Uma formalização assistida por computador da interpretação modal do sistema intuicionista

Elian Gustavo Chorny Babireski
Universidade do Estado de Santa Catarina
elian.babireski@gmail.com

Orientadora: Doutora Karina Girardi Roggia

Coorientador: Mestre Paulo Henrique Torrens

29/11/2024

Sumário

Introdução

- A primeira tradução do sistema intuicionista ao sistema modal S4 foi dada por Gödel (1933);
- Neste trabalho, consideraremos esta tradução como uma maneira de interpretar o sistema S4 sob a ótica o isomorfismo de Curry-Howard e da teoria de tipos;
- Continuação do desenvolvido por Silveira et al. (2022) e Nunes et al. (2024);
- Uma tradução similar foi formalizada por Sehnem (2023).

Kobayashi (1997) sugere a interpretação abaixo.

Interpretação da possibilidade

$$\alpha \to \Diamond\alpha \qquad \eta : 1_C \to T$$
$$\Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha \qquad \mu : T^2 \to T$$

Interpretação da necessidade

$$\Box\alpha \to \alpha \qquad \epsilon : T \to 1_C$$
$$\Box\alpha \to \Box\Box\alpha \qquad \delta : T \to T^2$$

Fundamentos

Neste trabalho, usaremos uma definição de sistema provida por Béziau (1994) e uma definição de tradução entre sistemas provida por Coniglio (2005).

Sistema

Um sistema consiste num par $\mathfrak{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, sendo $\mathcal{L}$ um conjunto e $\vdash \in \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ uma relação sobre o produto cartesiano do conjunto das partes da linguagem e a linguagem, sem demais condições.

Tradução

Sejam $\mathfrak{L}_1 = \langle \mathcal{L}_1, \vdash_1 \rangle$ e $\mathfrak{L}_2 = \langle \mathcal{L}_2, \vdash_2 \rangle$ sistemas. Uma tradução primeiro sistema ao segundo consiste numa função $\bullet^* : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ de modo que $\Gamma \vdash_1 \alpha$ se e somente se $\Gamma^* \vdash_2 \alpha^*$.

Neste trabalho, usaremos uma definição das linguagens dos sistemas intuicionista e modais conforme provida por Troelstra e Schwichtenberg (2000).

$\mathcal{L}_{\mathfrak{I}}$

A linguagem do sistema intuicionista $\mathfrak{I}$, denotada $\mathcal{L}_{\mathfrak{I}}$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_{\mathfrak{I}} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_{\mathfrak{I}} \rangle$, onde $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $\mathcal{C}_{\mathfrak{I}} = \{\bot^0, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2\}$.

$\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$

A linguagem dos sistemas modais $\mathfrak{M}$, denotada $\mathcal{L}_{\mathfrak{M}}$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_{\mathfrak{M}} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_{\mathfrak{M}} \rangle$, onde $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $\mathcal{C}_{\mathfrak{M}} = \{\bot^0, \Box^1, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2\}$.

Primeiramente, consideremos a seguinte axiomatização $\mathcal{H}_{\mathfrak{M}} = \langle \mathcal{A}_{\mathfrak{M}}, \mathcal{R}_{\mathfrak{M}} \rangle$ para o sistema minimal, conforme definido por Troelstra e Schwichtenberg (2000).

$\mathcal{H}_{\mathfrak{M}}$

$$\alpha \to \beta \to \alpha \quad (A_1)$$

$$(\alpha \to \beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma \quad (A_2)$$

$$\alpha \to \beta \to \alpha \wedge \beta \quad (A_3)$$

$$\alpha \wedge \beta \to \alpha \quad (A_4)$$

$$\alpha \wedge \beta \to \beta \quad (A_5)$$

$$\alpha \to \alpha \vee \beta \quad (A_6)$$

$$\beta \to \alpha \vee \beta \quad (A_7)$$

$$(\alpha \to \gamma) \to (\beta \to \gamma) \to \alpha \vee \beta \to \gamma \quad (A_8)$$

Se $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$ então, $\Gamma \vdash \beta$ $\quad (R_1)$

Axiomatizações

Estendo a definição anterior, chega-se às axiomatizações do sistema intuicionista e modal S4, conforme definido por Troelstra e Schwichtenberg (2000) e Hakli e Negri (2012).

