaixo consiste numa generalização para quaisquer aridades da definição dada por [Troelstra e Schwichtenberg \(2000\)](#). Usaremos essa definição futuramente para fazer demonstrações por meio provas indutivas sobre esta propriedade.

²Desconsiderando-se o Σ , usado para representar assinaturas.

Definição 4 (Profundidade). *Seja $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ um sistema com linguagem induzida a partir de uma assinatura $\Sigma = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C} \rangle$. Considerando-se uma proposição $a \in \mathcal{P}$, um operador $\bullet \in \mathcal{C}$ e uma aridade $n > 0$, definimos a profundidade $|\alpha|$ de uma sentença $\alpha \in \mathcal{L}$ indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} |a| &:= 0 \\ |\bullet^0| &:= 0 \\ |\bullet^n \langle \varphi_i \mid i \leq n \rangle| &:= \max \{ |\varphi_i| \mid i \leq n \} + 1. \end{aligned} \quad \square$$

Com isso, encerram-se as definições relacionadas a linguagens de sistemas de dedução. Agora, apresentaremos definições relacionadas a relações de dedução, que gozam da mesma generalidade dada a linguagens. Deste modo, a relação \vdash pode ser tanto uma relação de *derivação* — definida sintaticamente — quanto uma relação de *satisfação*³ — definida semanticamente. Neste trabalho, serão abordados apenas sistemas definidos sobre relações de derivação. Cabe destacar, entretanto, que nada na definição de tradução impede que esta seja feita sobre relações de satisfação, conforme veremos com mais detalhes futuramente.

Neste trabalho, definiremos a relações de dedução baseada em axiomatizações, ou seja, em conjuntos de *axiomas* — sentenças postuladas como verdadeiras — e conjuntos de *regras de dedução* — que permitem derivar mais sentenças verdadeiras caso certas condições sejam satisfeitas. Axiomatizações consistem numa abordagem hilbertiana de dedução que, segundo [Troelstra e Schwichtenberg \(2000\)](#), distinguem-se por conter um conjunto reduzido de regras de dedução que nunca descartam premissas. Ainda baseando-se em [Troelstra e Schwichtenberg \(2000\)](#) e em contraste a [Frege \(1879\)](#) e [Hilbert \(1926, 1928\)](#), preferiremos esquemas de axiomas a axiomas individuais de modo a eliminarmos a necessidade de instanciações.

Definição 5 (Axiomatização). *Seja $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ um sistema. Uma axiomatização para o sistema \mathbf{L} consiste num par $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$, sendo \mathcal{A} um conjunto de esquemas de axiomas e \mathcal{R} um conjunto de regras de dedução.*

Neste trabalho, consideraremos axiomatizações definidas em relação a conjuntos de premissas $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$. Por este motivo, todas as axiomatizações apresentadas futuramente neste trabalho conterão implicitamente a *regra da premissa* **P** — sendo esta regra definida como se $\alpha \in \Gamma$, então $\Gamma \vdash \alpha$. Similarmente, faremos o mesmo para a *regra do enfraquecimento* **E** — definida aqui como se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma \cup \Delta \vdash \alpha$ —, tendo em vista que todos os sistemas apresentados neste trabalho são estruturais.

³Sendo esta denotada por \models .

Assim, tendo-se claro o conceito de axiomatização, podemos finalmente o conceito de dedução.

Definição 6 (Dedução). *Seja um sistema $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ com uma relação de dedução definida sobre uma axiomatização $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$ e seja um conjunto de sentenças $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathcal{L}$. A dedução $\Gamma \vdash \alpha$ vale se e somente se houver sucessão de sentenças $\langle \varphi_i \in \mathcal{L} \mid i \leq n \rangle$ de modo que $\varphi_n = \alpha$ e que cada sentença φ_i ou tenha sido gerada ou por algum esquema $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$ ou pela aplicação de alguma regra $\mathbf{R} \in \mathcal{R}$ a sentenças anteriores.* \square

2.2 Traduções

Traduções entre sistemas consistem em funções que mapeiam sentenças de um sistema a sentenças de outro, garantindo certas propriedades. As propriedades a serem garantidas variam e ainda são discutidas na literatura, deixando a definição exata de tradução — assim como houve com a definição de sistema — varie de acordo com a predileção e as necessidades de cada autor. Nesta seção, serão abordadas historicamente noções de tradução entre sistemas, bem como serão definidos e nomeados os conceitos de tradução que serão usados no restante deste trabalho.

Definição 7 (Condições). *Chamaremos a condição $\emptyset \vdash_{\mathbf{A}} \alpha$ implica em $\emptyset \vdash_{\mathbf{B}} \alpha^*$ de correção fraca e a condição $\emptyset \vdash_{\mathbf{B}} \alpha^*$ implica em $\emptyset \vdash_{\mathbf{A}} \alpha$ de completude fraca. Analogamente, considerando-se dedução com premissas, chamaremos a condição $\Gamma \vdash_{\mathbf{A}} \alpha$ implica em $\Gamma^* \vdash_{\mathbf{B}} \alpha^*$ de correção forte e a condição $\Gamma^* \vdash_{\mathbf{B}} \alpha^*$ implica em $\Gamma \vdash_{\mathbf{A}} \alpha$ de completude forte.*

Historicamente, autores usaram diferentes combinações das condições apresentadas acima e, em certos casos, outras. Neste trabalho, adotaremos uma noção forte de tradução que requer tanto a correção forte quanto a completude forte, conforme [Coniglio \(2005\)](#). Definiremos, ainda, uma notação que nos permite aplicar sucintamente a tradução a todos os elementos de um conjunto.

Definição 8 (Tradução). *Uma sentença φ de um sistema $\mathbf{A} = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{A}}, \vdash_{\mathbf{A}} \rangle$ pode ser traduzida a uma sentença φ^* em um sistema $\mathbf{B} = \langle \mathcal{L}_{\mathbf{B}}, \vdash_{\mathbf{B}} \rangle$ caso exista uma função $\bullet^*: \mathcal{L}_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbf{B}}$ que garanta que $\Gamma \vdash_{\mathbf{A}} \varphi \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash_{\mathbf{B}} \varphi^*$.* \square

Notação. *Seja $\Gamma \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{A}})$ um conjunto de sentenças bem-formadas e $\bullet^*: \mathcal{L}_{\mathbf{A}} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbf{B}}$ uma tradução. Γ^* denota o conjunto $\{\alpha^* \mid \alpha \in \Gamma\} \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{B}})$, ou seja, a aplicação da tradução a todos os elementos do conjunto Γ .* \square

A primeira tradução entre dois sistemas conhecida na literatura foi definida por Kolmogorov (1925) como uma maneira de demonstrar que o uso da *lei do terceiro excluído*⁴ não leva a contradições. Essa definição consiste basicamente em prefixar uma dupla negação a cada elemento da construção de uma dada sentença (Coniglio, 2005), motivo pelo qual chamaremos essa tradução de *tradução de negação dupla*. Essa mesma tradução foi também descoberta independentemente por Gödel e por Getzen. Curiosamente, essa tradução mostra-se relevante para o escopo deste trabalho, uma vez que consiste na contraparte da passagem por continuações segundo a interpretação prova-programa.

Exemplo 1. *Define-se a tradução $\bullet^\neg: \mathcal{L}_C \rightarrow \mathcal{L}_I$ do sistema clássico ao sistema intuicionista indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\neg &:= \neg\neg p \\ \perp^\neg &:= \perp \\ (\varphi \wedge \psi)^\neg &:= \neg\neg(\varphi^\neg \wedge \psi^\neg) \\ (\varphi \vee \psi)^\neg &:= \neg\neg(\varphi^\neg \vee \psi^\neg) \\ (\varphi \rightarrow \psi)^\neg &:= \neg\neg(\varphi^\neg \rightarrow \psi^\neg) \end{aligned} \quad \square$$

2.3 Provedores

A primeira prova de destaque a ser realizada com grande uso de computadores foi a do teorema das quatro cores⁵, feita por Appel e Haken (1976), motivado pela grande quantidade de casos a serem analisados. Conforme Wilson (2021) afirma, esta prova foi por uns recebida com entusiasmo e por outros, devido ao uso de computadores, com ceticismo e desapontamento. Dentre aqueles que compartilharam destas visões opostas, destaca-se Tymoczko (1979). Ainda segundo Wilson (2021), o teorema tornou-se mais aceito com o passar do tempo e foi, posteriormente, formalizado em um provador de teoremas por Gonthier (2008).

Provedores de teoremas consistem em programas de computador que verificam a validade de teoremas. Dentre estes, podemos destacar as classes dos provedores *automados* e dos provedores *interativos*. Os primeiros buscam provar teoremas de maneira que requeira a menor quantidade de intervenção humana, enquanto os segundos — que ganharam destaque depois das limitações dos primeiros ficarem evidentes — delegam-se a verificar rigorosamente provas desenvolvidas por huma-

⁴Definido como $\vdash \alpha \vee \neg\alpha$.

⁵Que afirma que *qualquer mapa planar tem uma quatro-coloração*.

nos em sua linguagem. Formalizaremos das provas apresentadas neste trabalho no provador de teoremas interativo COQ, o mesmo *software* usado por [Gonthier \(2008\)](#).

