

Uma formalização da interpretação modal do
sistema intuicionista

Eliañ Babireski

2024

Resumo

Resumo aqui.

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Justificativa	4
1.2	Metas	4
1.3	Estruturação	4
2	Fundamentação	5
2.1	Sistemas	5
2.2	Traduções	6
2.3	Provadores	6
3	Formalização	7
3.1	Sistemas	7
3.2	Traduções	10
3.3	Corretude	11
3.4	Compleitude	14

*“Oh, you can’t help that,” said the Cat:
“we’re all mad here. I’m mad. You’re
mad.” “How do you know I’m mad?” said
Alice. “You must be,” said the Cat, “or you
wouldn’t have come here.”*

—Lewis Carroll, *Alice in Wonderland*

Capítulo 1

Introdução

As lógicas modais consistem em um conjunto de extensões da lógica clássica que contam com a adição de um ou mais operadores, chamados modalidades, que qualificam sentenças. No caso do sistema **S4**, são adicionadas as modalidades de necessidade (\Box) e possibilidade (\Diamond) em conjunto à regra da necessitação¹ e os axiomas **K**: $\Box(A \rightarrow B) \rightarrow \Box A \rightarrow \Box B$, **T**: $\Box A \rightarrow A$ e **4**: $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ [7]. Ademais, pode-se derivar nesse sistema, por meio da dualidade entre as modalidades², sentenças duais aos axiomas **T** e **4**, sendo elas **T \Diamond** : $A \rightarrow \Diamond A$ e **4 \Diamond** : $\Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$, respectivamente [?].

As mônadas ganharam destaque na área de linguagens de programação desde que [5] formalizou uma metalinguagem que faz uso dessas estruturas para modelar noções de computação – como parcialidade, não-determinismo, exceções e continuações – de uma maneira puramente funcional. Pode-se notar uma grande semelhança entre as sentenças **T \Diamond** e **4 \Diamond** e as transformações naturais monádicas η : $1_C \rightarrow T$ e μ : $T^2 \rightarrow T$, respectivamente. Nesse sentido, [6] demonstraram que se pode traduzir essa metalinguagem para o sistema **S4** da lógica modal, pelo qual se torna interessante analisar esse sistema como uma linguagem de programação sob a ótica do isomorfismo de Curry-Howard.

[7] apresentam duas traduções equivalentes da lógica intuicionista para o sistema **S4** da lógica modal, sendo um deles correspondente a uma abordagem *call-by-name* e outra a um abordagem *call-by-value*. Tais traduções possuem grande similaridade com as traduções da lógica intuicionista para a lógica linear definidas por [2]. Essas traduções equivalem à tradução por negação dupla que, por sua vez, equivalem a traduções *continuation-passing style* (CPS) em compiladores por meio do isomorfismo de Curry-Howard [?], o que torna esse tema interessante no ponto de vista de compilação.

Durante grande parte da história, provas lógicas e matemáticas eram validadas manualmente pela comunidade acadêmica, o que muitas vezes – a depender do tamanho e complexidade da prova – se mostrava ser um trabalho complexo

¹Se $\vdash A$ então $\vdash \Box A$

² $\Diamond A \equiv \neg \Box \neg A$

e sujeito a erros. Hoje em dia, existem *softwares* chamados assistentes de provas que permitem verificar – graças ao isomorfismo de Curry-Howard – a corretude de provas [?]. O assistente de provas que será usado neste trabalho é o Coq, que utiliza o cálculo de construções indutivas e um conjunto axiomático pequeno para permitir a escrita de provas simples e intuitivas [?].

Este trabalho será uma continuação do desenvolvimento da biblioteca de lógica modal no assistente de provas Coq feito em [?] e posteriormente expandido de forma a permitir a fusão de lógicas modais em [?]. Uma formalização similar de traduções de lógicas foi feito em [?], porém, neste caso, das lógicas clássica e intuicionista para a lógica linear.

