Домашняя работа #6

Год: 2021

Предмет: Дискретная математика

Группа: M3101

Выполнил: Сухов Владимир

Задание 1

Найдите количество различных 5-значных чисел, составленных из цифр от 1 до 9, учитывая следующие ограничения. Для каждого случая привести несколько примеров соответствия и вывести общую формулу.

a) Цифры могут повторяться.

b) Цифры не могут повторяться.

c) Цифры могут повторяться и должны следовать в порядке невозрастания.

d) Цифры не могут повторяться и должны следовать в порядке возрастания.

e) Цифры могут повторяться и должны следовать в порядке неубывания, а 4-я цифра должна быть 6.

a) Цифры могут повторяться.

Например: 12245, 12367, 44433, 98567 (для n=9, k=5).

Рассмотрим общий случай: набор, состоящий из n элементов.

На каждую из k позиций данного набора можно поставить любое из n чисел. На первую позицию набора можно поставить n чисел, на вторую n, … на k-ю позицию n, тогда имеем, что кол-во таких наборов равно $\underbrace{(n \cdot n \cdot n \ldots \cdot n)}_{k} = n^k$.

Тогда, кол-во таких наборов, удовлетворяющих условию (n=9, k=5), равно N.

$N = n^k = 9^5 = 59049.$

Ответ: 59049

b) Цифры не могут повторяться.

Например: 82345, 12367, 41253, 98567 (для n=9, k=5).

Рассмотрим общий случай: набор, состоящий из n элементов.

На первую позицию данного набора можно поставить любое из n чисел. На следующую же позицию нельзя поставить число, стоящее на первой позиции, так как это будет противоречить условию. Значит, на 2-ю позиции можно поставить n – 1 чисел. Аналогично на 3-ю позицию n – 2, значит на последнюю (k-ю) позицию можно поставить $n - k + 1$ чисел. Тогда, кол-во таких наборов (при $k \leq n$) равно $\underbrace{(n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots \cdot (n-k+1))}_{k} = \frac{n!}{(n-k)!}$.

В случае когда $k > n$, найдутся такие позиции, на которые уникальные элементы поставить будет невозможно (все уникальные элементы уже будут распределены по позициям набора), а значит, кол-во наборов, удовлетворяющих условию, будет равно 0.

Задача сводится к тому, что нам нужно разместить n чисел по k местам (формулировка задачи о размещении).

Размещение из n по k – упорядоченный набор из k различных, выбранных из множества, состоящего из n элементов.

Число размещений из n по k – кол-во различных размещений из n по k. Число размещений из n по k обозначается как $\binom{n}{k}k! = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Тогда, кол-во таких наборов, удовлетворяющих условию (при $n = 9$, $k = 5$), равно N.

$$N = A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = A_9^5 = \frac{9!}{(9-5)!} = \frac{9!}{4!} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120.$$

Ответ: 15120

c) Цифры могут повторяться и должны следовать в порядке невозрастания.

Например: 54332, 76666, 98772, 98861 (для n=9, k=5).

Рассмотрим общий случай: набор, состоящий из n элементов.

На первую позицию данного набора можно поставить любое из n чисел. На следующую позицию нельзя поставить число большее чем, стоящее на первой позиции, так как это будет противоречить условию.

Сочетание с повторениями из n по k - набор, состоящий из k не обязательно различных элементов, выбранных из множества, состоящего из n элементов.

Число сочетаний с повторениями из n по k – кол-во различных сочетаний с повторениями из n по k.

Число сочетаний с повторениями из n по k обозначается как $\binom{n+k-1}{k} = C_{(n+k-1)}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Рассмотрим произвольное сочетание с повторениями из n по k. Заметим, что для данного сочетания существует лишь одна перестановка такая, что элементы в ней идут в порядке невозрастания. Тогда (при любых положительных n и k) кол-во таких наборов, цифры в которых следуют в порядке невозрастания, равно кол-ву сочетаний с повторениями из n по k.