3. Sistemas e traduções

Nesta parte do trabalho, uma vez apresentada a fundamentação, introduziremos as definições dos sistemas e traduções que serão de fato abordados. Serão elas: os sistemas intuicionista e modais — mais especificamente o \mathbf{S}_4 —, bem como duas traduções equivalentes do primeiro sistema ao segundo.

3.1 Intuicionismo

Definição 9 (\mathcal{L}_I). *A linguagem do sistema intuicionista, denotada \mathcal{L}_I , pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_I = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_I \rangle$, onde $\mathcal{C}_I = \{\perp^0, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2\}$. \square*

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\begin{aligned}\top &:= \perp \rightarrow \perp \\ \neg\alpha &:= \alpha \rightarrow \perp \\ \alpha \leftrightarrow \beta &:= (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)\end{aligned}$$

- (a) Não existe prova de \perp .
- (b) Uma prova de $\alpha \wedge \beta$ consiste num par $\langle A, B \rangle$, sendo A uma prova de α e B uma prova de β .
- (c) Uma prova de $\alpha \vee \beta$ consiste ou num par $\langle 0, A \rangle$, sendo A uma prova de α , ou num par $\langle 1, B \rangle$, sendo B uma prova de β .
- (d) Uma prova de $\alpha \rightarrow \beta$ consiste numa construção C que transforma uma prova A de α numa prova B de β .

Definição abaixo segundo [Troelstra e Schwichtenberg \(2000\)](#).

Definição 10. *A axiomatização do sistema intuicionista consiste no conjunto de esquemas de axiomas $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i \mid i \in [1, 8] \vee i = \perp\}$ e no conjunto de regras $\mathcal{R} =$*

$\{\mathbf{R}_1\}$, definidos abaixo:

$$\begin{array}{ll}
\mathbf{A}_1 & \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \\
\mathbf{A}_2 & (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \\
\mathbf{A}_3 & \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta \\
\mathbf{A}_4 & \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \\
\mathbf{A}_5 & \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \\
\mathbf{A}_6 & \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \\
\mathbf{A}_7 & \beta \rightarrow \alpha \vee \beta \\
\mathbf{A}_8 & (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) \\
\mathbf{A}_\perp & \perp \rightarrow \alpha \\
\mathbf{R}_1 & \text{Se } \Gamma \vdash \alpha \text{ e } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta, \text{ então } \Gamma \vdash \beta. \quad \square
\end{array}$$

Daremos nomes aos esquemas e regras acima de modo a facilitar a comunicação no decorrer deste trabalho. Chamaremos o esquema \mathbf{A}_1 de esquema da constante e o esquema \mathbf{A}_2 de esquema da aplicação.¹ Ao esquema \mathbf{A}_3 daremos o nome de introdução da conjunção, enquanto os esquemas \mathbf{A}_4 e \mathbf{A}_5 serão chamados de eliminação da conjunção. Analogamente, os esquemas \mathbf{A}_6 e \mathbf{A}_7 serão chamados de introdução da disjunção, enquanto ao esquema \mathbf{A}_8 chamaremos de eliminação da disjunção. Por fim, chamaremos \mathbf{A}_\perp de esquema da explosão e \mathbf{R}_1 de regra da separação ou *modus ponens*.

3.2 Modalismo

Os sistemas modais consistem em extensões do sistema proposicional com a adição de modalidades que representam *necessidade* — denotada como \Box — e *possibilidade* — denotada como \Diamond — bem como esquemas e regras que dizem respeito a elas. Deste modo, estão contidas na linguagem do sistema sentenças da forma $\Box\alpha$ e $\Diamond\alpha$ — lidas *necessariamente* α e *possivelmente* α , respectivamente. Intuitivamente, uma necessidade deve ser verdade em todos os casos, enquanto uma possibilidade deve ser verdade em algum caso. Nesta seção, contextualizaremos esses sistemas e, em seguida, definiremo-lo formalmente na sua versão \mathbf{S}_4 .

Os primeiros desenvolvimentos acerca das modalidades acima foram feitos pelos gregos antigos, que anteciparam muitos dos preceitos aceitos modernamente e dentre os quais destacamos novamente [Aristoteles \(1938\)](#). O fundador do modalismo

¹Em analogia aos combinadores \mathbf{K} e \mathbf{S} .

moderno foi [Lewis \(1912\)](#), motivado pela sua insatisfação com o conceito vigente de implicação, uma vez que sua definição² permite que sentenças intuitivamente falsas em linguagem natural seja valoradas como verdade. Este sistema foi posteriormente melhor desenvolvido por [Lewis e Langford \(1932\)](#), onde foram apresentados os sistemas \mathbf{S}_1 a \mathbf{S}_5 — sendo \mathbf{S}_4 o abordado neste trabalho.

Definição 11 ($\mathcal{L}_{\mathbf{M}}$). *A linguagem dos sistemas modais, denotada $\mathcal{L}_{\mathbf{M}}$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_{\mathbf{M}} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_{\mathbf{M}} \rangle$, onde $\mathcal{C}_{\mathbf{M}} = \{\perp^0, \Box^1, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2\}$.*

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\begin{aligned}\top &:= \perp \rightarrow \perp \\ \neg\alpha &:= \alpha \rightarrow \perp \\ \Diamond\alpha &:= \neg\Box\neg\alpha \\ \alpha \multimap \beta &:= \Box(\alpha \rightarrow \beta) \\ \alpha \leftrightarrow \beta &:= (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)\end{aligned}$$

Notação. *Seja $\Gamma \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{M}})$ um conjunto de sentenças bem-formadas. $\Box\Gamma$ denota o conjunto $\{\Box\alpha \mid \alpha \in \Gamma\} \in \wp(\mathcal{L}_{\mathbf{M}})$, ou seja, a prefixação da necessitação a todos os elementos do conjunto Γ .*

Definição abaixo segundo [Troelstra e Schwichtenberg \(2000\)](#).

Definição 12. *A axiomatização do sistema modal consiste no conjunto de esquemas de axiomas $\mathcal{A} = \{\mathbf{A}_i \mid i \in [1, 8] \vee i = \neg\} \cup \{\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3\}$ e no conjunto de regras*

²Definida como $\alpha \rightarrow \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$.

$\mathcal{R} = \{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2\}$, definidos abaixo:

- $\mathbf{A}_1 \quad \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$
- $\mathbf{A}_2 \quad (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)$
- $\mathbf{A}_3 \quad \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$
- $\mathbf{A}_4 \quad \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$
- $\mathbf{A}_5 \quad \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
- $\mathbf{A}_6 \quad \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
- $\mathbf{A}_7 \quad \beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
- $\mathbf{A}_8 \quad (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma)$
- $\mathbf{A}_{\neg} \quad \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$
- $\mathbf{B}_1 \quad \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$
- $\mathbf{B}_2 \quad \Box\alpha \rightarrow \alpha$
- $\mathbf{B}_3 \quad \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$
- $\mathbf{R}_1 \quad \text{Se } \Gamma \vdash \alpha \text{ e } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta, \text{ então } \Gamma \vdash \beta$
- $\mathbf{R}_2 \quad \text{Se } \vdash \alpha, \text{ então } \Gamma \vdash \Box\alpha. \quad \square$

BABIRESKI: Falar aqui sobre como a axiomatização consiste nos esquemas clássicos mais os esquemas modais.

Assim como feito para o sistema intuicionista, nomearemos os esquemas e regras acima de modo a facilitar a comunicação. Aos axiomas e regras que correspondem aos axiomas e regras intuicionistas receberão os mesmos nomes. Ademais, chamaremos \mathbf{B}_1 de axiomas da normalidade, \mathbf{B}_2 de axiomas da reflexividade e \mathbf{B}_3 de axiomas da transitividade.³ Nomearemos \mathbf{A}_{\neg} como chamaremos de axiomas da eliminação da negação e a \mathbf{R}_2 como regra da necessitação.

A definição das regras de dedução em relação a conjuntos de sentenças baseia-se tanto em [Troelstra e Schwichtenberg \(2000\)](#) como em [Hakli e Negri \(2012\)](#). Ao decorrer do texto, ocasionalmente chamaremos \mathbf{R}_1 de *regra da separação* e \mathbf{R}_2 de *regra da necessitação*. A definição da regra da necessitação deve ser cuidadosa de modo a permitir a prova do metateorema da dedução, feita futuramente neste trabalho. Neste sentido, restringimos a aplicação desta regra apenas a teoremas.⁴

³Em analogia às condições relacionais impostas nos enquadramentos.

⁴Para uma discussão mais aprofundada, ver [Hakli e Negri \(2012\)](#).

3.3 Traduções

A primeira tradução do sistema intuicionista ao sistema modal foi proposta por Gödel (1933) motivado pela possibilidade de leitura da necessidade como uma modalidade de construtividade. Ou seja, por meio dessa tradução, a sentença $\Box\varphi$ poderia ser lida como φ *pode ser provada construtivamente* (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Gödel conjecturou a corretude fraca dessa tradução, que foi posteriormente provada por McKinsey e Tarski (1948) em conjunto com sua completude fraca.