1.1 Justificativa

1.2 Metas

1.3 Estruturação

Capítulo 2

Fundamentação

2.1 Sistemas

Conforme visto, as noções de sistema variam entre diferentes autores e permanece um campo em aberto. Para as necessidades deste trabalho, usaremos a definição proposta por [1], uma vez que se trata de uma definição simples e que, portanto, não traz elementos irrelevantes aos intuitos deste trabalho.

Definição 1 (Sistema). *Um sistema consiste num par $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \Vdash \rangle$, onde \mathcal{L} consiste em um conjunto de sentenças bem-formadas e $\Vdash : \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ em uma relação sobre as sentenças, sem demais condições.* \square

Cabe destacar que a definição de sistema provida foi definida com base em \Vdash , uma relação qualquer entre as sentenças, que pode ser uma relação de dedução, denotada \vdash , ou uma relação de satisfação, denotada \models . Propriedades da tradução podem ser provadas sobre qualquer uma dessas relações, como veremos adiante. Entretanto, neste trabalho, serão abordadas somente as relações de dedução.

Definição 2 (Assinatura). *Uma assinatura consiste num conjunto de operadores e suas respectivas aridades. A notação \circ^n denota um operador \circ com aridade $n \in \mathbb{N}$.* \square

Definiremos a noção de profundidade de uma sentença para que possamos realizar indução na profundidade da sentença, conforme Troelstra [7].

Definição 3 (Profundidade). *A profundidade $|\alpha|$ de uma sentença α consiste no comprimento do maior ramo de sua construção. Seja \circ um operador qualquer, define-se a profundidade recursivamente como:*

$$\begin{aligned} |p| &:= 0 \\ |\perp| &:= 0 \\ |\circ \alpha| &:= |\alpha| + 1 \\ |\alpha \circ \beta| &:= \max(|\alpha|, |\beta|) + 1. \end{aligned} \quad \square$$

Definição 4 (Esquema). *Definição.*

Definição 5 (Axiomatização). *Um sistema de Hilbert para um sistema $\mathbf{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$ consiste em um par $\mathcal{H} = \langle \mathcal{A}, \mathcal{R} \rangle$, sendo \mathcal{A} um conjunto de esquemas axiomas e \mathcal{R} um conjunto de regras de dedução.*

Definição 6 (Dedução). *Uma sucessão $\langle \varphi_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$, onde cada sentença φ_i trata-se de um axioma $\alpha \in \mathcal{A}$, uma assunção $\gamma \in \Gamma$ ou sentenças geradas pela aplicação de regras de dedução $\rho \in \mathcal{R}$ a sentenças anteriores, consiste em uma prova de $\Gamma \vdash \varphi_n$.* \square

2.2 Traduções

Traduções entre sistemas consistem em funções que mapeiam sentenças de um sistema a sentenças de outro sistema e garantem certas propriedades. As propriedades a serem garantidas variam e ainda são discutidas na literatura, deixando a definição exata de tradução – assim como houve com a definição de sistema – varie de acordo com a predileção de cada autor. Nesta seção, serão abordadas historicamente noções de tradução entre sistemas, bem como serão definidos e nomeados os conceitos de tradução que serão usados no restante deste trabalho.

Definição 7 (Tradução). *Uma sentença φ de um sistema $\mathbf{A} = \langle \mathcal{L}_\mathbf{A}, \vdash_\mathbf{A} \rangle$ pode ser traduzida a uma sentença φ^* em um sistema $\mathbf{B} = \langle \mathcal{L}_\mathbf{B}, \vdash_\mathbf{B} \rangle$ caso exista uma função $\bullet^* : \mathcal{L}_\mathbf{A} \rightarrow \mathcal{L}_\mathbf{B}$ que garanta que $\Gamma \vdash_\mathbf{A} \varphi \Leftrightarrow \Gamma^* \vdash_\mathbf{B} \varphi^*$.* \square