Тогда, кол-во таких наборов, удовлетворяющих условию (n = 9, k = 5), равно N.

$$N = C_{(n+k-1)}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} = \binom{9+5-1}{5} = C_{(13)}^{5} = \frac{13!}{5!(9-1)!} = \frac{13!}{5!8!} = 1287.$$

Ответ: 1287

<u>d)</u> Цифры не могут повторяться и должны следовать в порядке возрастания.

Например: 23458, 12367, 13579, 56789 (для n=9, k=5).

Рассмотрим общий случай: набор, состоящий из n элементов.

На первую позицию данного набора можно поставить любое из n чисел. На следующую позицию нельзя поставить число меньшее или равное чем, стоящее на первой позиции, так как это будет противоречить условию.

Сочетание (сочетание без повторений) из n по k – набор, состоящий из k различных элементов, выбранных из множества, состоящего из n элементов.

Число сочетаний из n по k – кол-во различных сочетаний из n по k.

Число сочетаний из n по k обозначается как $\binom{n}{k} = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Перестановка – изменение порядка элементов в данном наборе.

Число перестановок – кол-во различных перестановок в данном наборе.

Заметим, что для произвольного сочетания из n по k существует лишь одна перестановка такая, что элементы в ней идут в порядке возрастания. Тогда в случае, если $k \leq n$, кол-во таких наборов, цифры в которых следуют в порядке возрастания, равно кол-ву сочетаний из n по k. В случае же, если $k > n$, кол-во элементов, учитывая, что числа идут в порядке возрастания, будем иметь такую позицию в наборе, что на ее место нельзя поставить цифру, большую чем предыдущая (так как на ее позиции и так будет стоять наибольшее число из исходного множества цифр), тогда кол-во таких наборов при $k > n$ равно нулю.

Тогда, кол-во таких наборов, удовлетворяющих условию (n = 9, k = 5), равно N.

$$N = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{9}{5} = C_9^5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{9!}{5!4!} = 126.$$

Ответ: 126

e) Цифры могут повторяться и должны следовать в порядке неубывания, а 4-я цифра должна быть 6.

Например: 122<u>6</u>7, 123<u>6</u>9, 444<u>6</u>8, 226<u>6</u>6 (для n=9, k=5).

Рассмотрим общий случай: набор, состоящий из n элементов.

Закрепим на 4-ой позиции цифру 6.

Тогда по условию на позициях с 1 по 3-ую можно поставить толцифры от 1 до 6 (т.к. по условию цифры следуют в порядке неубывания, а значит для 1≤i<j≤n должно выполняться $digit_i \leq digit_j$ → $digit_i \leq digit_4$ где $digit_i$ и $digit_i$ – цифры на местах i и j).

В свою очередь на позициях с 5-ой по n-ую можно поставить только цифры от 6 до 9 (т.к. по условию цифры следуют в порядке неубывания, а значит для 1≤i<j≤n должно выполняться $digit_i \leq digit_j$ → $digit_4 \leq digit_j$ где $digit_i$ и $digit_i$ – цифры на местах i и j).

Похожую постановку задачи мы уже рассматривали в пункте **c).** В данном пункте мы искали число сочетаний с повторениями из n по k для невозрастающей последовательности цифр, а теперь будем искать для неубывающей (воспользуемся той же формулой) .

Число сочетаний с повторениями из n по k обозначается как $\binom{n+k-1}{k} = C^k_{(n+k-1)} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$

Тогда, кол-во таких наборов, удовлетворяющих условию (для n=9, k =5), вычисляется как произведение числа сочетаний с повторениями для n=6 k=3 (на 3 места требуется расставить числа из промежутка [1..6]) и числа сочетаний с повторениями для n=4 и k=1 (на 1 место требуется расставить числа из промежутка [6..9]) и равно N.

$$N = \binom{6+3-1}{3} * \binom{4+1-1}{1} = C_8^3 * C_4^1 = \frac{8!}{3!\,(6-1)!} * \frac{4!}{1!\,(4-1)!} = 56 * 4 = 224$$

Для общего случая n и k будем иметь формулу $C^3_{6+3-1} * C^{k-4}_{(n-5)+(k-4)-1}$. (Формула работает адекватно на значениях n≥6 и k≥5, причём набор цифр включает в себя множество цифр {1,2,3,4,5,6} как минимум).

