Домашняя работа #7

Год: 2021

Предмет: Дискретная математика

Группа: M3101

Выполнил: Сухов Владимир

1. Для каждого данного рекуррентного отношения найдите решение в замкнутой форме и проверьте его, подставив обратно к рекуррентному отношению.

(a) $a_n = a_{n-1} + 1$ with $a_1 = 3$

$$(a_n) = 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \ldots$$

$$\begin{cases} a_2 - a_1 = 1 \\ a_3 - a_2 = 1 \\ \ldots \\ a_n - a_{n-1} = 1 \end{cases}$$

$$a_n - a_1 = 1 + 1 + \ldots + 1 = n - 1$$

$$a_n = a_0 + (n-1) = n + 2$$

Тогда: $a_n = a_{n-1} + 1 = n + 1 + 1 = n + 2$

(b) $a_n = a_{n-1} + n$ with $a_0 = 2$

$$(a_n) = 2\ 3\ 5\ 8\ 12 \ldots$$

$$\begin{cases} a_1 - a_0 = 1 \\ a_2 - a_1 = 2 \\ \ldots \\ a_n - a_{n-1} = n \end{cases}$$

$$a_n - a_0 = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$a_n = a_0 + \frac{n(n+1)}{2} = 2 + \frac{n(n+1)}{2}$$

Тогда: $a_n = a_{n-1} + n = 2 + \frac{n(n-1)}{2} + n = 2 + \frac{n(n+1)}{2}$

(c) $a_n = 2a_{n-1} + 2$ with $a_0 = 1$

$$(a_n) = 1\ 4\ 10\ 22\ 46 \ldots$$

$$\begin{cases} a_1 - a_0 = 3 \\ a_2 - a_1 = 6 \\ \ldots \\ a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2}) \end{cases}$$

$$a_n - a_0 = 3 + 6 + 12 \ldots + 2(a_{n-1} - a_{n-2}) = 3 * (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^{n-1}) = 3 * (2^n - 1)$$

$$a_n = a_0 + 3 * (2^n - 1) = 1 + 3 * (2^n - 1)$$

Тогда: $a_n = 2a_{n-1} + 2 = 2 * \left(1 + 3 * (2^{n-1} - 1)\right) + 2 = 2 + 3 * 2^n - 6 = 1 + 3 * (2^n - 1)$

(d) $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2}$ with $a_0 = 1, a_1 = 17$

$$(a_n) = 1\ 17\ 73\ 377\ \ldots$$

Составим характеристическое уравнение рекуррентного соотношения:

$r^2 - 4r - 5 = 0$, а корень рекуррентного соотношения: $r_1 = 5, r_2 = -1$.

Имеем: $a_n = c_1 * 5^n + c_2(-1)^n = 3 * 5^n - 2(-1)^n$ (получаем коэффициенты c_1 и c_2 решая систему ниже для a_0 и a_1)

$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ 5 * c_1 - c_2 = 17 \end{cases} \begin{cases} c_1 = 1 - c_2 \\ 5 - 6c_2 = 17 \end{cases} \begin{cases} c_1 = 3 \\ c_2 = -2 \end{cases}$

Тогда: $a_n = 4a_{n-1} + 5a_{n-2} = 4 * (3 * 5^{n-1} - 2(-1)^{n-1})$+5*$(3 * 5^{n-2} - 2(-1)^{n-2}) =$

$= 12 * 5^{n-1} - 8(-1)^{n-1} + 3 * 5^{n-1} - 10(-1)^{n-2} =15 * 5^{n-1} + 8(-1)^n - 10(-1)^n =$

$=3 * 5^n - 2(-1)^n$

(e) $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ with $a_0 = 2, a_1 = 3$

$$(a_n) =2\ 3\ 0\ \text{-27}\ \text{-162}\ \text{-729}\ \text{-2916}$$

Составим характеристическое уравнение рекуррентного соотношения:

$r^2 - 6r + 9 = 0$, а корень рекуррентного соотношения: $r = 3$.

Имеем: $a_n = c_1 * 3^n - nc_2 3^n$(получаем коэффициенты c_1 и c_2 решая систему ниже для a_0 и a_1).