Notação. *Seja $\Gamma \in \wp(\mathcal{L}_\mathbf{A})$ um conjunto de sentenças e $\bullet^* : \mathcal{L}_\mathbf{A} \rightarrow \mathcal{L}_\mathbf{B}$ uma tradução. Γ^* denota o conjunto $\{\alpha^* \mid \alpha \in \mathcal{L}_\mathbf{A}\} \in \wp(\mathcal{L}_\mathbf{B})$, ou seja, a aplicação da tradução a todos os elementos do conjunto.* \square

Definição 8 (\bullet^\neg). *Define-se a tradução \bullet^\neg indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\neg &:= \neg \neg p \\ \perp^\neg &:= \perp \\ (\varphi \wedge \psi)^\neg &:= \neg \neg (\varphi^\neg \wedge \psi^\neg) \\ (\varphi \vee \psi)^\neg &:= \neg \neg (\varphi^\neg \vee \psi^\neg) \\ (\varphi \rightarrow \psi)^\neg &:= \neg \neg (\varphi^\neg \rightarrow \psi^\neg) \end{aligned} \quad \square$$

2.3 Provadores

Capítulo 3

Formalização

3.1 Sistemas

Definição 9 (\mathcal{L}_I). *A linguagem do sistema intuicionista, denotada \mathcal{L}_I , consiste no menor conjunto induzido a partir das seguintes regras:*

$$\begin{aligned}\perp &\in \mathcal{L}_I \\ \mathcal{P} &\subseteq \mathcal{L}_I \\ \alpha, \beta \in \mathcal{L}_I &\Rightarrow \alpha \circ \beta \in \mathcal{L}_I, \text{ para } \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}.\end{aligned}\quad \square$$

Notação. *Serão usadas as seguintes abreviações:*

$$\begin{aligned}\top &:= \perp \rightarrow \perp \\ \neg\alpha &:= \alpha \rightarrow \perp \\ \alpha \leftrightarrow \beta &:= (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \beta \rightarrow \alpha\end{aligned}$$

Definição 10. *A axiomatização do sistema intuicionista consiste nos seguintes esquemas e regras:*

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_1 & \quad \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \\ \mathbf{A}_2 & \quad (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \\ \mathbf{A}_3 & \quad \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta \\ \mathbf{A}_4 & \quad \alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \\ \mathbf{A}_5 & \quad \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \\ \mathbf{A}_6 & \quad \alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \\ \mathbf{A}_7 & \quad \beta \rightarrow \alpha \vee \beta \\ \mathbf{A}_8 & \quad (\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) \\ \mathbf{A}_\perp & \quad \perp \rightarrow \alpha \\ \mathbf{R}_1 & \quad \text{Se } \vdash \alpha \text{ e } \vdash \alpha \rightarrow \beta, \text{ então } \vdash \beta.\end{aligned}\quad \square$$

Definição 11 (\mathcal{L}_M). A linguagem do sistemas modais, denotada \mathcal{L}_M , consiste no menor conjunto induzido a partir das seguintes regras:

$$\begin{aligned} \perp &\in \mathcal{L}_M \\ \mathcal{P} &\subseteq \mathcal{L}_M \\ \alpha \in \mathcal{L}_M &\Rightarrow \Box \alpha \in \mathcal{L}_M \\ \alpha, \beta \in \mathcal{L}_M &\Rightarrow \alpha \circ \beta \in \mathcal{L}_M, \text{ para } \circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}. \end{aligned} \quad \square$$

Notação. Serão usadas as seguintes abreviações:

$$\begin{aligned} \top &:= \perp \rightarrow \perp \\ \neg \alpha &:= \alpha \rightarrow \perp \\ \Diamond \alpha &:= \neg \Box \neg \alpha \\ \alpha \leftrightarrow \beta &:= (\alpha \rightarrow \beta) \wedge \beta \rightarrow \alpha \end{aligned}$$