Можно ещё в более общем виде записать:

$C^3_{p+3-1} * C^{k-4}_{t+(k-4)-1}$, где p – кол-во цифр ≤ 6, t – кол-во цифр ≥ 6.

Криво, но работает.

Ответ: 224

Задание 2

Одна из классических комбинаторных задач - подсчёт количества способов расположения n шаров в k коробок. Существует как минимум 12 вариаций этой задачи: четыре случая (a - d) с тремя различными ограничениями (1–3). Для каждой вариации задачи (случай + ограничение) составьте соответствующую формулу. Кроме того, выберите несколько (репрезентативных) значений для n и k и используйте полученные формулы, чтобы найти количество таких расположений. Визуализируйте несколько возможных вариантов расположения выбранных n и k.

Вариации:

a) U→L: Шары—Unlabeled, Коробки—Labeled.

b) L→U: Шары—Labeled, Коробки—Unlabeled.

c) L→L: Шары—Labeled, Коробки—Labeled.

d) U→U: Шары—Unlabeled, Коробки—Unlabeled.

Ограничения:

1. ≤ 1 шар в каждой коробке (инъективное отображение).

2. ≥ 1 шар в каждой коробке (сюръективное отображение).

3. Произвольное количество шаров в каждой коробке.

*При решении заданий мы будем рассматривать общий случай: набор, состоящий из n шаров и k коробок.

Решим задание, соответствуя первому ограничению, для каждой вариации ($\leq$ 1 шар в каждой коробке – инъективное отображение).

1.a) $\leq$ 1 шар в каждой коробке. U→L: Шары—Unlabeled, Коробки—Labeled.

Рассмотрим случай, если n > k.

Если n > k невозможно распределить n шаров в k коробок, так, чтобы в каждой коробке было $\leq$ 1 шара, следовательно число способов распределить n шаров по k коробкам при n > k так, чтобы в каждой коробке не было больше одного шара, равно нулю.

Рассмотрим случай, если n $\leq$ k.

Если n $\leq$ k известно, что в каждой коробке не может быть больше 1 шара, следовательно, необходимо выбрать n из k коробок, в которые мы положим по одному шарику, что соответствует числу сочетаний из k по n (сочетаний, так как шары unlabeled, следовательно не имеет значения, какой из unlabeled будет лежать в labeled коробке), тогда число таких вариантов:

$$C_k^n = \frac{k!}{n!(k-n)!}$$

Тогда кол-во способов распределить n unlabeled шаров по k labeled коробкам равно:

$$N = \begin{cases} 0, n > k \\ C_k^n, n \leq k \end{cases}$$

Пример: n=2 (шаров), k=3 (коробок).

Все варианты:

По формуле получим:

$$N = C_k^n = \frac{k!}{n!\,(k-n)!} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = 3$$

1.b) ≤ 1 шар в каждой коробке. L→U: Шары—Labeled, Коробки—Unlabeled.

Рассмотрим случай, если n > k.

Если n > k не возможно распределить n шаров в k коробок, так, чтобы в каждой коробке было ≤ 1 шара, следовательно число способов распределить n шаров по k коробкам при n > k так, чтобы в каждой коробке не было больше одного шара, равно нулю.

Рассмотрим случай, если n ≤ k.

Если n ≤ k известно, что в каждой коробке не может быть больше 1 шара. К тому же, не имеет значения, в какой коробке лежит данный шар, так как все коробки unlabeled, следовательно, где бы шар не лежал, это всё будет один и тот же случай. Тогда при любом наборе unlabeled шаров, зная, что в каждой коробке лежит не более одного шара, будем иметь один и тот же случай. Тогда кол-во способов распределить n шаров по k коробкам при n≤k так, чтобы в каждой коробке не было больше одного шара равно одному.

Тогда кол-во способов распределить n labeled шаров по k unlabeled коробкам k так, чтобы в каждой коробке не было больше одного шара равно:

$$N = \begin{cases} 0, n > k \\ 1, n \le k \end{cases}$$

<u>Пример</u>: n=2 (шаров), k=3 (коробок).