Definição 13 (\bullet°). *Define-se a tradução \bullet° indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\circ &:= p \\ \perp^\circ &:= \perp \\ (\varphi \wedge \psi)^\circ &:= \varphi^\circ \wedge \psi^\circ \\ (\varphi \vee \psi)^\circ &:= \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ \\ (\varphi \rightarrow \psi)^\circ &:= \Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ \end{aligned} \quad \square$$

Definição 14 (\bullet^\square). *Define-se a tradução \bullet^\square indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\square &:= \Box p \\ \perp^\square &:= \perp \\ (\varphi \wedge \psi)^\square &:= \varphi^\square \wedge \psi^\square \\ (\varphi \vee \psi)^\square &:= \varphi^\square \vee \psi^\square \\ (\varphi \rightarrow \psi)^\square &:= \Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square) \end{aligned} \quad \square$$

Faz-se interessante pontuar que as traduções \bullet° e \bullet^\square correspondem, respectivamente, às traduções \bullet° e \bullet^* do sistema intuicionista ao sistema linear providas por Girard (1987), sendo as primeiras correspondentes a uma ordem de avaliação por nome (*call-by-name*) e as segundas a uma ordem de avaliação por valor (*call-by-value*). Ademais, as duas traduções providas são equivalentes, conforme demonstrado pelo teorema **T₂**.

4. Formalização

Uma vez definidos os conceitos precisos para o desenvolvimento deste trabalho, aqui apresentaremos diversas provas que os dizem respeito. Notadamente, serão provados metateoremas acerca de \mathbf{S}_4 , serão derivadas sentenças que possuem interpretações computacionais e serão demonstradas a correção e completude das traduções. Todas as derivações a seguir serão — a menos quando indicado — no sistema \mathbf{S}_4 , motivo pelo qual denotaremos a relação de derivação \vdash_4 apenas como \vdash .

4.1 Derivações

Nesta seção apresentaremos alguns lemas e teoremas para os sistemas modais que permitirão simplificar muito as provas apresentadas no decorrer deste trabalho. Primeiramente, provaremos que, dada uma sentença qualquer, esta sempre implica a si mesma. A este lema daremos o nome de identidade¹ e, em seguida, usaremos-no para a prova da regra da dedução.

Lema 1. $\vdash \alpha \rightarrow \alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$	\mathbf{A}_1
2	$\vdash \alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$	\mathbf{A}_1
3	$\vdash (\alpha \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$	\mathbf{A}_2
4	$\vdash (\alpha \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$	$\mathbf{R}_1 \{2, 3\}$
5	$\vdash \alpha \rightarrow \alpha$	$\mathbf{R}_1 \{1, 4\}$

Estando assim demonstrada a proposição. \square

Tendo-se provado o lema da identidade, agora provaremos a regra da dedução para os sistemas modais com base na prova apresentada por [Hakli e Negri \(2012\)](#). Pequenas alterações foram feitas de modo a garantir a adequação da prova com a axiomatização provida na definição \mathbf{D}_{12} .

Teorema 1. *Se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, então $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.*

¹Em analogia ao combinador **I**.

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução.² Assim, suponhamos que o teorema da dedução valha para qualquer sucessão de dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos analisando-se os casos e valendo-se da suposição acima — doravante chamada **H** — o passo de indução, ou seja, que o teorema da dedução vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k + 1$.

CASO 1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de alguma premissa, sabe-se que $\beta \in \Gamma \cup \{\alpha\}$. Deste modo, existem outros dois casos a serem analisados.

CASO 1.1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de alguma premissa do conjunto Γ , sabe-se que $\beta \in \Gamma$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \beta$	P_{β}
2	$\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$	A₁
3	$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$	R₁ {1, 2}.

CASO 1.2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação da premissa α , sabe-se que $\beta = \alpha$. Deste modo, basta demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \alpha$, que consiste num enfraquecimento do lema **L₁**.

CASO 2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido a evocação de algum axioma, sabe-se que existe algum esquema **A _{β}** $\in \mathcal{A}$ que instancia β . Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \beta$	A_{β}
2	$\Gamma \vdash \beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$	A₁
3	$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$	R₁ {1, 2}.

CASO 3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ tenha sido gerada pela aplicação da regra da necessitação a uma linha anterior, sabe-se que $\beta = \Box\varphi$ e que **H₁** = $\vdash \varphi$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \Box\varphi$ pela seguinte sucessão de dedução:

²Nota-se que, para a indução forte, não se faz preciso provar nenhuma base (Velleman, 2019).

1	$\vdash \varphi$	\mathbf{H}_1
2	$\Gamma \vdash \Box \varphi$	$\mathbf{R}_2 \{1\}$
3	$\Gamma \vdash \Box \varphi \rightarrow \alpha \rightarrow \Box \varphi$	\mathbf{A}_1
4	$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \Box \varphi$	$\mathbf{R}_1 \{2, 3\}$.

CASO 4. Seja a sentença $\varphi_n = \beta$ gerada pela aplicação da regra da separação a duas sentenças φ_i e φ_j com $i < j < n$. Assumiremos, sem perda de generalidade, que $\varphi_j = \varphi_i \rightarrow \varphi_n$. Assim, a partir de \mathbf{H} temos que $\mathbf{H}_1 = \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \varphi_i$ e que $\mathbf{H}_2 = \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \varphi_i \rightarrow \varphi_n$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \Box \varphi$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \varphi_j$	\mathbf{H}_1
2	$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \varphi_j \rightarrow \beta$	\mathbf{H}_2
3	$\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \varphi_j \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \varphi_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	\mathbf{A}_2
4	$\Gamma \vdash (\alpha \rightarrow \varphi_j) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta)$	$\mathbf{R}_1 \{2, 3\}$
5	$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{R}_1 \{1, 4\}$.

Uma vez provada a propriedade para todos os casos do passo de indução, provamos que o teorema da dedução vale para o sistema \mathbf{S}_4 . \square

Teorema 2. *Se $\Box \Gamma \vdash \alpha$, então $\Box \Gamma \vdash \Box \alpha$.*

Demonstração. Prova por indução fraca sobre o tamanho n do conjunto Γ ([Troelstra e Schwichtenberg, 2000](#)). A prova consiste em dois casos: um para a base da indução e outro para o passo da indução.

CASO 1. Para a base, consideraremos que $\Gamma = \emptyset$. Assim, sabemos que o conjunto possui tamanho nulo e que $\vdash \alpha$. Portanto, sabe-se que existe uma sucessão de dedução $\langle \varphi_i \mid 0 \leq i \leq n \rangle$ com $\varphi_n = \alpha$. Deste modo, pode-se demonstrar que $\vdash \Box \alpha$ trivialmente pela aplicação da regra da necessitação \mathbf{R}_2 sobre a sentença φ_n .

CASO 2. Para o passo, suponhamos que a generalização da regra da necessitação valha para qualquer conjunto Γ de tamanho $n = k$. Demonstraremos, valendo-se da suposição acima — doravante chamada \mathbf{H} — e pela sucessão de dedução apresentada abaixo, que a generalização da regra da necessitação vale para conjuntos Γ de tamanho $n = k + 1$.

1	$\Box \Gamma \cup \{\Box \alpha\} \vdash \beta$
---	---

2	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{T}_1 \{1\}$
3	$\Box\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha \rightarrow \beta)$	$\mathbf{R}_2 \{2\}$
4	$\Box\Gamma \vdash \Box(\Box\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\Box\alpha \rightarrow \Box\beta$	\mathbf{B}_1
5	$\Box\Gamma \vdash \Box\Box\alpha \rightarrow \Box\beta$	$\mathbf{R}_1 \{3,4\}$
6	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha$	\mathbf{B}_3
7	$\Box\Gamma \vdash (\Box\alpha \rightarrow \Box\Box\alpha) \rightarrow (\Box\Box\alpha \rightarrow \Box\beta) \rightarrow \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$	\mathbf{A}_2
8	$\Box\Gamma \vdash (\Box\Box\alpha \rightarrow \Box\beta) \rightarrow \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$	$\mathbf{R}_1 \{6,7\}$
9	$\Box\Gamma \vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$	$\mathbf{R}_1 \{5,8\}$
10	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$	\mathbf{P}_1
11	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \rightarrow \Box\beta$	
12	$\Box\Gamma \cup \{\Box\alpha\} \vdash \Box\beta$	$\mathbf{R}_1 \{10,11\}.$

Tendo-se provado a base e o passo de indução, podemos concluir que generalização da regra da necessitação vale, ou seja, que se $\Box\Gamma \vdash \alpha$, então $\Box\Gamma \vdash \Box\alpha$. \square

Uma vez provada a generalização da regra da implicação, a prova da regra da dedução estrita — conforme descrito por [Marcus \(1946, 1953\)](#) — torna-se trivial, como pode ser visto abaixo. Esta regra derivada permite simplificar as provas de corretude das traduções, uma vez que uma das traduções que serão apresentadas mapeia implicações materiais do sistema intuicionista em implicações estritas.

Teorema 3. *Se $\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, então $\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$.*

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$	\mathbf{H}_1
2	$\Box\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{T}_1 \{1\}$
3	$\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$	$\mathbf{T}_2 \{2\}$

Estando assim demonstrada a proposição. \square

Teorema 4. *Se $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$, então $\Gamma \vdash \beta$.*

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Gamma \vdash \alpha$	\mathbf{H}_1
2	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$	\mathbf{H}_2

3	$\Gamma \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$	B₂
4	$\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$	R₁ {2, 3}
5	$\Gamma \vdash \beta$	R₁ {1, 4}

Estando assim demonstrada a proposição. \square

Lema 2. $\vdash \perp \rightarrow \alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\perp\} \vdash \perp$	P₁
2	$\{\perp\} \vdash \perp \rightarrow (\alpha \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$	A₁
3	$\{\perp\} \vdash \neg\neg\alpha$	R₁ {1, 2}
4	$\{\perp\} \vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$	A_¬
5	$\{\perp\} \vdash \alpha$	R₁ {3, 4}
6	$\vdash \perp \rightarrow \alpha$	T₁ {5}.