Definição 12. A axiomatização do sistema modal consiste nos seguintes esquemas e regras:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 \quad &\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \\ \mathbf{A}_2 \quad &(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma) \\ \mathbf{A}_3 \quad &\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta \\ \mathbf{A}_4 \quad &\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \\ \mathbf{A}_5 \quad &\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \\ \mathbf{A}_6 \quad &\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \\ \mathbf{A}_7 \quad &\beta \rightarrow \alpha \vee \beta \\ \mathbf{A}_8 \quad &(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \vee \beta \rightarrow \gamma) \\ \mathbf{A}_{\neg} \quad &\neg \neg \alpha \rightarrow \alpha \\ \mathbf{B}_1 \quad &\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box \alpha \rightarrow \Box \beta \\ \mathbf{B}_2 \quad &\Box \alpha \rightarrow \alpha \\ \mathbf{B}_3 \quad &\Box \alpha \rightarrow \Box \Box \alpha \\ \mathbf{R}_1 \quad &\text{Se } \vdash \alpha \text{ e } \vdash \alpha \rightarrow \beta, \text{ então } \vdash \beta \\ \mathbf{R}_2 \quad &\text{Se } \vdash \alpha, \text{ então } \vdash \Box \alpha. \end{aligned} \quad \square$$

Provaremos, para o sistema modal apresentado, uma variação do teorema da dedução, que permite simplificar muitas das demonstrações apresentadas futuramente neste trabalho.

Teorema 1. $\forall \Gamma \cup \{\alpha, \beta\} \in \wp(\mathcal{L}_M) . \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Rightarrow \Gamma \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$.

Demonstração. Seja Γ um conjunto de sentenças e sejam α e β sentenças de modo que $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, deve-se provar que $\Gamma \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$. Como $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, existe uma prova de β a partir de $\Gamma \cup \{\alpha\}$. A prova baseia-se numa indução sobre o tamanho n da prova.

Caso 1 (Base). Para a base requer-se considerar os seguintes casos: **(1)** β consiste num axioma, **(2)** $\beta \in \Gamma$ e **(3)** $\beta = \alpha$.

Caso 1.1 ($\beta \in \mathcal{A}$).

1	$\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$	\mathbf{A}_1
2	β	\mathbf{A}_β
3	$\alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{R}_1 \langle 1, 2 \rangle$
4	$\Box(\alpha \rightarrow \beta)$	$\mathbf{R}_2 \langle 3 \rangle$

Caso 1.2 ($\beta \in \Gamma$).

1	$\beta \rightarrow \alpha \rightarrow \beta$	\mathbf{A}_1
2	β	\mathbf{P}
3	$\alpha \rightarrow \beta$	$\mathbf{R}_1 \langle 1, 2 \rangle$
4	$\Box(\alpha \rightarrow \beta)$	$\mathbf{R}_2 \langle 3 \rangle$

Caso 1.3 ($\beta = \alpha$).

1	$\alpha \rightarrow \alpha$	\mathbf{L}_1
2	$\Box(\alpha \rightarrow \alpha)$	$\mathbf{R}_2 \langle 1 \rangle$

Caso 2 (Passo). Supõe-se que, para qualquer prova de $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$ com tamanho k , tem-se que $\Gamma \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$. Deve-se mostrar que a proposição segue verdadeira caso a prova tenha tamanho $k + 1$. Assim, sendo $\langle \varphi_i \mid 1 \leq i \leq k + 1 \rangle$ uma sucessão de dedução com $\varphi_{k+1} = \beta$, requer-se considerar os seguintes casos:

Caso 2.1 ($\beta \in \mathcal{A}$). *Vide* caso $\mathbf{C}_{1.1}$.

Caso 2.2 ($\beta \in \Gamma$). *Vide* caso $\mathbf{C}_{1.2}$.

