

Uma formalização assistida por computador da interpretação modal do sistema intuicionista

Elían Gustavo Chorny Babireski

Universidade do Estado de Santa Catarina
elian.babireski@gmail.com

Orientadora: Doutora Karina Girardi Roggia

Coorientador: Mestre Paulo Henrique Torrens

29/11/2024

Sumário

- 1 Introdução
- 2 Fundamentos
- 3 Linguagens
- 4 Axiomatizações
- 5 Metateoremas
- 6 Traduções
- 7 Propriedades
- 8 Considerações
- 9 Referências



Teste.

Kobayashi (1997) sugere a interpretação abaixo.

Interpretação da possibilidade

$$\begin{array}{ll} \alpha \rightarrow \Diamond \alpha & \eta : 1_C \rightarrow T \\ \Diamond \Diamond \alpha \rightarrow \Diamond \alpha & \mu : T^2 \rightarrow T \end{array}$$

Interpretação da necessidade

$$\begin{array}{ll} \Box \alpha \rightarrow \alpha & \epsilon : T \rightarrow 1_C \\ \Box \alpha \rightarrow \Box \Box \alpha & \delta : T \rightarrow T^2 \end{array}$$

Neste trabalho, usaremos uma definição de sistema provida por Béziau (1994) e uma definição de tradução entre sistemas provida por Coniglio (2005).

Sistema

Um sistema consiste num par $\mathfrak{L} = \langle \mathcal{L}, \vdash \rangle$, sendo \mathcal{L} um conjunto e $\vdash \in \wp(\mathcal{L}) \times \mathcal{L}$ uma relação sobre o produto cartesiano do conjunto das partes da linguagem e a linguagem, sem demais condições.

Tradução

Sejam $\mathfrak{L}_1 = \langle \mathcal{L}_1, \vdash_1 \rangle$ e $\mathfrak{L}_2 = \langle \mathcal{L}_2, \vdash_2 \rangle$ sistemas. Uma tradução primeiro sistema ao segundo consiste numa função $\bullet^* : \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ de modo que $\Gamma \vdash_1 \alpha$ se e somente se $\Gamma^* \vdash_2 \alpha^*$.

Neste trabalho, usaremos uma definição das linguagens dos sistemas intuicionista e modais conforme provida por Troelstra e Schwichtenberg (2000).

$\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$

A linguagem do sistema intuicionista \mathcal{I} , denotada $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_{\mathcal{I}} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_{\mathcal{I}} \rangle$, onde $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{I}} = \{\perp^0, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2\}$.

$\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$

A linguagem dos sistemas modais \mathcal{M} , denotada $\mathcal{L}_{\mathcal{M}}$, pode ser induzida a partir da assinatura $\Sigma_{\mathcal{M}} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{C}_{\mathcal{M}} \rangle$, onde $\mathcal{P} = \{p_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{M}} = \{\perp^0, \Box^1, \wedge^2, \vee^2, \rightarrow^2\}$.

Primeiramente, consideremos a seguinte axiomatização $\mathcal{H}_{\mathfrak{M}} = \langle \mathcal{A}_{\mathfrak{M}}, \mathcal{R}_{\mathfrak{M}} \rangle$ para o sistema minimal, conforme definido por Troelstra e Schwichtenberg (2000).

$\mathcal{H}_{\mathfrak{M}}$

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \quad (A_1)$$

$$(\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma \quad (A_2)$$

$$\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \wedge \beta \quad (A_3)$$

$$\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha \quad (A_4)$$

$$\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta \quad (A_5)$$

$$\alpha \rightarrow \alpha \vee \beta \quad (A_6)$$

$$\beta \rightarrow \alpha \vee \beta \quad (A_7)$$

$$(\alpha \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \alpha \vee \beta \rightarrow \gamma \quad (A_8)$$

$$\text{Se } \Gamma \vdash \alpha \text{ e } \Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta \text{ então, } \Gamma \vdash \beta \quad (R_1)$$

Estendo a definição anterior, chega-se às axiomatizações do sistema intuicionista e modal S4, conforme definido por Troelstra e Schwichtenberg (2000) e Hakli e Negri (2012).