Estando assim demonstrada a proposição. \square

Lema 3. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \beta \rightarrow \perp$	P₁
2	$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash (\beta \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \perp)$	A₁
3	$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \perp$	R₁ {1, 2}
4	$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \perp) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \perp)$	A₂
5	$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$	P₂
6	$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \perp)$	R₁ {3, 4}
7	$\{\alpha \rightarrow \beta, \neg\beta\} \vdash \neg\alpha$	R₁ {5, 6}
8	$\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash \neg\beta \rightarrow \neg\alpha$	T₁ {7}
9	$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha)$	T₁ {8}.

Estando assim demonstrada a proposição. \square

Lema 4. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \alpha$	P₁
2	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$	P₃
3	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \beta$	R₁ {1, 2}
4	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$	P₂
5	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$	R₁ {1, 4}
6	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \beta \wedge \gamma$	A₃
7	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \gamma \rightarrow \beta \wedge \gamma$	R₁ {3, 6}
8	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \beta \wedge \gamma$	R₁ {5, 7}
9	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma$	T₁ {8}
10	$\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma$	T₁ {9}
11	$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \wedge \gamma$	T₁ {10}.

Estando assim demonstrada a proposição. □

Lema 5. $\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$	A₄
2	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha)$	R₂ {1}
3	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha) \rightarrow (\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha)$	B₁
4	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha$	R₁ {2, 3}
5	$\vdash \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$	A₅
6	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta)$	R₂ {5}
7	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta) \rightarrow (\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\beta)$	B₁
8	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\beta$	R₁ {6, 7}
9	$\vdash (\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha) \rightarrow (\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$	L₄
10	$\vdash (\Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\beta) \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$	R₁ {4, 9}
11	$\vdash \Box(\alpha \wedge \beta) \rightarrow \Box\alpha \wedge \Box\beta$	R₁ {6, 9}

Estando assim demonstrada a proposição. □

Lema 6. $\vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\alpha$
2	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\alpha \rightarrow \alpha$
3	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha$
4	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\beta$
5	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box\beta \rightarrow \beta$
6	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \beta$
7	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$
8	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$
9	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \alpha \wedge \beta$
10	$\{\Box\alpha, \Box\beta\} \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$
11	$\{\Box\alpha \wedge \Box\beta\} \vdash \Box(\alpha \wedge \beta)$
12	$\vdash \Box\alpha \wedge \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \wedge \beta)$

Estando assim demonstrada a proposição. \square

Lema 7. $\vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\alpha \rightarrow \beta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box\alpha$	P₂
2	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box\alpha \rightarrow \alpha$	B₂
3	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \alpha$	R₁ {1, 2}
4	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$	P₁
5	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$	B₂
6	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$	R₁ {4, 5}
7	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta), \Box\alpha\} \vdash \beta$	R₁ {3, 6}
8	$\{\Box(\alpha \rightarrow \beta)\} \vdash \Box\alpha \rightarrow \beta$	T₁ {7}
9	$\vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\alpha \rightarrow \beta$	T₁ {8}.

\square

Lema 8. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \alpha$
2	$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$
3	$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \beta$
4	$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \beta \rightarrow \gamma$
5	$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma, \alpha\} \vdash \gamma$
6	$\{\alpha \rightarrow \beta, \beta \rightarrow \gamma\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
7	$\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$
8	$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$

Daremos a este lema o nome *lema da composição*. □

Lema 9. $\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de deduo:

1	$\{\alpha\} \vdash \alpha$
---	----------------------------

Daremos a este lema o nome *lema da introduo da dupla negao*. □

Lema 10. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \vee \gamma$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de deduo:

1	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \alpha$
2	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$
3	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \beta$
4	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \beta \rightarrow \beta \vee \gamma$
5	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \beta \vee \gamma$
6	$\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash \alpha \rightarrow \beta \vee \gamma$
7	$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \beta \vee \gamma$

Estando assim demonstrada a proposio. □

Lema 11. $\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma \vee \beta$.

Demonstraão. Pode ser provado pela seguinte sucessão de deduo:

1	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \alpha$
---	--

2	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \beta$
3	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \beta$
4	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \beta \rightarrow \gamma \vee \beta$
5	$\{\alpha \rightarrow \beta, \alpha\} \vdash \gamma \vee \beta$
6	$\{\alpha \rightarrow \beta\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma \vee \beta$
7	$\vdash (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma \vee \beta$

Estando assim demonstrada a proposição. \square

Lema 12. $\vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta, \alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma$
2	$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta, \alpha \vee \beta\} \vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma \vee \delta$
3	$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta, \alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \rightarrow \gamma \rightarrow \gamma \vee \delta$
4	$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta, \alpha \vee \beta\} \vdash \beta \rightarrow \delta$
5	$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta, \alpha \vee \beta\} \vdash (\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$
6	$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta, \alpha \vee \beta\} \vdash \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$
7	$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta, \alpha \vee \beta\} \vdash (\alpha \rightarrow \gamma \rightarrow \gamma \vee \delta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma \vee \delta) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$
8	$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta, \alpha \vee \beta\} \vdash (\beta \rightarrow \gamma \vee \delta) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$
9	$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta, \alpha \vee \beta\} \vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$
10	$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta, \alpha \vee \beta\} \vdash \gamma \vee \delta$
11	$\{\alpha \rightarrow \gamma, \beta \rightarrow \delta\} \vdash \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$
12	$\{\alpha \rightarrow \gamma\} \vdash (\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$
13	$\vdash (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \delta) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \vee \delta$

Estando assim demonstrada a proposição. \square

Lema 13. $\vdash \Box \alpha \vee \Box \beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box \alpha\} \vdash \Box \alpha$
2	$\{\Box \alpha\} \vdash \Box \alpha \rightarrow \alpha$

3	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha$
4	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$
5	$\{\Box\alpha\} \vdash \alpha \vee \beta$
6	$\{\Box\alpha\} \vdash \Box(\alpha \vee \beta)$
7	$\{\Box\beta\} \vdash \Box\beta$
8	$\{\Box\beta\} \vdash \Box\beta \rightarrow \beta$
9	$\{\Box\beta\} \vdash \beta$
10	$\{\Box\beta\} \vdash \beta \rightarrow \alpha \vee \beta$
11	$\{\Box\beta\} \vdash \alpha \vee \beta$
12	$\{\Box\beta\} \vdash \Box(\alpha \vee \beta)$
13	$\{\Box\alpha \vee \Box\beta\} \vdash \Box(\alpha \vee \beta)$
14	$\{\Box\alpha \vee \Box\beta\} \vdash \Box(\alpha \vee \beta)$
15	$\vdash \Box\alpha \vee \Box\beta \rightarrow \Box(\alpha \vee \beta)$

Estando assim demonstrada a proposição. \square

4.2 Interpretações computacionais

BABIRESKI: Ver Zach (2024) acerca dos axiomas duais e suas derivações.

Teorema 5. $\vdash \alpha \rightarrow \Diamond\alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \Box\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha$	B₂
2	$\vdash (\Box\neg\alpha \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow \neg\neg\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$	L₃
3	$\vdash \neg\neg\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$	R₁ {1, 2}
4	$\vdash (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\Box\neg\alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow (\neg\neg\alpha \rightarrow \Diamond\alpha)$	A₁
5	$\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$	R₁ {3, 4}
6	$\vdash (\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha \rightarrow \Diamond\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \Diamond\alpha)$	A₂
7	$\vdash \alpha \rightarrow \neg\neg\alpha$	BABIRESKI: Provar.
8	$\vdash (\alpha \rightarrow \neg\neg\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow \Diamond\alpha)$	R₁ {5, 6}
9	$\vdash \alpha \rightarrow \Diamond\alpha$	R₁ {7, 8}.

\square

Teorema 6. $\vdash \Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha$.

Demonstração. Pode ser provado pela seguinte sucessão de dedução:

$$\begin{array}{l|l} 1 & \vdash \neg\Box\alpha \rightarrow \neg\Box\Diamond\alpha \\ 2 & \vdash \Diamond\Diamond\alpha \rightarrow \Diamond\alpha \end{array}$$

□

Apesar da similaridades com as transformações naturais, deve-se destacar que as noções de computação não podem ser interpretadas simplesmente como necessidade ou possibilidade, uma vez que apresenta propriedades presente em ambas as modalidades. Neste sentido, a modalidade de *laxidade* — que combina noções de necessidade e possibilidade — mostra-se uma melhor representação de efeitos computacionais sobre a interpretação programa-prova.