Caso 2.3 ($\beta = \alpha$). *Vide* caso $\mathbf{C}_{1.3}$.

Caso 2.4 (\mathbf{R}_1).

Caso 2.5 (\mathbf{R}_2).

□

3.2 Traduções

A primeira tradução do sistema intuicionista ao sistema modal foi proposta por Gödel [3] motivado pela possibilidade de leitura da necessidade como uma modalidade de construtividade. Ou seja, por meio dessa tradução, a sentença $\Box\varphi$ poderia ser lida como φ *pode ser provada construtivamente* [7]. Gödel conjecturou a corretude fraca dessa tradução, que foi posteriormente provada por McKinsey e Tarski [4] em conjunto com sua completude fraca.

Definição 13 (\bullet°). *Define-se a tradução \bullet° indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\circ &:= p \\ \perp^\circ &:= \perp \\ (\varphi \wedge \psi)^\circ &:= \varphi^\circ \wedge \psi^\circ \\ (\varphi \vee \psi)^\circ &:= \Box\varphi^\circ \vee \Box\psi^\circ \\ (\varphi \rightarrow \psi)^\circ &:= \Box\varphi^\circ \rightarrow \psi^\circ \end{aligned} \quad \square$$

Definição 14 (\bullet^\square). *Define-se a tradução \bullet^\square indutivamente da seguinte maneira:*

$$\begin{aligned} p^\square &:= \Box p \\ \perp^\square &:= \perp \\ (\varphi \wedge \psi)^\square &:= \varphi^\square \wedge \psi^\square \\ (\varphi \vee \psi)^\square &:= \varphi^\square \vee \psi^\square \\ (\varphi \rightarrow \psi)^\square &:= \Box(\varphi^\square \rightarrow \psi^\square) \end{aligned} \quad \square$$

Faz-se interessante pontuar que as traduções \bullet° e \bullet^\square correspondem, respectivamente, às traduções \bullet° e \bullet^* do sistema intuicionista ao sistema linear providas por Girard [2], sendo as primeiras correspondentes a uma ordem de avaliação por nome (*call-by-name*) e as segundas a uma ordem de avaliação por valor (*call-by-value*). Ademais, as duas traduções providas são equivalentes, conforme demonstrado pelo teorema **T₂**.

Teorema 2. $\forall \alpha \in \mathcal{L}_I . \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\square$.

Demonstração. Prova por indução na profundidade de α .

Caso 1 (Base). Para $|\alpha| = 0$, existem dois casos a serem considerados.

Caso 1.1 ($\alpha = a$). $a^\circ = a$ e $a^\square = \Box a$, assim $\Box a^\circ = a^\square$ e, portanto, $\Box a^\circ \leftrightarrow a^\square$.

Caso 2.1 ($\alpha = \perp$). $\perp^\circ = \perp$ e $\perp^\square = \perp$. A ida $\square\perp \rightarrow \perp$ consiste em um axioma, sendo, portando provada trivialmente pela sucessão de dedução $\langle \square\perp \rightarrow \perp \rangle$. A volta $\perp \rightarrow \square\perp$ equivale a provar, por meio do teorema da dedução, que $\{\perp\} \vdash_{\mathbf{M}} \square\perp$, o que pode ser provado trivialmente pela sucessão de dedução $\langle \perp, \square\perp \rangle$, que consiste na invocação da premissa e aplicação da regra da necessitação, nessa ordem.

Caso 2 (Passo). No passo, deve-se demonstrar que, caso $\square\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\square$ para $|\alpha| = n$, então $\square\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\square$ para $|\alpha| = n + 1$, onde $n \in \mathbb{N}$. Assim, seja $\square\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\square$ uma proposição verdadeira para $|\alpha| = k$, onde $k \in \mathbb{N}$. Existem os seguintes casos a serem considerados para $|\alpha| = k + 1$.

Caso 2.1 ($\alpha = \alpha_1 \wedge \alpha_2$).

