

Задача 19

Ракетная установка обстреливает две удалённые цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.6. Цель при попадании в неё уничтожается. Запуск ракет прекращается после уничтожении обеих целей или после использования имеющихся пяти ракет. Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание, среднее квадратичное отклонение, моду и медиану числа запущенных ракет. Найти вероятность того, что при этом будет запущено:

- А) не более трёх ракет;
- Б) от двух до четырёх ракет.

Решение:

1) Найдём ряд распределения количества израсходованных ракет (случайной величины X). Из условия ясно, что это количество k может быть от 2 до 5.

Случай $k = 5$ состоит из трёх исходов:

5-я ракета — это второе попадание, а первое было между 1-м и 4-м выстрелами;

среди 5 запусков было одно попадание;

среди 5 запусков попаданий не было.

Для случаев $k = 2, 3, 4$ есть только один исход: было $k-2$ промахов и 2 попадания.

2) Получим ряд распределения:

$$P(X = k) = pC_{k-1}^1pq^{k-2} = (k-1)p^2q^{k-2}$$

k	2	3	4	5
$P(X = k)$	p^2	$2p^2q$	$3p^2q^2$	$4p^2q^3 + 5p^2q^4 + q^5$
p_i	0.36	0.288	0.1728	0.1792

А) При $k \leq 3$: $\sum_{i=2}^3 p_i = 0.36 + 0.288 = 0.648$

Б) При $k \leq 4$: $\sum_{i=2}^4 p_i = 0.648 + 0.1728 = 0.8208$

3) Математическое ожидание:

$$EX = \sum_{i=2}^5 ip_i = 0.36 * 2 + 0.288 * 3 + 0.1728 * 4 + 0.1792 * 5 = 3.1712$$

$$E(X^2) = \sum_{i=2}^5 i^2 p_i = 0.36 * 4 + 0.288 * 9 + 0.1728 * 16 + 0.1792 * 25 \\ = 11.2768$$

4) Дисперсия случайной величины:

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = 11.2768 - 10.0565 = 1.2203$$

5) Среднее квадратичное отклонение случайной величины X:

$$\sigma(X) = \sqrt{DX} = \sqrt{1.2203} = 1.1047$$

6) Мода и медиана числа запущенных ракет:

$$\text{mod}(X) = 2$$

$$\text{med}(X) = 3, P(X \leq 3) = 0.648, P(X \geq 3) = 0.64.$$