Сухов Владимир Игоревич

Задача 22

На кардиоиду, имеющую в полярных координатах уравнение $p = 2 - 2cos\varphi$, $0 \le \varphi < 2\pi$, случайным образом ставится точка. Найти вероятность того, что полярный угол этой точки не превосходит $2\pi/3$.

Решение:

Длина дуги одного витка кардиоиды, заданной формулой в полярных координатах $r = 2 * a * (1 - cos\varphi)$ *, равна:*

$$L = 2 * \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi = 8 * a * \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

Тогда найдём длину дуги $0 \le \varphi < 2\pi$:

$$L_1 = 2 * \int_0^{2\pi} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi = 8 * \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$
$$= 8 * (-2\cos\pi + 2\cos 0) = 8 * 4 = 32$$

Тогда найдём длину дуги для $0 \le \varphi < 2\pi/3$:

$$L_2 = 2 * \int_0^{2\pi/3} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi = 8 * \int_0^{2\pi/3} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$
$$= 8 * (-2\cos\pi/3 + 2\cos 0) = 8 * 1 = 8$$

Найдём вероятность того, что полярный угол этой точки не превосходит $2\pi/3$, как отношение L_2 к L_1.

$$p(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{8}{32} = 0.25$$

Ответ: 0.25