Ao sistema que comporta essa modalidade — denotada \bigcirc — damos o nome de sistema laxo ou simplesmente **L**. Este sistema foi primeiramente considerado por Curry (1952, 1957) e posteriormente redescoberto por Fairtlough e Mendler (1995, 1997) como uma tentativa de representar correção dentro de restrições na verificação formal de *hardware* de computadores. Pode ser definido formalmente por meio da assinatura $\Sigma_{\mathbf{L}} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_{\mathbf{L}} \rangle$ e da axiomatização $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}_{\mathbf{L}}, \mathcal{R}_{\mathbf{I}} \rangle$, onde $\mathcal{C}_{\mathbf{L}} = \mathcal{C}_{\mathbf{I}} \cup \{\bigcirc^1\}$ e $\mathcal{A}_{\mathbf{L}} = \mathcal{A}_{\mathbf{I}} \cup \{\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{C}_3\}$, considerando-se os esquemas abaixo:

$$\begin{array}{ll} \mathbf{C}_1 & \alpha \rightarrow \bigcirc\alpha \\ \mathbf{C}_2 & \bigcirc\bigcirc\alpha \rightarrow \bigcirc\alpha \\ \mathbf{C}_3 & (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \bigcirc\alpha \rightarrow \bigcirc\beta \end{array}$$

Benton et al. (1998) e Pfenning e Davies (2001) notam a capacidade deste sistema de representar a metalinguagem de computação apresentada por Moggi (1991). Ainda, Pfenning e Davies (2001) apresenta uma tradução desse sistema a um sistema **S**₄ intuicionista.

4.3 Isomorfismo entre as traduções

Conforme afirmado anteriormente, ambas as traduções apresentadas neste trabalho equivalem — ou seja, são isomorfas — na forma $\vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$. Nesta seção, provaremos este isomorfismo que, não somente constitui puramente um resultado de interesse, como permite tornar a prova de propriedades de uma tradução triviais caso tais propriedades valham para a outra tradução.

Teorema 7. $\vdash \Box \alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre a profundidade de α (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Assim, suponhamos que as traduções equivalham para qualquer α de profundidade $n < k$. Demonstraremos analisando-se os casos e valendo-se da suposição acima — doravante chamada **H** — o passo de indução, ou seja, que as traduções equivalem para qualquer α de profundidade $n = k$.

CASO 1. Se a sentença α for uma proposição $a \in \mathcal{P}$, sabe-se que $\Box a^\circ = \Box a$ e que $a^\Box = \Box a$ pelas definições das traduções. Deste modo, tanto a ida quanto a volta possuem a forma $\Box a \rightarrow \Box a$ e podem ser provadas pelo lema **L₁**. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema **A₃**.

CASO 2. Se a sentença α for a constante \perp , sabe-se que $\Box \perp^\circ = \Box \perp$ e que $\perp^\Box = \perp$ pelas definições das traduções. Deste modo, a ida $\Box \perp \rightarrow \perp$ constitui um axioma gerado pelo esquema **B₂** — sendo assim provada trivialmente — e a volta $\perp \rightarrow \Box \perp$ pode ser provada pelo lema **L₂**. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema **A₃**.

CASO 3. Se a sentença α for o resultado da conjunção de duas outras sentenças φ e ψ , sabe-se que $\Box(\varphi \wedge \psi)^\circ = \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$ e que $(\varphi \wedge \psi)^\Box = \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$ e outro para a volta $\varphi^\Box \wedge \psi^\Box \rightarrow \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$. Ambas as implicações posteriormente podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema da introdução da conjunção **A₃**.

CASO 3.1. A partir de **H**, temos que **H₁** = $\vdash \Box \varphi^\circ \rightarrow \varphi^\Box$ e que **H₂** = $\vdash \Box \psi^\circ \rightarrow \psi^\Box$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$	P₁
2	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \rightarrow \Box \varphi^\circ \wedge \Box \psi^\circ$	L₅
3	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box \varphi^\circ \wedge \Box \psi^\circ$	R₁ {1, 2}
4	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box \varphi^\circ \wedge \Box \psi^\circ \rightarrow \varphi^\Box$	A₄
5	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\Box$	R₁ {3, 4}

6	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \varphi^\Box$	H₁
7	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\Box$	R₁ {5, 6}
8	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ$	A₄
9	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\psi^\circ$	R₁ {3, 8}
10	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \Box\psi^\circ \rightarrow \psi^\Box$	H₂
11	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \psi^\Box$	R₁ {9, 10}
12	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\Box \rightarrow \psi^\Box \rightarrow \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	A₃
13	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \psi^\Box \rightarrow \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	R₁ {7, 12}
14	$\{\Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	R₁ {9, 13}
15	$\vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	T₁ {14}

CASO 3.2. A partir de **H**, temos que **H₁** = $\vdash \varphi^\Box \rightarrow \Box\varphi^\circ$ e que **H₂** = $\vdash \psi^\Box \rightarrow \Box\psi^\circ$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \rightarrow \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	P₁
2	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \rightarrow \varphi^\Box$	A₄
3	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box$	R₁ {1, 2}
4	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \rightarrow \Box\varphi^\circ$	H₁
5	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\varphi^\circ$	R₁ {3, 4}
6	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \rightarrow \psi^\Box$	A₅
7	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \psi^\Box$	R₁ {1, 6}
8	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \psi^\Box \rightarrow \Box\psi^\circ$	H₂
9	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\psi^\circ$	R₁ {7, 8}
10	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ \rightarrow \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ$	A₃
11	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\psi^\circ \rightarrow \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ$	R₁ {5, 10}
12	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ$	R₁ {9, 11}
13	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\varphi^\circ \wedge \Box\psi^\circ \rightarrow \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$	L₆
14	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$	R₁ {12, 13}
15	$\vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \rightarrow \Box(\varphi^\circ \wedge \psi^\circ)$	T₁ {14}

CASO 4. Se a sentença α for o resultado da disjunção de duas outras sentenças φ e ψ , sabe-se que $\Box(\varphi \vee \psi)^\circ = \Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ)$ e que $(\varphi \vee \psi)^\Box = \varphi^\Box \vee \psi^\Box$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \vee \psi^\Box$ e outro para a volta $\varphi^\Box \vee \psi^\Box \rightarrow \Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ)$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema da introdução da conjunção **A₃**.

CASO 4.1. A partir de **H**, temos que **H₁** = $\vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \varphi^\Box$ e que **H₂** = $\vdash \Box\psi^\circ \rightarrow \psi^\Box$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \vee \psi^\Box$ pela seguinte sucessão de dedução, sendo $\chi = \Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ)$:

1	$\{\chi\} \vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \varphi^\Box$	H₁
2	$\{\chi\} \vdash \Box\psi^\circ \rightarrow \psi^\Box$	H₂
3	$\{\chi\} \vdash \Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ)$	P₁
4	$\{\chi\} \vdash \Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ) \rightarrow \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ$	B₂
5	$\{\chi\} \vdash \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ$	R₁ {3, 4}
6	$\{\chi\} \vdash (\Box\varphi^\circ \rightarrow \varphi^\Box) \rightarrow (\Box\psi^\circ \rightarrow \psi^\Box) \rightarrow \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ \rightarrow \varphi^\Box \vee \psi^\Box$	L₁₂
7	$\{\chi\} \vdash (\Box\psi^\circ \rightarrow \psi^\Box) \rightarrow \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ \rightarrow \varphi^\Box \vee \psi^\Box$	R₁ {1, 6}
8	$\{\chi\} \vdash \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ \rightarrow \varphi^\Box \vee \psi^\Box$	R₁ {2, 7}
9	$\{\chi\} \vdash \varphi^\Box \vee \psi^\Box$	R₁ {5, 8}
10	$\vdash \Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \vee \psi^\Box$	T₁ {8}

CASO 4.2. A partir de **H**, temos que **H₁** = $\vdash \varphi^\Box \rightarrow \Box\varphi^\circ$ e que **H₂** = $\vdash \psi^\Box \rightarrow \Box\psi^\circ$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^\Box \vee \psi^\Box \rightarrow \Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ)$ pela seguinte sucessão de dedução, sendo $\chi = \varphi^\Box \vee \psi^\Box$.

1	$\{\chi\} \vdash \varphi^\Box \rightarrow \Box\varphi^\circ$	H₁
2	$\{\chi\} \vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\Box\varphi^\circ$	B₃
3	$\{\chi\} \vdash (\varphi^\Box \rightarrow \Box\varphi^\circ) \rightarrow (\Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\Box\varphi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \rightarrow \Box\Box\varphi^\circ$	L₈
4	$\{\chi\} \vdash (\Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\Box\varphi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \rightarrow \Box\Box\varphi^\circ$	R₁ {1, 3}
5	$\{\chi\} \vdash \varphi^\Box \rightarrow \Box\Box\varphi^\circ$	R₁ {2, 4}
6	$\{\chi\} \vdash \psi^\Box \rightarrow \Box\psi^\circ$	H₂

