Вариант 6.

1. Из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 случайно выбрали две цифры. Какова вероятность того, что среди выбранных цифр была цифра 2, если сумма выбранных цифр равна восьми.
   Решение:
   Пусть А – событие, когда среди выбранных цифр была цифра 2.
   Т. к. по условию сумма выбранных цифр равна восьми, то могли быть выбраны следующие наборы цифр:
   a) (0, 8); (1, 7); (2, 6); (3, 5); (4, 4) – если считать, что выбранные цифры могут повторяться
   Тогда $P(A) = \frac{1}{5} = 0.2$
   b) (0, 8); (1, 7); (2, 6); (3, 5) – если считать, что выбранные цифры не могут повторяться
   Тогда $P(A) = \frac{1}{4} = 0.25$
   Ответ: a) 0.2 b) 0.25

2. Найти вероятность того, что в 2*n* испытаниях схемы Бернулли с вероятностью успеха *p* появится n+*m* успехов и все испытания с четными номерами закончатся успехом.

   Решение:
   Вероятность того, что все с чётными номерами закончатся успешно (n успехов, т. к. все чётные – это половина от 2n):
   $P(\text{чёт}) = p^n$

   Вероятность того, что с нечётными номерами закончатся успешно (m успехов, т. к. по условию просят n+m успехов, а n успехов уже посчитали):
   $P(\text{нечёт}) = P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

   Общая искомая вероятность (n+m успехов и все чётные закончились с успехом):
   $P = p^n C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$

   Ответ: $C_n^m p^{n+m} (1-p)^{n-m}$

3. Урна содержит a белых и b черных шаров. Из урны наугад извлекается шар. Вынутый шар возвращается обратно и добавляется c шаров того же цвета и d противоположного, после чего еще раз наугад извлекается шар. Какова вероятность, что первый шар был черным, если второй оказался черным?

Решение:

Событие A:

- Достали белый шар с вероятностью $\frac{a}{a+b}$. В корзине после этого окажется a+c белых и b+d чёрных шаров.
- Следующий шар достаём чёрный с вероятностью $\frac{b+d}{a+b+d+c}$
- Общая вероятность такого события $P(A) = \frac{a}{a+b} * \frac{b+d}{a+b+d+c}$

Событие B:

- Достали чёрный шар с вероятностью $\frac{b}{a+b}$. В корзине после этого окажется a+d белых и b+c чёрных шаров.
- Следующий шар достаём чёрный с вероятностью $\frac{b+c}{a+b+d+c}$
- Общая вероятность такого события $P(B) = \frac{b}{a+b} * \frac{b+c}{a+b+d+c}$

События A и B взаимно несовместны и их вероятности даны, тогда найдём вероятность, что второй шар оказался чёрным (пока независимо от того какого цвета был первый шар):

$$P(A) + P(B) = \frac{a}{a+b} * \frac{b+d}{a+b+d+c} + \frac{b}{a+b} * \frac{b+c}{a+b+d+c} = \frac{b(b+c) + a(b+d)}{(a+b+d+c)(a+b)}$$

Теперь найдём вероятность того, что и первый и второй шар были чёрными:

$$P = \frac{P(B)}{P(A) + P(B)} = \frac{\frac{b}{a+b} * \frac{b+c}{a+b+d+c}}{\frac{b(b+c) + a(b+d)}{(a+b+d+c)(a+b)}} = \frac{b(b+c)}{b(b+c) + a(b+d)}$$

Ответ: $\frac{b(b+c)}{b(b+c) + a(b+d)}$

4. Число проведенных опытов ***X*** случайно и имеет распределение Пуассона. Каждый опыт может быть успешным с вероятностью ***p*** и неуспешным с вероятностью ***q=***1- ***p.*** Построить ряд распределения числа успешных опытов.

   Решение:

   Случайная величина X распределённая по Пуассоновскому закону:

   $P_{x_i} = \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} * e^{-\lambda}, (\lambda = Xp > 0)$

   Построим ряд распределения:

<table>
<tr><td rowspan="2">X</td><td>x_i</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>…</td><td>n</td><td>…</td></tr>
<tr><td>p_i</td><td>$e^{-\lambda}$</td><td>$\lambda e^{-\lambda}$</td><td>$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$</td><td>$\frac{\lambda^3}{3!} e^{-\lambda}$</td><td>…</td><td>$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$</td><td>…</td></tr>
</table>