Caso 2.2 ($\alpha = \alpha_1 \vee \alpha_2$).

Caso 2.3 ($\alpha = \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$).

□

3.3 Corretude

Teorema 3. $\forall \alpha \in \mathcal{L}_{\mathbf{I}}. \Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha \Rightarrow \Gamma^\square \vdash_{\mathbf{M}} \alpha^\square$

Demonstração. Como $\Gamma \vdash_{\mathbf{I}} \alpha$, sabe-se que existe uma prova $\langle \varphi_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ tal que $\varphi_n = \alpha$. A demonstração deste teorema será feita por indução no tamanho n da prova.

Passo ($n = 1$). A prova, caso possua tamanho $n = 1$, tem obrigatoriamente a forma $\langle \alpha \rangle$. Deste modo, existem duas casos a serem considerados: α ser um axioma ou α ser uma premissa.

Caso 1 ($\alpha \in \Gamma$). Como $\alpha \in \Gamma$, sabe-se que $\alpha^\square \in \Gamma^\square$, uma vez que $\Gamma^\square = \{\varphi^\square \mid \varphi \in \Gamma\}$. Desta forma, $\langle \alpha^\square \rangle$ constitui uma prova para $\Gamma^\square \vdash \alpha^\square$.

Caso 2 ($\alpha \in \mathcal{A}$).

Caso 2.1 (\mathbf{A}_1). Deve-se demonstrar que $\vdash \square(\alpha^\square \rightarrow \square(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square))$. Pelo teorema **T₁**, basta provar que $\{\alpha^\square, \beta^\square\} \vdash \alpha^\square$, o que pode ser feito pela seguinte sucessão de dedução:

1	α^\square	P
---	------------------	----------

Caso 2.2 (\mathbf{A}_2).

1	$\Box(\alpha^\Box \rightarrow \beta^\Box) \rightarrow \alpha^\Box \rightarrow \beta^\Box$
2	$\Box(\alpha^\Box \rightarrow \beta^\Box)$
3	$\alpha^\Box \rightarrow \beta^\Box$
4	α^\Box
5	β^\Box
6	$\Box(\alpha^\Box \rightarrow \Box(\beta^\Box \rightarrow \alpha^\Box)) \rightarrow \alpha^\Box \rightarrow \Box(\beta^\Box \rightarrow \alpha^\Box)$
7	$\Box(\alpha^\Box \rightarrow \Box(\beta^\Box \rightarrow \alpha^\Box))$
8	$\alpha^\Box \rightarrow \Box(\beta^\Box \rightarrow \alpha^\Box)$
9	$\Box(\beta^\Box \rightarrow \alpha^\Box)$
10	$\Box(\beta^\Box \rightarrow \alpha^\Box) \rightarrow \beta^\Box \rightarrow \gamma^\Box$
11	$\beta^\Box \rightarrow \gamma^\Box$
12	γ^\Box

Caso 2.3 (\mathbf{A}_3).

1	$\alpha^\Box \rightarrow \beta^\Box \rightarrow \alpha^\Box \wedge \beta^\Box$	\mathbf{A}_3
2	α^\Box	\mathbf{P}
3	$\beta^\Box \rightarrow \alpha^\Box \wedge \beta^\Box$	$\mathbf{R}_1 \langle 1, 2 \rangle$
4	β^\Box	\mathbf{P}
5	$\alpha^\Box \wedge \beta^\Box$	$\mathbf{R}_1 \langle 3, 4 \rangle$

Caso 2.4 (\mathbf{A}_4).

1	$\alpha^\Box \wedge \beta^\Box \rightarrow \alpha^\Box$	\mathbf{A}_4
2	$\Box(\alpha^\Box \wedge \beta^\Box \rightarrow \alpha^\Box)$	$\mathbf{R}_2 \langle 1 \rangle$

Caso 2.5 (\mathbf{A}_5).