7	$\{\chi\} \vdash \Box\psi^\circ \rightarrow \Box\Box\psi^\circ$	B₃
8	$\{\chi\} \vdash (\psi^\Box \rightarrow \Box\psi^\circ) \rightarrow (\Box\psi^\circ \rightarrow \Box\Box\psi^\circ) \rightarrow \psi^\Box \rightarrow \Box\Box\psi^\circ$	L₈
9	$\{\chi\} \vdash (\Box\psi^\circ \rightarrow \Box\Box\psi^\circ) \rightarrow \psi^\Box \rightarrow \Box\Box\psi^\circ$	R₁ {6, 8}
10	$\{\chi\} \vdash \psi^\Box \rightarrow \Box\Box\psi^\circ$	R₁ {7, 9}
11	$\{\chi\} \vdash \varphi^\Box \vee \psi^\Box$	P₁
12	$\{\chi\} \vdash (\varphi^\Box \rightarrow \Box^2\varphi^\circ) \rightarrow (\psi^\Box \rightarrow \Box^2\psi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \vee \psi^\Box \rightarrow \Box^2\varphi^\circ \vee \Box^2\psi^\circ$	L₁₂
13	$\{\chi\} \vdash (\psi^\Box \rightarrow \Box\Box\psi^\circ) \rightarrow \varphi^\Box \vee \psi^\Box \rightarrow \Box\Box\varphi^\circ \vee \Box\Box\psi^\circ$	R₁ {5, 12}
14	$\{\chi\} \vdash \varphi^\Box \vee \psi^\Box \rightarrow \Box\Box\varphi^\circ \vee \Box\Box\psi^\circ$	R₁ {10, 13}
15	$\{\chi\} \vdash \Box\Box\varphi^\circ \vee \Box\Box\psi^\circ$	R₁ {11, 14}
16	$\{\chi\} \vdash \Box\Box\varphi^\circ \vee \Box\Box\psi^\circ \rightarrow \Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ)$	L₁₃
17	$\{\chi\} \vdash \Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ)$	R₁ {15, 16}
18	$\vdash \varphi^\Box \vee \psi^\Box \rightarrow \Box(\Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ)$	T₁ {17}

CASO 5. Se a sentença α for o resultado da implicação de uma sentença φ a uma sentença ψ , sabe-se que $\Box(\varphi \rightarrow \psi)^\circ = \Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)$ e que $(\varphi \rightarrow \psi)^\Box = \Box(\varphi^\Box \rightarrow \psi^\Box)$ pelas definições das traduções. Separaremos a prova em dois casos: um para a ida $\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ) \rightarrow \Box(\varphi^\Box \rightarrow \psi^\Box)$ e outro para a volta $\Box(\varphi^\Box \rightarrow \psi^\Box) \rightarrow \Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)$. Ambas as implicações, então, podem ser unidas em uma bi-implicação por meio do esquema **A₃**.

CASO 5.1. A partir de **H**, temos que **H₁** = $\vdash \varphi^\Box \rightarrow \Box\varphi^\circ$ e que **H₂** = $\vdash \Box\psi^\circ \rightarrow \psi^\Box$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ) \rightarrow \Box(\psi^\Box \rightarrow \psi^\Box)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash \Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)$	P₁
2	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash \Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ) \rightarrow \Box\Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ$	B₁
3	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\Box\varphi^\circ$	B₃
4	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash \Box\Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ$	B₂
5	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash (\Box\varphi^\circ \rightarrow \Box^2\varphi^\circ) \rightarrow (\Box^2\varphi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ) \rightarrow \Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ$	L₈
6	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash (\Box\Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ) \rightarrow \Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ$	R₁ {3, 5}
7	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\Box \rightarrow \Box\varphi^\circ$	H₁
8	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ$	R₁ {4, 6}

9	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash (\varphi^\square \rightarrow \Box\varphi^\circ) \rightarrow (\Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ) \rightarrow \varphi^\square \rightarrow \Box\psi^\circ$	L₈
10	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash (\Box\varphi^\circ \rightarrow \Box\psi^\circ) \rightarrow \varphi^\square \rightarrow \Box\psi^\circ$	R₁ {7, 9}
11	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\square \rightarrow \Box\psi^\circ$	R₁ {8, 10}
12	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash \Box\psi^\circ \rightarrow \psi^\square$	H₂
13	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash (\varphi^\square \rightarrow \Box\psi^\circ) \rightarrow (\Box\psi^\circ \rightarrow \psi^\square) \rightarrow \varphi^\square \rightarrow \psi^\square$	L₈
14	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash (\Box\psi^\circ \rightarrow \psi^\square) \rightarrow \varphi^\square \rightarrow \psi^\square$	R₁ {11, 13}
15	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash \varphi^\square \rightarrow \psi^\square$	R₁ {12, 14}
16	$\{\Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)\} \vdash \Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square)$	T₂ {15}
17	$\vdash \Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ) \rightarrow \Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square)$	T₁ {16}

CASO 5.2. A partir de **H**, temos que **H₁** = $\Box\varphi^\circ \rightarrow \varphi^\square$ e que **H₂** = $\psi^\square \rightarrow \Box\psi^\circ$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \Box(\psi^\square \rightarrow \psi^\square) \rightarrow \Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \varphi^\square$	H₁
2	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square)$	P₂
3	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square) \rightarrow \varphi^\square \rightarrow \psi^\square$	B₂
4	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \varphi^\square \rightarrow \psi^\square$	R₁ {2, 3}
5	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash (\Box\varphi^\circ \rightarrow \varphi^\square) \rightarrow (\varphi^\square \rightarrow \psi^\square) \rightarrow \Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\square$	L₈
6	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash (\varphi^\square \rightarrow \psi^\square) \rightarrow \Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\square$	R₁ {1, 5}
7	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\varphi^\circ$	P₁
8	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\square$	R₁ {4, 6}
9	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \psi^\square$	R₁ {7, 8}
10	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \psi^\square \rightarrow \Box\psi^\circ$	H₂
11	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\psi^\circ$	R₁ {9, 10}
12	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \Box\psi^\circ \rightarrow \psi^\circ$	B₂
13	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square), \Box\varphi^\circ\} \vdash \psi^\circ$	R₁ {11, 12}
14	$\{\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square)\} \vdash \Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)$	R₃ {13}
15	$\vdash \Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square) \rightarrow \Box(\Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ)$	T₁ {14}

Tendo-se provado todos os casos do passo de indução, podemos concluir que ambas

as traduções apresentadas equivalem, ou seja, que $\vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$. \square

4.4 Correção

Lema 14. $\vdash \alpha^\Box \rightarrow \Box\alpha^\Box$.

Demonstração. Prova por indução forte sobre a profundidade de α (Troelstra e Schwichtenberg, 2000). Assim, suponhamos que a proposição valha para qualquer sentença α de profundidade $n < k$. Demonstraremos analisando-se os casos e valendo-se da suposição acima — doravante chamada **H** — o passo de indução, ou seja, que a proposição vale para qualquer α de profundidade $n = k$.

CASO 1. Se a sentença α for uma proposição $a \in \mathcal{P}$, sabe-se que $a^\Box = \Box a$ pela definição da tradução. Deste modo, $\Box a \rightarrow \Box\Box a$ constitui um axioma gerado pelo esquema **B₂** — sendo assim $\vdash \Box a \rightarrow \Box\Box a$ provado trivialmente.

CASO 2. Se a sentença α for a constante \perp , sabe-se que $\perp^\Box = \perp$ pela definição da tradução. Deste modo, devemos provar que $\vdash \perp \rightarrow \Box\perp$, o que consiste num caso particular da explosão provada pelo lema **L₂**.

CASO 3. Se a sentença α for o resultado da conjunção de duas outras sentenças φ e ψ , sabe-se que $(\varphi \wedge \psi)^\Box = \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$ pela definição da tradução. A partir de **H**, temos que **H₁** = $\vdash \varphi^\Box \rightarrow \Box\varphi^\Box$ e que **H₂** = $\vdash \psi^\Box \rightarrow \Box\psi^\Box$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \rightarrow \Box(\varphi^\Box \wedge \psi^\Box)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box$	P₁
2	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \rightarrow \varphi^\Box$	A₄
3	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box$	R₁ {1, 2}
4	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \rightarrow \Box\varphi^\Box$	H₁
5	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\varphi^\Box$	R₁ {3, 4}
6	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \varphi^\Box \wedge \psi^\Box \rightarrow \psi^\Box$	A₅
7	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \psi^\Box$	R₁ {1, 6}
8	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \psi^\Box \rightarrow \Box\psi^\Box$	H₂
9	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\psi^\Box$	R₁ {7, 8}
10	$\{\varphi^\Box \wedge \psi^\Box\} \vdash \Box\varphi^\Box \rightarrow \Box\psi^\Box \rightarrow \Box\varphi^\Box \wedge \Box\psi^\Box$	A₃

11	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \Box\psi^\square \rightarrow \Box\varphi^\square \wedge \Box\psi^\square$	R₁ {5, 10}
12	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \Box\varphi^\square \wedge \Box\psi^\square$	R₁ {9, 11}
13	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \Box\varphi^\square \wedge \Box\psi^\square \rightarrow \Box(\varphi^\square \wedge \psi^\square)$	L₆
14	$\{\varphi^\square \wedge \psi^\square\} \vdash \Box(\varphi^\square \wedge \psi^\square)$	R₁ {12, 13}
15	$\vdash \varphi^\square \wedge \psi^\square \rightarrow \Box(\varphi^\square \wedge \psi^\square)$	T₁ {14}

CASO 4. Se a sentença α for o resultado da disjunção de duas outras sentenças φ e ψ , sabe-se que $(\varphi \vee \psi)^\square = \varphi^\square \vee \psi^\square$ pela definição da tradução. A partir de **H**, temos que **H₁** = $\vdash \varphi^\square \rightarrow \Box\varphi^\square$ e que **H₂** = $\vdash \psi^\square \rightarrow \Box\psi^\square$ por meio dos esquemas da eliminação da conjunção e da aplicação da regra da separação. Valendo-se do listado acima em conjunto com alguns lemas, pode-se provar que $\vdash \varphi^\square \vee \psi^\square \rightarrow \Box(\varphi^\square \vee \psi^\square)$ pela seguinte sucessão de dedução:

CASO 5. Se a sentença α for o resultado da implicação de uma sentença φ a uma sentença ψ , sabe-se que $(\varphi \rightarrow \psi)^\square = \Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square)$ pela definição da tradução. Deste modo, $\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square) \rightarrow \Box\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square)$ constitui um axioma gerado pelo esquema **B₂** — sendo assim $\vdash \Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square) \rightarrow \Box\Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square)$ provado trivialmente.