\mathcal{H}_J

$$\perp \rightarrow \alpha \quad (A_{\perp})$$

\mathcal{H}_{S4}

$$\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha \quad (A_{\neg})$$

$$\Box(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \Box\alpha \rightarrow \Box\beta \quad (B_1)$$

$$\Box\alpha \rightarrow \alpha \quad (B_2)$$

$$\Box\Box\alpha \rightarrow \Box\alpha \quad (B_3)$$

$$\text{Se } \vdash \alpha \text{ então, } \Gamma \vdash \Box\alpha \quad (R_2)$$

Alguns dos metateoremas provados neste trabalho.

Metateorema da dedução

Se $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, então $\Gamma \vdash \alpha \rightarrow \beta$.

Metateorema da generalização da necessitação

Se $\Box \Gamma \vdash \alpha$, então $\Box \Gamma \vdash \Box \alpha$.

Metateorema da dedução estrita

Se $\Box \Gamma \cup \{\alpha\} \vdash \beta$, então $\Box \Gamma \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$.

Metateorema do *modus ponens* estrito

Se $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \Box(\alpha \rightarrow \beta)$, então $\Gamma \vdash \beta$.

Neste trabalho, consideremos duas traduções equivalentes providas por Troelstra e Schwichtenberg (2000).

Traduções

$$a^{\circ} := a$$

$$\perp^{\circ} := \perp$$

$$(\alpha \wedge \beta)^{\circ} := \alpha^{\circ} \wedge \beta^{\circ}$$

$$(\alpha \vee \beta)^{\circ} := \Box \alpha^{\circ} \vee \Box \beta^{\circ}$$

$$(\alpha \rightarrow \beta)^{\circ} := \Box \alpha^{\circ} \rightarrow \beta^{\circ}$$

$$a^{\Box} := \Box a$$

$$\perp^{\Box} := \perp$$

$$(\alpha \wedge \beta)^{\Box} := \alpha^{\Box} \wedge \beta^{\Box}$$

$$(\alpha \vee \beta)^{\Box} := \alpha^{\Box} \vee \beta^{\Box}$$

$$(\alpha \rightarrow \beta)^{\Box} := \Box(\alpha^{\Box} \rightarrow \beta^{\Box})$$

Teorema do isomorfismo entre traduções

$$\vdash \Box \alpha^{\circ} \leftrightarrow \alpha^{\Box}.$$

Lema

$\vdash \alpha^\Box \rightarrow \Box \alpha^\Box.$

Correção

Se $\Gamma \vdash_{\mathcal{J}} \alpha$, então $\Gamma^\Box \vdash_{S4} \alpha^\Box.$

Teorema

$\vdash \alpha \rightarrow \Diamond \alpha.$

Teorema


$\vdash \Diamond \Diamond \alpha \rightarrow \Diamond \alpha.$


- Devido ao uso da axiomatização, as provas de Troelstra e Schwichtenberg (2000) precisaram ser reescritas;
- Não foi apresentada a prova manual da completude das traduções;
- O que foi desenvolvido manualmente fornece uma boa base para o desenvolvimento das demonstrações em assistentes de provas.


- 1 Provar manualmente a completude das traduções;
- 2 Definir, na biblioteca modal, as traduções apresentadas;
- 3 Provar, na biblioteca modal, os metateoremas apresentados;
- 4 Provar, na biblioteca modal, que as traduções equivalem;
- 5 Provar, na biblioteca modal, a correção das traduções;
- 6 Provar, na biblioteca modal, a completude das traduções.


Planejamento

Item	2024	2025					
	Dez	Jan	Fev	Mar	Abr	Maio	Jun
1							
2							
3							
4							
5							
6							

 BÉZIAU, J.-Y. Universal logic. *Logica*, 1994.

 CONIGLIO, M. E. Towards a stronger notion of translation between logics. *Manuscript*, 2005.

 HAKLI, R.; NEGRI, S. Does the deduction theorem fail for modal logic? *Synthese*, 2012.

 KOBAYASHI, S. Monad as modality. *Theoretical Computer Science*, 1997.

 TROELSTRA, A. S.; SCHWICHTENBERG, H. *Basic proof theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 2000. ISBN 9781139168717.