Все варианты:

Есть только 1 вариант распределения, т.к. очевидно что варианты ниже одинаковые:

По формуле получим:

$$n \le k, N = 1$$

1.c) ≤ 1 шар в каждой коробке. L→L: Шары—Labeled, Коробки—Labeled.

Рассмотрим случай, если $n > k$.

Если $n > k$, то невозможно распределить n шаров в k коробок, так, чтобы в каждой коробке было ≤ 1 шара, следовательно число способов распределить n шаров по k коробкам при $n > k$ так, чтобы в каждой коробке не было больше одного шара, равно нулю.

Рассмотрим случай, если $n \le k$.

Если $n \le k$ известно, что в каждой коробке не может быть больше 1 шара, следовательно, необходимо выбрать n из k коробок, которые мы положим по шарику, при том, имеет значение, какой шарик лежит в коробке, следовательно, стоит учитывать их порядок. Иначе, необходимо разместить n шариков по k коробкам, следовательно, кол-во способов распределить n шаров по k коробкам при $n \le k$ так, чтобы в каждой коробке не было больше одного шара равно размещению из n объектов по k, а их число равно:

$$A_k^n = \frac{k!}{(k-n)!}$$

Тогда кол-во способов распределить n labeled шаров по k labeled коробкам равно:

$$N = \begin{cases} 0, n > k \\ A_k^n, n \le k \end{cases}$$

<u>Пример</u>: n=2 (шаров), k=3 (коробок).

Все варианты:

По формуле получим:

$$N = A_k^n = \frac{k!}{(k-n)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = 6$$

1.d) ≤ 1 шар в каждой коробке. U→U: Шары—Unlabeled, Коробки—Unlabeled.

Рассмотрим случай, если n > k.

Если n > k невозможно распределить n шаров в k коробок, так, чтобы в каждой коробке было ≤ 1 шара, следовательно число способов распределить n шаров по k коробкам при n > k так, чтобы в каждой коробке не было больше одного шара, равно нулю.

Рассмотрим случай, если n ≤ k.

Рассуждения здесь аналогичны пункту **1.b)**. При n ≤ k не имеет значения какой шар лежит в коробке - unlabeled или labeled, т.к. коробки unlabeled, а, значит, кол-во способов распределить n шаров по k коробкам при n > k так, чтобы в каждой коробке не было больше одного шара, равно одному.

Тогда кол-во способов распределить n unlabeled шаров по k unlabeled коробкам так, чтобы в каждой коробке не было больше одного шара равно:

$$N = \begin{cases} 0, n > k \\ 1, n \leq k \end{cases}$$

<u>Пример</u>: n=2 (шаров), k=3 (коробок).

Все варианты:

По формуле получим: $n \leq k, N = 1$

Решим задание, соответствуя второму ограничению, для каждой вариации(≥ 1 шар в каждой коробке – сюръективное отображение).

2.a) ≥ 1 шар в каждой коробке. U→L: Шары—Unlabeled, Коробки—Labeled.

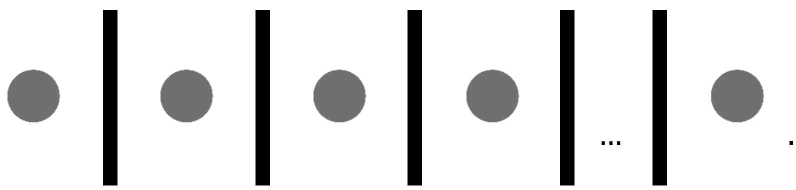
Рассмотрим случай, если $n < k$.

Если $n < k$ не возможно распределить n шаров в k коробок, так, чтобы в каждой коробке было ≥ 1 шара, следовательно число способов распределить n шаров по k коробкам при $n < k$ так, чтобы в каждой коробке не было менее одного шара, равно нулю.

Рассмотрим случай, если $n \geq k$.

Введем такую штуку или понятие - перегородки. Ей будет являться элемент, способный разделить объекты (шары) так, что t-1 перегородок разделят объекты (шары) на t групп (группы могут состоять из 0 шаров).