Tendo-se provado todos os casos do passo de indução, podemos concluir que a propriedade vale, ou seja, que $\vdash \alpha^\square \rightarrow \Box\alpha^\square$. \square

Teorema 8. *Se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma^\square \vdash \alpha^\square$.*

Demonstração. Prova por indução forte sobre o tamanho da sucessão de dedução. Assim, suponhamos que a tradução seja correta para qualquer sucessão de dedução de tamanho $n < k$. Demonstraremos, analisando-se os casos, que o a correção da tradução vale para sucessões de dedução de tamanho $n = k + 1$.

CASO 1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de alguma premissa, sabe-se que $\alpha \in \Gamma$ e, portanto, que $\alpha^\square \in \Gamma^\square$. Desde modo, pode-se demonstrar que $\Gamma^\square \vdash \alpha^\square$ trivialmente pela evocação da premissa α^\square .

CASO 2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma, sabe-se que existe algum esquema **A_α** ∈ **A** que gera α . Deste modo, devemos demonstrar que para cada esquema **A** ∈ **A**, pode-se derivar $\Gamma^\square \vdash_4 \mathbf{A}^\square$. Nos casos abaixo, usaremos ocasionalmente a implicação estrita de modo a diminuir o espaço ocupado pelas provas.

CASO 2.1. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema **A₁**, sabemos que $\alpha = \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha$ e que $\alpha^\square = \Box(\alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square))$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\square \vdash \Box(\alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square))$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha^\square \rightarrow \Box \alpha^\square$	L₁₄
2	$\vdash \alpha^\square \rightarrow \beta^\square \rightarrow \alpha^\square$	A₁
3	$\vdash \Box(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square \rightarrow \alpha^\square)$	R₂ {2}
4	$\vdash \Box(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square \rightarrow \alpha^\square) \rightarrow \Box \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square)$	B₁
5	$\vdash \Box \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square)$	R₁ {3, 4}
6	$\vdash (\alpha^\square \rightarrow \Box \alpha^\square) \rightarrow (\Box \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square)) \rightarrow \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square)$	L₈
7	$\vdash (\Box \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square)) \rightarrow \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square)$	R₁ {1, 6}
8	$\vdash \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square)$	R₁ {5, 7}
9	$\Gamma^\square \vdash \Box(\alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square))$	R₂ {8}

CASO 2.2. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema **A₂**, sabemos que $\alpha = (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$ e que $\alpha^\square = (\alpha \multimap \beta \multimap \gamma) \multimap (\alpha \multimap \beta) \multimap \alpha \multimap \gamma$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\square \vdash (\alpha \multimap \beta \multimap \gamma) \multimap (\alpha \multimap \beta) \multimap \alpha \multimap \gamma$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha^\square \multimap \beta^\square \multimap \gamma^\square, \alpha^\square \multimap \beta^\square, \alpha^\square\} \vdash \alpha^\square$	P₁
2	$\{\alpha^\square \multimap \beta^\square \multimap \gamma^\square, \alpha^\square \multimap \beta^\square, \alpha^\square\} \vdash \alpha^\square \multimap \beta^\square$	P₂
3	$\{\alpha^\square \multimap \beta^\square \multimap \gamma^\square, \alpha^\square \multimap \beta^\square, \alpha^\square\} \vdash \beta^\square$	T₄ {1, 2}
4	$\{\alpha^\square \multimap \beta^\square \multimap \gamma^\square, \alpha^\square \multimap \beta^\square, \alpha^\square\} \vdash \alpha^\square \multimap \beta^\square \multimap \gamma^\square$	P₃
5	$\{\alpha^\square \multimap \beta^\square \multimap \gamma^\square, \alpha^\square \multimap \beta^\square, \alpha^\square\} \vdash \beta^\square \multimap \gamma^\square$	T₄ {1, 4}
6	$\{\alpha^\square \multimap \beta^\square \multimap \gamma^\square, \alpha^\square \multimap \beta^\square, \alpha^\square\} \vdash \gamma^\square$	T₄ {3, 5}
7	$\{\alpha^\square \multimap \beta^\square \multimap \gamma^\square, \alpha^\square \multimap \beta^\square\} \vdash \alpha^\square \multimap \gamma^\square$	T₃ {6}
8	$\{\alpha^\square \multimap \beta^\square \multimap \gamma^\square\} \vdash (\alpha^\square \multimap \beta^\square) \multimap \alpha^\square \multimap \gamma^\square$	T₃ {7}
9	$\vdash (\alpha^\square \multimap \beta^\square \multimap \gamma^\square) \rightarrow (\alpha^\square \multimap \beta^\square) \multimap \alpha^\square \multimap \gamma^\square$	T₁ {8}
10	$\Gamma^\square \vdash (\alpha^\square \multimap \beta^\square \multimap \gamma^\square) \multimap (\alpha^\square \multimap \beta^\square) \multimap \alpha^\square \multimap \gamma^\square$	R₂ {9}

CASO 2.3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema **A₃**, sabemos que $\alpha = \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta$ e que $\alpha^\square = \Box(\alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square))$. Deste modo,

podemos provar que $\Gamma^\square \vdash \Box(\alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square))$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha^\square \rightarrow \Box \alpha^\square$	L₁₄
2	$\vdash \alpha^\square \rightarrow \beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square$	A₃
3	$\vdash \Box(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square)$	R₂ {2}
4	$\vdash \Box(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square) \rightarrow \Box \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square)$	B₁
5	$\vdash \Box \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square)$	R₁ {3, 4}
6	$\vdash (\alpha^\square \rightarrow \Box \alpha^\square) \rightarrow (\Box \alpha^\square \rightarrow \beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square) \rightarrow \alpha^\square \rightarrow \beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square$	L₈
7	$\vdash (\Box \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square)) \rightarrow \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square)$	R₁ {1, 6}
8	$\vdash \alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square)$	R₁ {5, 7}
9	$\Gamma^\square \vdash \Box(\alpha^\square \rightarrow \Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \wedge \beta^\square))$	R₂ {8}

CASO 2.4. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema **A₄**, sabemos que $\alpha = \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$ e que $\alpha^\square = \Box(\alpha^\square \wedge \beta^\square \rightarrow \alpha^\square)$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\square \vdash \Box(\alpha^\square \wedge \beta^\square \rightarrow \alpha^\square)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha^\square \wedge \beta^\square \rightarrow \alpha^\square$	A₄
2	$\Gamma^\square \vdash \Box(\alpha^\square \wedge \beta^\square \rightarrow \alpha^\square)$	R₂ {1}

CASO 2.5. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema **A₅**, sabemos que $\alpha = \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$ e que $\alpha^\square = \Box(\alpha^\square \wedge \beta^\square \rightarrow \beta^\square)$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\square \vdash \Box(\alpha^\square \wedge \beta^\square \rightarrow \beta^\square)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha^\square \wedge \beta^\square \rightarrow \beta^\square$	A₅
2	$\Gamma^\square \vdash \Box(\alpha^\square \wedge \beta^\square \rightarrow \beta^\square)$	R₂ {1}

CASO 2.6. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema **A₆**, sabemos que $\alpha = \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta$ e que $\alpha^\square = \Box(\alpha^\square \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square)$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\square \vdash \Box(\alpha^\square \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \alpha^\square \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square$	A₆
2	$\Gamma^\square \vdash \Box(\alpha^\square \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square)$	R₂ {1}

CASO 2.7. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema **A₇**, sabemos que $\alpha = \beta \rightarrow \alpha \vee \beta$ e que $\alpha^\square = \square(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square)$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\square \vdash \square(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \beta^\square \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square$	A₇
2	$\Gamma^\square \vdash \square(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square)$	R₂ {1}

CASO 2.8. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema **A₈**, sabemos que $\alpha = (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma$ e que $\alpha^\square = (\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow (\beta^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\square \vdash (\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow (\beta^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square, \alpha^\square \vee \beta^\square\} \vdash \alpha^\square \rightarrow \gamma^\square$	P₃
2	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square, \alpha^\square \vee \beta^\square\} \vdash (\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \alpha^\square \rightarrow \gamma^\square$	B₂
3	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square, \alpha^\square \vee \beta^\square\} \vdash \alpha^\square \rightarrow \gamma^\square$	R₁ {1, 2}
4	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square, \alpha^\square \vee \beta^\square\} \vdash \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$	P₂
5	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square, \alpha^\square \vee \beta^\square\} \vdash (\beta^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$	B₂
6	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square, \alpha^\square \vee \beta^\square\} \vdash \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$	R₁ {4, 5}
7	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square, \alpha^\square \vee \beta^\square\} \vdash \alpha^\square \vee \beta^\square$	P₁
8	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square, \alpha^\square \vee \beta^\square\} \vdash (\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow (\beta^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$	A₈
9	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square, \alpha^\square \vee \beta^\square\} \vdash (\beta^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$	R₁ {3, 8}
10	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square, \alpha^\square \vee \beta^\square\} \vdash \alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$	R₁ {6, 9}
11	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square, \alpha^\square \vee \beta^\square\} \vdash \gamma^\square$	R₁ {7, 10}
12	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square, \beta^\square \rightarrow \gamma^\square\} \vdash \alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$	T₃ {11}
13	$\{\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square\} \vdash (\beta^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$	T₃ {12}
14	$\vdash (\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow (\beta^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$	T₁ {13}
15	$\Gamma^\square \vdash (\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow (\beta^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$	R₂ {14}

