Задача 23.

Плотность распределения $f_{X,Y}(x, y)$ системы случайных величин (X, Y) имеет вид:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{2} - 2y\right), & \text{если } y \geq 0, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Случайные величины $Z = |X - 3|$ и $T = -3X + Y/2$ являются функциями от случайных величин X, Y.

Найти: а) плотность распределения $f_Z(z)$ случайной величины Z;

б) дисперсию $\mathbf{D}T$.

Решение:

а) X и Y – независимы

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{2}\right)$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2\exp(-2y) & \text{если } y \geq 0, \\ 0, & \text{если } y < 0. \end{cases}$$

При $u \leq 0 : D_u(x) = \{x: |x-3| < u\} = \emptyset$.

Следовательно, $F_Z(u) = P\{Z \in D_u\} = 0, f_Y(u) = 0$.

При $u > 0 : D_u(x) = \{x: |x-3| < u\} = \{x: 3 - u < x < 3 + u\}$.

Следовательно, $F_Z(u) = P\{Z \in D_u\} = F_X(3+u) - F_X(3-u)$

$$= \int_{3-u}^{3+u} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-3)^2}{2}\right) = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{x-3}{\sqrt{2}}\right)}{2} \begin{matrix} 3+u \\ 3-u \end{matrix}$$

$$= \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(-\frac{u}{\sqrt{2}}\right)}{2} = \frac{\operatorname{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)}{2} = \operatorname{erf}\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right).$$

Где $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, z \leq 0 \\ \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right), z > 0 \end{cases} f_Z(z) = \begin{cases} 0, z \leq 0 \\ e^{-z^2/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}, z > 0 \end{cases}$$

$b)\ T = -3X + \frac{Y}{2}$

$EX = 3, E(X^2) = 10, DX = 1$

$DY = \frac{1}{4}$

$D(T) = D\left(-3X + \frac{Y}{2}\right) = D(-3X) + D\left(\frac{Y}{2}\right) = 9D(X) + \frac{DY}{4} = 9 + \frac{1}{16} =$
9.0625