1	$\alpha^\Box \wedge \beta^\Box \rightarrow \beta^\Box$	\mathbf{A}_5
2	$\Box(\alpha^\Box \wedge \beta^\Box \rightarrow \beta^\Box)$	$\mathbf{R}_2 \langle 1 \rangle$

Caso 2.6 (\mathbf{A}_6).

1	$\alpha^\Box \rightarrow \alpha^\Box \vee \beta^\Box$	\mathbf{A}_6
2	$\Box(\alpha^\Box \rightarrow \alpha^\Box \vee \beta^\Box)$	$\mathbf{R}_2 \langle 1 \rangle$

Caso 2.7 (\mathbf{A}_7).

1	$\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square$	\mathbf{A}_7
2	$\Box(\beta^\square \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square)$	$\mathbf{R}_2 \langle 1 \rangle$

Caso 2.8 (\mathbf{A}_8).

1	$(\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow (\beta^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$
2	$\Box(\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \alpha^\square \rightarrow \gamma^\square$
3	$\Box(\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square)$
4	$\alpha^\square \rightarrow \gamma^\square$
5	$(\beta^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$
6	$\Box(\beta^\square \rightarrow \gamma^\square) \rightarrow \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$
7	$\Box(\beta^\square \rightarrow \gamma^\square)$
8	$\beta^\square \rightarrow \gamma^\square$
9	$\alpha^\square \vee \beta^\square \rightarrow \gamma^\square$
10	$\alpha^\square \vee \beta^\square$
11	γ^\square

Caso 2.9 (\mathbf{A}_\perp). Deve-se demonstrar que $\vdash \Box(\perp \rightarrow \alpha^\square)$. Pelo teorema \mathbf{T}_1 , basta provar que $\{\perp\} \vdash \alpha^\square$, o que pode ser feito pela seguinte sucessão de dedução:

1	$((\alpha^\square \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow \alpha^\square$	\mathbf{A}_\neg
2	$\perp \rightarrow (\alpha^\square \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$	\mathbf{A}_1
3	\perp	\mathbf{P}
4	$(\alpha^\square \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$	$\mathbf{R}_1 \langle 2, 3 \rangle$
5	α^\square	$\mathbf{R}_1 \langle 1, 4 \rangle$

Caso 2.9 (\mathbf{R}_1). Deve-se demonstrar que, se $\vdash \Box(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square)$ (\mathbf{H}_1) e $\vdash \alpha^\square$ (\mathbf{H}_2), então β^\square . Isso pode ser feito pela seguinte sucessão de dedução:

1	$\Box(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square) \rightarrow \alpha^\square \rightarrow \beta^\square$	\mathbf{B}_2
2	$\Box(\alpha^\square \rightarrow \beta^\square)$	\mathbf{H}_1
3	$\alpha^\square \rightarrow \beta^\square$	$\mathbf{R}_1 \langle 1, 2 \rangle$
4	α^\square	\mathbf{H}_2
5	β^\square	$\mathbf{R}_1 \langle 3, 4 \rangle$

□

3.4 Completeness

Referências Bibliográficas

- [1] Jean-Yves Béziau. Universal logic. *Logica*, 1994.
- [2] Jean-Yves Girard. Linear logic. *Theoretical Computer Science*, 1987.
- [3] Kurt Gödel. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 1933.
- [4] John Charles Chenoweth McKinsey and Alfred Tarski. Some theorems about the sentential calculi of Lewis and Heyting. *The Journal of Symbolic Logic*, 1948.
- [5] Eugenio Moggi. Notions of computation and monads. *Information and Computation*, 1991.
- [6] Frank Pfenning and Rowan Davies. A judgmental reconstruction of modal logic. *Mathematical Structures in Computer Science*, 2001.
- [7] Anne Sjerp Troelstra and Helmut Schwichtenberg. *Basic proof theory*. Cambridge University Press, 2000.