CASO 2.9. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido a evocação de algum axioma gerado pelo esquema **A_⊥**, sabemos que $\alpha = \perp \rightarrow \alpha$ e que $\alpha^\square = \square(\perp \rightarrow \alpha^\square)$. Deste modo, podemos provar que $\Gamma^\square \vdash \square(\perp \rightarrow \alpha^\square)$ pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\vdash \perp \rightarrow \alpha^\square$	L₂
---	---	----------------------

$$2 \quad \left| \quad \Gamma^\square \vdash \Box(\perp \rightarrow \alpha^\square) \quad \mathbf{R}_2 \{1\} \right.$$

CASO 3. Se a linha derradeira da sucessão de dedução que prova $\Gamma \vdash \alpha$ tenha sido gerada pela aplicação da regra da separação a duas sentenças φ_i e φ_j com $i < j < n$ pode-se assumir, sem perda de generalidade, que $\varphi_j = \varphi_i \rightarrow \alpha$. Assim, a partir de **H** temos que $\mathbf{H}_1 = \Gamma^\square \vdash \varphi_i^\square$ e que $\mathbf{H}_2 = \Gamma^\square \vdash \Box(\varphi_i^\square \rightarrow \alpha^\square)$. Deste modo, podemos demonstrar que $\Gamma^\square \vdash \alpha^\square$ pela seguinte sucessão de dedução:

$$\begin{array}{l|ll} 1 & \varphi_i^\square & \mathbf{H}_2 \\ 2 & \Box(\varphi_i^\square \rightarrow \alpha^\square) & \mathbf{H}_1 \\ 3 & \Box(\varphi_i^\square \rightarrow \alpha^\square) \rightarrow \varphi_i^\square \rightarrow \alpha^\square & \mathbf{B}_2 \\ 4 & \varphi_i^\square \rightarrow \alpha^\square & \mathbf{R}_1 \{1,2\} \\ 5 & \alpha^\square & \mathbf{R}_1 \{3,4\} \end{array}$$

Tendo-se provado todos os casos do passo de indução, podemos concluir que a correção da \Box -tradução, ou seja, que se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma^\square \vdash \alpha^\square$. \square

Teorema 9. *Se $\Gamma \vdash \alpha$, então $\Gamma^\circ \vdash \alpha^\circ$.*

Demonstração. A partir do teorema **T₈**, sabemos que $\Gamma^\square \vdash \alpha^\square$ e, por meio do teorema **T₇**, que $\Box\Gamma^\circ \vdash \Box\alpha^\circ$. \square

Referências Bibliográficas

- Kenneth Appel e Wolfgang Haken. Every map is four colourable. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1976. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1976-14122-5>.
- Aristoteles. *Organon*. Tradução de Harold Percy Cooke, Hugh Tredennick e Edward Seymour Forster. Cambridge, Harvard University Press, 1938.
- Peter Nicholas Benton, Gavin Mark Bierman e Valeria Correa Vaz de Paiva. Computational types from a logical perspective. *Journal of Functional Programming*, 1998. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0956796898002998>.
- Jean-Yves Béziau. Universal logic. *Logica*, 1994.
- Jean-Yves Béziau. From consequence operator to universal logic: a survey of general abstract logic. In *Logica Universalis*, Basileia, 2007. Birkhäuser Basel. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-7643-8354-1_1.
- Adam Chlipala. *Certified programming with dependent types*. The Massachusetts Institute of Technology Press, 2022. ISBN: 9780262545747.
- Marcelo Esteban Coniglio. Towards a stronger notion of translation between logics. *Manuscrito*, 2005.
- Haskell Brooks Curry. The elimination theorem when modality is present. *Journal of Symbolic Logic*, 1952. DOI: <https://doi.org/10.2307/2266613>.
- Haskell Brooks Curry. *A theory of formal deducibility*. University of Notre Dame Press, 1957. DOI: <https://doi.org/10.2307/2270991>.
- Matt Fairtlough e Michael Mendler. An intuitionistic modal logic with applications to the formal verification of hardware. In *Computer Science Logic*. Springer, 1995. DOI: <https://doi.org/10.1007/BFb0022268>.
- Matt Fairtlough e Michael Mendler. Propositional lax logic. *Information and Computation*, 1997. DOI: <https://doi.org/10.1006/inco.1997.2627>.
- Josep Maria Font, Ramon Jansana e Don Leonard Pigozzi. A survey of abstract algebraic logic. *Studia Logica*, 2003. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1024621922509>.

- Curtis Franks. Propositional Logic. In *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Stanford University, 2024. URL: <https://plato.stanford.edu/entries/logic-propositional/>.
- Gottlob Frege. *Begriffsschrift: Eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*. Verlag von Louis Nebert, 1879.
- Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 1987. ISSN: 0304-3975. DOI: [https://doi.org/10.1016/0304-3975\(87\)90045-4](https://doi.org/10.1016/0304-3975(87)90045-4).
- Georges Gonthier. Formal proof: the four-color theorem. *Notices of the American Mathematical Society*, 2008.
- Kurt Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 1933.
- Raul Hakli e Sara Negri. Does the deduction theorem fail for modal logic? *Synthese*, 2012. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11229-011-9905-9>.
- David Hilbert. Über das Unendliche. *Mathematische Annalen*, 1926. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01206605>.
- David Hilbert. *Die Grundlagen der Mathematik*. Springer, 1928. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-663-16102-8>.
- Andrej Nikolaevi Kolmogorov. On the principle of the excluded middle. *Matematieskij Sbornik*, 1925.
- Clarence Irving Lewis. Implication and the algebra of logic. *Mind*, 1912. ISSN: 0026-4423. DOI: <https://doi.org/10.1093/mind/XXI.84.522>.
- Clarence Irving Lewis e Cooper Harold Langford. *Symbolic logic*. Nova York, Century, 1932.
- Ruth Barcan Marcus. The deduction theorem in a functional calculus of first order based on strict implication. *The Journal of Symbolic Logic*, 1946.
- Ruth Barcan Marcus. Strict implication, deducibility and the deduction theorem. *The Journal of Symbolic Logic*, 1953.
- John Charles Chenoweth McKinsey e Alfred Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, 1948.

- Eugenio Moggi. Notions of computation and monads. *Information and Computation*, 1991. ISSN: 0890-5401. DOI: [https://doi.org/10.1016/0890-5401\(91\)90052-4](https://doi.org/10.1016/0890-5401(91)90052-4).
- Miguel Alfredo Nunes, Karina Girardi Roggia e Paulo Henrique Torrens. Soundness-preserving fusion of modal logics in Coq. In *Proceedings of the XXVI Brazilian Symposium on Formal Methods*, 2024.
- Frank Pfenning e Rowan Davies. A judgmental reconstruction of modal logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0960129501003322>.
- John Charles Reynolds. The discoveries of continuations. *Higher-Order and Symbolic Computation*, 1993. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01019459>.
- Alexandre Sehnem. Formalização da tradução das lógicas clássica e intuicionista para a lógica linear em Coq. Dissertação de bacharelado, Universidade do Estado de Santa Catarina, 2023.
- Ariel Agne da Silveira et al. A sound deep embedding of arbitrary normal modal logics in Coq. In *Proceedings of the XXVI Brazilian Symposium on Programming Languages*. Association for Computing Machinery, 2022. ISBN: 9781450397445. DOI: <https://doi.org/10.1145/3561320.3561329>.
- Alfred Tarski. Remarques sur les notions fondamentales de la méthodologie des mathématiques. *Annales de la Société Polonaise de Mathématiques*, 1928.
- Anne Sjerp Troelstra e Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Cambridge, Cambridge University Press, 2000. ISBN: 9781139168717. DOI: <https://doi.org/10.1017/CB09781139168717>.
- Thomas Tymoczko. The four-color problem and its philosophical significance. *The Journal of Philosophy*, 1979. DOI: <https://doi.org/10.2307/2025976>.
- Daniel Jon Velleman. *How to prove it: a structured approach*. Cambridge, Cambridge University Press, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1017/9781108539890>.
- Alfred North Whitehead e Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Cambridge University Press, 1910.
- Alfred North Whitehead e Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Cambridge University Press, 1911.

Alfred North Whitehead e Bertrand Russell. *Principia mathematica*. Cambridge University Press, 1912.

Robin Wilson. *Four colors suffice: how the map problem was solved*. Princeton University Press, 2021.

Richard Zach. *Box and diamonds: an open introduction to modal logic*. Open Logic Project, 2024.