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ 3c_2 + 3c_1 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Тогда: $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} = 6(2 * 3^{n-1} - (n-1)3^{n-1}) - 9(2 * 3^{n-2} - (n-2)3^{n-2}) =$

$=(4 * 3^n - 2n3^n + 2 * 3^n) - (2 * 3^n - n3^n + 2 * 3^n) =$

$=(6 * 3^n - 2n3^n) - (4 * 3^n - n3^n) =$

$= 2 * 3^n - n3^n$

(f) $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3}$ with $a_{0,1,2} = 3, 2, 6$

$$(a_n) = 3\ 2\ 6\ 8\ 18\ 32\ 66\ 128\ 258\ 512\ 1026\ 2048\ \ldots$$

Составим характеристическое уравнение рекуррентного соотношения:

$r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$

Получим следующие корни: $r_1 = -1, r_1 = 1, r_1 = 2.$

Имеем: $a_n = (-1)^n + 1 + 2^n$получаем коэффициенты c_1, c_2 и c_3 решая систему ниже для a_0, a_1 и a_2).

$a_n = c_1 * (-1)^n + c_2 + c_3 * 2^n$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 3 \\ c_1 * (-1)^1 + c_2 + c_3 * 2^1 = 2 \\ c_1 * (-1)^2 + c_2 + c_3 * 2^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 3 - c_2 - c_3 \\ c_2 = \dfrac{5 - 3c_3}{2} \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ c_3 = 1 \end{cases}$$

Тогда: $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} - 2a_{n-3} = 2*((-1)^{n-1} + 1 + 2^{n-1}) + ((-1)^{n-2} + 1 + 2^{n-2}) - 2 * ((-1)^{n-3} + 1 + 2^{n-3})=$

$= 2*(-1)^{n-1} + 2 + 2^n + ((-1)^{n-2} + 1 + 2^{n-2}) - 2 * (-1)^{n-3} - 2 - 2^{n-2})=$

$= 2*(-1)^{n-1} + 2^n + ((-1)^{n-2} + 1) - 2 * (-1)^{n-3}=$

$= 2^n + 1 + (-1)^{n-2} = 2^n + 1 + (-1)^n.$

2. Решите следующие примеры, применив основную (Master) теорему. Для случаев, когда основная теорема не применяется, используйте метод Акра-Бацци. В случаях, когда ни одна из этих двух теорем не применима, объясните, почему и разрешите отношение рекурсии, исследуя дерево рекурсии. Решения должны быть в виде T(n) ∈ Θ (...).

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

(a) T(n) = 2T(n/2) +n

Master theorem case #2

для f(n) = $\Theta(n^{c_{crit}} log^k n)$, где $C_{crit} = log_b a = 1$, k=0 :

T(n) ∈ Θ ($n \log n$)

(b) T(n) =T(3n/4) +T(n/4) +n

A-B method:

$b_1 = ¼,\ b_2 = ¾, a_1 = 1,\ a_2 = 1$

$b_1^p + b_2^p = 1$, p = 1

T(n) ∈ $\Theta(n^p(1+\int_1^n \frac{g(u)}{u^{p+1}} du))$

T(n) ∈ $\Theta(n^1(1+\int_1^n \frac{u}{u^2} du))$

T(n) ∈ $\Theta(n^1(1+\ln n))$

T(n) ∈ Θ(n log n)

(c) T(n) = 3T(n/2) +n

$C_{crit} = log_b a = log_2 3 > 1$

Master theorem case #1

T(n) ∈ Θ ($n^{log_2 3}$)

(d) T(n) = 2T(n/2) +n/log n

$$T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + \frac{n}{logn} = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + nlog^{-1}n$$

Master theorem case 2B для f(n) = $\Theta(n^{c_{crit}} log^k n)$, для k = -1, $c_{crit} = 1$

$T(n) \in \Theta(n^{c_{crit}} \log(\log n))$

$T(n) \in \Theta(n \log(\log n))$

(e) T (n) = 6T (n/3) +n^2log n

Master theorem case #3

f(n) = n^2log n $\in \Omega(n^c)$, $c_{crit} = log_b a = log_3 6 < 2$

6f(n/3) ≤ 2/3f(n) при k=2/3 и n→inf.

Получаем:

T(n) $\in \Theta(n^2 \log n)$

(f) T (n) =T (3n/4) +n log n

f(n) = n log n $\in \Omega(n^1)$, $c_{crit} = log_{\frac{4}{3}} 1 < 1$

f(3n/4) = $\frac{3}{4} n \, log \frac{3}{4} n = \frac{3}{4} n \log n (1 + \frac{\log \frac{3}{4}}{\log n}) \leq \frac{3}{4} n \log n$ при $n \rightarrow inf$.

