Вариант 19

Дана плотность распределения случайной величины *X*:

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \alpha\left(x - \frac{x^2}{3}\right), 0 < x < 3 \\ 0, x \ge 3 \end{cases}$$

Найти:

а) Коэффициент α;

б) Функцию распределения $F(x)$;

в) Математическое ожидание E*X*, дисперсию D*X*, моду mod(X) и медиану med(X)

Решение:

а) Найдём коэффициент α;

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{3} \alpha\left(x - \frac{x^2}{3}\right)dx + \int_{3}^{\infty} 0\,dx = \alpha(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9} + C\binom{3}{0}) = 1.5\alpha$$

$$\alpha = \frac{2}{3}$$

б) Найдём функцию распределения $F(x)$:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \le 0 \\ \int_{0}^{x} \alpha\left(t - \frac{t^2}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{9}\right) = \frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27}, 0 < x \le 3 \\ 1, x > 3 \end{cases}$$

в) Найдём математическое ожидание E*X*, дисперсию D*X*, моду mod(*X*) и медиану med(*X*):

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{3} \frac{2}{3}x\left(x - \frac{x^2}{3}\right)dx = -\frac{(x-4)x^3}{18}\binom{3}{0} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$EX^2 = 2.25$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{3} \frac{2}{3}x^2\left(x - \frac{x^2}{3}\right)dx = -\frac{(4x-15)x^4}{90}\binom{3}{0} = \frac{27}{10} = 2.7$$

$$DX = EX^2 - E(X^2) = 2.7 - 2.25 = 0.45$$

Найдём $mod(X)$ через производную плотности $\alpha\left(x - \frac{x^2}{3}\right)$:

$$\text{f}'(\text{x}) = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2x}{3}\right);\ \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2x}{3}\right) = 0;\ x = \frac{3}{2} - \text{точка экстремума (максимума функции)}$$

$$mod(X) = \frac{3}{2}$$

$$F(X) = \frac{1}{2} \; ; \; \frac{x^2}{3} - \frac{2x^3}{27} = \frac{1}{2} ; x = \frac{3}{2}$$

$$med(X) = \frac{3}{2}$$