

Вариант 19

1. Вероятность попадания в самолет при выстреле из винтовки равна 0.001. Найти вероятность того, что при залпе из 5000 винтовок самолет будет поражен не менее, чем двумя пулями.

Решение:

- $p = 0.001$ вероятность попадания в самолёт при выстреле из винтовки
- $q = 0.999$ вероятность промаха при выстреле из винтовки в самолёт
- $n = 5000$ количество опытов

a) Схема Бернулли

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P(B_n(m)) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}$$

Найдём искомую вероятность:

$$\begin{aligned} P_{5000}(2, 5000) &= 1 - P_{5000}(0, 1) = 1 - \sum_{m=0}^1 C_{5000}^m p^m q^{5000-m} \\ &= 1 - (0.999^{5000} + 5000 * 0.999^{4999} * 0.001) \\ &= 1 - 0.04036 = 0.95964 \end{aligned}$$

```
octave:1> pkg load statistics
octave:2> n=5000
n = 5000
octave:3> p=0.001
p = 1.0000e-03
octave:4> answer_a=1-binocdf(1,n,p)
answer_a = 0.9596
```

b) Теорема Пуассона

$$C_n^m p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \rightarrow \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Найдём искомую вероятность:

$$\begin{aligned} P_{5000}(2, 5000) &= 1 - \sum_{m=0}^1 C_{5000}^m p^m q^{5000-m} \approx \sum_{m=0}^1 \frac{5^m}{m!} e^{-5} = 1 - 0.04045 \\ &= 0.95955 \end{aligned}$$

```

octave:1> n=5000
n = 5000
octave:2> p=0.001
p = 1.0000e-03
octave:3> pkg load statistics
octave:4> answer_b=1-poisscdf(1,n*p)
answer_b = 0.9596

```

c) Теорема Муавра-Лапласа

$$P(X = k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 P(X = 0) &\approx \frac{1}{2.2349} \phi\left(\frac{-5}{2.2349}\right) = \frac{1}{2.2349} \phi(-2.2371) \\
 &= \frac{e^{-2.5023}}{2.2349 * 2.5059} = \frac{0.0818}{5.6004} = 0.01460
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(X = 1) &\approx \frac{1}{2.2349} \phi\left(\frac{-4}{2.2349}\right) = \frac{1}{2.2349} \phi(-1.7898) \\
 &= \frac{e^{-1.6016}}{2.2349 * 2.5059} = \frac{0.2016}{5.6004} = 0.0360
 \end{aligned}$$

Найдём искомую вероятность:

$$P = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1)) = 1 - 0.0506 = 0.9494$$

```

octave:1> n=5000
n = 5000
octave:2> p=0.001
p = 1.0000e-03
octave:3> q=1-p
q = 0.9990
octave:4> answer_c=0
answer_c = 0
octave:5> for i = 0:1
> > x=(i-(n*p))/(sqrt(n*p*q))
> > answer_c += (e^((-x^2)/2))/sqrt(2*pi*n*p*q)
> > end
x = -2.2372
answer_c = 0.014616
x = -1.7897
answer_c = 0.050597
octave:6> answer_c = 1 - answer_c
answer_c = 0.9494

```

Ответ: a) 0.95964 b) 0.95955 c) 0.9494

Ответ, полученный с помощью использования локальной теоремы Муавра-Лапласа, отличается от остальных.

Данная теорема дает более точный ответ, когда p по значению близко к 0.5.

2. Из всех вопросов, поступающих в юридическую контору, вопросы, касающиеся регистрации фирм, составляют в среднем 0.35. При каком общем количестве обращений наивероятнейшее число вопросов о регистрации будет равно 25?

Решение:

- $q = 0.65$
- $p = 0.35$
- $k = 25$

Формула для наиболее вероятного числа успехов k (появлений события) имеет вид:

$$np - q \leq k \leq np + p$$

$$0.35n - 0.65 \leq 25 \leq 0.35n + 0.35$$

$$\begin{cases} 0.35n + 0.35 \geq 25 \\ 0.35n - 0.65 \leq 25 \end{cases}, \begin{cases} n + 1 \geq 71.4286 \\ n - 1.8571 \leq 71.4286 \end{cases}, \begin{cases} n \geq 70.4286 \\ n \leq 73.2857 \end{cases}$$

Ответ: $n = \{71, 72, 73\}$.

```
octave:1> pkg load statistics
octave:2> n=72
n = 72
octave:3> k=25
k = 25
octave:4> p=0.35
p = 0.3500
octave:5> answer = binopdf(k,n,p)
answer = 0.098245
```

3. Районная электростанция обеспечивает сеть с 10000 лампами, вероятность включения каждой из которых вечером равна 0.6. Определить вероятность того, что число одновременно включенных в вечернее время ламп будет находиться между 5900 и 6100.

Решение:

- $q = 0.4$
- $p = 0.6$
- $n = 10000$

а) Схема Бернулли

$$P_n(m_1, m_2) = \sum_{m=m_1}^{m_2} P(B_n(m)) = \sum_{m=m_1}^{m_2} C_n^m p^m q^{n-m}$$

$$P_{10000}(5900, 6100) = \sum_{m=5900}^{6100} C_{10000}^m p^m q^{10000-m} = 0.9598$$

```
octave:1> pkg load statistics
octave:2> n=10000
n = 10000
octave:3> x1=5900
x1 = 5900
octave:4> x2=6100
x2 = 6100
octave:5> p=0.6
p = 0.6000
octave:6> answer_a = binocdf(x2, n, p) - binocdf(x1-1, n, p)
answer_a = 0.9598
```

б) Теорема Муавра – Лапласа

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \text{где}$$

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}; x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}; \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

Имеем:

$$x_1 = \frac{5900 - 6000}{\sqrt{2400}} = \frac{-200}{49.9898} = -4.0825; x_2 = \frac{100}{49.9898} = 2.0412$$

Возьмём значения $\Phi(x)$ из таблицы значений

функции Лапласа:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0.9588$$

```
octave:1> n=10000
n = 10000
octave:2> p=0.6
p = 0.6000
octave:3> q=1-p
q = 0.4000
octave:4> x1=5900
x1 = 5900
octave:5> x2=6100
x2 = 6100
octave:6> pkg load statistics
octave:7> function x = getX(m,n,p,q)
> > x = (m-n*p)/sqrt(n*p*q)
> > endfunction
octave:8> m1=getX(x1,n,p,q)

x = -2.0412
m1 = -2.0412
octave:9> m2=getX(x2,n,p,q)
x = 2.0412
m2 = 2.0412
octave:10> ans=normcdf(m2)-normcdf(m1)
ans = 0.9588
```

Ответ: a) 0.9598 b) 0.9588