Master theorem case #3

T(n) $\in \Theta(n \log n)$

(g) T (n) =T(⌊n/2⌋) +T(⌈n/2⌉) +n

A-B method:

$b_1 = 1/2, \ b_2 = 1/2, a_1 = 1, \ a_2 = 1$

$b_1^p + b_2^p = 1$, p = 1

T(n) $\in \Theta(n^p (1 + \int_1^n \frac{g(u)}{u^{p+1}} du))$

T(n) $\in \Theta(n^1 (1 + \int_1^n \frac{u}{u^2} du))$

T(n) $\in \Theta(n^1 (1 + \ln n))$

T(n) $\in \Theta$ (n log n)

(h) T (n) =T (n/2) +T (n/4) + 1

A-B method:

$b_1 = 1/2,\ b_2 = 1/4, a_1 = 1,\ a_2 = 1$

$b_1^p + b_2^p = 1$

$2^p + 1^p = 4^p$

$(2^p)^2 - 2^p - 1 = 0$

$2^p = (1+\sqrt{5})\frac{1}{2}$

$\text{p} = \frac{\log 1+\sqrt{5}}{\log 2} - 1$

$\text{T(n)} \in \Theta(n^p(1+\int_1^n \frac{g(u)}{u^{p+1}} du))$

$\text{T(n)} \in \Theta(n^p\ (\ 1 - \frac{1}{p}\left(\frac{1}{n^p} - 1\right)) \in \Theta(n^p)$

$\text{T(n)} \in \Theta(n^{\frac{\log 1+\sqrt{5}}{\log 2} - 1})$

(i) T (n) =T (n/2) +T (n/3) +T (n/6) +n

A-B method:

$b_1 = 1/2,\ b_2 = 1/3, b_2 = 1/6, a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 1$

$b_1^p + b_2^p + b_3^p = 1$

$3^p + 2^p + 1^p = 6^p$, p =1

$\text{T(n)} \in \Theta(n^p(1+\int_1^n \frac{g(u)}{u^{p+1}} du))$

$\text{T(n)} \in \Theta(n^1(1+\int_1^n \frac{u}{u^2} du))$

$\text{T(n)} \in \Theta(n \log \text{n}))$

(j) T (n) = 2T (n/3) + 2T (2n/3) +n

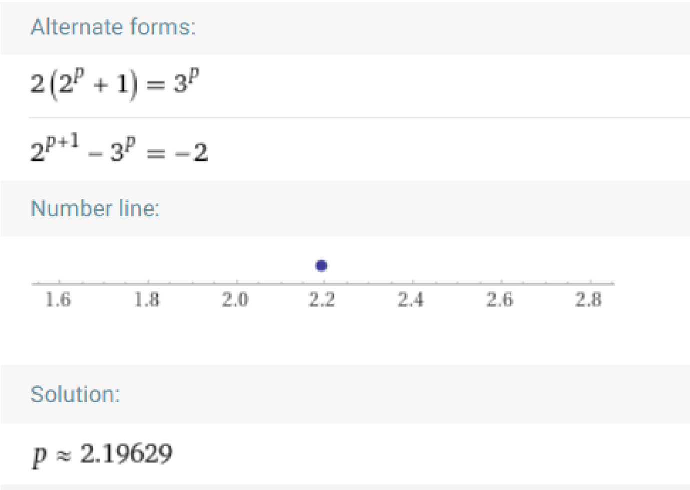
A-B method:

$b_1 = 1/3,\ b_2 = 2/3, b_2 = 1/6, a_1 = 2,\ a_2 = 2$

$2b_1^p + 2b_2^p = 1$

$2 + 2^{p+1} = 3^p$, если прикинуть, то $p \in (2; 3)$.

Вольфрам показывает такое решение:



$\mathrm{T(n)} \in \Theta(n^p(1+\int_1^n \frac{g(u)}{u^{p+1}} du))$

$\mathrm{T(n)} \in \Theta(n^p(1 + \frac{1}{1-p}(\frac{1}{n^{p-1}} - 1))$

$\mathrm{T(n)} \in \Theta(n^p\left(1 + \frac{1}{1-p}\right) + \frac{1}{1-p} n))$

$\mathrm{T(n)} \in \Theta(n^p)$, $p \approx 2.19629$

(k) T (n) =$\sqrt{2n}$T ($\sqrt{2n}$) + $\sqrt{n}$

Пусть n = 2^{k-1} , $\sqrt{2n} = 2^{k/2}, k = \log n$, тогда имеем:

T (n) =$\sqrt{2n}$T ($\sqrt{2n}$) +$\sqrt{n}$

$\mathrm{T}\ (2^{k-1}) = 2^{k/2}\ \mathrm{T}\ (2^{k/2}) + 2^{\frac{k-1}{2}}$

$\frac{\mathrm{T}\ (2^{k-1})}{2^{\frac{k-1}{2}}} = \frac{2^{k/2}\ \mathrm{T}\ (2^{k/2})}{2^{\frac{k-1}{2}}} + 1$