В данной задаче каждая коробка не должна быть пустой, следовательно перегородки не должны стоять рядом, к тому же они не должны стоять перед первым и после последнего элемента, так как в этом случае первая и последняя коробка соответственно будут пустыми. Если мы имеет k ящиков, то, чтобы разбить элементы на k ячеек будет необходимо k-1 перегородок.



На данном рисунке чёрные палочки обозначают позиции, на которые можно поставить перегородки. Таких позиций существует n-1. Так как перегородки неразличимы, то число способов расставить k-1 одинаковых перегородок на n-1 место равно числу сочетаний из k-1 по n-1, иначе:

$$\binom{n-1}{k-1} = C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!}$$

Тогда кол-во способов распределить n unlabeled шаров по k labeled коробкам так, чтобы в каждой коробке не было менее одного шара равно:

$$N = \begin{cases} C_{n-1}^{k-1}, n \geq k \\ 0, n < k \end{cases}$$

Пример: n=3 (шаров), k=2 (коробок).

Все варианты:

По формуле получим:

$$\binom{n-1}{k-1} = C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(n-k)!\,(k-1)!} = \frac{(3-1)!}{(3-2)!\,(2-1)!} = 2$$

2.b) ≥ 1 шар в каждой коробке. L→U: Шары—Labeled, Коробки—Unlabeled.

Число Стирлинга второго рода $S_K^{II}(n)$ или $\left\{ {\boldsymbol{n} \atop \boldsymbol{k}} \right\}$ – количество разбиений n-элементного множества на k непустых подмножеств.

Информация и формула была взята тут:

https://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%A7%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%B0_%D0%A1%D1%82%D0%B8%D1%80%D0%BB%D0%B8%D0%BD%D0%B3%D0%B0_%D0%B2%D1%82%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B3%D0%BE_%D1%80%D0%BE%D0%B4%D0%B0

Рассмотрим случай, если n < k.

Если n < k не возможно распределить n шаров в k коробок, так, чтобы в каждой коробке было ≥ 1 шара, следовательно число способов распределить n шаров по k коробкам при n < k так, чтобы в каждой коробке не было менее одного шара, равно нулю.

Рассмотрим случай, если n ≥ k.

В данном случае коробки одинаковые, поэтому кол-во различных способов расположить n шаров по k ящикам равно кол-ву способов разбить множество шариков на k непустых, непересекающихся подмножеств. Действительно, в таком случае в каждом ящике будет лежать несколько шаров, что будет удовлетворять ограничению. Такое число равно числу Стирлинга второго рода из n по k, иначе:

$S_K^{II}(n) = \left\{ {n \atop k} \right\}$

Тогда кол-во способов распределить n labeled шаров по k unlabeled коробкам так, чтобы в каждой коробке не было менее одного шара равно:

$$N = \begin{cases} \left\{ n \atop k \right\}, n \geq k \\ 0, n < k \end{cases}$$

<u>Пример</u>: n=3 (шаров), k=2 (коробок).

Все варианты:

По формуле получим:

$$N = \left\{ n \atop k \right\} = \begin{cases} k \left\{ n-1 \atop k \right\} + \left\{ n-1 \atop k-1 \right\}, 0 < k < n \\ 0, k = 0 \\ 0, n = 0 \\ 0, k > n \\ 1, k = n \end{cases}$$

$$N = 2 * \left\{ 2 \atop 2 \right\} + \left\{ 2 \atop 1 \right\} = 2 * 1 + 1 * \left\{ 1 \atop 1 \right\} + \left\{ 1 \atop 0 \right\} = 2 + 1 = 3$$

2.c) ≥ 1 шар в каждой коробке. L→L: Шары—Labeled, Коробки—Labeled.

Рассмотрим случай, если n < k.

Если n < k не возможно распределить n шаров в k коробок, так, чтобы в каждой коробке было ≥ 1, следовательно число способов распределить n шаров по k коробкам при n < k так, чтобы в каждой коробке не было менее одного шара, равно нулю.

Рассмотрим случай, если n ≥ k.