$\mathcal{H}_{\mathfrak{I}}$

$\bot \to \alpha$	$(A_\bot)$

$\mathcal{H}_{S4}$

$\neg\neg\alpha \to \alpha$	$(A_\neg)$
$\Box(\alpha \to \beta) \to \Box\alpha \to \Box\beta$	(B_1)
$\Box\alpha \to \alpha$	(B_2)
$\Box\Box\alpha \to \Box\alpha$	(B_3)
Se $\vdash \alpha$ então, $\Gamma \vdash \Box\alpha$	(R_2)

Alguns dos metateoremas provados neste trabalho.

Metateorema da dedução

Se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, então $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$.

Metateorema da generalização da necessitação

Se $\Box\Gamma \vdash \alpha$, então $\Box\Gamma \vdash \Box\alpha$.

Metateorema da dedução estrita

Se $\Box\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, então $\Box\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$.

Metateorema do *modus ponens* estrito

Se $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \Box(\alpha \to \beta)$, então $\Gamma \vdash \beta$.

Traduções

Neste trabalho, consideremos duas traduções equivalentes providas por Troelstra e Schwichtenberg (2000).

Traduções

$$
\begin{aligned}
a^\circ &:= a & \qquad a^\Box &:= \Box a \\
\bot^\circ &:= \bot & \bot^\Box &:= \bot \\
(\alpha \wedge \beta)^\circ &:= \alpha^\circ \wedge \beta^\circ & (\alpha \wedge \beta)^\Box &:= \alpha^\Box \wedge \beta^\Box \\
(\alpha \vee \beta)^\circ &:= \Box\alpha^\circ \vee \Box\beta^\circ & (\alpha \vee \beta)^\Box &:= \alpha^\Box \vee \beta^\Box \\
(\alpha \to \beta)^\circ &:= \Box\alpha^\circ \to \beta^\circ & (\alpha \to \beta)^\Box &:= \Box(\alpha^\Box \to \beta^\Box)
\end{aligned}
$$

Teorema do isomorfismo entre traduções

$\vdash \Box\alpha^\circ \leftrightarrow \alpha^\Box$.

Lema

$\vdash \alpha^{\square} \to \square\alpha^{\square}$.

Correção

Se $\Gamma \vdash_{\mathfrak{I}} \alpha$, então $\Gamma^{\square} \vdash_{S4} \alpha^{\square}$.

Teorema

$\vdash \alpha \to \Diamond\alpha$.

Teorema

$\vdash \Diamond\Diamond\alpha \to \Diamond\alpha$.

Considerações

- Devido ao uso da axiomatização, as provas de Troelstra e Schwichtenberg (2000) precisaram ser reescritas;
- Não foi apresentada a prova manual da completude das traduções;
- O que foi desenvolvido manualmente fornece uma boa base para o desenvolvimento das demonstrações em assistentes de provas.

Planejamento

1. Provar manualmente a completude das traduções;
2. Definir, na biblioteca modal, as traduções apresentadas;
3. Provar, na biblioteca modal, os metateoremas apresentados;
4. Provar, na biblioteca modal, que as traduções equivalem;
5. Provar, na biblioteca modal, a correção das traduções;
6. Provar, na biblioteca modal, a completude das traduções.

Planejamento

Item	2024	2025					
	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Maio	Jun
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Referências

BÉZIAU, J.-Y. Universal logic. *Logica*, 1994.

CONIGLIO, M. E. Towards a stronger notion of translation between logics. *Manuscrito*, 2005.

GÖDEL, K. Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums*, 1933.

HAKLI, R.; NEGRI, S. Does the deduction theorem fail for modal logic? *Synthese*, 2012.

KOBAYASHI, S. Monad as modality. *Theoretical Computer Science*, 1997.

NUNES, M. A.; ROGGIA, K. G.; TORRENS, P. H. Soundness-preserving fusion of modal logics in coq. In: *Proceedings of the XXVI Brazilian Symposium on Formal Methods*. [S.l.: s.n.], 2024.

Referências

SEHNEM, A. *Formalização da tradução das lógicas clássica e intuicionista para a lógica linear em* coq. Dissertação (Trabalho de conclusão de curso) — Universidade do Estado de Santa Catarina, 2023.

SILVEIRA, A. A. d. et al. A sound deep embedding of arbitrary normal modal logics in coq. In: *Proceedings of the XXVI Brazilian Symposium on Programming Languages*. [S.l.]: Association for Computing Machinery, 2022. ISBN 9781450397445.

TROELSTRA, A. S.; SCHWICHTENBERG, H. *Basic proof theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 9781139168717.