$\frac{\mathrm{T}\ (2^{k-1})}{2^{\frac{k-1}{2}}} = \sqrt{2}\mathrm{T}\ (2^{k/2}) + 1$

Пусть $y(k) = \frac{\mathrm{T}\ (2^{k-1})}{2^{\frac{k-1}{2}}}$, $y(k) = 2^{\frac{k}{2}}\mathrm{y}\left(\frac{k}{2}\right) + 1$

Master theorem $\mathrm{T(n)} = \mathrm{aT(n/b)} + n^d$, имеем $\mathrm{a} = 2^{\frac{k}{2}}, \mathrm{b} = 2, \mathrm{d} = \frac{k}{2}, \mathrm{a} = b^d = 2^{\frac{k}{2}}$.

$y(k) = k^d \log k = k^{\frac{k}{2}} \log k$, вспомним что $y(k) = \frac{\mathrm{T}\ (2^{k-1})}{2^{\frac{k-1}{2}}}$, тогда

$T\ (2^{k-1}) = k^{\frac{k}{2}} * 2^{\frac{k-1}{2}} \log(k)$

$T\ (n) = \Theta(\sqrt{n} \log n^{\frac{\log n}{2}} \log(\log n))$

(l) T (n) =$\sqrt{2n}$T ($\sqrt{2n}$) +n

Пусть n = 2^{k-1} , $\sqrt{2n} = 2^{k/2}, k = \log n$, тогда имеем:

T (n) =$\sqrt{2n}$T ($\sqrt{2n}$) +n

$T\ (2^{k-1}) = 2^{k/2}\ T\ (2^{k/2}) + 2^{k-1}$

$\frac{T\ (2^{k-1})}{2^{k-1}} = \frac{2^{k/2}\ T\ (2^{k/2})}{2^{k-1}} + 1$

$\frac{T\ (2^{k-1})}{2^{k-1}} = \frac{T\ (2^{k/2})}{2^{k/2-1}} + 1$

Пусть $y(k) = \frac{T\ (2^{k-1})}{2^{k-1}}$, $y(k) = y\left(\frac{k}{2}\right) + 1$

Master theorem T(n) = aT(n/b) $+ n^d$, имеем a = 1, b = 2, d = 0, a = $b^d = 1$.

$y(k) = k^d \log k = \log k$, вспомним что $y(k) = \frac{T\ (2^{k-1})}{2^{k-1}}$, тогда

$T\ (2^{k-1}) = 2^{k-1} \log(k)$

$T\ (n) = \Theta(n \log \log n)$

3. Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}, a_0 = a_1 = 2.$$

Решите его (т.е. найдите конечную формулу) и покажите, как ее можно использовать для оценки значения $\sqrt{3}$ (подсказка: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/a_{n-1})$). После этого разработать алгоритм построения рекуррентного отношения с целыми коэффициентами, который можно использовать для вычисления квадратного корня $\sqrt{k}$, заданного целого числа k.

$a_n = 2a_{n-1} + 2a_{n-2}$

Составим характеристическое уравнение:

$x^2 - 2x - 2 = 0$

$x_1 = 1 + \sqrt{3}, \qquad x_2 = 1 - \sqrt{3}$

$a_n = c_1(1+\sqrt{3})^n + c_2(1-\sqrt{3})^n$

Найдём коэффициенты:

$$\begin{cases} c_1(1+\sqrt{3})^1 + c_2(1-\sqrt{3})^1 = 2 \\ c_1 + c_2 = 2 \end{cases}$$

$c_1 = c_2 = 2$

$a_n = 2(1+\sqrt{3})^n + 2(1-\sqrt{3})^n$

Оценим $\frac{a_n}{a_{n-1}}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)^n}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{n-1} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{n-1}}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{3}\right)^n + \left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^{n-1}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{n-1} + \left(1-\sqrt{3}\right)^{n-1}}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)*1 + \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)^{n-1}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{n-1}}}{1 + \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)^{n-1}}{\left(1+\sqrt{3}\right)^{n-1}}}\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)*1 + 0}{1 + 0}\right) = 1 + \sqrt{3}$$

Тогда $\frac{a_n}{a_{n-1}} - 1$ даёт оценку $\sqrt{3}$, тогда заменим $\sqrt{3}$ на k и вернёмся к реккурентным соотношениям:

$$x_1 = 1 + \sqrt{k}, \qquad x_2 = 1 - \sqrt{k}$$

$$x^2 - 2x + 1 - k = 0$$

$$a_n = 2a_{n-1} + (k-1)a_{n-2}$$