Воспользуемся рассуждениями из прошлого пункта. Разбив множество шаров на k непустых подмножеств, заметим, что в каждом ящике лежит некоторое кол-во шаров, тогда, поменяв содержимое ящиков, получим другой набор. То есть, для конкретного разбиения множества шаров на k подмножеств найдем кол-во перестановок ящиков. Все подмножества не пересекаются, то есть не существует равных между собой подмножеств. Кол-во таких перестановок равно $k!$, при том таким образом можно переставить подмножества каждого из таких разбиений, каковых (как было сказано в предыдущем пункте) $\left\{{n \atop k}\right\}$, тогда, число способов расположить n шаров по k ящикам, при n ≥ k равно:

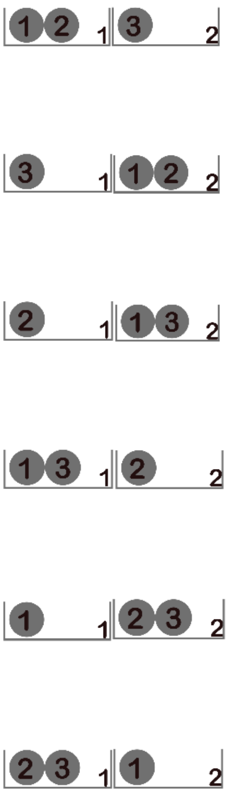
$$k!\left\{{n \atop k}\right\}$$

Тогда кол-во способов распределить n labeled шаров по k labeled коробкам так, чтобы в каждой коробке не было менее одного шара равно:

$$N = \begin{cases} k!\left\{{n \atop k}\right\}, n \geq k \\ 0, n < k \end{cases}$$

<u>Пример</u>: n=3 (шаров), k=2 (коробок).

Все варианты:



По формуле получим:

$$N = k!\left\{{n \atop k}\right\} = 2!\left\{{3 \atop 2}\right\} = 2 * \left(2 * \left\{{2 \atop 2}\right\} + \left\{{2 \atop 1}\right\}\right) = 2 * \left(2 * 1 + 1 * \left\{{1 \atop 1}\right\} + \left\{{1 \atop 0}\right\}\right) = 2 * (2 + 1) = 6$$

2.d) ≥ 1 шар в каждой коробке. U→U: Шары—Unlabeled, Коробки—Unlabeled.

Функция разбиений $p_k(n)$ — количество представлений числа n в виде суммы k положительных чисел, т. е. $n = a_1 + \cdots + a_k$, где $a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$.

Рассмотрим случай, если $n < k$.

Если $n < k$ не возможно распределить n шаров в k коробок, так, чтобы в каждой коробке было ≥ 1 шара, следовательно число способов распределить n шаров по k коробкам при $n < k$ так, чтобы в каждой коробке не было менее одного шара, равно нулю.

Рассмотрим случай, если $n \geq k$.

Так как шары и ящики одинаковые, то разными способами распределить шары по ящикам будут считаться лишь те, в которых число шаров было разбито на k чисел (каждое число соответствует кол-ву шаров в каком-либо ящике). Число таких разбиений равно числу функции разбиений $p_k(n)$.

Тогда кол-во способов распределить n unlabeled шаров по k unlabeled коробкам так, чтобы в каждой коробке не было менее одного шара равно:

$$N = \begin{cases} p_k(n)\,, n \geq k \\ 0, n < k \end{cases}$$

<u>Пример</u>: n=3 (шаров), k=2 (коробок).

Все варианты:

По формуле получим:

$$N = p_k(n) = 1$$

Решим задание, соответствуя третьему ограничению, для каждой вариации (произвольное количество шаров в каждой коробке.).

3.a) Произвольное количество шаров в каждой коробке. U→L: Шары—Unlabeled, Коробки—Labeled.

Будем строить рассуждения, опираясь на пункт **2.a)**. Для того, чтобы разбить n шаров на k ящиков будет необходимо k-1 перегородок. Так как всего имеем n шаров и k-1 перегородок, то в наборе существует $n + k - 1$ элементов. Кол-во шаров в каждом ящике определяет кол-во шариков между соответствующими перегородками, следовательно, расставив все перегородки, узнаем, сколько шаров лежит в конкретном ящике. Следовательно, число способов разбить n шаров по k ящикам равно числу способов расставить k-1 перегородок по $n + k - 1$ позициям. Порядок перегородок не важен, следовательно это число равно:

$$\binom{n+k-1}{k-1} = C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!}$$

Тогда кол-во способов распределить n unlabeled шаров по k labeled коробкам равно:

$$N = C_{n+k-1}^{k-1}$$

Пример: n=3 (шаров), k=2 (коробок).

Все варианты:

По формуле получим:

$$N = C_{n+k-1}^{k-1} = \frac{(n+k-1)!}{n!\,(k-1)!} = \frac{(3+2-1)!}{3!\,(2-1)!} = 4$$

3.b) Произвольное количество шаров в каждой коробке. L→U: Шары—Labeled, Коробки—Unlabeled.

Будем строить рассуждения, опираясь на пункт **2.b)**. Как известно, число Стирлинга разбивает наше множество на k непустых подмножеств, но, следуя условию задачи, может быть и такое, что некоторые из множеств окажутся пустыми. Тогда стоит сосчитать все способы разбить n элементов на число множеств, которое может принимать значение от 0 до k. Это будет означать, что исходное множество все так же будет разбиваться на какое-то кол-во непустых подмножеств k_0, при этом $k - k_0$ ящиков окажутся пустыми. Так, мы учтём, что 1 … k ящиков могут оказаться пустыми, а так как ящики одинаковые, этого будет достаточно для ответа. Число способов разбить n элементов на число множеств от нуля до k равно:

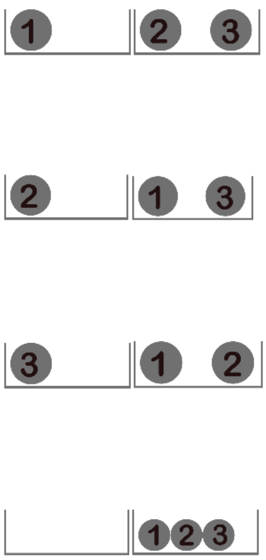
$$\sum_{i=0}^{k} S_i^{II}(n)$$

Тогда кол-во способов распределить n labeled шаров по k unlabeled коробкам равно:

$$N = \sum_{i=0}^{k} S_i^{II}(n)$$

<u>Пример</u>: n=3 (шаров), k=2 (коробок).

Все варианты:



По формуле получим:

$$N = \sum_{i=0}^{k} S_i^{II}(n) \; = S_0^{II}(3) + S_1^{II}(3) + S_2^{II}(3) = 0 + 1 + 3 = 4$$

3.c) Произвольное количество шаров в каждой коробке. L→L: Шары—Labeled, Коробки—Labeled.

Так как каждая коробка является labeled и каждый шар является labeled, то считаем, что каждый шар можно положить любую из k коробок. Всего шаров n, следовательно, так как первый, второй, … n-ый шар можно положить в любую из k коробок, число способов разложить n шаров по k коробкам равно:

k^n

Тогда кол-во способов N распределить n labeled шаров по k labeled коробкам равно:

$N = \mathrm{k}^n$

<u>Пример</u>: n=3 (шаров), k=2 (коробок).

Все варианты:

По формуле получим: $N = \mathrm{k}^n = 2^3 = 8$

3.d) Произвольное количество шаров в каждой коробке. U→U: Шары—Unlabeled, Коробки—Unlabeled.

Будем строить рассуждения, опираясь на пункт **2.d)**. Функция разбиений разбивает число n на k ненулевых чисел, сумма которых равна k. Однако, разбив число n на k_0 ненулевых чисел учтем, что $k - k_0$ коробок могут остаться пустыми. Так, мы учтём, что 1 … k ящиков могут оказаться пустыми, а так как коробки unlabeled, этого будет достаточно для ответа. Число способов разбить n элементов на число множеств от нуля до k равно:

$$\sum_{i=0}^{k} p_i(n)$$

Тогда кол-во способов N распределить n unlabeled шаров по k unlabeled коробкам равно:

$$N = \sum_{i=0}^{k} p_i(n)$$

<u>Пример</u>: n=3 (шаров), k=2 (коробок).

Все варианты:

По формуле получим:

$$N = \sum_{i=0}^{k} p_i(n) \ = p_1(3) + p_2(3) = 1 + 1 = 2$$